

Le contrôle d'un système quantique ouvert à deux niveaux

ADNANE Mostafa

OUAKI Mohamed Mehdi

Introduction

Dans plusieurs situations expérimentales en physique quantique, on peut rencontrer des problèmes de contrôle causés par la présence d'un champ magnétique : une particule de spin $1/2$:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & \Omega(t) \\ \Omega^*(t) & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Où E_1 et E_2 sont des réels fixés $\Omega(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{C})$ est le contrôle, qui peut être écrit comme:

$$\Omega(t) = u(t).e^{i[(E_2 - E_1).t + \Delta(t)]}$$

Où $u(t)$ et $\Delta(t)$ sont réels

Transformation unitaire

On procède dans cette section avec une transformation unitaire de l'Hamiltonian afin d'obtenir un problème de contrôle:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = H. \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{où : } H(u_1(t), u_2(t)) = \begin{pmatrix} -u_1(t) & u_2(t) \\ u_2(t) & u_1(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = U(t). \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(t)} & 0 \\ 0 & e^{i\beta(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

On a besoin donc de trouver les fonctions convenables α et β , un peu de calcul donne:

$$\alpha = E_1 t - \Delta(t)/2 \text{ et } \beta = E_2 t + \Delta(t)/2$$

Ainsi

$$u_1(t) = \frac{\dot{\Delta}}{2} \text{ et } u_2(t) = \Omega(t).e^{i[(E_1-E_2).t-\Delta(t)]} = u(t)$$

Solution de l'équation

Les valeurs propres sont: $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ les vecteurs propres correspondant sont: $\varphi_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}} \pm \text{sgn}(u_1) \cdot \sqrt{1 - \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}} \\ \mp \sqrt{1 + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}} + \text{sgn}(u_1) \cdot \sqrt{1 - \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}} \end{pmatrix}$,

Soit $(c_+(\cdot), c_-(\cdot))$ les coordonnées de la solution de (1) dans la base des φ_{\pm} , donc:

$$\phi(\cdot) = c_+(\cdot)\varphi_+(\cdot) + c_-(\cdot)\varphi_-(\cdot)$$

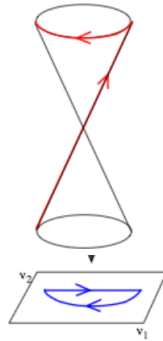
Notons $\delta = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$ on peut trouver $\dot{\varphi}_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(u_1) \cdot \frac{\dot{\delta}}{\sqrt{1-\delta^2}} \varphi_{\mp}$

Donc, quand on dérive cette expression, (1) on trouve que $C := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ satisfait:

$$\dot{C} = \begin{pmatrix} i\sqrt{u_1^2 + u_2^2} & -\frac{1}{2}\text{sgn}(u_1)\frac{\dot{\delta}}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \frac{1}{2}\text{sgn}(u_1)\frac{\dot{\delta}}{\sqrt{1-\delta^2}} & -i\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{pmatrix} C \quad (2)$$

Cette équation n'est pas du tout facile à résoudre, heureusement, quand le couple (u_1, u_2) à une forme simple, on peut trouver de simples solutions, particulièrement, quand $(u_1, u_2) = (\cos, \sin)$.

On retrouve ci-dessous la trajectoire du contrôle choisi sur le spectre.



1 Système fermé:

D'après le paragraphe précédent la variété des valeurs propres de l'Hamiltonian est un double cônes (voir figure ci dessous) qui s'intersectent en $(0,0)$ (intersection conique idéale). Notre but c'est de faire un transfert adiabatique d'un point du cône inférieur vers son symétrique par rapport au plan $z = 0$. On prend du coup un contrôle paramétrisé par une vitesse constante comme expliqué dans la figure suivante:

