# SEMINARIO DEL 15/05

Ruggieri Andrea Stranieri Francesco MAD Lab



# INTRODUZIONE

EM HARD vs EM SOFT

## **EM HARD VS EM SOFT**

#### Ultimo meeting

	EM SOFT	EM HARD
Inizializzazione parametri	Random, uniforme o qualsiasi altro modo	Random, uniforme o qualsiasi altro modo
Expectation	Si prendono in considerazione tutte le possibili combinazioni dei dati	Si calcolano tutte le possibile combinazioni di assegnamento di valori alle variabili ma si sceglie il singolo assegnamento che massimizza la joint distribution (max)
<b>Expected sufficient statistics</b>	$\bar{M}_{\theta}[u] = \sum_{m=1}^{M} \sum_{h[m] \in Val(H[m])} Q(h[m]) I\{\xi[m] < Y > = y\}$	$\overline{M}_{\theta^t}[x^1] = \sum_{m}^{M} I\{\xi[m] < X > = x^1\}$
Maximisation step	Sulla base delle Expected Sufficient Statistics si aggiornano i parametri	Sulla base delle Expected Sufficient Statistics si aggiornano i parametri

### **EM HARD VS EM SOFT**

#### Ultimo meeting

- Entrambi i metodi eseguono due step: Completare i dati utilizzando i parametri  $\theta^t$  e usare questi dati per computare i nuovi parametri  $\theta^{t+1}$
- Tuttavia, diversamente da EM SOFT, EM HARD seleziona, per ogni istanza o[m] il singolo assegnamento h[m] che massimizza  $P(h|o[m], \theta^t)$
- EM HARD può essere visto come l'ottimizzazione di una diversa funzione obiettivo che coinvolge sia l'apprendimento di parametri sia il compito di apprendere il corretto assegnamento delle variabili mancanti. L'obiettivo è quello di massimizzare la likelihood dei dati completi dati i parametri

$$\max_{\theta,H} l(\theta; H, D)$$

• EM SOFT al contrario, tenta di massimizzare  $l(\theta; D)$ , considerando tutti i possibili assegnamenti dei dati mancanti

### **TABLE OF CONTENTS**

In questa presentazione si tratteranno i seguenti argomenti:

Implementazione algoritmo EM HARD

Miglioramento dei codici e architettura generale

Test eseguiti

Rete ASIA

Rete ALARM

Considerazioni finali e conclusioni

Demo della repository GitHub

# **EM HARD**

Implementazione

Lo sviluppo di EM HARD si è basato sullo script EM SOFT

Opportune modifiche sono state effettuate al metodo maximisation\_step in fase di computazione delle **expected sufficient statistics**.

EM HARD non aggiunge nessuna struttura dati e nessun nuovo metodo. Rispetto a EM SOFT risulta essere **memory-friendly** e computazionalmente meno complesso

La computazione delle **expected sufficient statistics** si basa sul concetto di **combinazione più probabile** 

$$Q^{1}(\langle B^{T}, A^{T} \rangle) = \alpha(0.1 * 0.8 * 0.6 * 0.1 * 0.2) = \alpha(9.6 \cdot 10^{-4}) = 2.17 \cdot 10^{-3}$$

$$Q^{1}(\langle B^{T}, A^{F} \rangle) = \alpha(0.1 * 0.8 * 0.4 * 0.8 * 0.9) = \alpha(0.02304) = 0.05217$$

$$Q^{1}(\langle B^{F}, A^{T} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.8 * 0.2 * 0.1 * 0.2) = \alpha(2.88 \cdot 10^{-3}) = 6.52 * 10^{-3}$$

$$Q^{1}(\langle B^{F}, A^{F} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.8 * 0.8 * 0.8 * 0.9) = \alpha(0.4147) = 0.939$$

$$Q^{2}(\langle E^{T}, A^{T} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.2 * 0.3 * 0.9 * 0.2) = \alpha(9.72 \cdot 10^{-3}) = 0.006$$

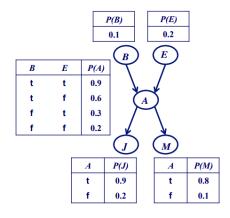
$$Q^{2}(\langle E^{T}, A^{F} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.2 * 0.7 * 0.2 * 0.9) = \alpha(0.02268) = 0.14$$

$$Q^{2}(\langle E^{F}, A^{T} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.8 * 0.2 * 0.9 * 0.2) = \alpha(0.02592) = 0.16$$

$$Q^{2}(\langle E^{F}, A^{F} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.8 * 0.8 * 0.2 * 0.9) = \alpha(0.10368) = 0.64$$

$$Q^{3}(\langle J^{T} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.2 * 0.3 * 0.9 * 0.2) = \alpha(9.72 \cdot 10^{-3}) = 0.9$$

$$Q^{3}(\langle J^{F} \rangle) = \alpha(0.9 * 0.2 * 0.3 * 0.1 * 0.2) = \alpha(1.08 \cdot 10^{-3}) = 0.1$$



	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>
В	?	F	F
E	F	?	T
A	?	?	T
J	F	T	?
M	F	F	F

### Input per calcolo delle nuove CPT

	D1	<b>D2</b>	<b>D3</b>
В	F	F	F
E	F	F	T
A	F	F	Т
J	F	Т	Т
M	F	F	F

Le CPT vengono ora computate considerando il dataset come completo

**Possibile task per il futuro**: ottimizzare ancora di più il codice per cercare di ridurre i tempi computazionali e lo spazio richiesto in memoria

# LIBRERIA

Struttura finale

L'esecuzione dell'algoritmo EM HARD parte chiamando il metodo em hard. L'esecuzione dell'algoritmo EM SOFT parte chiamando il metodo em soft. Gli script richiedono i seguenti parametri in input:

