Projet : Nucleation de vortex dans un condensat de Bose-Einstein en rotation

Mostafa ADNANE, Yassine SBAI SASSI

X2014

Nous notons $< .,. >$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{C})$.

Question 1 :
Montrons que $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= 2Re(< \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} >) \\ &= 2.Re(< \psi, -i(\Delta + V(x,y) - \mu - \Omega L_z)\psi >) \\ &= 2.Re(< \psi, i\Delta\psi >) + 2.Re(< \psi, -i(V(x,y) - \mu)\psi >) + 2.Re(< \psi, i\Omega L_z \psi >)\end{aligned} \tag{1}$$

Or, les opérateurs : $\Delta, (V(x,y) - \mu)\cdot$ et ΩL_z sont tous hermitiens, et pour tout opérateur hermitien L on a :$< L\psi, \psi > = < \psi, L\psi >$ et $< L\psi, \psi > = < \psi, L\psi >^*$ Donc :

$$< L\psi, \psi > \in \mathbb{R}$$

Et $(Re(< \psi, i.L\psi >) = 0$, ainsi : $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$.

Question 2 :

Remarquons d'abord que, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 dx &= [\psi^*.\frac{\partial \psi}{\partial x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx\end{aligned} \tag{2}$$

Puis en intégrant par rapport à y :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 dxdy = -\int_{\mathbb{R}^2} \psi^*.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dxdy$$

et puis en inversant les rôles de x et y, on obtient :

$$\int |\nabla\psi|^2\, dxdy = -\int \psi^* \Delta\psi dxdy$$

Notons aussi l'opérateur $H = -\Delta + (V(x,y) - \mu) - \Omega L_z$. L'expression de l'énergie devient :

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{R}^2} -\psi^*\Delta\psi + (V(x,y)-\mu)\psi^*\psi + \frac{g}{2}|\psi|^2\psi\psi^* - \Omega\psi^* L_z\psi dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi^*(H\psi + \frac{g}{2}|\psi|^2\psi)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi^*(H\psi)dxdy + \frac{g}{2}.\int_{\mathbb{R}^2}|\psi|^4\, dxdy \end{aligned} \tag{3}$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \int \frac{\partial\psi^*}{\partial t}H\psi + \int \frac{\partial\psi}{\partial t}H\psi^* + \frac{g}{2}\int \frac{\partial|\psi|^4}{\partial t} \\ &= \int i(H\psi^* + g|\psi|^2\psi^*)H\psi + \int H(-iH\psi - ig|\psi|^2\psi)\psi^* + \frac{g}{2}\int\frac{\partial|\psi|^4}{\partial t} \\ &= ig\int|\psi|^2\psi^* H\psi - ig\int\psi^* H(|\psi|^2\psi) + \frac{g}{2}\int\frac{\partial|\psi|^4}{\partial t} \\ &= ig\int|\psi|^2\psi^* H\psi - ig\int\psi^* H(|\psi|^2\psi) + g\int(\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi)|\psi|^2 \\ &= ig\int|\psi|^2\psi^* H\psi - ig\int\psi^* H(|\psi|^2\psi) \\ &\quad + g\int(-i(H\psi + g|\psi|^2\psi)\psi^* + i(H\psi^* + g|\psi|^2\psi^*)\psi)|\psi|^2 \\ &= ig[\int|\psi|^2\psi^* H\psi - \int\psi^* H(|\psi|^2\psi) - \int(H\psi)\psi^*|\psi|^2 + (H\psi^*)\psi|\psi|^2] \\ &= ig(-\int\psi^* H(|\psi|^2\psi) + \int(H\psi^*)\psi|\psi|^2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Cette dernière égalité se justifie par le fait que l'opérateur H est hermitien.

Question 3 :

Pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on utilise l'approximation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx \approx \sum_{i=0}^{K-1}\omega_i.f(x_i)$$

Où les ω_i et x_i sont tels que définis dans l'énoncé.

