THERMIQUE – BA3 TOUTES SECTIONS (SAUF ARCHI)
EXERCICE COTE DU 12 MAI 2014

1.- Le chauffage d'une pièce est assuré par une résistance électrique cylindrique de diamètre extérieur d_1 en quartz parcourue par un courant I. Cette résistance est placée horizontalement dans la pièce.

a.- On demande de déterminer la température atteinte par la résistance (en surface).

b.- Pour réaliser cette résistance, on utilise un tube de quartz d'épaisseur e qui dissipe la chaleur de manière uniforme (dissipation volumique q uniforme sur l'épaisseur). On demande de déterminer la différence de température entre les surfaces interne et externe du tube.

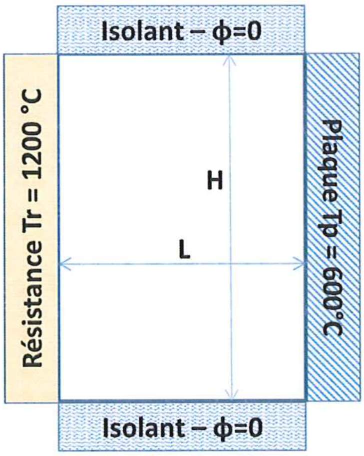
Données

Résistance en quartz:

d_1 = 11 mm
e = 2 mm
λ = 2 W/(m.°C)
résistance électrique par mètre de longueur : 60 Ω/m
courant I= 5 A
émissivité : ε = 0,7

Température de l'air dans la pièce : Ta = 22 °C
Température des parois de la pièce : Tp = 15 °C
L'air est supposé calme. La longueur de la résistance est grande par rapport à son diamètre.

2.- Pour recuire les soudures de la plaque tubulaire d'un échangeur de chaleur, on utilise une résistance électrique placée en face de la plaque. La situation peut être schématisée comme suit :



La température à atteindre sur la plaque tubulaire est de 600°C. On demande de déterminer quel est le flux maximum que l'on pourra appliquer à la résistance si sa température ne peut dépasser 1200°C et la température atteinte à la surface de l'isolant dans ce cas.

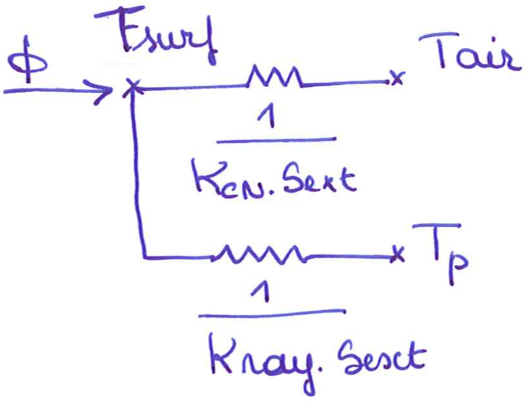
Données

Hauteur de la plaque : H = 0,6 m
Distance résistance-plaque : L = 0,4 m
Emissivité de la résistance : ε_R = 0,9
Emissivité de la plaque : ε_P = 0,7
Emissivité de l'isolant : ε_I = 0,5

On négligera l'échange avec l'air compris entre la résistance et la plaque.

Q1a /45 : calcul de la température de surface

Bilan de flux sur la surface extérieure de la résistance



$$\phi = K_{CN}.S_{ext}(T_{surf} - T_{air}) + K_{ray}\, S_{ext}(T_{surf} - T_p)$$

Tout le flux dissipé par la résistance est évacué par la surface extérieure : $\phi = RI^2 = 1500\ W/m$

Calcul des coefficients de transfert

- convection naturelle autour d'un cylindre horizontal

  $Nu = 0{,}47\ (Gr.Pr)^{1/4}$ dimension caractéristique = diamètre extérieur

  Calcul des propriétés physiques à $t_{film} = \frac{t_{surf} + t_{air}}{2}$

  → en 1ère approximat° $t_{film} = \frac{725+22}{2}$

  $K_{CN} = 15{,}4\ W/m^2.°C$ (15,4 W/m².°C) valeurs convergées

- rayonnement entre 1 surface et son environnement puisque dimensions env >> dimensions surface il est considéré comme 1 corps noir

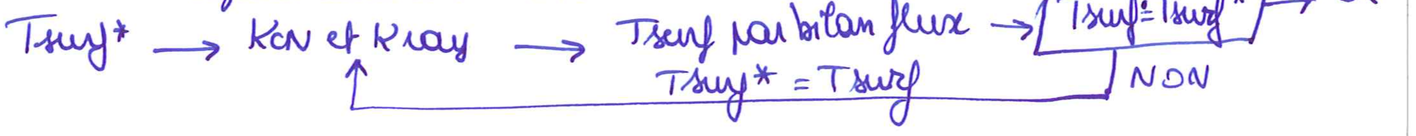
  $\phi_{ray} = \varepsilon_{surf}\, S_{ext}\ \sigma\,(T_{surf}^4 - T_p^4) = K_{ray}\, S_{ext}(T_{surf} - T_p)$

