# THERMIQUE – BA3 TOUTES SECTIONS (SAUF ARCHI)
# EXERCICE COTE DU 14 MAI 2012

1.- On prend un thermomètre en verre au milieu de la classe, quelle est la température indiquée ?

*Données :*

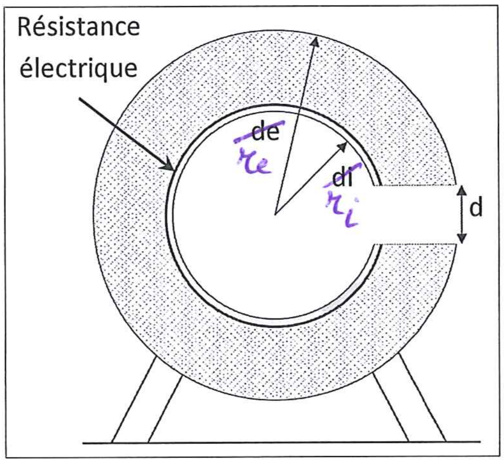
Température de l'air : 22°C
Température moyenne des parois : 15 °C
Coefficient de convection avec l'air : 10 W/(m².°C)
Emissivité du verre : 0,85

2.- Un four de laboratoire est constitué d'une cavité sphérique en quartz, sur laquelle est enroulée une résistance électrique. La cavité est isolée extérieurement par de la fibre céramique. Le four est muni d'une ouverture circulaire. On veut atteindre une température de 1200°C à l'intérieur du four, on demande de déterminer la puissance électrique nécessaire.

*Données :*

- Diamètre intérieur du four : di = 300 mm
- Diamètre extérieur de l'isolation : de = 500 mm
- Diamètre de l'ouverture : d = 75 mm
- Conductivité thermique de l'isolant :

| Température (°C) | λ (W/(m.°C)) |
|---|---|
| 300 | 0,07 |
| 400 | 0,08 |
| 600 | 0,11 |
| 800 | 0,15 |
| 1000 | 0,2 |



- Emissivité de la paroi interne du four (à 1200°C) : 0,6
- Température (imposée) à la surface interne du four : Ti = 1200°C
- Température ambiante : Ta = 20 °C
- Coefficient d'échange entre la paroi externe du four et l'ambiance (convection + rayonnement) : Ka = 8 W/(m².°C)

*Hypothèses simplificatrices* :

- on suppose que, vue de l'intérieur du four, l'ouverture peut être considérée comme une surface noire à la température ambiante
- la résistance thermique de l'épaisseur de quartz constituant la cavité est négligeable (épaisseur faible)

3.- Une résistance électrique cylindrique est constituée des 3 composants accolés suivants :

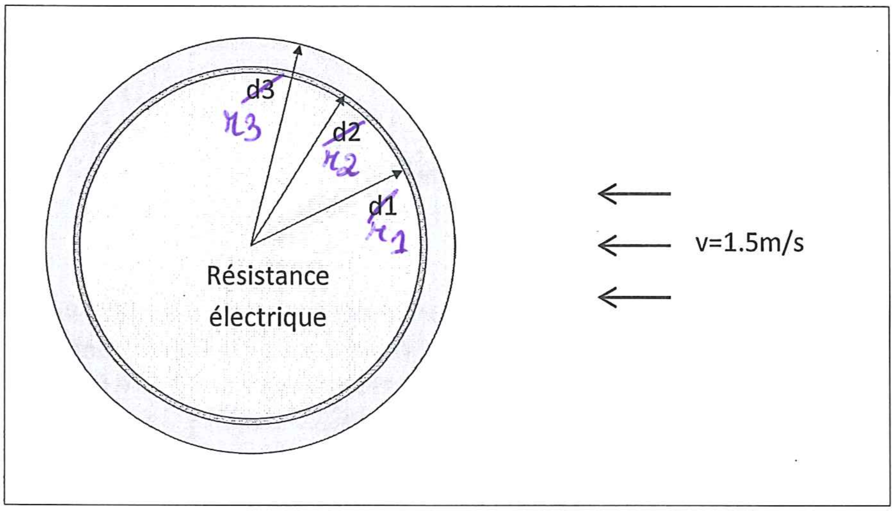
- une âme centrale en Ni-Cr de diamètre d1, parcourue par un courant I
- une couche d'isolant électrique d'épaisseur faible de diamètre extérieur d2
- une gaine en acier inoxydable de diamètre extérieur d3

Cette résistance est placée transversalement à un écoulement d'eau à Te = 60°C et dont la vitesse est de 1,5 m/s.