Pour $f \in C^0(\mathbb{R})$ et K donnés, on écrit alors, pour tout n entre 0 et $K-1$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n.H_n(x).f(x)e^{-x^2/2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(H_n(x).f(x)e^{x^2/2})e^{-x^2}dx \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_n\omega_i H_n(x_i).f(x_i)e^{x_i^2/2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Où $\alpha_n = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2}$.
La matrice T est donc donnée par :

$$T_{i,j} = \alpha_i\omega_j H_i(x_j)e^{x_j^2/2}$$

Cette méthode devient exacte si f s'écrit : $f(x) := P(x)e^{-x^2/2}$, avec P un polynôme de degré au plus $K-1$.

La décomposition de f sur la base $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}_n.\psi_n$$

Pour des fonction f de la forme : $f(x) := P(x)e^{-x^2/2}$, avec P un polynôme de degré au plus $K-1$. Les coefficients $\hat{f}_n$ s'annulent pour $n \geqslant K$, la décomposition s'écrit alors :

$$f = \sum_{n=0}^{K-1} \hat{f}_n.\psi_n$$

Donc la matrice T est donnée par :

$$Ti_{i,j} = \psi_j(x_i)$$

Question 4 :
On a : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \hat{f}_{m,n}\psi_m(x)\psi_n(y) \\
&\simeq \sum_{0\leqslant m,n\leqslant K-1} \hat{f}_{m,n}\psi_m(x)\psi_n(y) \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant K^2-1} \hat{f}_{m(i),n(i)}\psi_{m(i)}(x)\psi_{n(i)}(y)
\end{aligned} \tag{6}$$

Ainsi :

$$f(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant K^2-1} \hat{f}_{m(j),n(j)} \psi_{m(j)}(x_{m(i)}) \psi_{n(j)}(x_{n(i)})$$

La matrice Ti est donc donnée par :

$$Ti_{i,j} = \psi_{m(j)}(x_{m(i)}) \psi_{n(j)}(x_{n(i)})$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{m,n} &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \psi_m(x) \psi_n(y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \alpha_m \alpha_n H_m(x) H_n(y) e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha_m \alpha_n e^{-x^2/2} H_m(x) (\sum_{i=0}^{K-1} \omega_i e^{x_i^2/2} H_n(x_i) f(x, x_i)) dx \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_m \alpha_n \omega_i e^{x_i^2/2} H_n(x_i) \int_{\mathbb{R}} H_n(x) f(x, x_i) e^{-x^2/2} dx \\
&= \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_m \alpha_n \omega_i e^{x_i^2/2} H_n(x_i) \sum_{j=0}^{K-1} \omega_j H_m(x_j) f(x_j, x_i) e^{x_j^2/2} \\
&= \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant K-1} \omega_i \omega_j \alpha_m \alpha_n H_n(x_i) H_m(x_j) e^{\frac{x_i^2 + x_j^2}{2}} f(x_j, x_i)
\end{aligned} \tag{7}$$

i et j jouent des rôles symétriques dans les coefficients de $f(x_j, x_i)$ dans la somme précédente, on a alors :

$$\hat{f}_{m,n} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant K-1} \omega_i \omega_j \alpha_m \alpha_n H_m(x_i) H_n(x_j) e^{\frac{x_i^2 + x_j^2}{2}} f(x_i, x_j)$$

Donc :

$$\hat{f}_{m(i),n(i)} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant K^2-1} \omega_{m(j)} \omega_{n(j)} \alpha_{m(i)} \alpha_{n(i)} H_{m(i)}(x_{m(j)}) H_{n(i)}(x_{n(j)}) e^{\frac{x_{n(j)}^2 + x_{m(j)}^2}{2}} f(x_{m(j)}, x_{n(j)})$$

Finalement, la matrice T est donnée par :

$$T_{i,j} = \omega_{m(j)} \omega_{n(j)} \alpha_{m(i)} \alpha_{n(i)} H_{m(i)}(x_{m(j)}) H_{n(i)}(x_{n(j)}) e^{\frac{x_{n(j)}^2 + x_{m(j)}^2}{2}}$$

