Algèbres de Clifford

Mostafa Adnane, Sami Boulebnane

4 décembre 2016

Résumé

The theory of Geometric algebra (a.k.a Clifford algebras) was initiated by W.K. Clifford over 130 years ago. It has found rich applications in mathematics and physics. Clifford algebra is introduced through a conventional tensor algebra construction (then called geometric algebra). We study briefly some properties of real Clifford algebras and identify them as matrix algebras. More generally, the classification of Clifford algebras as complete matrix algebras (or as direct sums of two such algebras) allows us to define and study the pinors and spinors in different dimensions. We shall see that the structure of those pinors/spinors depends more precisely on the dimension and signature of the quadratic space upon which the algebra is built. Finally, we will uncover how interesting Clifford algebras are when it comes to representing general geometric transformations within the general framework of Clifford groups.

La théorie des algèbres géométriques (ou algèbres de Clifford) a été initiée par W.K. Clifford il y a plus de 130 ans. Elle a trouvé de riches applications en mathématiques et en physique. L'algèbre de Clifford est introduite par une construction d'algèbre tensorielle (d'où l'appellation algèbre géométrique). Nous étudions brièvement quelques propriétés des algèbres de Clifford réelles, que nous identifions à des algèbres matricielles. Plus généralement, la classification des algèbres de Clifford comme algèbres complètes de matrices (ou comme sommes directes de deux telles algèbres) permet de définir et d'étudier les pineurs et spineurs en différentes dimensions. Nous verrons que la structure de ces pineurs/spineurs dépend plus précisément de la dimension et de la signature de l'espace quadratique sur lequel on construit l'algèbre. Enfin, nous verrons que les algèbres de Clifford sont intéressantes pour représenter des transformations géométriques dans le cadre général des groupes de Clifford.

1 Construction des algèbres de Clifford

Dans toute cette partie, nous n'allons considérer que des espaces quadratiques non-dégénerés.

1.1 Applications de Clifford et algèbres universelles

Soit (E, q) un espace vectoriel réel de dimension d, avec q associée à la forme bilinéaire b et la base orthogonale standard $(e_1, e_2, .., e_d)$. Si A est une algèbre unitaire, une application injective j est appelée une application de Clifford $j : E \to A$ si :
(i) $1 \notin j(E)$
(ii) $(j(x))^2 = -q(x)1 = -q(x)$
Si de plus on
(iii) $j(E)$ génère A
donc (A, j) est appelée une Algèbre de Clifford (E, q)
Notons que

$$j(x)j(y) + j(y)j(x) = -2b(x, y)$$

Exemple 1 : Si $q = 0$. Soit $A = \bigwedge^* E$ et soit $j(x) = x$. Comme $1 \notin j(E)$ et $x \wedge x = 0 = -q(x)$ pour tout $x \in E$, j est une application de Clifford de (E, q) dans $A = \bigwedge^* E$. Comme E génère l'algèbre $\bigwedge^* E$, l'algèbre extérieure $\bigwedge^* E$ est une algèbre de Clifford (E, q).

Exemple 2 : Soit (E, q) un espace unidimensionnel d'élément de base e tel que $q(e) = 1$. Soit $A = \mathbf{C}$ l'algèbre des nombres complexes et soit $j(\lambda e) = \lambda i$. Alors $(j(\lambda e))^2 = -\lambda^2 = -q(\lambda e)$. Donc j est une application de Clifford et $\mathbf{C}$ est une algèbre de Clifford pour (E, q). On peut identifier $A = \mathbf{C}$ à une sous-algèbre de $M_2(\mathbf{R})$, avec

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$i = J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, tout élément de A peut s'écrire comme

$$z = xI + yJ = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Exemple 3 : Soit (E, q) un espace quadratique unidimensionnel de forme quadratique négative q avec $q(e) = -1$. Soit $A = \mathbf{R}^2$, la multiplication y est définie par $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$, on peut écrire $A = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ d'unité

$(1,1)$. Définissons $j(\lambda e) = (\lambda, -\lambda)$. Clairement, $1 \notin j(E)$, et

$$(j(\lambda e))^2 = \lambda^2(1,1) = -q(\lambda e).1$$

ce qui assure que j est une application de Clifford dans A et A est une algèbre de Clifford pour (E,q). En identifiant A à une sous algèbre de $M_2(\mathbf{R})$ avec

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$j(e) = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tout élment de A peut donc être écrit comme

$$xI + yU = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-y \end{bmatrix}$$

Une algèbre de Clifford $\mathcal{A}(E,q)$ est dite universelle si pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ isométrie de (E,q) dans (F,r) et $B(F,r)$ une algèbre de Clifford pour (F,r), T peut être étendu à un homéomorphisme d'algèbre $T^* : \mathcal{A}(E,q) \to B(F,r)$. Comme $\mathcal{A}(E,q)$ est générée par (E,q), T^* est unique. L'unicité de l'algèbre de Clifford universelle est assurée, il suffit de prendre $E = F$ et $T = id_E$.

On définit $\Omega = \Omega_d = \{1, 2 \ldots, d\}$ et $C = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ où $1 \preceq i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_k \preceq d$ et posons alors $e_C = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$ (avec $e_\emptyset = 1$). Finalement, on définit

$$\mathfrak{B} = \{e_C : C \subseteq \Omega\}$$

Nous allons utiliser dans la suite le résultat admis suivant

Proposition 1.1.1. *Si A est une algèbre de Clifford pour (E,q). Alors $A = vect(\mathfrak{B})$. Si $\mathfrak{B}$ est linéairement indépendante (et donc elle présente une base pour A) alors A est universelle.*

Corollaire 1.1.2. *Si on a $dim(A) = 2^d$ alors $A(E,q)$ est universelle.*

1.2 Existence des algèbres de Clifford

Théorème 1.2.1. *Si (E,q) est un espace quadratique, alors il existe une algèbre de Clifford universelle $\mathcal{A}(E,q)$*

Démonstration. On peut montrer qu'on peut considérer que $\mathcal{A}(E,q)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(\bigwedge^* E)$ des opérateurs linéaires sur $\bigwedge^* E$. Soit $x \in E$, posons $j(x) = a_x^\dagger - a_x$, où $a_x^\dagger$ est l'opérateur de création et a_x est l'opérateur d'anihilation correspondants à x. Donc

$$(j(x))^2 = {a_x^\dagger}^2 - a_x a_x^\dagger - a_x^\dagger a_x + a_x^2 = -a_x a_x^\dagger - a_x^\dagger a_x = -q(x)1$$

car ${a_x^\dagger}^2 = a_x^2 = 0$. Comme $j(x)1 = -q(x)x$, $1 \notin j(E)$, j est une application de Clifford de (E,q) dans $\mathcal{L}(\bigwedge^* E)$. On prend donc $\mathcal{A}(E,q)$ unitaire générée par $j(E)$, et telle que E est identifiée à $j(E)$. Montrons maintenant que $\mathcal{A}(E,q)$ est universelle en utilisant le théorème 1.1.2.

Montrons par récurrence sur $k = |C|$ que $\mathfrak{B}$ est une famille linéairement indépendante. On a $e_\emptyset(1) = 1$. Si pour k on a $e_C(1) = e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_k}$ donc pour $C = \{j_0, j_1, \dots, j_k\}$, donc

$$a_{e_{j_0}}^\dagger(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k})(1) = a_{e_{j_0}}^\dagger(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) = e_{j_0} \wedge e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$$

et

$$a_{e_{j_0}}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k})(1) = a_{e_{j_0}}(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) = 0$$

Donc la famille $\{e_C(1) : C \subseteq \Omega\}$ est linéairement indépendante dans $\bigwedge^* E$; ce qui implique que les opérateurs $\{e_C : C \subseteq \Omega_d\}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}(\bigwedge^* E)$.

□

Remarque. *Les opérateurs de créations et d'annihilation utilisés prennent la forme suivante :*

$$a_x(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} b(x, x_j)(x_1 \wedge \dots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \dots \wedge x_k)$$

$$a_x^\dagger(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k$$

où $b(.,.)$ est la forme bilinéaire relative à (E,q).

On obtient donc le résultat important suivant :

Corollaire 1.2.2. *Si une algèbre de Clifford $\mathcal{A}(E,q)$ est universelle, alors $dim(A) = 2^{dim(E)} = 2^d$. Ainsi, une algèbre de Clifford A pour (E,q) est universelle ssi $dim(A) = 2^d$, et ssi $\mathfrak{B}$ est un famille linéairement indépendante de A.*

Dorénavant, on note $\mathcal{A}_d$ pour $\mathcal{A}(\mathbf{R}_d)$ et $\mathcal{A}_{p,m}$ (ou bien $Cl(p,q)$ comme fréquemment utilisé dans la littérature) pour $\mathcal{A}(\mathbf{R}_{p,m})$. Où $\mathbf{R}_{p,m}$ est l'espace $\mathbf{R}^d$, muni de la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{d=p+m} x_i^2,$$

qu'on appelle espace quadratique standard non-dégénéré.

1.3 Involutions de l'algèbre de Clifford

L'application linéaire $\alpha : x \in E \to -x$, qui préserve $q(x)$, donne naissance à un automorphisme de $\mathcal{A}(E,q)$ appelé l'involution principale de $\mathcal{A}(E,q)$. Comme $\alpha^2 = \mathrm{id}$, α a deux valeurs propres : ± 1 ; donc $\mathcal{A}(E,q)$ peut être subdivisé en somme directe d'ensemble paire $\mathcal{A}^+$ et impaire $\mathcal{A}^-$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$$

En notant, x' pour l'extension de $\alpha(x)$ dans l'algèbre de Clifford, on obtient qu'en particulier $e_C^{'} = (-1)^{|C|} e_C$
Pour définir l'anti-involution principale, on introduit d'abord l'algèbre opposée A^{opp} qui est l'espace vectoriel A muni du produit $x \circ y = yx$. Si $\mathcal{A}(E,q)$ est une algèbre universelle, d'application de Clifford $j : (E,q) \to \mathcal{A}(E,q)^{opp}$ est aussi une application de Clifford, on conclut donc que $\mathcal{A}(E,q)^{opp}$ est aussi une algèbre de Clifford pour (E,q). Nous étendons donc l'application $\mathrm{id} : E \to E$ aux algèbres de Clifford

$$\tilde{\mathrm{id}} : \mathcal{A}(E,q) \to \mathcal{A}^{opp}(E,q)$$

En particulier, on a $(\tilde{\mathrm{id}}(x) = x^*)$:

$$a^* \circ b^* = b^* a^* = (ba)^*$$

Encore une fois, $x^{**} = x$, donc l'anti-involution principal $\tilde{\mathrm{id}}$ est une involution de $\mathcal{A}(E,q)$, et l'on a :

$$e_C^* = e_{j_k} e_{j_{k-1}} .. e_{j_1} = (-1)^{|C|(|C|-1)/2} e_C$$

Et puis on définit la conjugaison sur $\mathcal{A}$ par $\bar{x} = (x')^* = (x^*)'$, d'après ce qui précède $\bar{\bar{x}} = x$. En plus il s'agit bien d'un anti-automorphisme car $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$. Pour résumer l'action de ces trois involutions, on a :

$$e_C' = (-1)^{r(C)} e_C$$
$$e_C^* = (-1)^{s(C)} e_C$$
$$\bar{e_C} = (-1)^{t(C)} e_C$$

avec les valeurs de r,s et t données par :

$\|C\|(\mathrm{mod}\ 4)$	0	1	2	3
$r(C)$	0	1	0	1
$s(C)$	0	0	1	1
$t(C)$	0	1	1	0

1.4 Centre et centraliseurs

On rappelle respectivement les définition du centre et du centraliseur, pour B sous-ensemble de A :

$$Z(A) = \{a \in A : ab = ba \text{ pour tout } b \in A\}$$
$$C_A(B) = \{a \in A : ab = ba \text{ pour tout } b \in B\}$$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.4.1. *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E, q)$. On a :*
(i) $C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^+) = vect(1, e_\Omega)$.
(ii) $Z(\mathcal{A}) = vect(1, e_\Omega)$ si d est impair, $Z(\mathcal{A}) = vect(1)$ si d est pair.
(iii) $Z(\mathcal{A}^+) = vect(1)$ si d est impair, $Z(\mathcal{A}^+) = vect(1, e_\Omega)$ si d est pair.