- initial\_data OBBLIGATORIO Si tratta di un dataframe dove è presente almeno un missing value. Si consiglia di passare in input all'interno del metodo dataframe che hanno come intestazioni delle righe il nome delle variabili; mentre, come intestazione delle colonne, i dati. Si consiglia inoltre di passare in input all'algoritmo dataframe numerici. In caso di valori nominali, si consiglia di convertire i valori in numerico
- **structure** *OBBLIGATORIO* La struttura della rete bayesiana. Si prega di definire la struttura della rete attraverso model2network di bnlearn
- **cpt** *OBBLIGATORIO* Si tratta dell'inizializzazione iniziale date alle CPT della rete. L'inizializzazione può essere uniforme, randomica o di qualsiasi altra natura
- **ALPHA** *FACOLTATIVO* iperparametro che sottende lo stopping criteria. Se la differenza in valore assoluto tra le cpt calcolate all'iterazione corrente con le cpt calcolate all'iterazione precedente è minore di questo valore, l'algoritmo si arresta e termina la sua computazione. ALPHA deve essere definito positivo. Default ALPHA = 0.05
- **NUMBER\_ITERACTION** *FACOLTATIVO* iperparametro che indica il massimo numero di iterazioni che devono essere effettuate se l'algoritmo non si è arrestato attraverso la politica di stopping criteria. **Default** NUMBER ITERACTION = 10

I metodi em\_soft e em\_hard hanno la seguente struttura

Controllo delle variabili in input

Preprocessing e preparazione all'esecuzione dell'algoritmo

Esecuzione dell'algoritmo expectation maximisation

I metodi em\_soft e em\_hard hanno la seguente struttura

#### Controllo delle variabili in input

- Controllato che tutti i parametri obbligatori sono stati passati correttamente
- Si controlla che il dataset sia stato passato correttamente. Se il dataset non è nella forma desiderata, lo script prova a trasformarlo
  - Nelle righe devono comparire i nomi delle variabili mentre nelle colonne i dati
  - Dataset deve essere numerico
- Viene controllato se le CPT sono state passate correttamente implementando diversi controlli

Preprocessing e preparazione all'esecuzione dell'algoritmo

Esecuzione dell'algoritmo expectation maximisation

I metodi em\_soft e em\_hard hanno la seguente struttura

Controllo delle variabili in input

Preprocessing e preparazione all'esecuzione dell'algoritmo

- Viene calcolato il numero di missing data presenti nel dataset andando a memorizzare tutti gli indici dei dati con valori mancanti
- Si assegna una distribuzione uniforma di probabilità iniziale per tutte le variabili missing
- Si crea la tabella table\_posterior\_prob presentata nelle presentazioni precedenti

Esecuzione dell'algoritmo expectation maximisation

I metodi em\_soft e em\_hard hanno la seguente struttura

Controllo delle variabili in input

Preprocessing e preparazione all'esecuzione dell'algoritmo

Esecuzione dell'algoritmo expectation maximisation

Si itera da 1 a NUMBER\_ITERACTION

- Expectation step
- Maximisation step
- Stopping criteria

Tutti questi step sono stati presentati in maniera approfondita nelle presentazioni precedenti

I metodi em\_soft e em\_hard hanno la seguente struttura

Controllo delle variabili in input

Preprocessing e preparazione all'esecuzione dell'algoritmo

Esecuzione dell'algoritmo Expectation Maximisation

Si itera da 1 a NUMBER ITERACTION

- Expectation step
- Maximisation step
- Stopping criteria

Tutti questi step sono stati presentati in maniera approfondita nelle presentazioni precedenti

Passo più costoso dal punto di vista computazionale

### **CONFRONTO DEI RISULTATI**

Al termine dell'esecuzione finale degli script viene restituito in output l'intero dataset con i valori rimpiazzati.

Sono state messe a disposizione due funzioni per il confronto dei risultati. Queste funzioni sono presenti nello script EM\_COMPARISON

- compare\_em Prende in input i due dataset ottenuti dalle esecuzioni di EM HARD e EM SOFT e il dataset iniziale contenente i missing value. Restituisce in output la percentuale dei valori rimpiazzati allo stesso modo da EM HARD e da EM SOFT
- compare\_em\_with\_ground\_truth Prende in input un dataset ottenuto (EM HARD o EM SOFT), il dataset iniziale contenente i missing values e un dataset completo che fungerà da ground truth. Restitituisce in output la percentuale di valori rimpiazzati correttamente dal dataset originato dall'esecuzione dello script EM

# TEST ESEGUITI

Introduzione ai test

**ASIA** 

Sono stati condotti diversi test ai fini di valutare la correttezza degli script e risolvere eventuali bugs. La maggior parte di questi test sono stati condotti su dataset molto piccoli, che non presenteremo in questa sessione. In questa parte esamineremo nel dettaglio i test condotti su due dataset: ASIA e ALARM

Concetti di base

Notazione: Chiamiamo **PROP** (**Proportion of missing data**) l'iperparametro che indica la percentuale di missing data presenti nel dataset

Esempio: se un dataset consiste di 5.000 dati, allora PROP = 0.3 implica che 1.500 dati conteranno almeno un missing value

Concetto di EM SOFT FORCED

Oltre alle versioni: EM HARD e EM SOFT è stata presa in considerazione una terza implementazione dell'algoritmo EM che prende il nome di EM SOFT FORCED. Si tratta dello stesso algoritmo implementato in EM SOFT ma viene forzato il numero di iterazioni ad essere uguali ad EM HARD.

Se EM HARD termina la sua computazione al quarto step, EM SOFT FORCED deve terminare al quarto step mentre EM SOFT continua la sua esecuzione per più iterazioni

#### Aspetti analizzati:

C'è differenza tra EM SOFT e EM HARD in termini di accuratezza dei risultati?

Che impatto ha l'algoritmo EM nei tempi computazionali?

Che risultati si ottengono forzando EM SOFT a terminare nello stesso numero di iterazioni di EM HARD?

Come variano le performance dell'algoritmo EM al variare del tipo di dati mancanti?