Question 5 :
Pour éviter toute ambiguité, nous notons ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 les solutions des équations numérotées $(4), (5)$ et (6) dans l'énoncé. Les ψ_i sont les fonctions de Hermite telles que définies dans la partie 3. On a :

$$\forall x, t: \ \phi_1(x,t) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \hat{\phi}_{1,p}(t)\psi_p(x) = \sum_{p=0}^{K-1} \hat{\phi}_{1,p}(t)\psi_p(x)$$

En dérivant :

$$i\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(x,t) = i\sum_{p=0}^{K-1} \hat{\phi}\prime_{1,p}(t)\psi_p(x)$$

D'autre part :

$$(-\Delta + x^2 - \mu)\phi_1 = \sum_{p=0}^{K-1} \hat{\phi}_{i,p}(t)((2p+1)\psi_p(x) - \mu\psi_p(x))$$

Donc en utilisant l'équation (4) de l'énoncé et en identifiant les coefficients des ψ_i dans les deux sommes précédentes, on obtient :

$$\forall p \; i\frac{\partial \hat{\phi}_{1,p}}{\partial t}(t) = (2p+1-\mu)\hat{\phi}_{1,p}(t)$$

La solution de cette dernière équation est donc :

$$\hat{\phi}_{1,p}(t) = \hat{\phi}_{1,p}(t_n)e^{-i(2p+1-\mu)(t-t_n)}$$

D'où :

$$\hat{\phi}_{1,p}(t_{n+1/2}) = \hat{\phi}_{1,p}(t_n)e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}$$

Cette même démarche est applicable pour l'équation numérotée (6) dans l'énoncé, où on obtient :

$$\hat{\phi}_{3,p}(t) = \hat{\phi}_{3,p}(t_n)e^{-i(2p+1-\mu)(t-t_n)}$$

Ainsi le schéma de discrétisation proposé se résume dans les 3 étapes suivantes :
<u>Étape 1 :</u>

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0,t_{n+1/2}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_1(x_{K-1},t_{n+1/2}) \end{pmatrix} = Ti \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,0}(t_{n+1/2}) \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_{1,K-1}(t_{n+1/2}) \end{pmatrix}$$

$$= Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p=0..K-1]. \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{1,0}(t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_{1,K-1}(t_n) \end{pmatrix}$$

$$= Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p=0..K-1].T. \begin{pmatrix} \phi(x_0,t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1},t_n) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Où :$diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p=0..K-1]$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont : $e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}$, et ϕ est la solution de (3) qu'on cherche à approcher.

<u>Étape 2 :</u>

$$\begin{pmatrix} \phi_2(x_0,t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_2(x_{K-1},t_{n+1}) \end{pmatrix} = diag[e^{-i\delta t g|\phi_2(x_p,t_n)|^2}, p=0..K-1]. \begin{pmatrix} \phi_2(x_0,t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_2(x_{K-1},t_n) \end{pmatrix}$$

$$= diag[e^{-i\delta t g|\phi_2(x_p,t_n)|^2}, p=0..K-1]. \begin{pmatrix} \phi_1(x_0,t_{n+1/2}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_1(x_{K-1},t_{n+1/2}) \end{pmatrix} \tag{9}$$

<u>Étape 3 :</u>

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi(x_0, t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_{n+1}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_3(x_0, t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_3(x_{K-1}, t_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= Ti. \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{3,0}(t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_{3,K-1}(t_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1]. \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{2,0}(t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_{2,K-1}(t_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1].T. \begin{pmatrix} \phi_2(x_0, t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi_2(x_{K-1}, t_{n+1}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10}
$$

En combinant les 3 étapes, on obtient une relation entre $\begin{pmatrix} \phi(x_0, t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_{n+1}) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \phi(x_0, t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_n) \end{pmatrix}$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \phi(x_0, t_{n+1}) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_{n+1}) \end{pmatrix} = Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1].T.diag[-i\delta tg|\phi_2(x_p, t_n)|^2, p = 0..K-1].$$

$$Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1].T. \begin{pmatrix} \phi(x_0, t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_n) \end{pmatrix}$$

$$= A. \begin{pmatrix} \phi(x_0, t_n) \\ . \\ . \\ . \\ \phi(x_{K-1}, t_n) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Avec :

$$A = Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1].T.diag[e^{-i\delta tg|\phi_2(x_p,t_n)|^2}, p = 0..K-1].$$

$$Ti.diag[e^{-i(2p+1-\mu)\frac{\delta t}{2}}, p = 0..K-1].T$$

(Remarque : la matrice A ne dépend ni du temps ni de l'espace).