  → en 1ère approximation

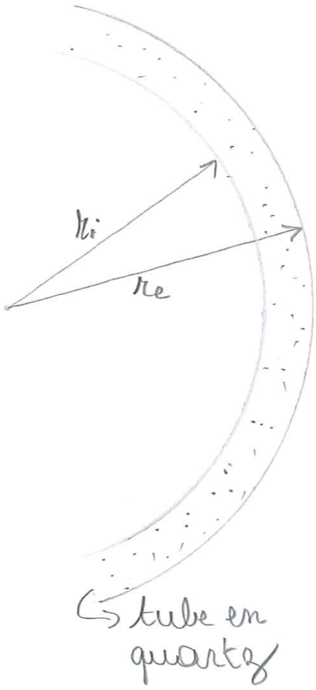
  $K_{ray} = 55{,}4\ W/m^2.°C$ (49,6 W/m².°C)

1er calcul de t_{surf} = 629,5°C (685,3°C)

Algorithme de résolution :



Q1b /15 : différence entre les températures de surfaces interne et externe



Le flux de chaleur est dissipé dans l'épaisseur du tube en quartz

⇒ dissipation interne de chaleur

$$q = \frac{\phi}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} = 26{,}5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$$

Pour connaître l'évolution de la température dans le solide il est donc nécessaire de résoudre l'équation de Fourier-Kirchhoff en coordonnées cylindriques :

Bilan d'énergie sur 1 élément d'épaisseur dr pour retrouver l'expression de F-K en cylindrique

$$\phi_{r+dr} = \phi_r + q \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\frac{d\phi}{dr} = q \cdot 2\pi r$$

$$\frac{d}{dr}(\varphi \cdot 2\pi r) = q \cdot 2\pi r$$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(-\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r\right) = q \cdot 2\pi r}$$

1ère intégration : $-\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r = q\pi r^2 + C_1$

2e intégration : $t(r) = -\frac{qr^2}{4\lambda} - \frac{C_1}{2\pi\lambda} \ln r + C_2$

expression des conditions aux limites

$$t(r_e) = t_{surf} = -\frac{q r_e^2}{4\lambda} - \frac{C_1}{2\pi\lambda} \ln r_e + C_2$$

$$t(r_i) = -\frac{q r_i^2}{4\lambda} - \frac{C_1}{2\pi\lambda} \ln r_i + C_2$$

flux sur la surface extérieure

$$-\lambda \frac{dt}{dr}\Big)_{r=r_e} \cdot 2\pi r_e = q\pi r_e^2 + C_1 = 1500 \, W/m$$

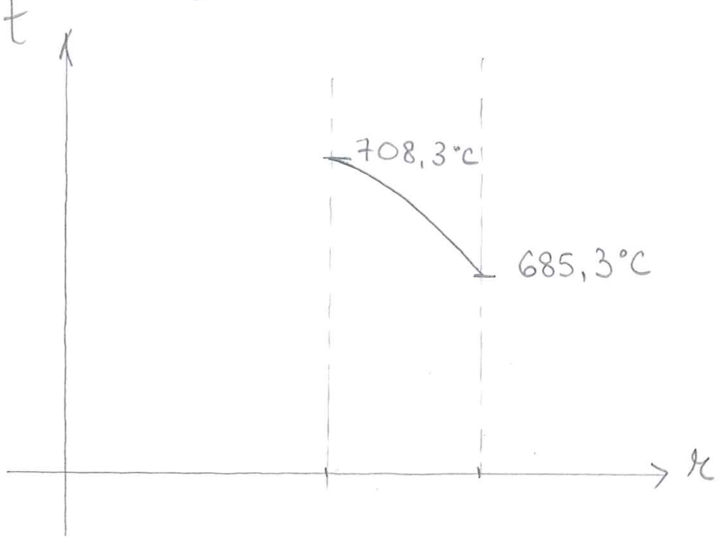
flux sur la surface intérieure

$$-\lambda \frac{dt}{dr}\Big)_{r=r_i} \cdot 2\pi r_i = q\pi r_i^2 + C_1 = \underbrace{0}_{\text{par symétrie}}$$

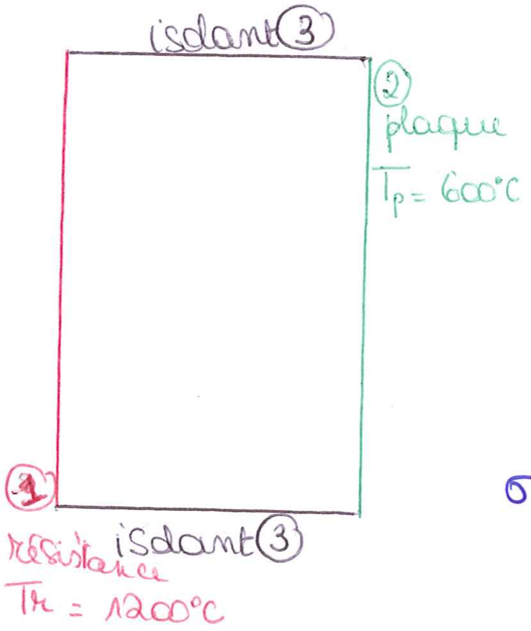
En utilisant ces équations (différentes combinaisons possibles)

on obtient : $\begin{pmatrix} C_1 = -1020{,}8 \\ C_2 = 1208{,}3 \end{pmatrix}$ $\Delta t = 23°C$