On demande :

a.- de déterminer le courant Imax à ne pas dépasser pour que la température de l'isolant ne dépasse pas 120°C

b.- pour la valeur de ce courant, de déterminer la température atteinte sur l'axe de la résistance.



*Données*

Ame centrale en Ni-Cr :

d1 = 6 mm

λ1 = 17 W/(m.°C)

résistance électrique par mètre de longueur : 0,039 Ω/m

Isolant : polymère :

d2 = 6,2 mm (épaisseur = 0,1 mm)

λ2 = 0,2 W/(m.°C)

Gaine en inoxydable :

d3 = 7,2 mm (épaisseur = 0,5 mm)

λ3 = 15 W/(m.°C)

*Hypothèse simplificatrice :*

On peut négliger l'effet de la température sur les propriétés physiques de l'eau, celles-ci peuvent donc être déterminées à la température Te = 60°C :

$\rho = 985\ kg/m^3$

$c = 4185\ J/(kg.°C)$

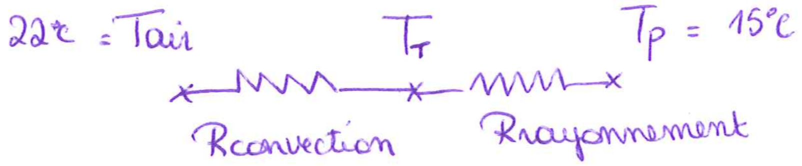
$\lambda = 0.653\ W/(m.°C)$

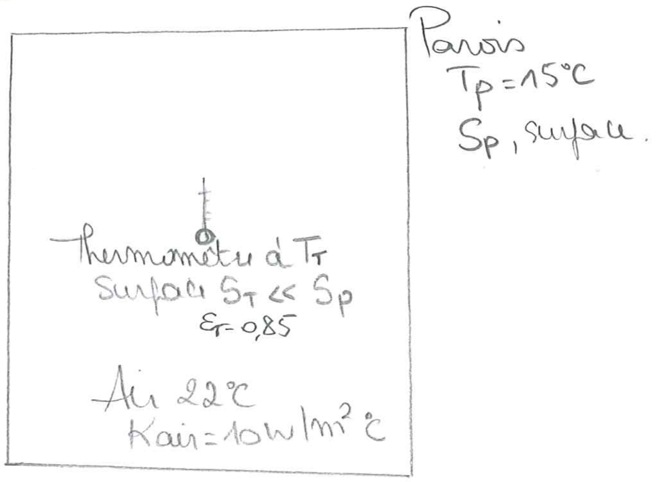
$\nu = 4.73\ 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s}$

$Pr = 2.99$

# Exercice 1 (20 points sur 100)

## Schéma en résistances :





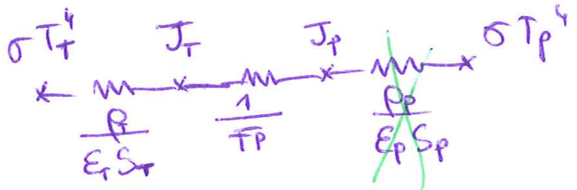
## Loi des noeuds en $T_T$ :

$$\frac{1}{R_{ray}}(T_T - T_p) = \frac{1}{R_{conv}}(T_{air} - T_T)$$

$$KS)_{ray}\,(T_T - T_p) = KS)_{conv}\,(T_{air} - T_T)$$ avec $KS)_{conv} = K_{conv} . S_T$

$$\rightarrow \quad T_T = \frac{KS)_{conv} . T_{air} + KS)_{ray} . T_p}{KS)_{conv} + KS)_{ray}} \qquad (I)$$

Calcul de KS)ray : expression du flux échangé par rayonnement entre le thermomètre et les parois



Ce schéma se simplifie :