Dati missing generati utilizzando il metodo ampute messo a disposizione dalla libreria **mice** di R

Un esempio classico di DBN è il network **ASIA** [Lauritzen & Spiegelhalter, 1998] che include una raccolta di variabili binarie.

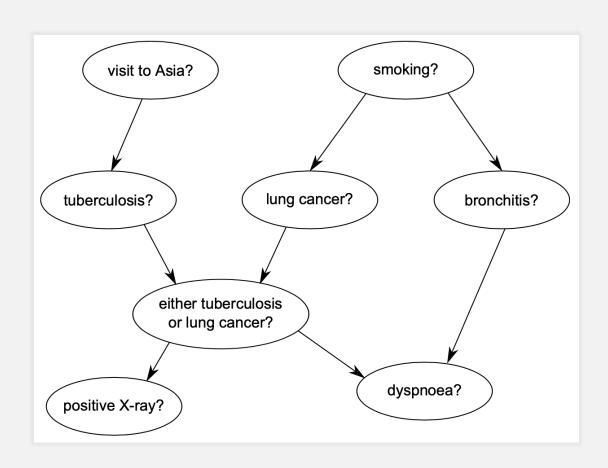
La rete descrive un semplice problema per la **diagnosi della tubercolosi e del cancro ai polmoni**:

"La mancanza di respiro (dispnea) può essere dovuta a tubercolosi, cancro ai polmoni o bronchite, o a nessuno di essi, o a più di uno di essi.

Una recente visita in Asia aumenta le probabilità di contrarre la tubercolosi, mentre è noto che il fumo è un fattore di rischio sia per il cancro ai polmoni che per la bronchite.

I risultati di una singola radiografia del torace non discriminano tra cancro ai polmoni e tubercolosi, così come la presenza o l'assenza di dispnea".

La rete descrive un semplice problema per la diagnosi della tubercolosi e del cancro ai polmoni.



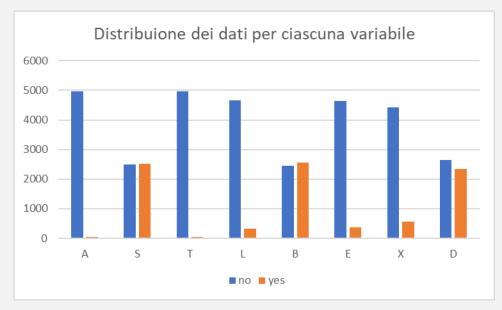
Numero di nodi: 8

Numero di archi: 8

Numero di parametri: 18

#### Il dataset è composto da 5.000 dati e 40.000 celle

Α	S	Т	L	В	E	Х	D
no :4958	no :2485	no :4956	no :4670	no :2451	no :4630	no :4431	no :2650
yes: 42	yes:2515	yes: 44	yes: 330	yes:2549	yes: 370	yes: 569	yes:2350



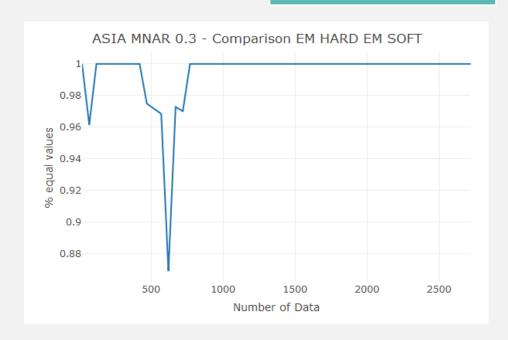
Ci sono tante variabili **sbilanciate** e per alcune di queste variabili, la classe di minoranza risulta essere estremamente rara

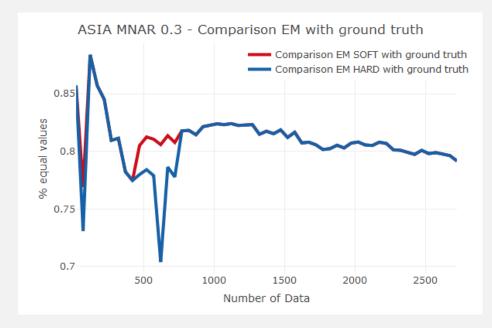
Generiamo dati MNAR attraverso il metodo ampute e consideriamo solo 2720 dati