Le corollaire suivant donne une idée sur l'importance de l'élément e_Ω (appelé l'élément de Coxeter ou l'élément de volume).

Corollaire 1.4.2. *e_Ω, à un signe près, est indépendant du choix de la base orthogonale.*

Le carré $\omega^2 = e_\Omega^2 = \pm 1$ donne une information sur la manière dont on peut voir l'algèbre $A(e_\Omega)$; si $e_\Omega^2 = 1$, $A(e_\Omega) \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$, sinon $A(e_\Omega) \cong \mathbf{C}$. On a donc le tableau suivant :

$p - m(\text{mod } 4)$	0	1	2	3
$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^+)$	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}^2$
$Z(\mathcal{A})$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^2$
$Z(\mathcal{A}^+)$	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}$

Ceci veut dire, par exemple, qu'on peut naturellement voir $\mathcal{A}$ comme une algèbre complexe lorsque d est impair et $p - m = 1$ (mod 4).

Donnons dans la suite de cette partie, quelques éléments sur la classification des algèbres de Clifford, commençons d'abord par introduire la notion de la simplicité des algèbres.

1.5 Classification des algèbres de Clifford

Une algèbre est simple, si son anneau sous-jacent est simple, c-à-d ; il n'admet aucun idéal bilatère autre que lui et $\{0\}$. On peut voir que [D.J.H.Garling] dans le cas où $\mathcal{A}(E, q)$ est simple, (E, q) n'admet aucune algèbre non-universelle.

Théorème 1.5.1. $\mathcal{A}^+_{p+1,m} \simeq \mathcal{A}_{p,m}$, $\mathcal{A}^+_{p,m+1} \simeq \mathcal{A}_{m,p}$

Théorème 1.5.2. *Si $p - m \neq 3$ (mod 4), alors $\mathcal{A}_{p,m}$ est simple. Donc $\mathbf{R}_{p,m}$ n'a aucune algèbre de Clifford non-universelle.*

On a par exemple, en combinant les deux théorèmes, le résultat suivant :

Corollaire 1.5.3. *Si $p \neq m (mod\ 4)$ alors $\mathcal{A}^+_{p,m}$ est simple.*

Quand $(E,q) = \mathbf{R}_{p,m}$, avec $p-m = 3 \pmod 4$, $f = \frac{1}{2}(1+e_\Omega)$ et $g = \frac{1}{2}(1-e_\Omega)$ sont idempotents, appartiennent au centre de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{p,m}$ et satisfont $f+g = 1$ et $fg = 0$ ($(e_\Omega)^2 = 1$). On peut décomposer $\mathcal{A}$ en somme directe de deux idéaux $\mathcal{A} = \mathcal{A}f \oplus \mathcal{A}g$. $\mathcal{A}f$ et $\mathcal{A}g$ sont deux algèbres unitaires d'unités f et g respectivement. L'application $m_f : a \to af$ est un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}f$ de noyau $\mathcal{A}g$. Si x est un élément non-nul de E alors $j(x)f = \frac{1}{2}(x + xe_\Omega) \notin \mathrm{vect}(f)$, et $(j(x)f)^2 = j(x)^2 f = -q(x)f$, donc l'application $x \to j(x)f$ est une application de Clifford de E dans $\mathcal{A}f$. $j(E)f$ génère $\mathcal{A}f$, et donc $\mathcal{A}f$ est uen algèbre de Clifford non-universelle pour (E,q).

Comme $d = p+m$ est impair, si $a \in \mathcal{A}^+$ alors $ae_\Omega \in \mathcal{A}^-$, donc $(af)^+ = \frac{1}{2}a$. Donc la restriction de m_f à $\mathcal{A}^+$ est injective. Comme $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}f$ ont la même dimension, la restriction de de m_f à $\mathcal{A}^+$ est un isomorphimsme de $\mathcal{A}^+$ dans $\mathcal{A}f$. Ainsi, $\mathcal{A}^+ \cong \mathcal{A}f$. Pareil pour m_g, donc, $\mathcal{A}(E,q) \cong \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^+$.

Supposons que $\mathcal{B}$ est une algèbre de Clifford pour $(E,q) \cong \mathbf{R}_{p,m}$, avec toujours $p - m = 3 \pmod 4$. Donc, on a les applications suivantes :

$$\mathrm{id} : E \longrightarrow E$$

$$\mathrm{id} : E \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathrm{id} : E \longrightarrow \mathcal{A}f \oplus \mathcal{A}g$$

$$\widetilde{\mathrm{id}} : \mathcal{A}f \oplus \mathcal{A}g \longrightarrow B$$

D'après ce qui précède $\mathcal{A}f \cong \mathcal{A}^+(E,q)$ et $\mathcal{A}^+(E,q)$ est simple par le corollaire 1.5.3, donc soit $\widetilde{\mathrm{id}}(\mathcal{A}f) = 0$ soit $\widetilde{\mathrm{id}}$ est injective sur $\mathcal{A}f$; et pareil pour $\mathcal{A}g$. Ainsi soit $\mathcal{B}$ est universelle, soit $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}f$. Résumons :

Théorème 1.5.4. *Si $p - m = 3$ (mod 4) alors $\mathcal{A}_{p,m}$ n'est pas simple, et l'on a :*

$$\mathcal{A}_{p,m} \cong \mathcal{A}^+_{p,m} \oplus \mathcal{A}^+_{p,m}$$

Il existe alors une algèbre de Clifford non-universelle $\mathcal{B}_{p,m}$ pour $\mathbf{R}_{p,m}$, dans ce cas elle est isomorphe à $\mathcal{A}^+_{p,m}$.

Quand $p-m = 3 \pmod 4$, il est parfois plus facile de construire une algèbre de Clifford non-universelle $\mathcal{B}_{p,m}$ que de construire une une algèbre de Clifford universelle $\mathcal{A}_{p,m}$; il est plus pratique alors de construire une algèbre de Clifford $\mathcal{A}_{p,m}$ à partir de l'algèbre de Clifford $\mathcal{B}_{p,m}$. Supposons que $k : \mathbf{R}_{p,m} \to \mathcal{B}_{p,m}$ est une application de Clifford. Si $e^{\mathcal{B}}_\Omega$ est l'élément de volume correspondant, alors $e^{\mathcal{B}}_\Omega = \pm 1$. L'application $j(x) = (k(x), -k(x))$ de $\mathbf{R}_{p,m}$ dans $\mathcal{B}_{p,m} \oplus \mathcal{B}_{p,m}$ est donc une application de Clifford qui est prolongeable à un homomorphisme d'algèbre $j : \mathcal{A}_{p,m} \to \mathcal{B}_{p,m} \oplus \mathcal{B}_{p,m}$. Soit $e^{\mathcal{A}}_\Omega$ l'élément de volume de $\mathcal{A}_{p,m}$. Comme $d = p+m$ est impair, $j(e^{\mathcal{A}}_\Omega) = (e^{\mathcal{B}}_\Omega, -e^{\mathcal{B}}_\Omega)$, on déduit donc l'injectivité de j. On a $\dim\mathcal{A}_{p,m} = 2.\dim\mathcal{B}_{p,m}$, donc j est un isomorphisme de $\mathcal{A}_{p,m}$ dans $\mathcal{B}_{p,m} \oplus \mathcal{B}_{p,m}$.

Ainsi, en utilisant j, on peut prendre comme algèbre de Clifford universelle pour $\mathbf{R}_{p,m}$: $\mathcal{B}_{p,m} \oplus \mathcal{B}_{p,m}$. Notons de plus que :

$$\mathcal{A}^{+}_{p,m} = \{(b,b) : b \in \mathcal{B}_{p,m}\} \cong \mathcal{B}_{p,m}$$
$$\mathcal{A}^{-}_{p,m} = \{(b,-b) : b \in \mathcal{B}_{p,m}\}$$

1.5.1 Théorème de Clifford

Clifford a montré que les algèbres de Clifford paires d'un espace euclidien de dimension $2k+1$ peuvent être générées par k algèbres de dimension 4 qui commutent, chacune isomorphe à l'algèbre des quaternions $\mathbf{H}$ (ou $M_2(\mathbf{R})$). Comme $\mathcal{A}^{+}_{2k+1}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{2k}$, ce résultat peut aussi être appliqué aux algèbres de Clifford pour un espace euclidien de dimension paire. Ce qui peut être prolongé pour des algèbres de Clifford d'espaces quadratiques non-dégénérés de dimension paire qu'on peut exprimer conventionnellement en termes des produits tensoriels.
Avant d'énoncer le théorème de Clifford, nous aurons besoin de montrer le résultat utile suivant.

Théorème 1.5.5. *Soit E un espace quadratique, somme orthogonale directe de deux sous-espaces quadratiques $(E,q) = (E_1,q_1) \oplus (E_2,q_2)$. Alors :*

$$\mathcal{A}(E,q) \cong \mathcal{A}(E_1,q_1) \otimes \mathcal{A}(E_2,q_2)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ le produit $\mathcal{A}(E_1,q_1) \otimes \mathcal{A}(E_2,q_2)$. Pour $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on définit $j(x_1+x_2) = (x_1 \otimes 1) + (1 \otimes x_2)$. Ainsi, j est une application linéaire bijective de E dans $\mathcal{G}$, en plus $1 \notin j(E)$. Et comme $x_1 \in \mathcal{A}^{-}(E_1,q_1)$ et $x_2 \in \mathcal{A}^{-}(E_2,q_2)$,

$$(j(x_1+x_2))^2 = -q_1(x_1) + x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2 - q_2(x) = -q(x)$$

. Donc, il s'agit bien d'une application de Clifford de (E,q) dans $\mathcal{G}$.
$j(E_1+E_2)$ génère $\mathcal{G}$ et

$$\dim\mathcal{A} = \dim\mathcal{A}(E_1,q_2).\dim\mathcal{A}(E_2,q_2) = 2^{d_1}2^{d_2} = 2^{d}$$

ce qui implique que $\mathcal{G}$ est une algèbre de Clifford universelle pour (E,q).
□

Théorème 1.5.6. *(Clifford) Soit (E,q) de dimension $2k$, tel que $E = F \oplus G$ est somme orthogonale directe de deux sous-espaces non-dégénéreés de dimensions respectives $2k-2$ est 2. Soit ω_F le volume élémentaire de la sous-algèbre $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}(F,q)$ de $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E,q)$, et soit (g_1,g_2) la base orthogonale de G. Soient $c_1 = \omega_F g_1$ et $c_2 = \omega_F g_2$, et soit C une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ générée par $\{c_1,c_2\}$. Alors :*
(i) C est de dimension 4.
(ii) $\mathcal{A}_F$ et C commutent.

Par conséquent, $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_F \otimes C$.
Si G *est hyperbolique ou si* $g_1^2 = g_2^2 = \omega_F^2$ *alors* $C \cong M_2(\mathbf{R})$. *Si par contre,* $g_1^2 = g_2^2 = -\omega_F^2$, $C \cong \mathbf{H}$.