- Si la surface Sp est >>> $S_T$ et entoure $S_T$ ⇒ on peut considérer les parois comme un corps noir → $\rho_p = 0$
- l'aire d'échange direct :

$$\overline{TP} = \underbrace{F_{TP}}_{} . S_T = F_{PT} . S_P = S_T$$

fraction du rayonnement émis par le thermomètre qui atteint les parois = 1

$$\phi ray = \overline{S_T S_p}\, \sigma \,(T^4 - T_p^4) = KS)ray\,(T - T_p)$$

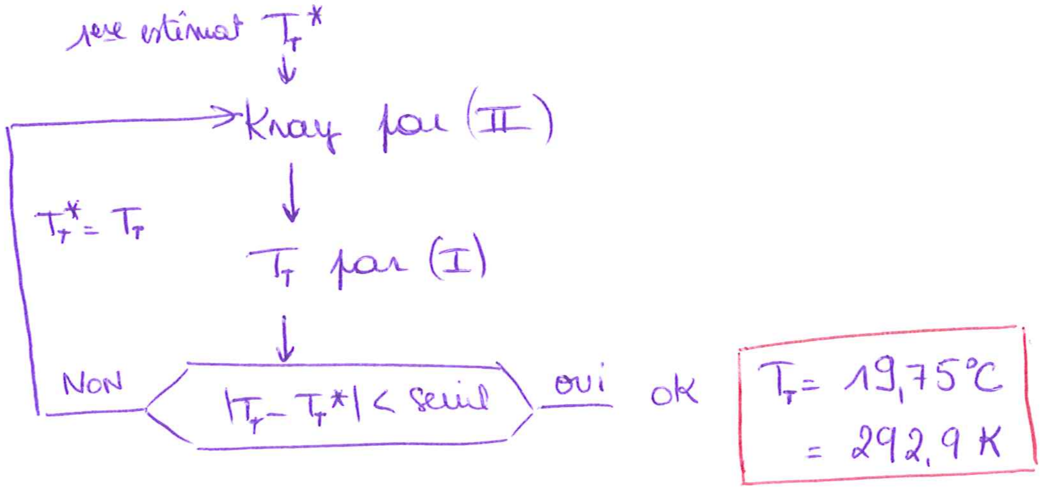
$$= \varepsilon_T \cancel{S_T}\, \sigma\, (T^4 - T_p^4) = Kray \cdot \cancel{S_T}\,(T - T_p)$$

en effet : $\frac{1}{\overline{S_T S_p}} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_T S_T} + \frac{1}{S_T} + 0 = \frac{1}{\varepsilon_T S_T}$

$$Kray = \frac{\varepsilon_T\, \sigma\, (T_T^4 - T_p^4)}{(T_T - T_p)} \qquad (II)$$

Le coefficient de tranfert par rayonnement dépend de la température recherchée → calcul itératif

Algorithme de résolution

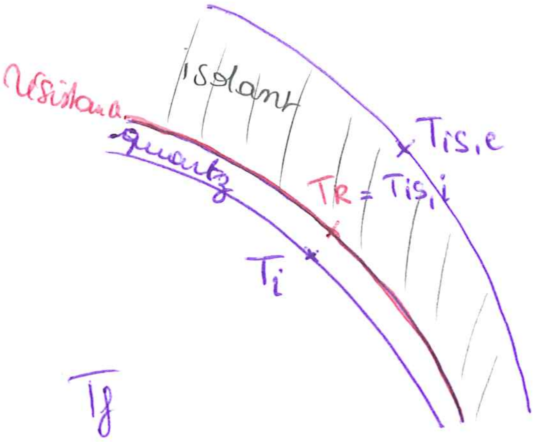


# Exercice 2 (40 points sur 100) + 5 points de Bonus

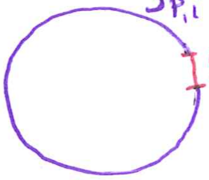
## Schéma en résistances

Hypothèse : – Température imposée à la surface interne du four est égale à la température à l'intérieur du four
– la résistance thermique du quartz est négligeable

$$T_R = T_{isolant,i} = T_i = 1200°C = T_f$$



– Vue de l'intérieur du four, l'ouverture peut être considérée comme une surface noire à température ambiante :