Question 6 :

Pour la discrétisation en espace nous utilisons le schéma :

$$\Delta\psi^n(x_i) = \frac{\psi^n_{i+1} - 2.\psi^n_i + \psi^n_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

.

Suivant ce schéma, l'opérateur Δ a la matrice suivante :

$$M_\Delta = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & . & & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'opérateur x^2 :

$$M_{x^2} = \begin{pmatrix} x_0^2 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & 0 & x_{K-1}^2 \end{pmatrix}$$

La matrice M_n de l'énoncé est donc égale à :

$$M_n = Id + i/2.\delta t(-M_\Delta + M_{x^2} - \mu.Id + R^{n+1/2})$$

Prière de se référer au code Scilab pour l'implémentation de ce schéma.

Question 7 :

Il s'agit d'un schéma qui a pour objectif de minimiser de l'énergie par une méthode de descente de gradient à pas fixe avec projection. La contrainte étant la conservation de la norme L^2. Avec le terme γ , la solution s'épargne d'une dégradation de la solution et l'énergie peut se minimiser.

Question 8 :

Les équations 7 et9 sont formellement équivalentes à une équation de la forme

$$(i - \gamma)\partial_t \psi = L\psi$$

Où L est une matrice hermitienne (nous allons cherhcer explicitement cette matrice dans la question 9) d'ordre K^2, le schéma de Crank-Nicolson nous donne

$$(I - \frac{\delta t}{2(i-\gamma)}U)\psi_{n+1} = (I + \frac{\delta t}{2(i-\gamma)}U)\psi_n$$

Quitte à digonaliser U , par une matrice complexe unitaire et une matrice diagonale réeele, on peut supposer que $U = diag(u_1, .., u_{u_2})$, ainsi pour un δt petit on peut inverser la matrice $I - \frac{\delta t}{2(i-\gamma)}U$. Par conséquent :

$$\psi_{n+1} = D\psi_n$$

Où D est une matrice diagonale, avec sur la diagonale $D_{jj} = \frac{i-(1-\frac{\delta t}{2}u_j)}{i-(1+\frac{\delta t}{2}u_j)}$ pour $0 \leq j \leq K^2 - 1$, donc de carré de module $\mid D_{jj} \mid^2 = \frac{1+(1-\frac{\delta t}{2}u_j)^2}{1+(1+\frac{\delta t}{2}u_j)^2}$, qui est inférieur à 1 pour des valeurs petites de δt. Ce schéma est donc stable, est l'usage du Crank-Nicolson est licite.

Question 9 :

Dans cette question, comme indiqué dans l'énoncé, nous allons projeter l'équation 7 (l'équation 9 se résout de la même façon) sur la famille

$$\{e_m(x)e_n(y), 0 \leq m, n \leq K-1\}$$

Le schéma de Crank-Nicolson appliqué à cette équation nous donne le schéma suivant pour une solution $\psi(t_n, ., .) = \psi_n$:

$$(i-\gamma)\tfrac{\psi_{n+1}-\psi_n}{\delta t} = U(\tfrac{\psi_{n+1}+\psi_n}{2})$$

Avec

$$U = (-\Delta + (1+\varepsilon_x)x^2 + (1+\varepsilon_y)y^2 - \mu - \Omega L_z) = \\ ((-\Delta + x^2 + y^2) + \varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 - \mu - \Omega L_z)$$

Ceci est équivalent à

$$(I - \tfrac{\delta t}{2(i-\gamma)}U)\psi_{n+1} = (I + \tfrac{\delta t}{2(i-\gamma)}U)\psi_n$$

Ou à :

$$M(\tfrac{\psi_{n+1}+\psi_n}{2}) = \psi_n$$

Avec :

$$M = I - \tfrac{\delta t}{2(i-\gamma)}U$$

Nous allons implémenter donc cette équation pour trouver les vecteurs $\psi(t_n, ., .)$. Pour ce faire, on se restreindra à la famille introduit plus haut, et donc on cherchera les matrices respectives à chaque opérateur apparaissant dans la matrice U. Nous allons expliciter la méthode de calcul de ces matrices ci-après.