Partie 1: Le segment

On commence à partir de $(u_1, u_2) = (1, 0)$ et on cherche à atteindre $(u_1, u_2) = (-1, 0)$ après un temps T_1 les solutions de (1) restent collinéaires à $(1, 0)$ et $(u_1, u_2) = (-\frac{2}{T_1}t + 1, 0)$ est convenable. l'état final, après un temps T_1 est $\phi = (e^{-i}, 0)$

Partie 2: L'arc

On commence à $t = 0$, maintenant on pose $(u_1, u_2) = (-\cos(\epsilon t), \sin(\epsilon t))$, $\delta = \sin(\epsilon t)$ et (2) est équivalent à $\dot{C} = \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2}\epsilon \\ -\frac{1}{2}\epsilon & -i \end{pmatrix} C$, où $C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i} \end{pmatrix}$ donc:

$$C(t) = \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} i & \frac{\epsilon}{2} \\ -\frac{\epsilon}{2} & -i \end{pmatrix}\right) \cdot C(0) = \left[\cos\left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot t\right) \times I_2 + \frac{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot t\right)}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}}} \times \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2}\epsilon \\ -\frac{1}{2}\epsilon & -i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i} \end{pmatrix}$$

Donc

$$c_+(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot t\right)}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}}} \times \frac{1}{2}\epsilon \times e^{-i} \text{ et } c_-(t) = \cos\left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot t\right) \times e^{-i} - i \cdot \frac{\sin\left(\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}} \cdot t\right)}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{4}}} \times e^{-i}$$

Ainsi

$$|c_+(t)|^2 = \frac{\sin^2(\sqrt{1+\frac{\epsilon^2}{4}}.t)}{1+\frac{\epsilon^2}{4}} \times \frac{1}{4}\epsilon^2 \text{ et}$$

$$|c_-(t)|^2 = \cos^2(\sqrt{1+\frac{\epsilon^2}{4}}.t) + \frac{\sin^2(\sqrt{1+\frac{\epsilon^2}{4}}.t)}{1+\frac{\epsilon^2}{4}}$$

Dans la base canonique:

$$\phi = \frac{1}{2}((c_+ + c_-)\sqrt{1+\delta} + (c_+ - c_-)\text{sgn}(u_1)\sqrt{1-\delta}, (-c_+ + c_-)\sqrt{1+\delta} + (c_+ + c_-)\text{sgn}(u_1)\sqrt{1-\delta})$$

2 Système ouvert:

Premier modèle

On ajoute dans l'expression de l'Hamiltonian un terme de couplage avec l'environnement du système, celui-ci devient:

$$H(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 - i.\alpha \end{pmatrix}$$

Il est toujours utile d'exhiber les valeurs et des vecteurs propres de l'Hamiltonian, ceux-ci sont donnés par:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-i.\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2 - 4i\alpha\cos(t)}) \text{ et}$$

$$\psi_{\pm} = (-2\cos(t) + i.\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2 - 4i\alpha.\cos(t)}, 2\sin(t))$$

On pose $\psi = X + iY$, avec X et Y deux vecteurs réels. Les équations différentielles vérifiées respectivement sont :

$$\dot{X} = UY - \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\dot{Y} = -UX - \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(|\psi|^2) &= \frac{d}{dt}(|X|^2 + |Y|^2) \\
 &= 2\langle X, \dot{X} \rangle + 2\langle Y, \dot{Y} \rangle \\
 &= 2(\langle X, UY - \alpha AX \rangle + \langle Y, -UX - \alpha AY \rangle) \\
 &= -2(\langle X, AX \rangle + \langle Y, AY \rangle) \\
 &= -2(X_2^2 + Y_2^2) \leq 0
 \end{aligned}$$

On considère le système différentiel suivant :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1(t) & u_2(t) \\ u_2(t) & u_1(t) - i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$$

Avec α un nombre réel non nul qu'on considérera strictement positif et qui modélise une dissipation d'énergie. On résout numériquement grâce au logiciel Mathematica le système différentiel, dans le cas où $\alpha \neq 0$ en utilisant le contrôle $(u_1, u_2)(t) = (-\cos(\epsilon t), \sin(\epsilon t))$.