Consideriamo 2 contesti: PROP = 0.3 e PROP = 0.6

#### Missing Not at Random (MNAR)

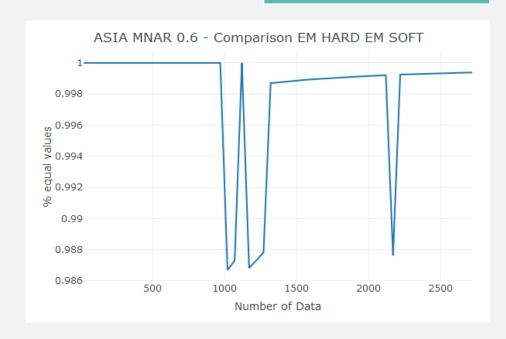
PROP 0.3 FORCED

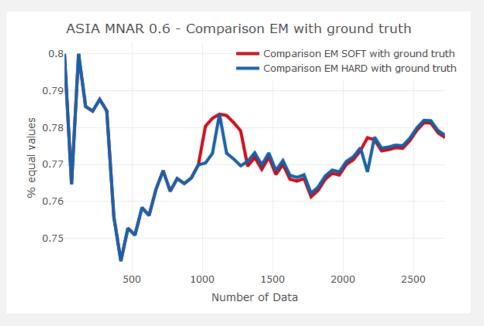




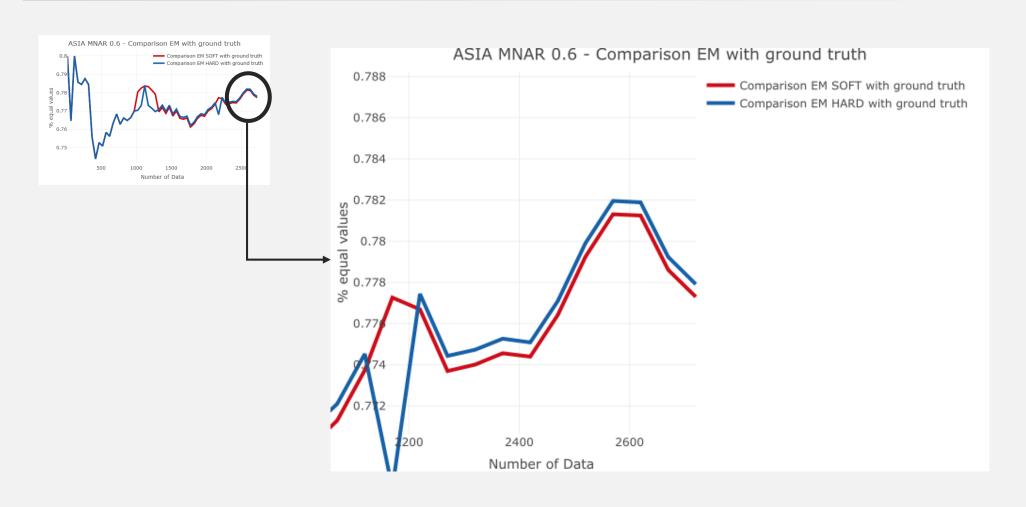
#### Missing Not at Random (MNAR)

PROP 0.6 FORCED



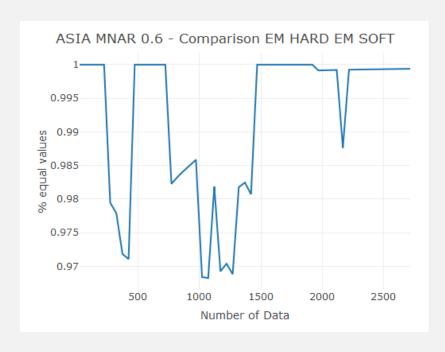


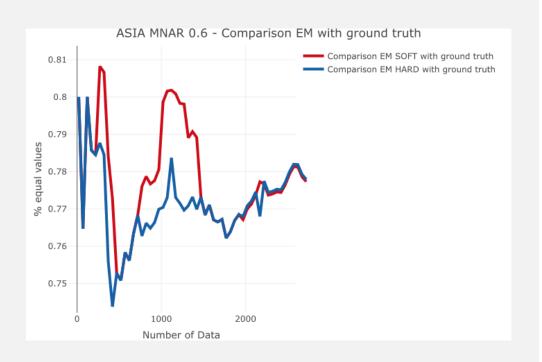
#### Missing Not at Random (MNAR)



#### Missing Not at Random (MNAR)

# PROP 0.6





#### Missing Not at Random (MNAR)

# PROP 0.6



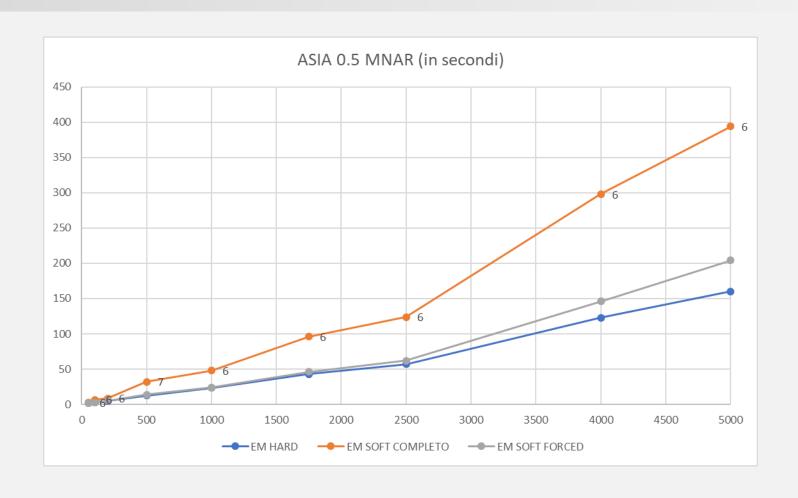
Fino a questo punto ci siamo limitati a simulazioni che andavano da 20 dati a 2720 dati. Cosa succede se eseguiamo EM HARD e EM SOFT su tutto il dataset?

Fino a questo punto ci siamo limitati a simulazioni che andavano da 20 dati a 2720 dati. Cosa succede se eseguiamo EM HARD e EM SOFT su tutto il dataset?

TIPO DI DATI	ALPHA	PROP	Numero missing	Iterazioni EM HARD	Iterazioni EM SOFT	Tempo EM HARD	Tempo EM SOFT	EM HARD /EM SOFT	EM HARD /Ground TRUTH	EM SOFT/Ground TRUTH
MNAR	0,05	0,2	941	3	5	89 sec	185 sec	1	0,7768332	0,7768332
MNAR	0,05	0,5	2450	3	6	160 sec	394 sec	1	0,7587755	0,758755
MNAR	0,05	0,8	4031	3	7	262 sec	680 sec	0,995	0,8082362	0,8112131
MNAR	0,05	0,5	2450	3	3(forced)	160 sec	204 sec	0,9987755	0,7587755	0,757551

Tabella computata su tutti i 5000 dati presenti nel dataset

#### Vediamo ora come si comportano EM HARD ed EM SOFT in termini di tempi computazionali



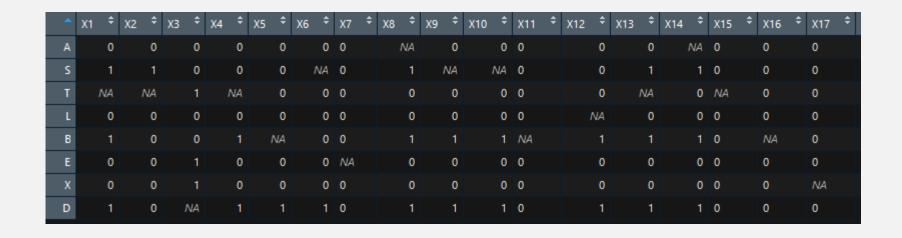
Per finire, fissiamo il numero di dati pari a 1000 e vediamo cosa succede alle prestazione, quando variamo la percentuale di missing data presenti nel dataset?