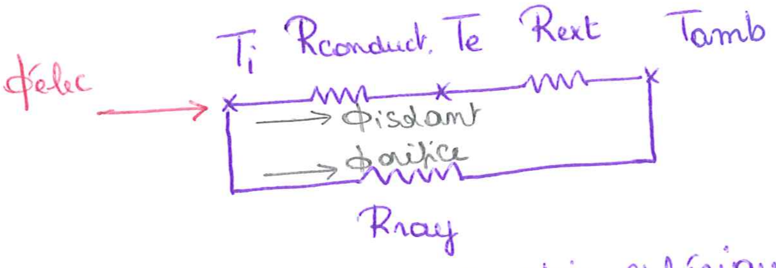
$S_{P,i}$ paroi interne du four

$S_{P_i} = 4\pi r_i^2 - S_o = 0,2783\ m^2$

$S_o$ surface de l'ouverture

$\varepsilon = 1$

$S_o = \frac{\pi d^2}{4} = 0,0044\ m^2$



$$R_{ext} = \frac{1}{K_{ext} \cdot S_{p,e}}$$

$$\begin{cases} S_{pe} = 4\pi r_e^2 - S_o = 0,781\ m^2 \\ K_{ext} = 8\ W/m^2{}°C \end{cases}$$

φ se conserve car géométrie sphérique

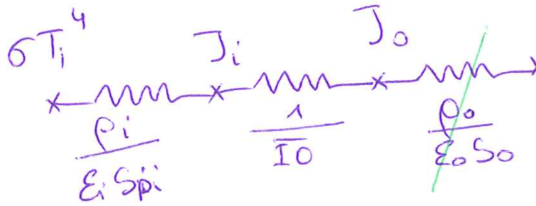
## Loi des noeuds en $T_i$

$$\phi_{élec} = \phi_{isolant} + \phi_{orifice}$$

$$= \frac{1}{R_{conduct.} + R_{ext}} (T_i - T_{amb}) + \frac{1}{R_{ray}} (T_i - T_{amb})$$

**Calcul de Rray :** expression du flux échangé entre la paroi interne du four et la surface noire représentant l'orifice

avec $T_0 = T_{amb}$



car surface noire

$$\overline{IA} = F_{iA} S_{p,i} = \underbrace{F_{Ai}} S_o = S_o$$

fraction du rayonnement émis par la surface de l'orifice qui atteint la paroi intérieure du four = 1

$$\phi_{ray} = \phi_{orifice} = \overline{S_i S_o}\,\sigma\,(T_i^4 - T_0^4) = KS)_{ray}\,(T_i - T_0)$$

avec $$\frac{1}{\overline{S_i S_o}} = \frac{\rho_i}{\varepsilon_i S_{pi}} + \frac{1}{S_o}$$

$$\overline{S_i S_o} = 0{,}0043 \simeq S_o$$

$$\rightarrow \boxed{\phi_{orifice} = 1166\ W}$$

**Calcul de Rconduct :** résistance par conductibilité en géométrie sphérique

$$\phi = \boxed{\frac{4\pi\lambda}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)}}\,(t_{pi} - t_{pe})$$ (démonstration faite au labo)

$$= \frac{1}{R_{conduct}} = KS)_{conduct}$$

avec $\lambda = f$(t° de l'isolant) pris à $t_m = \frac{t_{pi} + t_{pe}}{2}$

(*) || En première approximation, on calcule $t_m$ en considérant $t_{pe} = t_{amb} = 20°C$

$t_m = 610°C \rightarrow \lambda = 0{,}112\ W/m\,°C \rightarrow KS)_{conduct} = 0{,}528\ W/°C$

## Calcul de φisolant

$$\phi_{isolant} = \frac{1}{\left(R_{conduct} + \frac{1}{K_{ext} . S_{p,e}}\right)} (t_i - t_{amb})$$