On fixe la valeur de ϵ à 0,2 qui est idéale dans le cas précédent ou on avait $\alpha = 0$, qui nous permet de changer d'état dans un temps optimal. La seule variable du problème devient dans ce cas le paramètre α

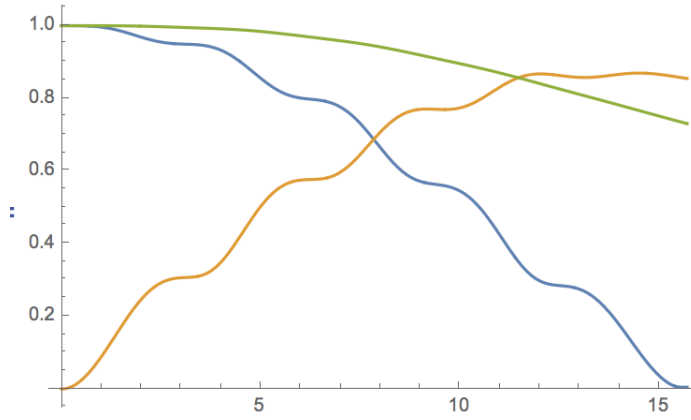
Grâce à l'algorithme suivant on parvient à trouver l'allure de $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$, ce qui nous importe dans notre cas est la valeur finale au temps $\frac{\pi}{\epsilon}$ de $|\psi_1|$ et $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$

```

al = 0.01;
ϵ = .2;
sost = NDSolve[{I ψ1'[t] == Cos[ϵ t] ψ1[t] + Sin[ϵ t] ψ2[t],
  [résolve...[unité im... [cosinus [sinus
  I ψ2'[t] == Sin[ϵ t] ψ1[t] - (Cos[ϵ t] + I al) ψ2[t],
  [unité ima...[sinus [cosinus [unité imaginaire
  ψ1[0] == 1, ψ2[0] == 0}, {ψ1[t], ψ2[t]}, {t, 0, Pi / ϵ}}];
  [nombre pi

ψ1[t_] = ψ1[t] /. sost[[1, 1]];
ψ2[t_] = ψ2[t] /. sost[[1, 2]];
Plot[{Abs[ψ1[t]], Abs[ψ2[t]], Abs[ψ1[t]]^2 + Abs[ψ2[t]]^2}, {t, 0, Pi / ϵ}]
[trac...[valeur abs...[valeur abs...[valeur absolue [valeur absolue [nombre
Evaluate[Abs[ψ1[Pi / ϵ]], Abs[ψ1[Pi / ϵ]]^2 + Abs[ψ2[Pi / ϵ]]^2];
[évalue [valeu...[nombr...[valeu...[nombre pi [valeu...[nombre pi

```

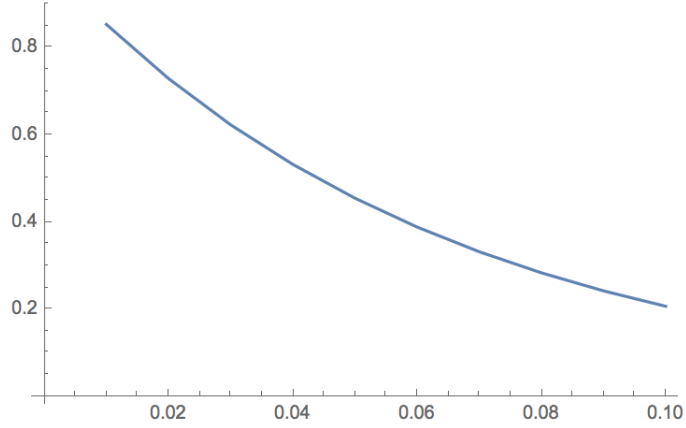


En vert nous avons l'allure de $|\psi_1|$ et $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ en fonction du temps. En bleu, c'est celle du module de $\psi_1(t)$ et en orange celle de $\psi_2(t)$. Ainsi on remarque bien que pour le ϵ qu'on a pris, notre contrôle marche bien car au final la première composante s'annule et donc on arrive à l'état opposé (dans ce cas amorti par le facteur α), néanmoins on arrive à annuler ψ_1 , et l'hamiltonien est le même en $\frac{\pi}{\epsilon}$ qu'au début.