Fissiamo il numero di dati pari a 1000 e vediamo cosa succede alle prestazione, quando variamo la percentuale di missing data presenti nel dataset?

Prop	Numero missing	Numero dati	EM HARD / ground truth	EM SOFT FORCED / ground truth	EM SOFT / ground truth
0.1	97	1000	(3) 0.773	(3) 0.773	(3) 0.773
0.25	259	1000	(3) 0.795	(3) 0.795	(4) 0.795
0.4	400	1000	(3) 0.78	(3) 0.822	(4) 0.822
0.5	510	1000	(3) 0.756	(3) 0.806	(5) 0.806
0.7	699	1000	(3) 0.775	(3) 0.784	(5) 0.784
0.9	894	1000	(3) 0.803	(3) 0.802	(6) 0.803
0.99	999	1000	(3) 0.82	(3) 0.818	(6) 0.82

Fissiamo il numero di dati pari a 1000 e vediamo cosa succede alle prestazione, quando variamo la percentuale di missing data presenti nel dataset?

Prop	Numero missing	Numero dati	EM HARD / ground truth	EM SOFT FORCED / ground truth	EM SOFT / ground truth
0.99	999	1000	(3) 0.82	(3) 0.818	(6) 0.82

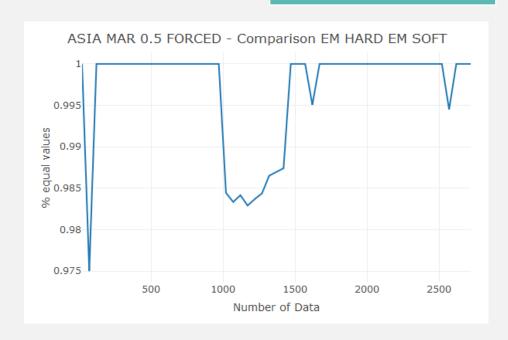


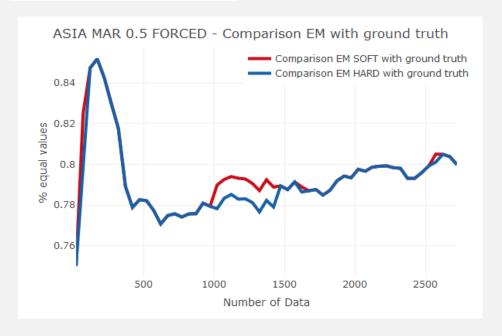
Facendo imparare ad EM HARD troppi dati completi (PROP basso), la rete impara troppo bene la distribuzione delle classi di maggioranza, i risultati sembrano essere overfittati e conseguentemente, le prestazioni peggiorano