$t_{surf,i} = 708{,}3°C$

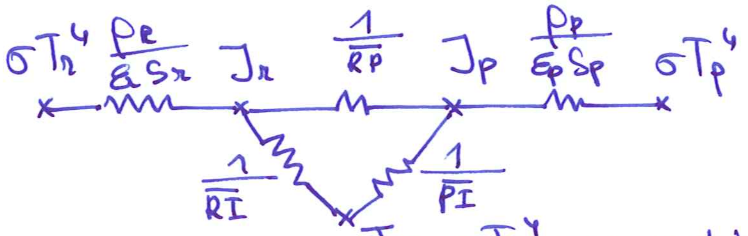


Q2 140 : Calcul du flux appliqué à la résistance



Le flux est échangé par rayonnement entre la résistance et la plaque. (convection négligeable)

→ schéma radiatif à 3 zones dont 1 adiabatique ($\phi = 0$)



$J_{is} = \sigma T_{is}^4$ car adiabatique

$$\phi = \overline{S_R S_p})_R \, \sigma \left(T_r^4 - T_p^4\right)$$

avec $\frac{1}{\overline{S_R S_p})_R}$ la résistance globale du schéma ci-dessus

Calcul des aires d'échange direct

$\overset{=0}{\cancel{\overline{RR}}} + \overline{RP} + \overline{RI} = S_R = 0{,}6 \text{ m}^2/\text{m}$ la résistance ne se voit pas elle-mê

$\overline{PR} + \overset{=0}{\cancel{\overline{PP}}} + \overline{PI} = S_P = 0{,}6 \text{ m}^2/\text{m}$ 〃 plaque 〃 〃

$\overline{IR} + \overline{IP} + \overline{II} = S_I = 0{,}8 \text{ m}^2/\text{m}$

on a besoin de $\overline{RP}$, $\overline{RI}$ et $\overline{PI}$ → grâce aux deux premières équations : 2 éq. à 3 inc.

↳ calculer 1 aire d'échange direct.

p ex : $\overline{RP} = \frac{1}{2}\left[(BC + AD) - (AC + BD)\right] = 0{,}321 \text{ m}^2/\text{m}$

→ $\overline{RI} = S_R - \overline{RP} = 0{,}279 \text{ m}^2/\text{m} = \overline{PI}$ car géométrie symétrique

---

→ $\overline{S_R S_p})_R = 0{,}326 \text{ m}^2/\text{m}$

→ $\phi = 76{,}23 \text{ kW/m}$

calcul de la température de l'isolant

$$\phi = \frac{\varepsilon_R S_R}{\rho_R}\left(\sigma T_2^4 - I_R\right) \rightarrow J_R$$

$$= -\frac{\varepsilon_P S_P}{\rho_P}\left(\sigma T_P^4 - J_P\right) \rightarrow J_P$$

ϕ_{is} flux passant par l'isolant

$$= \phi - \overline{RP}\left(J_R - J_P\right) = \overline{RI}\left(J_R - \sigma T_{is}^4\right)$$

$\rightarrow T_{is} = 1043$ °C

Remarque : pour utiliser la matrice des radiosités il fallait tenir compte du fait que l'isolant est adiabatique.

$$\phi_{R,net} = \frac{\varepsilon_R S_R}{\rho_R}\left(\sigma T_R^4 - J_R\right) = \overline{RP}\left(J_R - J_P\right) + \overline{RI}\left(J_R - J_{is}\right)$$

$$\phi_{P,net} = \frac{\varepsilon_P S_P}{\rho_P}\left(\sigma T_P^4 - J_P\right) = \overline{RP}\left(J_P - J_R\right) + \overline{PI}\left(J_P - J_{is}\right)$$

$$\phi_{is\,net} = \quad 0 \quad = \overline{RI}\left(J_{is} - J_R\right) + \overline{PI}\left(J_{is} - J_P\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \overline{RR} - \frac{S_R}{\rho_R} & \overline{RP} & \overline{RI} \\ \overline{RP} & \overline{PP} - \frac{S_P}{\rho_P} & \overline{PI} \\ \overline{RI} & \overline{PI} & \overline{II} - S_{is} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_R \\ J_P \\ J_{is} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon_R S_R}{\rho_R}\sigma T_R^4 \\ -\frac{\varepsilon_P S_P}{\rho_P}\sigma T_P^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$J_R = 252\,920$ W/m²

$J_P = 87\,405$ W/m²

$J_{is} = 170\,163$ W/m²