La matrice de $-\Delta + x^2 + y^2$ *,* M_Δ *:*

Cet opérateur, qui est la somme de $-\partial_x^2 + x^2$ et de $-\partial_y^2 + y^2$ qui sont tous deux diagonaux sur la base des fonctions de Hermite, pour cet effet, notre matrice appliquée sur chacun des élément de la base donne :

$$(-\Delta + x^2 + y^2)e_m e_n = 2(m+n+1)e_m e_n$$

Avec comme convention ; le premier élément de la base écrit est de variable x et le deuxième de variable y.

En utilisant les formules de récurrence et dérivation données dans le début du sujet, on obtient successivement les actions des différentes matrices :

La matrice de x^2 , M_{x^2} :

$$x^2 e_m e_n = \frac{\alpha_m}{4\alpha_{m+2}} e_{m+2} e_n + (m + \tfrac{1}{2}) e_m e_n + m(m-1) \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-2}} e_{m-2} e_n$$

La matrice de y^2, M_{y^2} :

$$y^2 e_m e_n = \frac{\alpha_n}{4\alpha_{n+2}} e_m e_{n+2} + (n + \tfrac{1}{2}) e_m e_n + n(n-1) \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-2}} e_m e_{n-2}$$

La matrice de L_z, M_{L_z} (c'est une matrice hermitienne) :

$$L_z e_m e_n = -i \alpha_m \alpha_n \left(\frac{n}{\alpha_{m+1}\alpha_{n-1}} e_{m+1} e_{n-1} - \frac{m}{\alpha_{m-1}\alpha_{n+1}} e_{m-1} e_{n+1} \right)$$

On obtient donc que

$$U = -M_\Delta + \varepsilon_x M_{x^2} + \varepsilon_y M_{y^2} - \mu I - \Omega M_{L_z}$$

Voici les matrices des opérateurs obtenues et telles que nous les avons implémenté sur Scilab : La matrice de l'opérateur x^2 :

$$M_{x^2} = \begin{pmatrix} 1/2 I_K & 0_{K^2} & 2.\frac{\alpha_2}{\alpha_0} I_K & 0 & . & . \\ 0_{K^2} & 3/2 I_K & . & . & . & . \\ \frac{\alpha_0}{4.\alpha_2} I_K & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & K(K-1).\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_{K-3}} I_K \\ . & . & . & . & . & 0_{K^2} \\ . & . & & \frac{\alpha_0}{4.\alpha_2} I_K & 0_{K^2} & (K-1/2) I_K \end{pmatrix}$$

La matrice de l'opérateur y^2 :

$$M_{y^2} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & B_2 & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & . & B_K \end{pmatrix}$$

Avec :

$$B_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2\frac{\alpha_2}{\alpha_0} & 0 & . & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & . & . & . \\ \frac{\alpha_0}{4.\alpha_2} & 0 & . & 0 & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 0 & K(K-1)\frac{\alpha_{K-1}}{\alpha_{K-3}} \\ . & . & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & \frac{\alpha_{K-3}}{4.\alpha_{K-1}} & 0 & K-1/2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur $-\Delta + x^2 + y^2$ a pour matrice :

$$M_\Delta = 2.diag(0+1, 0+2, ..., 0+K, 1+1, 1+2, ..., 1+K, ...)$$

La matrice de L_z étant difficile a représenter de façon intégrale sous forme de matrice carrée, nous vous prions de bien vouloir la trouver sur notre code Scilab.