Prouvons quelques résulats importants pour la classifications des algèbres de Clifford

Théorème 1.5.7. *Si* $p - m = 2$ *ou* 4 *(mod 8) alors* $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$ *et si* $p - m = 0$ *ou* 6 *(mod 8) alors* $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R})$

Démonstration. Par le théorème ci-dessus, $\mathcal{A}_{p+1,m+1} \cong \mathcal{A}_{p,m} \otimes M_2(\mathbf{R}) \cong M_2(\mathcal{A}_{p,m})$, et par récurrence $\mathcal{A}_{p+j,m+j} \cong M_{2^j}(\mathcal{A}_{p,m})$. Ainsi, il suffit de prouver que le résultat est vrai pour $m = 0$ ou $p = 0$. Soit $m = 0$. Supposons que $\mathcal{A}_{8j} \cong M_{2^{4j}}(\mathbf{R})$. Donc

$$\mathcal{A}_{8j+2} \cong M_{2^{4j}}(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{H} \cong M_{2^{4j}}(\mathbf{H})$$
$$\mathcal{A}_{8j+4} \cong M_{2^{4j}}(\mathbf{H}) \otimes M_2(\mathbf{R}) \cong M_{2^{4j+1}}(\mathbf{H})$$
$$\mathcal{A}_{8j+6} \cong M_{2^{4j+1}}(\mathbf{H}) \otimes \mathbf{H} \cong M_{2^{4j+1}}(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \cong M_{2^{4j+3}}(\mathbf{R})$$
$$\mathcal{A}_{8j+8} \cong M_{2^{4j+3}}(\mathbf{R}) \otimes M_2(\mathbf{R}) \cong M_{2^{4j+4}}(\mathbf{R}).$$

Une preuve similaire peut être appliquée pour le cas $p = 0$.

□

Proposition 1.5.8. *Si* $d = p + m = 2k + 1$ *et* $p - m = 1$ *(mod 4) donc* $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{C})$.

Démonstration. Soit F un sous-espace non-dégénéré de $\mathbf{R}_{p,m}$ de dimension $2k$, et soit $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}(F, q)$. Soit e_Ω le volume élémentaire de $\mathcal{A}_{p,m}$ donc $C = \text{vect}(1, e_\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}_{p,m}$ isomorphe à $\mathbf{C}$, et les sous-algèbres $\mathcal{A}_F$ et C commutent. Comme $\mathcal{A}_F$ et C génèrent $\mathcal{A}_{p,m}$ et $\dim(\mathcal{A}_{p,m}) = (\dim \mathcal{A}_F)(\dim C)$, il découle que $\mathcal{A}_{p,m} \cong \mathcal{A}_F \otimes C \cong \mathcal{A}_F \otimes \mathbf{C}$. Si $\mathcal{A}_F \otimes M_{2^k}(\mathbf{R})$ on a $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{C})$. Si $\mathcal{A} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$ alors

$$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{C} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \otimes M_2(\mathbf{C}) \cong M_{2^k}(\mathbf{C})$$

□

La proposition suivante traite le cas $p - m = 3$ (mod 4). Elle découle du théorème 1.5.1.

Proposition 1.5.9. *Si* $d = p + m = 2k + 1$ *alors :*
(i) Si $p - m = 3$ *(mod 8) alors* $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$
(ii) Si $p - m = 7$ *(mod 8) alors* $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$

Démonstration. On a $\mathcal{B}_{p,m} \cong \mathcal{A}^+_{p,m} \cong \mathcal{A}_{p-1,m}$ si p est strictement positif et $\mathcal{B}_{0,m} \cong \mathcal{A}^+_{0,m} \cong \mathcal{A}_{m-1}$ si $p = 0$. □

Résumons. On obtient le tableau détaillé suivant, sur la classification des algèbres de Clifford :

$p-m (\text{mod } 8)$	e_Ω^2	$\mathcal{A}_{p,m}$ $p+m=2k$	$p-m$ (mod 8)	e_Ω^2	$\mathcal{A}_{p,m}$ $p+m=2k+1$
0	1	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	1	-1	$M_{2^k}(\mathbf{C})$
2	-1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	3	1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$
4	1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	5	-1	$M_{2^k}(\mathbf{C})$
6	-1	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	7	1	$M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$

2 Représentations des algèbres de Clifford

Nous nous intéressons maintenant de plus près aux représentations des algèbres de Clifford. Nous considérons donc des représentations d'algèbres :

Définition 2.0.1. *Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre associative, $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$ et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Une $\mathbf{K}$-représentation de l'algèbre A dans E est un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(E)$.*

Remarque. *Pour le cas des $\mathbf{H}$-espaces vectoriels, on peut toujours identifier les endomorphismes $\mathbf{H}$-linéaires de $\mathbf{H}^n$ à $M_n(\mathbf{H})$ malgré la non-commutativité du corps. En effet, il suffit de définir l'action d'un scalaire q sur un vecteur V de $\mathbf{H}^n$ par $V \bullet q = Vq$ (on parle d'espace vectoriel à droite). L'associativité de la multiplication suffit alors pour identifier les matrices aux endomorphismes. Tous les $\mathbf{H}$-espaces vectoriels considérés seront désormais des espaces vectoriels à droite. On peut voir indifféremment un espace E sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (commutatifs) comme des espaces vectoriels à gauche ou à droite : si une multiplication scalaire à gauche est définie, $v \bullet \lambda \equiv \lambda \bullet v$ ($v \in E$, $\lambda \in \mathbf{K}$) définit bien une loi de composition externe à droite grâce à la commutativité du corps. Ainsi, pour les espaces vectoriels sur un corps commutatif, on se permettra toujours d'utiliser et de noter (abusivement) identiquement une loi de composition externe à gauche et à droite.*

On définit la réductibilité, les opérateurs d'entrelacement de manière analogue aux représentations de groupes. On a également un lemme de Schur.

Dans un premier temps, on construit explicitement des représentations d'algèbres de Clifford pour illustrer l'utilisation des théorèmes développés plus haut. Nous citons ensuite deux représentations (matrices de Pauli et matrices gamma) d'utilisation courante en physique. Enfin, nous aborderons la classification et la réductibilité des représentations, en nous appuyant notamment sur la classification des algèbres de Clifford résumée dans le tableau ci-dessus.

2.1 Algèbres $\mathcal{A}_{k,k}$ et $\mathcal{A}_{k,k+1}$

2.1.1 Représentation de $\mathcal{A}_{k,k}$

$\mathcal{A}_{k,k}$ est de dimension 2^{2k}, ce qui correspond à la dimension de $M_2^k(\mathbf{R})$. On peut donc espérer construire une représentation qui soit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{k,k}$ et $M_{2^k}(\mathbf{R})$. C'est effectivement ce que nous allons faire. En effet, si on construit une application de Clifford de $\mathbf{R}_{k,k}$ dans $M_{2^k}(\mathbf{R})$, le prolongement de cette application à $\mathcal{A}_{k,k}$ donnera un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{k,k}$ et une algèbre de Clifford universelle car $k-k=0 \not\equiv 3 \pmod 4$. Or, une algèbre de Clifford universelle pour $\mathbf{R}_{k,k}$ est de dimension $2^{2k} = \dim M_{2^k}(\mathbf{R})$: l'algèbre de Clifford universelle construite sera ainsi bien $M_{2^k}(\mathbf{R})$ tout entier.

Par commodité, on note ici $(e_1^{(k,k)}, \dots, e_k^{(k,k)}, f_1^{(k,k)}, \dots, f_k^{(k,k)})$ une base de $\mathbf{R}_{k,k}$. On peut définir une application de Clifford j_k de la façon suivante :

$$\begin{array}{lcll}
e_i^{(k,k)} & \longmapsto & (\otimes^{k-i} I_2) \otimes (-i\sigma_y) \otimes (\otimes^{i-1}\sigma_x) & \quad 1 \leq i \leq k \\
f_1^{(k,k)} & \longmapsto & \otimes^k \sigma_x & \\
f_j^{(k,k)} & \longmapsto & (\otimes^{j-2} I_2) \otimes \sigma_z \otimes (\otimes^{k+1-j}\sigma_x) & \quad 2 \leq j \leq k
\end{array}$$

Par exemple, si $k=3$:

$$\begin{array}{lcl}
e_1 & \longmapsto & I_2 \otimes I_2 \otimes (-i\sigma_y) \\
e_2 & \longmapsto & I_2 \otimes (-i\sigma_y) \otimes \sigma_x \\
e_3 & \longmapsto & (-i\sigma_y) \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\
f_1 & \longmapsto & \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\
f_2 & \longmapsto & \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\
f_3 & \longmapsto & I_2 \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x
\end{array}$$

Le prolongement de cette application de Clifford donne l'isomorphisme recherché.

L'élément de volume $e_1^{(k,k)} \dots e_k^{(k,k)} f_1^{(k,k)} \dots f_k^{(k,k)}$ est représenté par

$$j_k(e_1^{(k,k)} \dots e_k^{(k,k)} f_1^{(k,k)} \dots f_k^{(k,k)}) = (-1)^{k-1} \otimes^{k-1} I_2 \otimes \sigma_z$$

On remarque aussi que dans la formule définissant l'application de Clifford, les matrices apparaissant à la droite du produit tensoriel sont colinéaires à des matrices de Pauli non diagonales. Ainsi, si on découpe les matrices de $M_{2^k}(\mathbf{R})$ en quatre blocs carrés, un élément de $\mathcal{A}_{k,k}^-$ sera représenté par une matrice de la forme $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ tandis qu'un élément de $\mathcal{A}_{k,k}^+$ sera représenté par une matrice diagonale par blocs. Comme $\mathcal{A}_{k,k} = \mathcal{A}_{k,k}^+ \oplus \mathcal{A}_{k,k}^-$ et j_k est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{A}_{k,k}$ et $M_{2^k}(\mathbf{R})$, on a en fait plus précisément

$$j_k(\mathcal{A}_{k,k}^-) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} A, B \in M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \right\}$$
$$j_k(\mathcal{A}_{k,k}^+) = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} A, B \in M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \right\}$$

Considérons maintenant le plongement de $\mathcal{A}_{k,k}$ dans $\mathcal{A}^+_{k+1,k+1}$ défini par le prolongement de l'application de Clifford suivante :

$$\phi_k : \begin{cases} e_i^{(k,k)} & \longmapsto & e_1^{(k+1,k+1)} e_{i+1}^{(k+1,k+1)} & 1 \leq i \leq k \\ f_i^{(k,k)} & \longmapsto & e_1^{(k+1,k+1)} f_i^{(k+1,k+1)} & 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un plongement car $k - k = 0 \not\equiv 3 \pmod 4$. Examinons comment se traduit ce plongement dans les représentations matricielles données ci-dessus. On calcule pour $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned} j_{k+1}\left(\phi_k\left(e_i^{(k,k)}\right)\right) &= j_{k+1}\left(e_1^{(k+1,k+1)} e_{i+1}^{(k+1,k+1)}\right) \\ &= (\otimes^k I_2) \otimes (-i\sigma_y) \times (\otimes^{k-i} I_2) \otimes (-i\sigma_y) \otimes (\otimes^i \sigma_x) \\ &= j_k\left(e_i^{(k,k)}\right) \otimes (-i\sigma_y\sigma_x) \\ &= -j_k\left(e_i^{(k,k)}\right) \otimes \sigma_z \\ j_{k+1}\left(\phi\left(f_i^{(k,k)}\right)\right) &= -j_k\left(f_i^{(k,k)}\right) \otimes \sigma_z \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \in \mathbf{R}_{k,k}$

$$\begin{aligned} j_{k+1}\left(\phi_k(x)\right) &= \begin{bmatrix} j_k(-x) & 0 \\ 0 & j_k(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_k(x') & 0 \\ 0 & j_k(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $a \in \mathcal{A}_{k,k}$ se représente dans $\mathcal{A}^+_{k+1,k+1}$ comme

$$j_{k+1}\left(\phi_k(a)\right) = \begin{bmatrix} j_k(a') & 0 \\ 0 & j_k(a) \end{bmatrix}$$