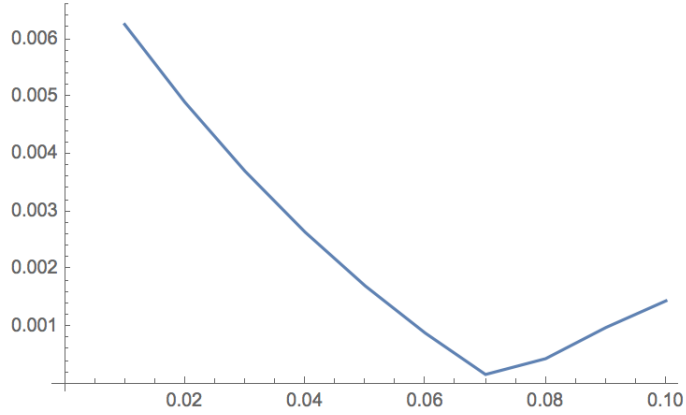
En exécutant l'algorithme pour différentes valeurs de α on obtient le tableau suivant :

Valeur de α	Valeur de $ \psi_1 $	Valeur de $ \psi_1 ^2 + \psi_2 ^2$
0.01	$6,2679 \cdot 10^{-3}$	0,854625
0.02	$4,91536 \cdot 10^{-3}$	0,730387
0.03	$3,71498 \cdot 10^{-3}$	0,624211
0.04	$2,65298 \cdot 10^{-3}$	0,533473
0.05	$1,71664 \cdot 10^{-3}$	0,455927
0.06	$8,94302 \cdot 10^{-4}$	0,389655
0.07	$1,75235 \cdot 10^{-4}$	0,333017
0.08	$4,50413 \cdot 10^{-4}$	0,284614
0.09	$9,91678 \cdot 10^{-4}$	0,243247
0.1	$1,45685 \cdot 10^{-3}$	0,207893

Une représentation graphique de ces données serait plus appropriée afin pour analyser les résultats :



Variation de $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ en fonction de α



Variation de $|\psi_1|$ en fonction de α

On remarque ainsi que plus α augmente, plus la valeur de $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ diminue de manière agressive, vu que le coefficient d'amortissement α dissipe de la probabilité. D'autre part, on note que plus α augmente la valeur du module de ψ_1 devient plus faible jusqu'aux environs de 0.7. Notre modèle donc ne sera valide que si on prend des valeurs faibles de α inférieures à 0.5, une limite supérieure qu'on se fixera. La problématique sera dans ce cas de déterminer le α optimal afin d'avoir en même temps un $|\psi_1|$ très faible afin de considérer qu'on a atteint l'état final, et en même temps un $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ assez proche de 1 pour ne pas avoir une grande dispersion d'énergie.