$$\boxed{\phi_{isolant} = 574 \text{ W}}$$

## Calcul de φélec

$$\phi_{élec} = \phi_{orifice} + \phi_{isolant}$$

$$= 1166 + 574 = 1740 \text{ W}$$

$$\boxed{\phi_{élec} = 1{,}74 \text{ kW}}$$

## (*) Calcul de Te... pour vérifier la valeur de Rconduct

+ 5 points de bonus

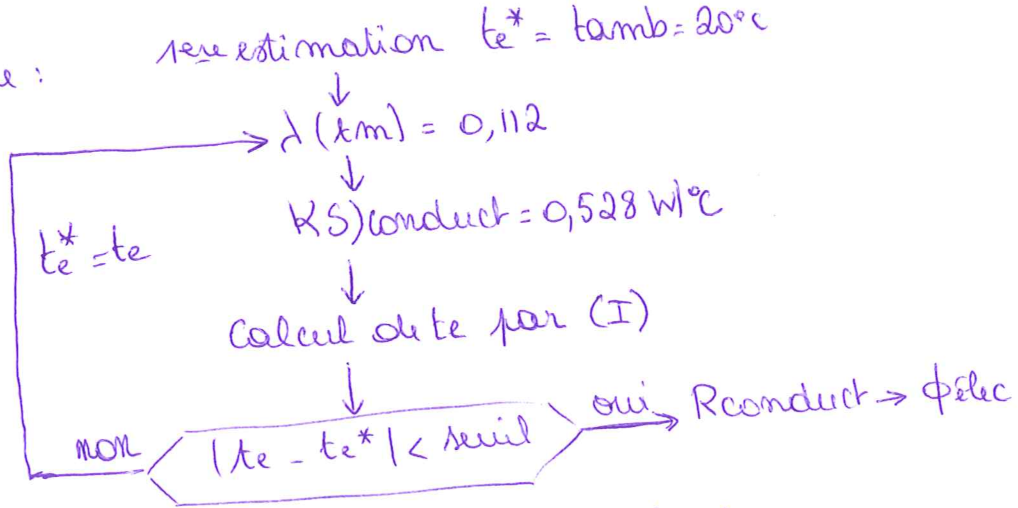
Loi des nœuds en Te

$$\frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} (t_i - t_e) = K_{ext} S_{p,e} (t_e - t_{amb})$$

$$\frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} = KS)_{conduct}$$

$$\hookrightarrow t_e = \frac{KS)_{conduct} \cdot t_i + K_{ext} S_{pe} . t_{amb}}{KS)_{conduct} + K_{ext} . S_{pe}} \quad (I)$$

Algorithme :



on trouve $t_e = 119°C$ $\rightarrow \lambda(t_m) = 0{,}122$ W/m°C

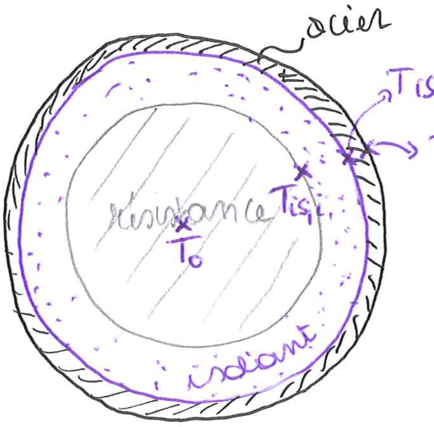
$\rightarrow KS)_{conduct} = 0{,}574$ W/°C

$\rightarrow \phi_{isolant} = 621$ W

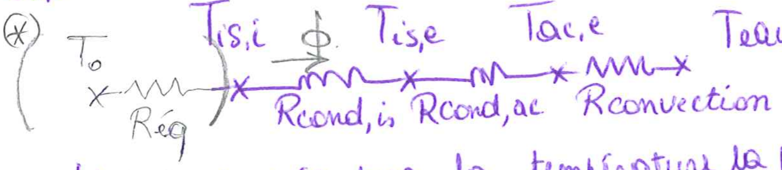
$\rightarrow \phi_{élec} = 1{,}79$ kW

# Exercice 3 (40 points sur 100) + 8 points de Bonus

## Schéma en résistances



géométrie cylindrique
→ $\phi_{L=1}$ se conserve



L'isolant présentera la température la plus élevée en Tis,i au contact de la résistance.

→ $T_{is,i} = 120°C$

## I. Calcul du courant Imax

$$\phi élec_{L=1} = R_{L=1} \cdot I_{max}^2$$

→ Calculer le flux par unité de longueur

**Calcul des résistances**

$$R_{cond,is\,L=1} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi \lambda_{is}} = 0,026 \ °C/W$$

$$R_{cond,ac\,L=1} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi \lambda_{ac}} = 0,0016 \ °C/W$$

$$R_{convection} = \frac{1}{K_{conv} \cdot S_e}$$

$$S_e = \pi d_3 \times \underbrace{1}_{\text{par m de longueur}} = 0,0226 \, m^2$$