2.1.2 Représentation de $\mathcal{A}_{k,k+1}$

On notera ici $\left(e_1^{(k,k+1)}, \ldots, e_k^{(k,k+1)}, f_1^{(k,k+1)}, \ldots, f_{k+1}^{(k,k+1)}\right)$ une base de $\mathbf{R}_{k,k+1}$. On definit cette fois l'application de Clifford l_k de $\mathbf{R}_{k,k+1}$ dans $M_{2^k}(\mathbf{R})$ par :

$$\begin{array}{lcll} e_i^{(k,k+1)} & \longmapsto & (\otimes^{k-i} I_2) \otimes (-i\sigma_y) \otimes (\otimes^{i-1} \sigma_x) & 1 \leq i \leq k \\ f_1^{(k,k+1)} & \longmapsto & \otimes^k \sigma_x & \\ f_j^{(k,k+1)} & \longmapsto & (\otimes^{j-2} I_2) \otimes \sigma_z \otimes (\otimes^{k+1-j} \sigma_x) & 2 \leq j \leq k+1 \end{array}$$

Noter que $l_k\left(e_i^{(k,k+1)}\right) = j_k\left(e_i^{(k,k)}\right)$ et $l_k\left(f_i^{(k,k+1)}\right) = j_k\left(f_i^{(k,k)}\right)$ pour $1 \leq i \leq k$. Par exemple, si $k = 3$:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & \longmapsto & I_2 \otimes I_2 \otimes (-i\sigma_y) \\ e_2 & \longmapsto & I_2 \otimes (-i\sigma_y) \otimes \sigma_x \\ e_3 & \longmapsto & (-i\sigma_y) \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\ f_1 & \longmapsto & \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\ f_2 & \longmapsto & \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\ f_3 & \longmapsto & I_2 \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x \\ f_4 & \longmapsto & I_2 \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \end{array}$$

Le prolongement de l_k à $\mathcal{A}_{k,k+1}$ n'est pas nécessairement un isomorphisme car $k-(k+1) = -1 \equiv 3 \pmod 4$. En l'occurrence, le prolongement n'est en effet pas injectif car $\dim M_{2^k}(\mathbf{R}) = 2^{2k} < 2^{2k+1} = \dim \mathcal{A}_{k,k+1}$. Mais en utilisant le résultat de la section 1.5, on construit aisément un isomorphisme m_k de $\mathcal{A}_{k,k+1}$ vers $M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$ à partir de l_k. Il suffit de définir

$$m_k(a) = (l_k(a), -l_k(a))$$

pour $a \in \mathcal{A}_{k,k+1}$. On peut définir de manière équivalente

$$\widetilde{m}_k(a) = l_k(a) \otimes \sigma_z$$

les applications se déduisant l'une de l'autre par l'isomorphisme d'algèbres entre $M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$ et $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} A, B \in M_{2^k}(\mathbf{R}) \right\}$

$$(A, B) \longmapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

2.2 Exemples en petites dimensions

2.2.1 Matrices de Pauli et $\mathcal{A}_{0,3}$

On considère l'application de Clifford de $\mathbf{R}_{0,3}$ dans $M_2(\mathbf{C})$:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & \longmapsto & \sigma_x \\ e_2 & \longmapsto & \sigma_y \\ e_3 & \longmapsto & \sigma_z \end{array}$$

Le prolongement de cette application à $\mathcal{A}_{0,3}$ définit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{0,3}$ et $M_2(\mathbf{C})$ (le prolongement est injectif car $0-3 \equiv 1 \pmod 4 \not\equiv 3 \pmod 4$; l'image est $M_2(\mathbf{C})$ tout entier par égalité des dimensions).

Sous cet isomorphisme, les trois involutions de l'algèbre de Clifford se traduisent en termes d'opérations usuelles sur des matrices comme on peut le vérifier facilement :

Proposition 2.2.1. *Soit $x \in \mathcal{A}_{0,3}$, représenté par $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Alors a', a^* et $\bar{a}$ sont respectivement représentés par* $\begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = \overline{\mathrm{com}(M)}$, $\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \overline{M}^T$ *et* $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \mathrm{com}(M)^T = \mathrm{adj}(M)$

On peut écrire la représentation matricielles d'une base de l'algèbre de Clifford :

$$1 \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_1e_2 \longmapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad e_1e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1e_2e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

On observe alors que sous cet isomorphisme entre $\mathcal{A}_{0,3}$ et $M_2(\mathbf{C})$, on a :

Proposition 2.2.2. $\mathcal{A}_{0,3}^+ \simeq \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \quad z, w \in \mathbf{C} \right\}$. *De plus, si* $a \in \mathcal{A}_{0,3}^+$ *est représenté par* $\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$, *alors* $\bar{a}$ *est représenté par* $\begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}$.

2.2.2 Matrices gamma de Weyl

Un isomorphisme d'algèbre peut être obtenu entre $\mathcal{A}_{3,1}$ et l'algèbre des matrices gamma de Weyl. Cette sous-algèbre de $M_4(\mathbf{C})$ est engendrée par les quatre matrices suivantes, dites « matrices gamma de Weyl » :

$$\gamma_0 = I_2 \otimes \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma_1 = -i\sigma_x \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = -i\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma_3 = -i\sigma_z \otimes \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient une représentation de $\mathcal{A}_{3,1}$ dans cette algèbre de matrices en définissant l'application de Clifford (de $\mathbf{R}_{3,1}$) suivante :

$$j : e_1 \longmapsto \gamma_1 \quad e_2 \longmapsto \gamma_2 \quad e_3 \longmapsto \gamma_3 \quad e_4 \longmapsto \gamma_0$$

$\mathbf{R}_{3,1}$ étant de dimension paire, cette application se prolonge en un isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{A}_{3,1}$ et un sous-espace de $M_4(\mathbf{C})$.

À travers cette représentation, un vecteur est représenté comme $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ is represented as

$$\begin{bmatrix} 0 & V \\ \mathrm{adj}(V) & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$V = \begin{bmatrix} x_4 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & x_4 + x_3 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs sont représentés par les matrices de la forme : $\begin{bmatrix} 0 & V \\ \mathrm{adj}(V) & 0 \end{bmatrix}$ where V is hermitian.

Par ailleurs, la restriction de cette application à $\mathcal{A}_{3,1}^{+}$ définit un isomorphisme entre cette sous-algèbre et une sous-algèbre de $M_4(\mathbf{C})$ isomorphe à $M_2(\mathbf{C})$. Pour le montrer, calculons d'abord l'action de j sur une base de la sous-algèbre paire :

$$e_1e_2 \longmapsto -i\sigma_z \otimes I_2 = \begin{bmatrix} -i\sigma_z & 0 \\ 0 & -i\sigma_z \end{bmatrix} \qquad e_1e_3 \longmapsto i\sigma_y \otimes I_2 = \begin{bmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & i\sigma_y \end{bmatrix}$$

$$e_1e_4 \longmapsto -\sigma_x \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} -\sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} \qquad e_2e_3 \longmapsto -i\sigma_x \otimes I_2 = \begin{bmatrix} -i\sigma_x & 0 \\ 0 & -i\sigma_x \end{bmatrix}$$

$$e_2e_4 \longmapsto -\sigma_y \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} -\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad e_3e_4 \longmapsto -\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} -\sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$1 \longmapsto I_2 \otimes I_2 = I_4 \qquad e_1e_2e_3e_4 \longmapsto iI_2 \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 \end{bmatrix}$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{A}_{3,1}^{+}$. On écrit

$$x = \lambda 1 + \lambda_{12}e_1e_2 + \lambda_{13}e_1e_3 + \lambda_{14}e_1e_4 + \lambda_{23}e_2e_3 + \lambda_{24}e_2e_4 + \lambda_{34}e_3e_4 + \lambda_{1234}e_1e_2e_3e_4$$

x est alors représenté par

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - i\lambda_{12} - \lambda_{34} + i\lambda_{1234} & \lambda_{13} - \lambda_{14} - i\lambda_{23} + i\lambda_{24} \\ -\lambda_{13} - \lambda_{14} - i\lambda_{23} - i\lambda_{24} & \lambda + i\lambda_{12} + \lambda_{34} + i\lambda_{1234} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda - i\lambda_{12} + \lambda_{34} - i\lambda_{1234} & \lambda_{13} + \lambda_{14} - i\lambda_{23} - i\lambda_{24} \\ -\lambda_{13} + \lambda_{14} - i\lambda_{23} + i\lambda_{24} & \lambda + i\lambda_{12} - \lambda_{34} - i\lambda_{1234} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

On voit grâce à ce calcul que j induit bien un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{3,1}^{+}$ et la sous-algèbre de $M_4(\mathbf{C})$;

Proposition 2.2.3. *La représentation de $\mathcal{A}_{3,1}$ par les matrices gamma de Weyl induit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{3,1}^{+}$ et*

$$\left\{ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \mathrm{com}(M) \end{bmatrix} \quad M \in M_2(\mathbf{C}) \right\} \simeq M_2(\mathbf{C})$$

Si $x \in \mathcal{A}_{3,1}^{+}$, la représentation de $\bar{x}$ est obtenue en remplaçant M par la transposée de sa comatrice dans la matrice 4×4 montrée ci-dessus. Puisque M est de dimension 2, cela donne tout simplement $\begin{bmatrix} \mathrm{adj}(M) & 0 \\ 0 & \overline{M}^T \end{bmatrix}$.

2.3 Réductibilité et classification

Comme on l'a vu plus haut, les algèbres de Clifford sont isomorphes soit à des algèbres complètes de matrices réelles, complètes ou quaternioniques, soit à la somme directe de deux telles algèbres.

On est donc amené dans un premier à classifier les représentations irréductibles des algèbres complètes de matrices $M_n(\mathbf{R})$, $M_n(\mathbf{C})$ et $M_n(\mathbf{H})$ (par représentation de $M_n(\mathbf{K})$, nous entendons par défaut $\mathbf{K}$-représentation de $M_n(\mathbf{K})$ si on se réfère à la définition 2.0.1).

2.3.1 Représentation irréductibles des algèbres complètes de matrices

On fixe une algèbre de matrices $A = M_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$) et une $\mathbf{K}$-représentation irréductible ρ de cette algèbre dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. La multiplication par un scalaire dans E est notée $\bullet$.

On note L_i l'ensemble des matrices de A dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la $i^{\text{ème}}$ colonne. Alors $L_1, \ldots, L_n$ sont des idéaux minimaux à gauche de A (vu comme un anneau) et A est somme de ces idéaux. Soit $V \neq 0 \in \mathbf{K}^n$. $\rho(1)(V) = \mathrm{V}$ d'où $\rho(L_i)(V) \neq \{0\}$ pour un certain L_i. L_i étant un idéal à gauche, $\rho(L_i)(V)$ est un sous-espace stable non-nul de la représentation, donc $\rho(L_i)(V) = E$. On a donc un morphisme de A-modules surjectif entre L_i et E :

$$\begin{array}{ccc} L_i & \longrightarrow & E \\ N & \longmapsto & \rho(N)(V) \end{array}$$

(la structure de A-module est donnée par la multiplication à gauche pour L_i, par l'action de ρ pour E). Ce morphisme surjectif est en fait un isomorphisme par minimalité de L_i. De plus, $L_i \cong \mathbf{K}^n$ en tant que A-module, et donc $E \cong \mathbf{K}^n$ en tant que A-module. Notons que par $\mathbf{R}$-linéarité de ρ, cet isomorphisme est également un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels (sachant qu'on peut toujours voir un $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$-espace vectoriel comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension respectivement double ou quadruple). Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, cet isomorphisme de $\mathbf{R}$-espace vectoriel fournit de plus un opérateur d'entralecement. Nous avons donc :

Proposition 2.3.1. *Toute représentation irréductible de $M_n(\mathbf{K})$ est de dimension n sur $\mathbf{K}$.*

Proposition 2.3.2. *Toute représentation irréductible de $M_n(\mathbf{R})$ est équivalente à la représentation naturelle (où $M \in M_n(\mathbf{R})$ agit par multiplication à gauche sur $V \in \mathbf{K}^n$).*

Si $K = \mathbf{C}$, on a deux cas possibles. Si $V \in \mathbf{C}^n$, $\phi(iV) = \rho(i)(V)$ et il faut donc déterminer $\rho(i)$. Puisque $\rho(i)$ commute avec $\rho(A)$ et $\rho(i)^2 = \rho(i^2) = -\operatorname{id}_E$, $\rho(i) = \pm i \operatorname{id}_E$ d'après Schur. Si $\rho(i) = i \operatorname{id}_E$, alors ρ est équivalente à la représentation naturelle. On vérifie par ailleurs que si $\rho(i) = -i \operatorname{id}_E$, ρ est équivalente à la représentation conjuguée (où $M \in M_n(\mathbf{C})$ agit sur $V \in \mathbf{C}^n$ par $\overline{M}V$). Par ailleurs, il est facile de voir qu'un opérateur d'entrelacement entre la représentation naturelle et la représentation conjuguée est nul.