Un point crucial dans notre étude est de noter que plus α diminue,

la quantité $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ ne cesse de s'approcher de 1, cependant la valeur de $|\psi_1|$ aussi, sauf que celle-ci est majorée par une quantité fixe. Les exécutions suivantes le montrent pour $\alpha = 0,001, \alpha = 0,0001$ et $\alpha = 0,00001$ respectivement.

```
Quit
[arrête noyau de système]

a1 = 0.001;
e = .2;
sost = NDSolve[{I ψ1'[t] == Cos[e t] ψ1[t] + Sin[e t] ψ2[t],
               I ψ2'[t] == Sin[e t] ψ1[t] - (Cos[e t] + I a1) ψ2[t],
               ψ1[0] == 1, ψ2[0] == 0}, {ψ1[t], ψ2[t]}, {t, 0, Pi / e}];

ψ1[t_] = ψ1[t] /. sost[[1, 1]];
ψ2[t_] = ψ2[t] /. sost[[1, 2]];

Evaluate[Abs[ψ1[Pi / e]], Abs[ψ1[Pi / e]]^2 + Abs[ψ2[Pi / e]]^2]

Sequence[0.00762765, 0.984414]

Quit
[arrête noyau de système]

a1 = 0.0001;
e = .2;
sost = NDSolve[{I ψ1'[t] == Cos[e t] ψ1[t] + Sin[e t] ψ2[t],
               I ψ2'[t] == Sin[e t] ψ1[t] - (Cos[e t] + I a1) ψ2[t],
               ψ1[0] == 1, ψ2[0] == 0}, {ψ1[t], ψ2[t]}, {t, 0, Pi / e}];

ψ1[t_] = ψ1[t] /. sost[[1, 1]];
ψ2[t_] = ψ2[t] /. sost[[1, 2]];

Evaluate[Abs[ψ1[Pi / e]], Abs[ψ1[Pi / e]]^2 + Abs[ψ2[Pi / e]]^2]

Sequence[0.00777151, 0.998431]
```



```

Quit
[arrête noyau de système]

a1 = 0.00001;
e = .2;
sost = NDSolve[{I ψ1'[t] == Cos[e t] ψ1[t] + Sin[e t] ψ2[t],
[leur numérique d'équations différentielles]
I ψ2'[t] == Sin[e t] ψ1[t] - (Cos[e t] + I a1) ψ2[t],
[unité ima...sinus [cosinus [unité imaginaire]
ψ1[0] == 1, ψ2[0] == 0}, {ψ1[t], ψ2[t]}, {t, 0, Pi / e}];
[nombre pi]

ψ1[t_] = ψ1[t] /. sost[[1, 1]];
ψ2[t_] = ψ2[t] /. sost[[1, 2]];

Evaluate[Abs[ψ1[Pi / e]], Abs[ψ1[Pi / e]]^2 + Abs[ψ2[Pi / e]]^2]
[évalue [valeur...[nombr...[valeur...[nombre pi [valeur...[nombre pi]

Sequence[0.00778598, 0.999844]

```

On remarque donc que la valeur de $|\psi_1|$ converge vers 0.0078. Ainsi si on désire une précision inférieure à 5.10^{-3} , le α idéal serait le plus petit de telle sorte que $|\psi_1| \leq 5.10^{-3}$, et en se référant à la figure on obtient $\alpha = 0.02$, ce qui correspond à une valeur de la probabilité totale égale à 0.73. Cependant si on veut privilégier la probabilité totale en ayant des précisions de l'ordre de 10^{-2} , on devrait prendre le α le plus petit possible.

Deuxième modèle

Maintenant au cas suivant de la modélisation, on va changer la position du facteur α dans l'hamiltonien. Le système va se formuler sous la forme suivante :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1(t) & u_2(t) + i\alpha \\ u_2(t) + i\alpha & u_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$$

On reprend le même contrôle qu'avant avec $(u_1, u_2)(t) = (-\cos(\epsilon t), \sin(\epsilon t))$.

Calculons maintenant $\frac{d}{dt}(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2)$.

On a : $\frac{d}{dt}(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2) = 2\text{Re}(\overline{\psi_1(t)}\psi_1'(t) + \overline{\psi_2(t)}\psi_2'(t))$.

Or, d'une part on a : $i\psi_1'(t) = \cos(\epsilon t)\psi_1(t) + (\sin(\epsilon t) + i\alpha)\psi_2(t)$ et d'autre part, on a : $i\psi_2'(t) = (\sin(\epsilon t) + i\alpha)\psi_1(t) - \cos(\epsilon t)\psi_2(t)$.