**Convection forcée transversalement à un cylindre isolé**

$$Nu = C \cdot Re^n \, Pr^{1/3}$$

Syllabus page III.10 relation III.11
+ page III.9 Figure III.8

ou

Formulaire

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{1,5 \cdot d_3}{4,73 \cdot 10^{-7}} = 22833$$

→ 4000 < Re < 40000
→ $\begin{cases} C = 0,193 \\ n = 0,618 \end{cases}$

$Nu = 137$

$K_{conv} = 12453 \ W/m^2 \, °C$

$$R_{\substack{convection \\ L=1}} = \frac{1}{K_{conv} \cdot S_e} = 0{,}0035 \text{ °C/W}$$

$$\phi_{élec, L=1} = \frac{1}{R_{cond,is} + R_{cond,ac} + R_{conv}} (t_{is,i} - t_{eau})$$

$$= \frac{1}{0{,}026 + 0{,}0016 + 0{,}0035} (120 - 60)$$

Rem: toutes les résistances sont du même ordre de grandeur
→ tout prendre en compte

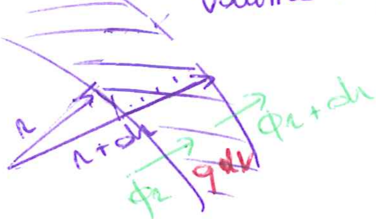
$\phi élec_{L=1} = 1921$ W/m de longueur

$$\rightarrow \boxed{I_{max}} = \sqrt{\frac{\phi élec_{L=1}}{R_{L=1}}} = \boxed{222 \text{ A}}$$

## II. Calcul de la température sur l'axe (+8 points de bonus)

Conductibilité dans un solide avec génération interne de chaleur par effet joule : équation de Fourier-Kirchhoff en stationnaire :

En coordonnées cylindriques :
Soit 1 élément de volume d'épaisseur dr : Bilan d'énergie sur élément de volume : $\phi_{r+dr} = \phi_r + q \cdot 2\pi r \, dr$



$$\frac{d\phi}{dr} = q \cdot 2\pi r$$

$$\frac{d}{dr}(\varphi \cdot 2\pi r) = q \cdot 2\pi r$$

$$\frac{d}{dr}\left(-\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r\right) = q \cdot 2\pi r$$

1ère intégration : $-\lambda \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi r = q \frac{\cancel{2}\pi r^2}{\cancel{2}} + C_1$ (I)

2e intégration : $t(r) = -\frac{q r^2}{4\lambda} - \frac{C_1}{2\pi\lambda} \ln r + C_2$ (II)

expression des conditions aux limites :

en $r = 0$ : $\frac{dt}{dr} = 0$ (symétrie de révolution) → $C_1 = 0$ par (I)

en $r = r_1$ : $t = t_{is,i} = 120$°C

dans (II) avec $C_1 = 0$

$$120 = -\frac{q r_1^2}{4\lambda} + C_2$$

$$\hookrightarrow C_2 = 120 + \frac{q r_1^2}{4\lambda} = t_{en\ r=0}$$

pour calculer la génération interne de chaleur q, on divise le flux transmis au travers la surface de la résistance (par mètre de longueur) par la section de la résistance :

$$q = \frac{\phi_{élec_{L=1}}}{\pi r_1^2} \qquad \frac{[W/m]}{[m^2]} = \frac{W}{m^3}$$

$$= 68\ MW/m^3$$

$$\boxed{\rightarrow t_{r=0} = 129\,°C}$$

<u>Rem</u> : Ce développement est fait pour un corps cylindrique infini dans le syllabus partie conductibilité (sationnaire avec génération interne de chaleur, page II.20)

La relation II.20 page II.21 pouvait directement être utilisée : $t(r) - t_0 = \frac{q}{4\lambda}(R^2 - r^2)$ avec $\begin{cases} R = r_1 \\ t_0 = t_{is,i} = 120°C \end{cases}$

$\hookrightarrow$ en $r = 0$

$$\left(t_{(r=0)} - t_{is,i}\right) = \frac{\overset{\phi_{élec_{L=1}}}{q \cdot \pi r_1^2}}{\underset{Réq}{4\pi\lambda}}$$

(*) ↳ cela reviend à ajouter 1 résistance sur le schéma reliant $t_{is,i}$ à $t_{(r=0)}$)