Per finire, vediamo cosa succede se generiamo dati di tipo MAR o MCAR

#### Missing at Random (MAR)

## PROP 0.5 FORCED

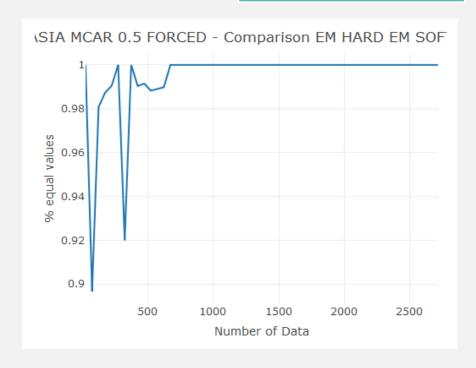


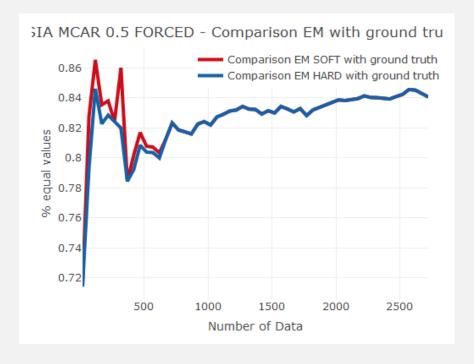


#### Missing Completely at Random (MCAR)

PROP 0.5

# FORCED



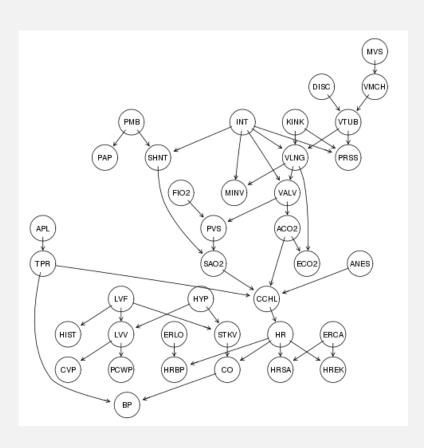


# DATASET

**ALARM** 



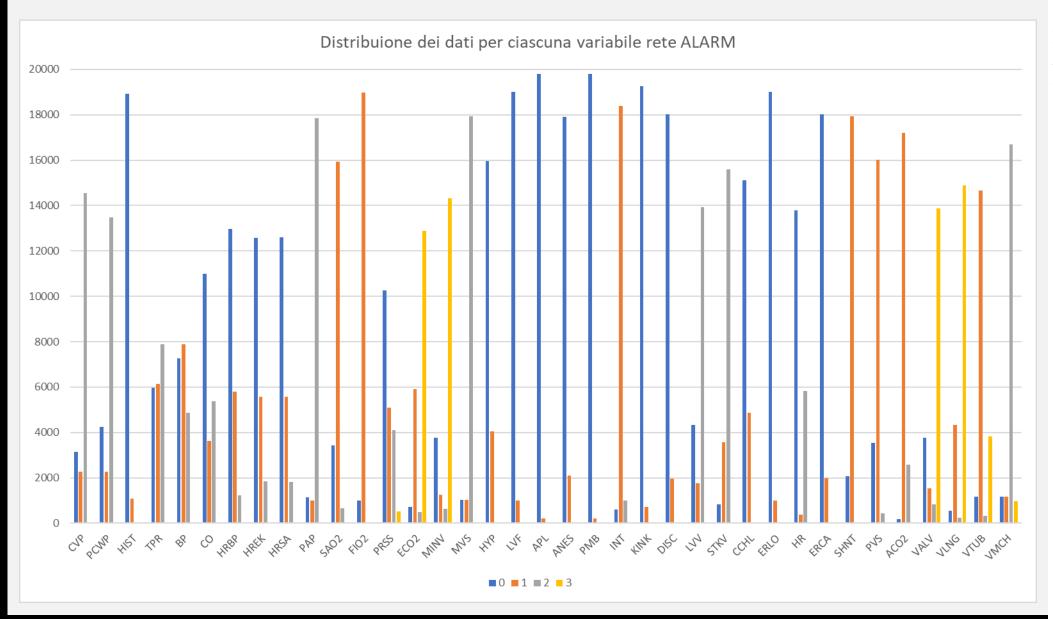
ALARM ("A Logical Alarm Reduction Mechanism") è una rete Bayesiana progettata per fornire un sistema di messaggi di allarme per il monitoraggio del paziente.



Numero di nodi: 37

Numero di archi: 46

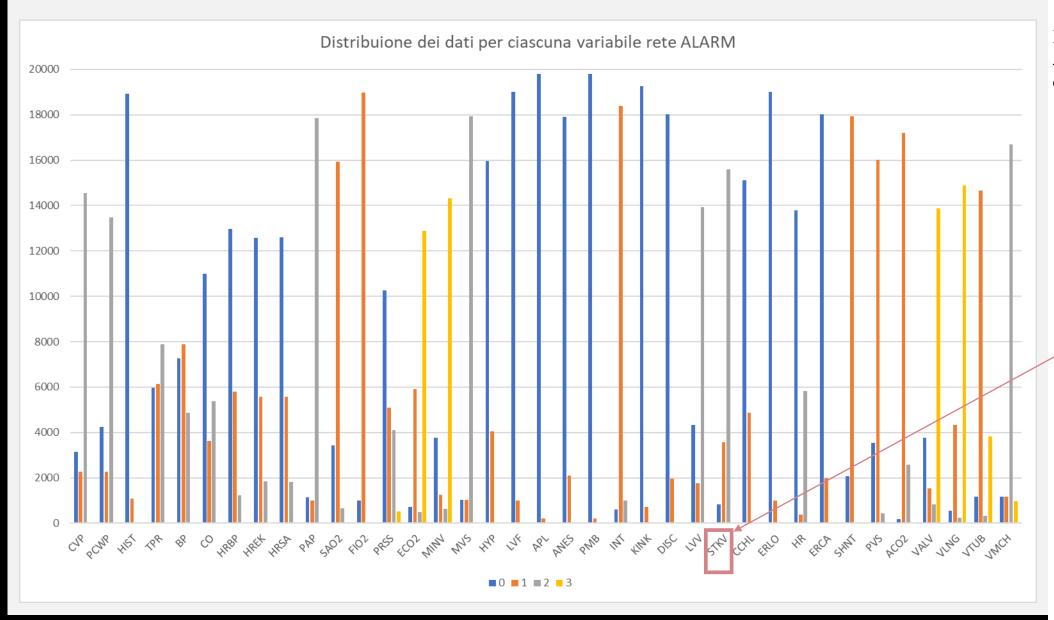
Numero di parametri: 509



Il dataset è composto da 20.000 record e 740.000 celle

Ci sono tante variabili **sbilanciate**, ma, a differenza di ASIA, le classi di minoranza, alcune volte possono non essere rare.

Ad esempio, nella variabile STKV, la classe di maggioranza compare con una frequenza 0,78. DISC invece ha una frequenza pari allo 0,9



Il dataset è composto da 20.000 record e 740.000 celle

Ci sono tante variabili **sbilanciate**, ma, a differenza di ASIA, le classi di minoranza, alcune volte possono non essere rare.

Ad esempio, nella variabile STKV la classe di maggioranza compare con una frequenza 0,78. DISC invece ha una frequenza pari allo 0,9

Generiamo dati MNAR attraverso il metodo ampute e consideriamo solo 620 dati.

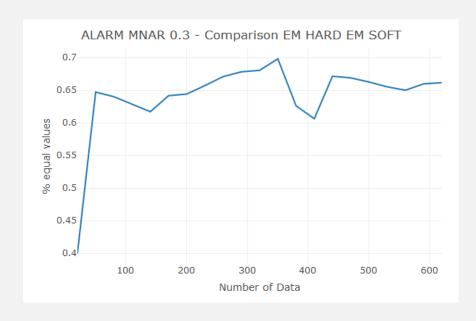
Consideriamo 3 diversi contesti:

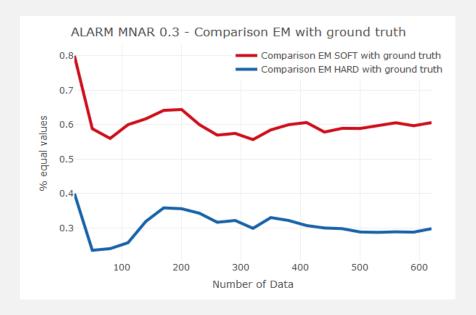
- PROP = 0.3
- PROP = 0.5
- PROP = 0.6

Missing Not at Random (MNAR)