Ainsi, en remplaçant on trouve :

$$\frac{d}{dt}(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2) = 2\text{Re}(-i\cos(\epsilon t)(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2) - 2i(\sin(\epsilon t) + i\alpha)\text{Re}(\overline{\psi_2(t)}\psi_1(t)))$$

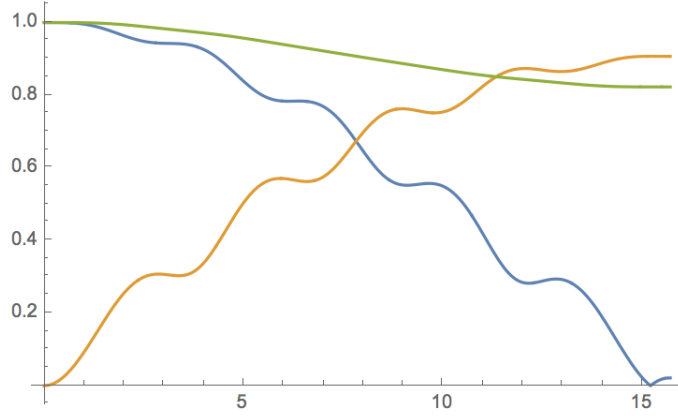
$$\text{Soit : } \frac{d}{dt}(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2) = 2\alpha\text{Re}(\overline{\psi_2}\psi_1)$$

Vu que le ϵ qu'on choisit nous met dans un cadre adiabatique et que la condition initiale est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la dérivée a le même signe que α , et ainsi pour que le modèle soit cohérent il est nécessaire que α soit négatif pour modéliser un terme de dissipation.

En effet, on peut prouver ça vu qu'on prend un α très petit, le théorème de Cauchy à paramètres. En effet, la solution du problème ouvert n'est autre que $\psi = \psi_0 + \alpha\xi$, avec ψ_0 la solution du problème fermé.

Ainsi on a : $\text{Re}(\overline{\psi_2}\psi_1) = \text{Re}(\overline{(\psi_{0,2} + \alpha\xi_2)}(\psi_{0,1} + \alpha\xi_1))$, et donc $\frac{d}{dt}(|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2) = 2\alpha\text{Re}(\overline{\psi_2}\psi_1) = 2\alpha\text{Re}(\overline{\psi_{0,2}}\psi_{0,1})$, en se restreignant juste aux termes d'au plus ordre 1. D'où la justification que α doit être négatif.

Différentes simulations pour ce nouveau modèle, en prenant des valeurs de α entre -0.1 et -0.01 montrent une trop grande imprécision au niveau du module de ψ_1 au temps final, avec plusieurs fluctuations. Notamment pour $\alpha = -0.01$ la valeur finale est 0.02 et celle de la probabilité totale est 0.8. De même pour $\alpha = -0.05$, la valeur finale est 0.012 et celle de la probabilité 0.9. Certes, la probabilité est meilleure dans ce cas comparé au cas précédent, mais la valeur de $|\psi_1|$ est trop instable comme le montre la figure suivante :



Cependant dès que notre valeur de α est supérieure à -0.01 le modèle devient beaucoup plus performant d'un point de vue probabiliste car elle atteint facilement les 0.99, cependant la valeur de $|\psi_1|$ ne descend jamais au dessous de 0.0078 qui était la valeur maximale dans le modèle précédent. En effet, pour $\alpha = -0.0005$, le premier modèle donne une probabilité de 0.92 alors que le deuxième atteint déjà 0.99. Donc la différence entre les deux modèles se trouve que si le premier offre une grande précision de $|\psi_1|$, le deuxième compense ce manque avec une probabilité totale proche de 1, et donc affiche moins de dissipation pour la même valeur de α .

A noter que pour des valeurs de $|\alpha|$ inférieures à 0.0001 les deux modèles deviennent parfaitement semblables du point de vue des résultats.