En outre, une représentation irréductible de $M_n(\mathbf{C})$ induit clairement une $\mathbf{R}$-représentation $\rho_{\mathbf{R}}$ de $M_n(\mathbf{R})$. E étant de dimension réelle $2n$, $\rho_{\mathbf{R}}$ est somme de deux représentations irréductibles de $M_n(\mathbf{R})$ (équivalentes d'après le résultat ci-dessus). Plus précisément, si $(\rho_{\mathbf{R}}, E_1)$ est irréductible, on a $E = E_1 \oplus iE_1$ au sens des représentations (on vérifie que iE_1 est bien une sous-représentation au même titre que E_1 et si $E_1 \cap iE_1 \neq \{0\}$, $E_1 \cap iE_1$ serait une sous-représentation non-triviale de (ρ, E) supposée irréductible). On a ainsi :

Proposition 2.3.3. *Toute représentation irréductible (ρ, E) de $M_n(\mathbf{C})$ est équivalente soit à la représentation naturelle, soit à la représentation conjuguée (où $M \in M_n(\mathbf{C})$ agit sur $V \in \mathbf{C}^n$ par $\overline{M}V$) ; ces deux représentations sont inéquivalentes. Plus précisément, la représentation est équivalente à la représentation naturelle (respectivement conjuguée) si iI_n s'envoie sur $i \operatorname{id}_E$ (respectivement sur $-i \operatorname{id}_E$).*

Une représentation irréductible de $M_n(\mathbf{C})$ induit par ailleurs une représentation de $M_n(\mathbf{R})$ somme de deux sous-représentations irréductibles (équivalentes). Si E_1 est une de ces représentations irréductibles, $E = E_1 \oplus iE_1$.

Il reste à traiter le cas $\mathbf{K} = \mathbf{H}$. Pour cela, on voit d'abord E comme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (qui est donc de dimension $2n$ d'après 2.3.1) en identifiant par exemple $\mathbf{R} + i\mathbf{R} \subset \mathbf{H}$ à $\mathbf{C}$. Alors ρ induit une représentation $\rho_{\mathbf{C}}$ de $M_n(\mathbf{C})$. Cette représentation étant de dimension $2n$ et une représentation de $M_n(\mathbf{C})$ irréductible étant de dimension n, elle se décompose en deux sous-représentations irréductibles :

$$(\rho_{\mathbf{C}}, E) = (\rho_{\mathbf{C},1}, E_1) \oplus (\rho_{\mathbf{C},2}, E_2)$$

En utilisant 2.3.3, on trouve alors, que $\rho(i) = \rho_{\mathbf{C}}(i)'$ agit sur E_1 par $\tau(i) = \pm i \operatorname{id}_E$. Voyons maintenant comment $\rho(M)$ agit sur $\rho(j)E_1$, où $M \in M_n(\mathbf{C})$. Si $v \in E_1$,

$$\rho(M)\rho(j)v = \rho(j)\rho(\overline{M})v \in \rho(j)E_1$$

En particulier, $\rho(i)$ agit donc par $-\tau(i) \operatorname{id}_E = \pm i \operatorname{id}_E$ et $\rho(j)E_1$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Le calcul montre par ailleurs que ρ induit une représentation $\rho_{\mathbf{C},1j}$ de $M_n(\mathbf{C})$ sur $\rho(j)E_1$. Cette représentation de $M_n(\mathbf{C})$ (irréductible car de même dimension que $(\rho_{\mathbf{C},1}, E_1)$) est inéquivalente à $\rho_{\mathbf{C},1}$ d'après la première remarque du paragraphe. On peut donc écrire :

$$(\rho_{\mathbf{C}}, E) = (\rho_{\mathbf{C},1}, E_1) \oplus (\rho_{\mathbf{C},1j}, \rho(j)E_1)$$

où les deux représentations sont irréductibles.

On suppose désormais pour simplifier que $\rho(i)$ agit sur E_1 par i quitte à échanger E_1 et $\rho(j)E_1$. Alors $(\rho_{\mathbf{C}}, E_1)$ est équivalente à la représentation naturelle de $M_n(\mathbf{C})$ et on peut se donner un opérateur d'entrelacement T_1 de $\mathbf{C}^n$ dans E_1. Clairement, T_1 étant non-nul, l'un des deux opérateurs

$$T_0^- : \mathbf{C}^n \ni V \longmapsto \rho(j)T_1(V) - T_1(\overline{V}) \bullet j$$

$$T_0^+ : \mathbf{C}^n \ni V \longmapsto \rho(j)T_1(V) + T_1(\overline{V}) \bullet j$$

est non nul. On note T_0 un opérateur non-nul choisi parmi T_0^+, T_0^-. On pose $\varepsilon = -1$ si $T_0 = T_0^-$ et $\varepsilon = 1$ sinon. Notons qu'avec ces définitions,

$$T_0(V) \bullet j = \varepsilon\rho(j)T_0(V)$$

pour tout $V \in M_n(\mathbf{C})$. Définissons alors pour $W, Z \in \mathbf{C}^n$

$$T(W + Zj) \equiv T_0(W) + \varepsilon T_0(Z) \bullet j$$

On vérifie que cela définit un opérateur d'entrelacement non-nul entre ρ la représentation de $M_n(\mathbf{H})$ sur $\mathbf{H}^n$ définie par :

$$\pi(M + Nj)(V) = (\overline{M} + \overline{N}j)V \qquad (M, N \in M_n(\mathbf{C}), V \in \mathbf{H}^n)$$

Mais cette représentation est équivalente à la représentation naturelle ; un opérateur d'entrelacement est donné par $\mathbf{H}^n \ni V \longmapsto jV$

On a donc montré :

Proposition 2.3.4. *Toute représentation irréductible (ρ, E) de $M_n(\mathbf{H})$ est équivalente à la représentation naturelle. De plus, une telle représentation induit une représentation réductible $(\rho_{\mathbf{C}}, E)$ de $M_n(\mathbf{C})$ qui est somme de deux représentations inéquivalentes. Autrement dit, iI_n agit par i sur l'une et $-i$ sur l'autre. Si E_1 est l'une de ces représentations, on peut écrire $(\rho_{\mathbf{C}}, E) = (\rho_{\mathbf{C}}, E_1) \oplus (\rho_{\mathbf{C}}, \rho(j)E_1)$.*

2.3.2 Représentations pinorielles et spinorielles

On peut maintenant appliquer ceci aux représentations d'une algèbre de Clifford quelconque et de sa sous-algèbre paire. On rappelle la classification :

$p-m$(mod 8)	e_Ω^2	$\mathcal{A}_{p,m}$ $p+m=2k$	$p-m$ (mod 8)	e_Ω^2	$\mathcal{A}_{p,m}$ $p+m=2k+1$
0	1	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	1	-1	$M_{2^k}(\mathbf{C})$
2	-1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	3	1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$
4	1	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	5	-1	$M_{2^k}(\mathbf{C})$
6	-1	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	7	1	$M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$

Nous utiliserons aussi que : $\mathcal{A}_{p,m}^+ \cong \mathcal{A}_{p-1,m} \cong \mathcal{A}_{m-1,p}$. Pour les représentations des sommes directes, on a le résultat suivant (dont la preuve est simple) :

Proposition 2.3.5. *Si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{H}$*, alors* $(1, -1)$ *est représenté par le scalaire* ± 1 *dans toute* $\mathbf{K}$*-représentation irréductible de* $M_n(\mathbf{K}) \oplus M_n(\mathbf{K})$*. De plus :*

- *Si* $(1, -1)$ *est représenté par le scalaire* 1*, la représentation est équivalente à* $\pi(M \oplus N) : \mathbf{K}^n \ni V \longmapsto MV$*.*
- *Si* $(1, -1)$ *est représenté par le scalaire* -1*, la représentation est équivalente à* $\pi(M \oplus N) : \mathbf{K}^n \ni V \longmapsto NV$*.*

Ces deux représentations sont inéquivalentes.

Notons que sous tout isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{A}_{p,m}$, $p-m \equiv 7 \pmod 8$ (respectivement $p - m \equiv 3 \pmod 8$) et $M_{2^{(p+m-1)/2}}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^{(p+m-1)/2}}(\mathbf{R})$ (respectivement $M_{2^{(p+m-1)/2}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{(p+m-1)/2}}(\mathbf{H})$), l'élément de volume e_Ω s'envoie sur $\pm(1, -1)$. La classe d'équivalence d'une représentation d'une telle algèbre de Clifford est donc déterminée par l'image de l'élément de volume.

Remarque. *Plus généralement, lorsque l'élément de volume est dans le centre d'une certaine algèbre de Clifford (c'est-à-dire lorsque la dimension de l'espace vectoriel est impaire), on appelle « chiralité » d'une représentation irréductible de cette algèbre l'action de l'élément de volume pour cette représentation irréductible. Le concept coïncide avec celui de théorie quantique des champs.*

Nous introduisons maintenant les pineurs et les spineurs :

Définition 2.3.6. *Soit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{H}$*. Soit* (ρ, E) *une* $\mathbf{K}$*-représentation (pas nécessairement irréductible) de* $\mathcal{A}_{p,m}$*.*

- *On dit qu'un sous-espace* F *de* E *est un pineur si* ρ*, restreinte à* F*, induit une* $\mathbf{K}$*-représentation irréductible de* $\mathcal{A}_{p,m}$*. La restriction de la représentation à* F *est alors dite représentation pinorielle.*
- *On dit qu'un sous-espace* F *de* E *est un spineur si* ρ*, restreinte à* F*, induit une* $\mathbf{K}$*-représentation irréductible de* $\mathcal{A}^+_{p,m}$*. La restriction de la représentation de* $\mathcal{A}^+_{p,m}$ *à* F *est alors dite représentation spinorielle.*

Nous allons identifier les pineurs et les spineurs pour chaque type d'algèbre de Clifford, selon $p - m \pmod 8$. On pose $k = \left[\frac{p+m}{2}\right]$ comme dans le tableau.

- $\boldsymbol{p - m \equiv 0 \pmod 8}$

  Dans ce cas, $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R})$. La représentation naturelle de $M_{2^k}(\mathbf{R})$ — sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^{2^k}$ — fournit ainsi une $\mathbf{R}$-représentation pinorielle de l'algèbre de Clifford. D'après 2.3.2, toute $\mathbf{R}$-représentation pinorielle est équivalente à cette représentation. On fixe une telle représentation (ρ, E).
  Pour la sous-algèbre paire, $\mathcal{A}^+_{p,m} \cong \mathcal{A}_{p-1,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{R})$. D'après 2.3.5, ρ se décompose en deux sous-représentations irréductibles de $\mathcal{A}^+_{p,m}$ (donc en deux représentations spinorielles). Soit E_1 une de ces représentations et supposons par exemple que e_Ω agisse par 1 sur E_1. Fixons $v \in \mathcal{A}^-_{p,m}$ un vecteur de norme non nulle. On vérifie alors que $\mathcal{A}^+_{p,m} v = v \mathcal{A}^+_{p,m}$, que v anticommute avec e_Ω et que ρ induit donc une représentation irréductible de $\mathcal{A}^+_{p,m}$ sur $\rho(v)E_1$ où e_Ω agit par -1.