PROP 0.3

FORCED

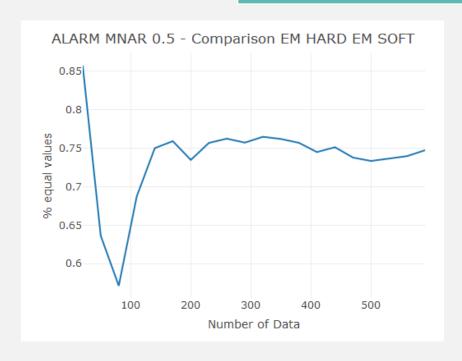


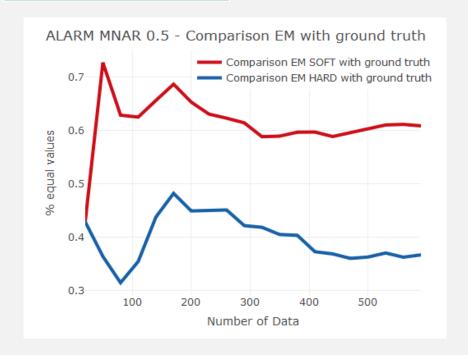


Missing Not at Random (MNAR)

PROP 0.5

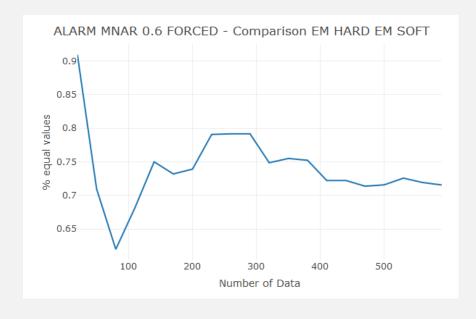
FORCED

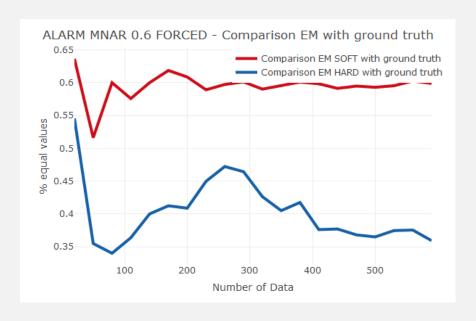




Missing Not at Random (MNAR)

PROP 0.6 FORCED





Fino a questo punto ci siamo limitati a simulazioni che andavano da 20 a 620 record. Cosa succede se eseguiamo EM HARD e EM SOFT su un numero decisamente maggiore di dati?

Fino a questo punto ci siamo limitati a simulazioni che andavano da 20 dati a 620 dati. Cosa succede se eseguiamo EM HARD e EM SOFT su un numero decisamente maggiore di dati?

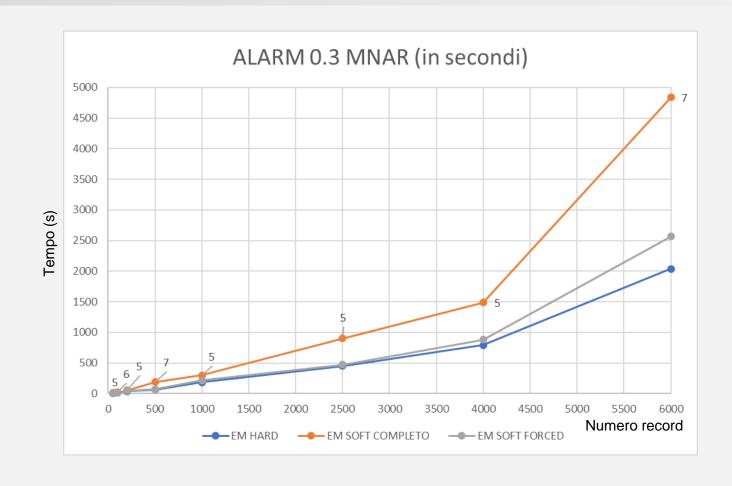
TIPO DI DATI	ALPHA	PROP	Numero missing	Numero dati	Iterazioni EM HARD	Iterazioni EM SOFT	Tempo EM HARD	Tempo EM SOFT	EM HARD /EM SOFT	EM HARD / Ground TRUTH	EM SOFT/Ground TRUTH
MNAR	0,05	0,3	746	2500	4	5	480 sec	660 sec	0,5844504	0,2868633	0,6260054
MNAR	0,05	0,3	746	2500	4	4 FORCED	480 sec	515 sec	0,623465	0,2868633	0,6041667
MNAR	0,05	0,3	1800	6000	4	7	2040 sec	4740 sec	0,598755	0,2840973	0,6123373
MNAR	0,05	0,3	1800	6000	4	4 (FORCED)	2040 sec	2567 sec	0,60705	0,2840973	0,6041667

Fino a questo punto ci siamo limitati a simulazioni che andavano da 20 dati a 620 dati. Cosa succede se eseguiamo EM HARD e EM SOFT su un numero decisamente maggiore di dati?

TIPO DI DATI	ALPHA	PROP	Numero missing	Numero dati	Iterazioni EM HARD	Iterazioni EM SOFT	Tempo EM HARD	Tempo EM SOFT	EM HARD /EM SOFT	EM HARD /Ground TRUTH	EM SOFT/Ground TRUTH
MNAR	0,05	0,3	746	2500	4	5	480 sec	660 sec	0,5844504	0,2868633	0,6260054
MNAR	0,05	0,3	746	2500	4	4 FORCED	480 sec	515 sec	0,623465	0,2868633	0,6041667
MNAR	0,05	0,3	1800	6000	4	7	2040 sec	4740 sec	0,598755	0,2840973	0,6123373
MNAR	0,05	0,3	1800	6000	4	4 (FORCED)	2040 sec	2567 sec	0,60705	0,2840973	0,6041667

Guardando questi risultati, risulta che EM HARD sia nettamente inferiore e che riesca a classificare correttamente «solo» 3 dati su 10. Tuttavia, importanti considerazioni verranno presentate a breve.

Vediamo ora come si comportano EM HARD ed EM SOFT in termini di tempo computazionale.



Per finire, fissiamo il numero di dati pari a 500 e vediamo cosa succede alle prestazioni, variando la **percentuale di missing data** presenti nel dataset.

Prop	Numero missing	Numero dati	EM HARD / ground truth	EM SOFT FORCED / ground truth	EM SOFT / ground truth
0.1	48	500	(3) 0.245	(3) 0.623	(5) 0.623
0.25	124	500	(3) 0.317	(3) 0.575	(7) 0.575
0.4	200	500	(3) 0.333	(3) 0.631	(5) 0.631
0.5	247	500	(3) 0.363	(3) 0.604	(7) 0.604
0.7	349	500	(3) 0.424	(3) 0.61	(8) 0.614
0.9	450	500	(4) 0.501	(4) 0.6	(10) 0.62
0.99	499	500	(3) 0.519	(3) 0.603	(8) 0.605

Tuttavia, osservando l'esecuzione di EM HARD, ci si trova di fronte a un comportamento non atteso.

#### EM HARD: caso particolare

Fissando il numero di record a 200, con prop 0.5 e alpha 0.05, l'algoritmo <u>non termina</u> affinché non si raggiunge il numero di iterazioni massime.

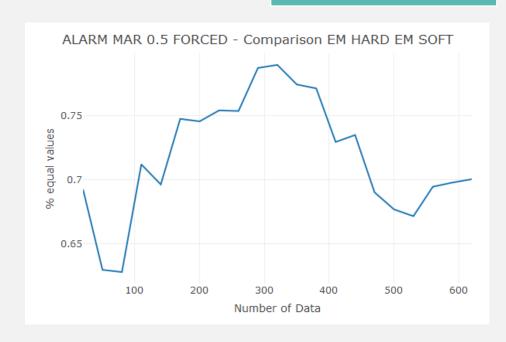
Ad ogni iterazione, la differenza tra le CPT dello step precedente e le CPT dello step attuale risulta essere costante (1,440015).

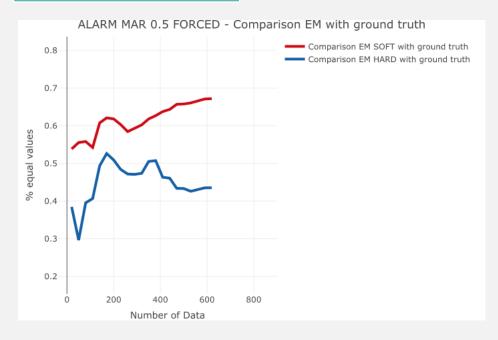
**Possibile motivazione**: quando si ha una scarsa quantità di dati, EM HARD cambia in modo periodico, i valori dei missing data. In questo modo il meccanismo di *stopping\_criteria*, definito come differenza in valore assoluto con le CPT del passo precedente, fallisce.

Risultati analoghi sono stati osservati su dati di tipo MAR e MCAR. Tuttavia, in questo caso, le prestazioni di EM HARD ed EM SOFT risultano essere migliori rispetto alle prestazioni con dati MNAR.

#### Missing at Random (MAR)

# PROP 0.5 FORCED







EM HARD vs EM SOFT

Problemi e Sviluppi Futuri

EM HARD vs EM SOFT

Le prestazioni dei due algoritmi dipendono molto dai dati in input. EM HARD soffre maggiormente quando le CPT tendono ad assegnare una probabilità uniforme a ciascun valore assumibile dalla variabile;

In reti come *ASIA* non c'è differenza sostanziale tra EM SOFT ed EM HARD in quanto le CPT tendono ad assegnare <u>massima probabilità</u> ad un valore.

EM HARD vs EM SOFT

La **convergenza** di EM SOFT è molto più lenta: ci vogliono molte più iterazioni rispetto ad EM HARD.

Inoltre il **tempo computazionale** richiesto è molto alto: quando EM HARD termina alla terza o quarta iterazione (sia in ASIA sia in ALARM), EM SOFT può impiegare fino a 10 iterazioni per terminare la sua computazione. In media, per arrivare all'arresto, EM SOFT ci mette **almeno il doppio del tempo** e questo può rendere la computazione complessa su dataset o reti molto grandi.

#### EM HARD vs EM SOFT

Se forziamo il **numero di iterazioni massime** di EM SOFT ad essere uguali a quelle di EM HARD, le prestazioni di EM HARD potrebbero addirittura essere migliori su alcuni tipi di rete rispetto ad EM SOFT;

Non si osservano però differenze significative in termine di prestazioni tra EM SOFT FORCED ed EM SOFT nelle reti ASIA e ALARM;

EM HARD non garantisce l'arresto dell'algoritmo considerando esclusivamente la differenza tra le CPT. E' stato osservato uno scenario dove i valori assumibili dalle variabili cambiavano in maniera periodica.

#### EM HARD vs EM SOFT

Quando abbiamo a disposizione una piccola percentuale di missing data, un algoritmo che effettua tante iterazioni può essere molto efficiente. Al contrario, se il dataset è molto grande e la rete è molto complessa, gli algoritmi impiegano una quantità di tempo troppo alta.

Si è notato che EM HARD raggiunge prestazioni migliori **quanto è minore il numero di dati completi** presenti nel dataset.

#### EM HARD vs EM SOFT

Per concludere, la scelta di quale algoritmo utilizzare tra EM HARD o EM SOFT dipende sempre dal contesto e non è possibile stabilire a priori qual è l'algoritmo migliore. Tuttavia, di seguito, vengono riassunte alcune osservazioni:

- Se il dataset è costituito da pochi dati, **EM SOFT** è la soluzione preferibile in quanto l'algoritmo impara su tutti i possibili assegnamenti dei valori alle variabili;
- Se il dataset è costituito da tanti dati ma la proporzione dei dati missing è bassa, **EM SOFT FORCED** è la soluzione preferibile;
- Se il dataset è costituito da tanti dati e la proporzione dei missing data è molto alta, **EM HARD** è la soluzione preferibile, considerando anche i tempi computazionali;
- Se la rete presenta **distribuzioni di probabilità uniformi** (massima incertezza), le prestazioni di EM HARD ne risentono molto ed EM SOFT risulta essere consigliabile.



Presentazione repository GitHub