La représentation pinorielle se décompose ainsi comme $E_1 \oplus \rho(v)E_1$, soit en deux **R**-représentations spinorielles inéquivalentes.

— $\boldsymbol{p - m \equiv 1}$ **(mod 8)**

On a ici $\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{C})$. En utilisant 2.3.3, on voit qu'il existe deux **C**-représentations pinorielles inéquivalentes (de dimension complexe 2^k) selon que i agisse par $+i$ où $-i$ sur l'espace de représentation.
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R})$. En voyant un pineur — espace vectoriel ici complexe — comme un espace vectoriel réel de dimension double, on obtient que la représentation pinorielle se décompose en deux **R**-représentations spinorielles. Ces **R**-représentations sont équivalentes, toujours d'après 2.3.2.

— $\boldsymbol{p - m \equiv 2}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$. En invoquant 2.3.4, il existe une unique **H**-représentation pinorielle (de dimension quaternionique 2^{k-1}).
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$. Par des arguments similaires au cas précédent, on trouve que E se décompose en $E_1 \oplus \rho(j)E_1$ où $(\rho,\, E_1)$, $(\rho,\, \rho(j)E_1)$ sont deux **C**-représentations spinorielles inéquivalentes (de dimension complexe 2^{k-1}) ; l'élément de volume e_Ω agit par i sur l'une, $-i$ sur l'autre.

— $\boldsymbol{p - m \equiv 3}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$. Comme vu en 2.3.5, il existe deux **H**-représentations pinorielles inéquivalentes (de dimension quaternionique 2^{k-1}), là encore distinguées par l'image de l'élément de volume.
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$. Dans ce cas, par un argument de dimension, la représentation pinorielle est aussi spinorielle (autrement dit, la restriction à $\mathcal{A}^+_{p,m}$ n'affecte pas l'irréductibilité).

— $\boldsymbol{p - m \equiv 4}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$. En invoquant 2.3.4, il existe une unique **H**-représentation pinorielle (de dimension quaternionique 2^{k-1}).
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^{k-2}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-2}}(\mathbf{H})$. En raisonnant comme dans le cas $p-m \equiv 0 \ (\mathbf{mod}\ 8)$, on trouve que la représentation pinorielle se décompose en deux **H**-représentations spinorielles inéquivalentes, toujours distinguées par la chiralité.

— $\boldsymbol{p - m \equiv 5}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{C})$. Il y a deux **C**-représentations pinorielles inéquivalentes (de dimension 2^k). On fixe une telle représentation (ρ, E).
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$. ρ induit donc une **C**-représentation de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$ sur E. Désormais, on notera abusivement $\rho(M)$ $(M \in M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}))$ pour la

représentation de l'élément de l'algèbre paire qui s'envoie sur M. Cette observation suggère de munir E d'une structure de $\mathbf{H}$-espace vectoriel. On remarque d'abord que cette représentation induit à son tour une $\mathbf{C}$-représentation $(\rho_{\mathbf{C}}, E)$ de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$ sur E et en raisonnant comme pour la preuve de 2.3.4, on décompose

$$(\rho_{\mathbf{C}}, E) = (\rho_{\mathbf{C}}, E_1) \oplus (\rho_{\mathbf{C}}, \rho(j)E_1)$$

où les deux termes sont des $\mathbf{C}$-représentations irréductibles de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$; on suppose que $\rho(i)$ agit par i sur E_1 et $-i$ sur $\rho(j)E_1$. Mais $(\rho_{\mathbf{C}}, E_1)$ (par exemple) induit encore une $\mathbf{R}$-représentation $(\rho_{\mathbf{R}}, E_1)$ de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{R})$ et selon 2.3.3, on peut écrire

$$(\rho_{\mathbf{R}}, E_1) = (\rho_{\mathbf{R}}, E'_1) \oplus (\rho_{\mathbf{R}}, iE'_1)$$

où les deux termes sont des représentations irréductibles. Choisissons une $\mathbf{R}$-base $(e_1, \ldots, e_{2^{k-1}})$ de E'_1. Alors $(e_1, \ldots, e_{2^{k-1}})$ est une $\mathbf{C}$-base de E_1, $(\rho(j)e_1, \ldots, \rho(j)e_{2^{k-1}})$ est une $\mathbf{C}$-base de $\rho(j)E_1$. Définissons alors une conjugaison σ sur E par
$\sigma(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{2^{k-1}} e_{2^{k-1}} + \mu_1 \rho(j)e_1 + \ldots + \mu_{2^{k-1}} \rho(j)e_{2^{k-1}}) \equiv \overline{\lambda_1} e_1 + \ldots + \overline{\lambda_{2^{k-1}}} e_{2^{k-1}} + \overline{\mu_1} \rho(j)e_1 + \ldots + \overline{\mu_{2^{k-1}}} \rho(j)e_{2^{k-1}}$ pour $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{C}$
On vérifie alors que $\mathcal{J} \equiv \rho(j)\sigma$ est une application de E antilinéaire vérifiant $\mathcal{J}^2 = -1$: on dit que c'est une structure quaternionique pour E. Elle permet de définir une structure de $\mathbf{H}$-espace vectoriel pour E en posant :

$$v \bullet (w + zj) \equiv w \bullet v + z \bullet \mathcal{J}(v)$$

pour $v \in E$ et $w, z \in \mathbf{C}$. La dimension de E sur $\mathbf{H}$ est alors 2^{k-1}. On vérifie alors que sous cette structure de $\mathbf{H}$-espace vectoriel, ρ devient une $\mathbf{H}$-représentation de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$ (autrement dit, on a obtenu la $\mathbf{H}$-linéarité). Pour le vérifier, on utilise essentiellement si $M \in M_{2^{k-1}}(\mathbf{R})$, $\rho(M)$ stabilise $E'_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(e_1, \ldots, e_{2^{k-1}})$ d'après que ce qui a été vu plus haut ; ainsi, les coefficients de matrice de $\rho(M)$ dans $(e_1, \ldots, e_{2^{k-1}})$ sont réels et en particulier $\sigma\rho(M)e_i = \rho(M)e_i$.
Nous avons donc montré que dans ce cas, la représentation pinorielle est elle-même $\mathbf{H}$-représentation spinorielle (de dimension 2^{k-1} sur $\mathbf{H}$).

— $\boldsymbol{p - m \equiv 6}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R})$. Il existe donc une unique $\mathbf{R}$-représentation pinorielle (de dimension 2^k). Comme d'habitude, on fixe une telle représentation (ρ, E).
$\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$. Cela suggère de munir E d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Pour cela, on définit :

$$(\lambda + i\mu) \bullet v \equiv \lambda \bullet v + \mu\rho(i)v$$

Ainsi, la représentation pinorielle induit une $\mathbf{C}$-représentation de $M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$ de dimension 2^{k-1}. Cette représentation est spinorielle par sa dimension.

$p-m$ (mod 8)	$\mathcal{A}_{p,m}$	$\mathcal{A}^+_{p,m}$	Pineur(s)	Spineur(s)
0	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}^{2^k}$	$\mathbf{R}^{2^{k-1}}$ (χ)
1	$M_{2^k}(\mathbf{C})$	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	$\mathbf{C}^{2^k}$ (χ)	$\mathbf{R}^{2^k}$
2	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$	$\mathbf{H}^{2^{k-1}}$	$\mathbf{C}^{2^{k-1}}$ (χ)
3	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	$\mathbf{H}^{2^{k-1}}$ (χ)	$\mathbf{H}^{2^{k-1}}$
4	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	$M_{2^{k-2}}(\mathbf{H}) \oplus M_{2^{k-2}}(\mathbf{H})$	$\mathbf{H}^{2^{k-1}}$	$\mathbf{H}^{2^{k-2}}$ (χ)
5	$M_{2^k}(\mathbf{C})$	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{H})$	$\mathbf{C}^{2^k}$ (χ)	$\mathbf{H}^{2^{k-1}}$
6	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	$M_{2^{k-1}}(\mathbf{C})$	$\mathbf{R}^{2^k}$	$\mathbf{C}^{2^{k-1}}$ (χ)
7	$M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$	$M_{2^k}(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}^{2^k}$ (χ)	$\mathbf{R}^{2^k}$

TABLE 1 – Pineurs et spineurs en fonction du type d'algèbre de Clifford

Elle est équivalente à la représentation naturelle pour la structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel dont nous avons muni E.

— $\boldsymbol{p-m \equiv 7}$ **(mod 8)**

$\mathcal{A}_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}^+_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbf{R})$. La discussion est analogue au cas $p-m \equiv 3$ (**mod** 8). Il existe deux $\mathbf{R}$-représentations pinorielles inéquivalentes (de dimension 2^k), distinguées par l'image de l'élément de volume et la restriction à l'algèbre paire n'affecte pas l'irréductibilité.

Les résultats sont récapitulés dans le tableau 1. La notation χ signifie qu'il existe deux pineurs (ou spineurs) inéquivalents distingués par la chiralité (c'est-à-dire l'action de l'élément de volume sous la représentation considérée).

3 Algèbres de Clifford et groupes orthogonaux

Dans cette section, nous nous intéressons à l'utilisation des algèbres de Clifford pour l'étude des groupes orthogonaux $O(p,m)$ et $SO(p,m)$.

3.1 Groupe de Clifford

Définition 3.1.1 (Groupe de Clifford)**.** *Soit (E,q) un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non-dégénérée q. Soit $\mathcal{A}(E,q)$ une algèbre de Clifford universelle sur E engendrée par l'application de Clifford j. Le groupe de Clifford de $\mathcal{A}(E,q)$, noté $\Gamma(E,q)$, est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}(E,q)$ tels que $j(E)$ soit stable par « conjugaison adjointe » avec ces éléments :*

$$\Gamma(E,q) = \left\{ g \in \mathcal{A}(E,q) \quad gj(E)g'^{-1} \subset j(E) \right\}$$

($gj(E)g'^{-1}$ a bien un sens car si g est inversible, alors g' est inversible d'inverse $(g^{-1})')$).

On identifiera désormais $j(E)$ et E comme il est d'usage. Nous avons d'abord le résultat suivant :

Proposition 3.1.2. *L'application α de $\Gamma(E,q)$ dans $\mathrm{End}(E)$ définie par*

$$\alpha(g)(x) = gxg'^{-1} \quad g \in \Gamma(E,q), x \in E$$

est un morphisme de groupes de $\Gamma(E,q)$ dans $\mathrm{GL}(E)$. Le noyau du morphisme est $\mathbf{R}^*$

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente. Montrons donc que le noyau du morphisme est $\mathbf{R}^*$.

L'inclusion $\mathbf{R}^* \subset \ker\alpha$ est claire.

Soit $g \in \Gamma(E,q)$ tel que $\forall x \in E \quad gxg'^{-1} = x$ i.e $gx = xg'$. On décompose g en parties paire et impaire : $g = g^+ + g^-$. Alors

$$g^+x + g^-x = xg^+ - xg^-$$

pour $x \in E$. En identifiant les parties paire et impaire, il vient

$$g^+x = xg^+ \qquad g^-x = -xg^-$$

Ainsi, g^+ est dans le $\mathcal{Z}(\mathcal{A}(E,q)) \cap \mathcal{A}(E,q)^+$. Que $\dim(E)$ soit pair ou impair, cela entraîne $g^+ \in \mathbf{R}$.

Ensuite, la relation de commutation pour g^- entraîne $g^- \in C_{\mathcal{A}(E,q)}(\mathcal{A}(E,q)^+) = \mathrm{Vect}(1, e_\Omega)$. Donc $g^- \in \mathrm{Vect}(1, e_\Omega) \cap \mathcal{A}(E,q)^-$. Si $\dim E$ est pair, cela entraîne immédiatement $g^- = 0$. Si $\dim E$ est impair, on a $g^- = \lambda e_\Omega$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) et donc g^- commute avec tout vecteur. Mais g^- anticommute également avec tout vecteur ; ainsi, g annule tout élément de l'algèbre par multiplication, d'où $g^- = 0$.

Finalement, on a $g = g^+ \in \mathbf{R}^*$ ($g \neq 0$ car g inversible). □

La première partie de la proposition entraîne :

Corollaire 3.1.3. $\Gamma(E,q) = \{g \in \mathcal{A}(E,q) \quad gEg'^{-1} = E\} = \{g \in \mathcal{A}(E,q) \quad gE = Eg'\}$.

Le groupe de Clifford est par ailleurs stable par les trois involutions :

Lemme 3.1.4. *Le groupe de Clifford est stable par l'involution principale, la transposition et la conjugaison de Clifford.*

Démonstration. Si $g \in \Gamma(E,q)$, g' est inversible. D'après le corollaire, $g' \in \Gamma(E,q)$ si et seulement si $g'E = Eg'$. Cette égalité s'obtient en appliquant l'involution principale à $gE = Eg$. Le cas des autres involutions se traitent de façon analogue. □

Nous allons montrer plus précisément que $\alpha(\Gamma(E,q)) = O(E,q)$. Pour cela, nous aurons besoin d'introduire la norme d'un élément a de l'algèbre de Clifford :

Définition 3.1.5 (Norme dans l'algèbre de Clifford)**.** *On définit la norme d'un élément a de l'algèbre de Clifford par $\Delta(a) = \bar{a}a$.*

En particulier, la norme d'un élément de $x \in E$ est $q(x)$.

Commençons par un lemme qui sera utile pour la construction explicite de groupes de Clifford :

Lemme 3.1.6. *Soit $a \in \mathcal{A}(E,q)$. a est inversible si et seulement $\Delta(a)$ l'est.*

Démonstration. Il est clair que si $\Delta(a)$ est inversible (et donc admet en particulier un inverse à gauche), a l'est. Réciproquement, si $gg^{-1} = 1$, alors $\overline{g^{-1}}\bar{g}gg^{-1} = 1$ d'où $g^{-1}\overline{g^{-1}}\Delta(g) = g^{-1}\overline{g^{-1}}\bar{g}g = 1$. □

Pour les éléments du groupe de Clifford, nous avons la propriété :

Proposition 3.1.7. $\Delta(\Gamma(E,q)) \subset \mathbf{R}^*$

Démonstration. Soit $g \in \Gamma(E,q)$. Il suffit de montrer $\Delta(g) = \bar{g}g \in \ker \alpha$ d'après la proposition 3.1.2. On fixe $x \in E$. Alors $y \equiv gxg'^{-1} \in E$.

En conjuguant l'égalité $gx = yg'$, on obtient $x\bar{g} = \overline{g'}y = \bar{g}'y$. Puis en appliquant l'involution principale, $x\bar{g}' = \bar{g}y$ d'où $x = \bar{g}y(\bar{g}')^{-1} = \alpha(\bar{g}g)(x)$. □

Corollaire 3.1.8. *Si $g \in \Gamma(E,q), x \in E$, $\Delta(\alpha(g)x) = \Delta(x)$. Autrement dit, $\alpha(\Gamma(E,q)) \subset O(E,q)$.*

Démonstration. Fixons $g \in \Gamma(E,q), x \in E$.

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha(g)(x)) &= \Delta(gxg'^{-1}) \\
&= \overline{g'^{-1}}\bar{x}\bar{g}gxg'^{-1} \\
&= \Delta(g'^{-1})\Delta(g)\Delta(x)
\end{aligned}$$

où on a utilisé pour la dernière égalité que la norme d'un élément du groupe de Clifford est réelle. Or $\Delta(g'^{-1}) = \Delta((g^{-1})') = \Delta(g^{-1})' = \Delta(g^{-1})$ en utilisant que $a' = a$ pour $a \in \mathbf{R}$. De plus, $1 = \Delta(gg^{-1}) = \Delta(g)\Delta(g^-1)$. Donc $\Delta(\alpha(g)(x)) = \Delta(x)$ et le corollaire est démontré. □

Pour montrer l'inclusion réciproque $O(E,q) \subset \alpha(\Gamma(E,q))$, on remarque d'abord $\alpha(\Gamma(E,q))$ contient les réflexions par rapport à des vecteurs anisotropes (c'est-à-dire par rapport à des vecteurs qui n'annulent pas la forme quadratique). Si x est un vecteur anisotrope, on vérifie que x est bien dans le groupe de Clifford et que la réflexion par rapport à l'orthogonal de x est simplement donnée par $\alpha(x)$. Or, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1.9 (Théorème de Cartan-Dieudonné)**.** *Soit (F,r) un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non-dégénérée r. Alors toute isométrie de F est produit d'au plus* $\dim F$ *réflexions par rapport à des vecteurs anisotropes.*

Ceci implique immédiatement :

Corollaire 3.1.10. $\alpha(\Gamma(E,q)) = O(E,q)$.

3.2 Groupes Pin et Spin

α est donc surjectif sur $O(E,q)$. Toutefois, son noyau $\mathbf{R}^*$ est assez grand. Sachant que $\alpha(g) = \alpha\left(\frac{g}{\sqrt{|\Delta(g)|}}\right)$, on obtient encore une surjection en se restreignant aux éléments du groupes g de norme ± 1. Ces éléments forment le groupe Pin.

$$\mathrm{Pin}(E,q) = \{g \in \Gamma(E,q) \quad \Delta(g) = \pm 1\}$$

Le noyau de la restriction de α à Pin est $\{\pm 1\}$.

On peut maintenant s'intéresser aux éléments de ce groupe qui s'envoient dans $SO(E,q)$. Pour cela, nous avons besoin de la proposition :

Proposition 3.2.1. *Tout élément du groupe de Clifford peut s'écrire comme produit de vecteurs anisotropes. Si $\Gamma(E,q) \ni g = v_1 \dots v_k$ où les v_i sont des vecteurs anisotropes, $\Delta(g) = q(v_1)\dots q(v_k)$.*

Démonstration. Soit $g \in \Gamma(E,q)$. $\alpha(g) \in O(E,q)$, donc d'après Cartan-Dieudonné, il existe $v_1, \dots, v_k \in E$ anisotropes tels que $\alpha(g) = \alpha(v_1)\dots\alpha(v_k)$ (puisque $\alpha(v)$ est la réflexion par rapport à l'orthogonal v). Cela entraîne $\alpha(gv_1^{-1}\dots v_k^{-1}) = I$. D'après 3.1.2, il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $gv_1 \dots v_k = \lambda$, ce qui complète la preuve.

La deuxième partie de la proposition s'obtient par un simple calcul. $\square$

Si $g \in \Gamma(E,q)$ peut s'écrire comme un nombre pair de vecteurs anisotropes, alors $g \in \mathcal{A}(E,q)^+$ et l'automorphisme de E associé s'écrit comme un nombre pair de réflexions et est donc dans $SO(E,q)$. Au contraire, si g peut s'écrire comme produit d'un nombre impair de vecteurs anisotropes, alors $g \in \mathcal{A}(E,q)^-$ et $\alpha(g)$ est dans $O(E,q)\backslash SO(E,q)$. Cette remarque implique qu'un élément du groupe de Clifford ne peut s'écrire à la fois comme un nombre pair et impair de vecteurs anisotropes. On peut donc définir le sous-groupe $\mathrm{Spin}(E,q)$ de $\mathrm{Pin}(E,q)$.

Définition 3.2.2. $\mathrm{Spin}(E,q)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{Pin}(E,q)$ *des éléments de* $\mathrm{Pin}(E,q)$ *qui s'écrivent comme produit d'un nombre pair de vecteurs anisotropes. De manière équivalente,* $\mathrm{Spin}(E,q) = \mathrm{Pin}(E,q) \cap \mathcal{A}(E,q)^+$. *On définit aussi*

$$\mathrm{Spin}(E,q)^+ = \{g \in \mathrm{Spin}(E,q) \quad \Delta(g) = 1\}$$

et

$$\mathrm{Spin}(E,q)^- = \{g \in \mathrm{Spin}(E,q) \quad \Delta(g) = -1\}$$

(d'après 3.2.1, $\mathrm{Spin}(E,q)^- = \emptyset$ *si q est définie-positive ou définie-négative).*

On a la proposition évidente suivante, qui découle du fait que $\mathrm{Spin}(E,q) \subset \mathcal{A}(E,q)^+$ et de la normalisation des éléments de $\mathrm{Spin}(E,q)$:

Proposition 3.2.3. *Si $g \in \mathrm{Spin}(E,q)$, $\alpha(g)(x) = gxg^{-1} = \Delta(g)gx\bar{g}$ si $x \in E$.*

Peut-on décrire simplement le groupe $\mathrm{Spin}(E,q)$ au moins dans des cas particuliers ? Le théorème suivant affirme que c'est effectivement le cas en petite dimension.

Théorème 3.2.4. *Si* $\dim E \leq 5$, $\mathrm{Spin}(E,q) = \{a \in \mathcal{A}(E,q)^+ \quad \Delta(a) = \pm 1\}$.

Démonstration. L'inclusion $\mathrm{Spin}(E,q) \subset \{a \in \mathcal{A}(E,q)^+ \quad \Delta(a) = \pm 1\}$ est claire.

Soit $g \in \{a \in \mathcal{A}(E,q)^+ \quad \Delta(g) = \pm 1\}$. g est inversible puisque $\bar{g}g = \Delta(g) = \pm 1$. Fixons $x \in E\backslash\{0\}$ et montrons $y \equiv \alpha(g)(x) = \Delta(g)gx\bar{g} \in E$.

Comme g est un élément pair de l'algèbre, y est un élément impair. Il peut donc s'écrire $y = \lambda+\mu+\nu$ où λ, μ, ν sont respectivement un vecteur, un trivecteur et un 5-vecteur (par convention, l'espace des trivecteurs est nul si $\dim E < 3$ et de même pour les 5-vecteurs). En conjuguant l'égalité définissant y, on obtient $\bar{y} = -y$. Puisque $\bar{y} = -\lambda + \mu - \nu$, cela donne $\mu = 0$. Si $\dim E < 5$, cela termine la preuve.

Si $\dim E = 5$, on calcule d'une part à partir de la définition de y :

$$y^2 = -q(x)$$

et d'autre part à partir de sa décomposition en multivecteurs :

$$y^2 = (\lambda^2 + \rho^2 e_\Omega^2) + 2\lambda\rho e_\Omega$$

où on a écrit $\nu = \rho e_\Omega$ ($\rho \in \mathbf{R}$) et où on a utilisé que l'élément de volume est dans le centre de l'algèbre en dimension impaire. La partie entre parenthèses est scalaire et le terme restant est un 4-vecteur. En rapprochant les deux expressions de y^2, la partie 4-vecteur doit être nulle, ce qui entraîne $\lambda = 0$ ou $\rho = 0$.

Supposons par l'absurde $\lambda = 0$, i.e $y \in \mathbf{R}e_\Omega$. Choisissons $z \in E$ non-colinéaire à x. Alors $\alpha(g)(z) \notin \mathbf{R}e_\Omega$ par injectivité de $\alpha(g)$ (l'injectivité résulte de l'inversibilité de g et ne suppose pas que g soit élément du groupe de Clifford). Donc en appliquant à z le même raisonnement qu'à x, on trouve $\alpha(g)(z) \in E$. Mais $z-x$ est un autre vecteur indépendant de x et on trouve de même $\alpha(g)(x-z) \in E$. Cela entraîne $y = \alpha(g)(x) \in E$; on aboutit à une contradiction. Finalement, $y \in E$. □

Ce théorème va nous permettre de construire simplement les groupes $\mathrm{Spin}(E,q)$ pour E de petite dimension.

3.3 Construction de groupes Spin de petites dimensions

Désormais, on prendra toujours $(E,q) = \mathbf{R}_{p,m}$ et on posera $d = p+m$. Comme d'habitude, on notera $e_i^{(p,m)}$ pour l'image par l'application de Clifford du i$^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Les ensembles $\mathrm{Spin}(E,q)$, $\mathrm{Spin}(E,q)^+$ et $\mathrm{Spin}(E,q)^-$ pourront alors être respectivement notés $\mathrm{Spin}_{p,m}$, $\mathrm{Spin}^+_{p,m}$, $\mathrm{Spin}^-_{p,m}$.

Avant tout, citons le théorème suivant qui permettra de restreindre les cas à considérer.

Théorème 3.3.1. *Soit*

$$T : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{R}_{p,m} & \longrightarrow & \mathbf{R}_{m,p} \\ e_i^{(p,m)} & \longmapsto & e_{d+1-i}^{(m,p)} \end{array} \right.$$

Il existe un isomorphisme d'algèbres $\psi : \mathcal{A}^+_{p,m} \longrightarrow \mathcal{A}^+_{m,p}$ *tel que*

$$\psi\left(e_1^{(p,m)} e_{j+1}^{(p,m)}\right) = e_{d-j}^{(m,p)} e_d^{(m,p)}$$

pour $1 \leq j \leq d-1$*. Cet isomorphisme d'algèbres induit un isomorphisme de groupes de* $\mathrm{Spin}_{p,m}$ *sur* $\mathrm{Spin}_{m,p}$ *et*

$$\forall g \in \mathrm{Spin}_{p,m}, \forall y \in \mathbf{R}_{p,m} \quad T(\alpha(g)(y)) = \alpha(\psi(g))(T(y))$$

Autrement dit, il suffit de connaître $\mathrm{Spin}_{p,m}$ et son action (à travers α) sur les vecteurs pour connaître $\mathrm{Spin}_{m,p}$ et son action.

3.3.1 Dimension 2

On considère d'abord le cas $d = 2$.

Cas $(p, m) = (2, 0)$ Les éléments de $\mathcal{A}^+_{2,0} \simeq \mathbf{C}$ s'écrivent $\alpha + \beta e_1 e_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). La norme d'un tel élément est $\alpha^2 + \beta^2 \in \mathbf{R}$ et l'élément est donc inversible si et seulement si sa norme est non nulle. On en déduit :

$$\mathrm{Spin}_{2,0} = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 e_2 \quad \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

On remarque par un calcul direct que $\alpha\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 e_2\right)$ est la rotation d'angle θ. De manière plus informelle, la rotation associée à un élément de Spin_3 s'obtient en « doublant l'angle ».

Cas $(p, m) = (1, 1)$ Dans ce cas, la norme de $\alpha + \beta e_1 e_2$ est $\alpha^2 - \beta^2$ et on a ainsi :

$$\mathrm{Spin}^+_{1,1} = \left\{ \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\delta}{2}\right) e_1 e_2 \quad \delta \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\mathrm{Spin}^-_{1,1} = \left\{ \sinh\left(\frac{\delta}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) e_1 e_2 \quad \delta \in \mathbf{R} \right\}$$

$\alpha\left(\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\delta}{2}\right) e_1 e_2\right)$ est la « rotation hyperbolique » d'angle δ, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \cosh(\delta) & \sinh(\delta) \\ \sinh(\delta) & \cosh(\delta) \end{bmatrix}$$

Cela correspond à un boost de Lorentz en 1 dimension (en faisant le changement de variable $\gamma \equiv \cosh(\delta), \gamma\beta \equiv \sinh(\delta)$.

La matrice dans la base canonique de $\alpha\left(\sinh\left(\frac{\delta}{2}\right)+\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right)e_1e_2\right)$ est donnée par

$$\begin{bmatrix}\sinh(\delta) & \cosh(\delta)\\ \cosh(\delta) & \sinh(\delta)\end{bmatrix}$$

Cas $(p,m)=(0,2)$ La construction se déduit du cas $(p,m)=(2,0)$ grâce à 3.3.1. Dans ce cas, le ψ du théorème est trivial — au sens où $\mathcal{A}_{2,0}$ et $\mathcal{A}_{0,2}$ sont respectivement engendrées par $\{\ 1, e_1^{(2,0)}e_2^{(2,0)}\ \}$ et $\{\ 1, e_1^{(0,2)}e_2^{(0,2)}\ \}$ et où $\psi\left(e_1^{(2,0)}e_2^{(2,0)}\right)=e_1^{(0,2)}e_2^{(0,2)}$. Le groupe $\mathrm{Spin}_{0,2}$ s'écrit donc exactement de la même façon que $\mathrm{Spin}_{2,0}$.

En revanche, $\alpha\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1e_2\right)$ est ici la rotation d'angle $-\theta$ (au lieu de θ dans le cas $(2,0)$).

3.3.2 Dimension 3

Cas $(p,m)=(0,3)$ Pour décrire $\mathrm{Spin}_{0,3}$ en termes de groupes « usuels », il est commode d'utiliser la représentation matricielle de $\mathcal{A}_{0,3}$ présentée en 2.2.1. En invoquant 2.2.2, la norme d'un élément de $\mathcal{A}_{0,3}^+$ $a=\begin{bmatrix}z & w\\ -\bar{w} & \bar{z}\end{bmatrix}$ est

$$\bar{a}a=\begin{bmatrix}\bar{z} & -w\\ \bar{w} & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z & w\\ -\bar{w} & \bar{z}\end{bmatrix}=\left(|z|^2+|w|^2\right)I_2$$

On en déduit

$$\mathrm{Spin}_{0,3}=\mathrm{Spin}_{0,3}^+=\left\{\begin{bmatrix}\bar{z} & -w\\ \bar{w} & z\end{bmatrix}\quad z,w\in\mathbf{C}, |z|^2+|w|^2=1\right\}=SU(2)$$

Par des calculs similaires à ceux du cas $(p,m)=(2,0)$, on trouve que α envoie

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)e_2e_3 \quad\longleftrightarrow\quad \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)e_3e_1 \quad\longleftrightarrow\quad \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

$$\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)e_1e_2 \quad\longleftrightarrow\quad \begin{bmatrix}e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}}\end{bmatrix}$$

sur la rotation d'angle θ autour de l'axe x, y, z respectivement. En particulier,

$$\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0\\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{bmatrix}$$

s'envoie sur une rotation d'angle θ autour de l'axe y suivie d'une rotation d'angle ϕ autour de z. On reconnaît ainsi la transformation subie par un spineur de Pauli sous une telle rotation (à un facteur ± 1 près, un élement de $\mathrm{Spin}_{0,3}$ s'envoyant sur la même isométrie que son opposé).

3.3.3 Dimension 4

Cas $(p,m) = (3,1)$ Dans ce cas, il sera aussi utile de recourir à une représentation particulière de l'algèbre $\mathcal{A}_{3,1}$ pour décrire le groupe de spin en termes de groupes usuels. Nous prenons la représentation par les matrices gamma de Weyl définie en 2.2.2. En utilisant plus précisément la proposition 2.2.3, soit $x \in \mathcal{A}_{3,1}^{+}$, représenté par $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{com}(M)} \end{bmatrix}$. Alors $\Delta(x)$ est représenté par $\begin{bmatrix} \det(M) I_2 & 0 \\ 0 & \overline{\det(M)} I_2 \end{bmatrix}$. Les éléments du groupe de spin sont alors exactement ceux qui s'écrivent sous la forme matricielle $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{com}(M)} \end{bmatrix}$ avec $\det(M) = \pm 1$ — c'est-à-dire avec M dans $SL(2,\mathbf{C})$ (ce qui correspond à $\mathrm{Spin}_{3,1}^{+}$) ou $iSL(2,\mathbf{C})$ (ce qui correspond à $\mathrm{Spin}_{3,1}^{-}$. En utilisant encore la proposition 2.2.3, nous pouvons calculer l'action d'un élément du groupe de spin sur un vecteur de l'algèbre de Clifford.

$$\begin{aligned}
\det(M) \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{com}(M)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V \\ \mathrm{adj}(V) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{adj}(M) & 0 \\ 0 & \overline{M}^T \end{bmatrix} \\
= \det(M) \begin{bmatrix} 0 & MV\overline{M}^T \\ \overline{\mathrm{com}(M)}\,\mathrm{adj}(V)\,\mathrm{adj}(M) & 0 \end{bmatrix} \\
= \det(M) \begin{bmatrix} 0 & MV\overline{M}^T \\ \mathrm{adj}(MV\overline{M}^T) & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On peut donc simplement voir un élément du groupe de spin comme une matrice $M \in SL(2,\mathbf{C}) \cup iSL(2,\mathbf{C})$ et un vecteur comme une matrice 2×2 hermitienne V et dire que M agit sur V en l'envoyant sur $\det(M) MV\overline{M}^T$.

Comme dans le cas précédent, on peut se demander quels éléments du groupe de spin s'envoient (par α) sur quelles isométries. L'espace sur lequel l'algèbre de Clifford est construite est $\mathbf{R}_{3,1}$; les isométries forment donc le groupe de Lorentz. Pour établir un lien avec les applications physiques, remarquons que nos variables x_1, x_2, x_3 correspondent aux variables spatiales et x_4 au temps. Nous identifions maintenant les transformations orthochrones. Pour cela, on peut remarquer que si un vecteur est représenté par une matrice 2×2 comme expliqué plus haut, sa composante temporelle est donnée par $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(V)$. La tranformation est donc orthochrone si et seulement si le coefficient de x_4 dans $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\det(M) MV\overline{M}^T) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\det(M)\overline{M}^T MV)$ est positif. Si on pose

$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ce coefficient est donné par $\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)\det(M)$. Nous avons donc prouvé :

Proposition 3.3.2. $\mathrm{Spin}^{+}_{3,1}$ *s'envoie sur les transformations orthochrones tandis que* $\mathrm{Spin}^{-}_{3,1}$ *s'envoie sur les transformations antiorthochrones.*

On peut maintenant considérer des transformations de Lorentz plus particulières. Un simple calcul montre que

$$\pm\left(\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sinh\left(\frac{\delta}{2}\right) e_1 e_4\right) \longleftrightarrow M = \pm e^{\frac{\delta}{2}\sigma_x}$$

s'envoie sur une transformation de Lorentz de rapidité δ le long de l'axe x. Si on considère la matrice 4×4 complète décrivant la transformation :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \overline{\mathrm{com}(M)} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} e^{\frac{\delta}{2}\sigma_x} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\delta}{2}\sigma_x} \end{bmatrix}$$

on reconnaît la transformation d'un spineur à 4 composantes (dans la base de Weyl) sous un tel boost.

On peut aussi considérer par exemple la rotation d'angle θ autour de x, obtenu à partir de l'élément de $\mathrm{Spin}_{3,1}$:

$$\pm \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_x} \end{bmatrix}$$

C'est bien la transformation d'un spineur à 4 composantes sous cette rotation.

Références

[1] D.J.H Garling. Clifford Algebras : An introduction. Cambridge , 2011.

[1'] Ivan. Todorov. Clifford Algebras and Spinors. Theory Group, Physics Department, CERN , 2011.

[2] Lang, S. (1972). Algebra. 1st ed. Reading, Mass. [u.a.] : Addison-Wesley.

[3] Empg.maths.ed.ac.uk. (2016). PG course on Spin Geometry. [online] Available at : https ://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/Spin/ [Accessed 4 Dec. 2016].