Module: Algèbre 2 **Année scolaire: 2020/2021**

Solution de la série des exercies N° 1

Calcul Matriciel

Exercice 1 *Soient les matrices*

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants indiquer ceux qui sont possibles et les calculer

$$AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC.$$

Solution 1

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} -1 & 17 & -17 \\ -14 & -3 & -23 \end{pmatrix};\ BA \text{ n'est pas défini,} \\
AC &= \begin{pmatrix} -16 & 16 \\ 25 & 2 \end{pmatrix};\quad CA = \begin{pmatrix} -25 & 5 & -2 \\ 23 & -1 & -14 \\ -15 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\
AD \text{ n'est pas défini};\quad DA &= \begin{pmatrix} -13 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & -16 \end{pmatrix},\ BC = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ -27 & 18 \\ 8 & -35 \end{pmatrix};\quad CB \text{ n'est pas défini.,} \\
& BD \text{ et } DB \text{ ne sont pas définis} \\
CD &= \begin{pmatrix} 5 & -18 \\ -1 & 18 \\ 0 & -12 \end{pmatrix};\quad DC \text{ n'est pas défini}
\end{aligned}$$

Exercice 2 *Soient deux matrices $M, N \in M_n(\mathbb{R})$.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M^2 - N^2 = (M-N)(M+N)$.*

2. *Calculer les produits AB et BA pour $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Conclure.*

Solution 2

1. Sur quelle condition $M^2 - N^2 = (M-N)(M+N)$.

On a $(M-N)(M+N) = M^2 + MN - NM - N^2$

Donc on a égalité $M^2 - N^2 = (M-N)(M+N)$ si et seulement si $MN - NM = 0$ ou enocre $MN = NM$, on dit dans ce cas les matrices M et N commutent.

2. Calcul des produits AB et BA : On a

$$AB = \begin{pmatrix} -29 & 39 & -7 \\ 14 & 14 & 17 \\ 14 & -26 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 16 & -13 & -16 \\ 16 & -3 & 40 \\ -4 & 12 & -16 \end{pmatrix}$$

On constate que $AB \neq BA$, donc le produit des matrices n'est pas commutatif, (Bien évidemment, il existe des matrices qui vérifient la commutativité), On en déduit que l'égalité précédente n'est pas vraie.

Exercice 3 *(Calcul de puissances par récurrence). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *Calculer A^2, A^3, A^4 en déduire A^n.*

2. *mêmes questions pour*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 3 *1.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -3A$$

On peut aussi constater que

$$
\begin{aligned}
A^4 &= A^3.A = (-3A).A = -3A^2 \\
A^5 &= A^4.A = \left(-3A^2\right).A = -3A^3 = -3(-3A) = 3^2A \\
A^6 &= A^5.A = \left(3^2A\right).A = 3^2A^2 \\
A^7 &= A^6.A = 3^2A^2.A = 3^2A^3 = 3^2(-3A) = -3^3A \\
A^8 &= A^7A = -3^3A.A = -3^3A^2
\end{aligned}
$$

On montre par réccurence que

$$
\begin{cases} A^{2n+1} = (-3)^n A \\ A^{2n} = (-3)^{n-1} A^2 \end{cases}
$$

Le résultat est varie pour $n = 1$, *supposons qu'elle est varie, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *et montrons le pour* $n+1$:

$$
\begin{array}{l}
A^{2n+3} = A^{2n+1}.A^2 = (-3)^n A.A^2 = (-3)^n A^3 = (-3)^n(-3A) = (-3)^{n+1} A \\
A^{2n+2} = A^{2n+1}.A = (-3)^n A.A = (-3)^n A^2.
\end{array}
$$

d'où le résultat.

2. *Pour les matrices qui suivent, on calcule les premières puissances, puis on montre le résultat par réccurence*

$$
B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2y \\ 0 & x^3 \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}.
$$

Donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
n \in \mathbb{N}^* : B^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{pmatrix}.
$$

$$
C = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \ C^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 a - \sin^2 a & -2\cos a \sin a \\ 2\cos a \sin a & \cos^2 a - \sin^2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\sin(2a) \\ \sin(2a) & \cos(2a) \end{pmatrix}
$$

$$
C^3 = C.C^2 = \begin{pmatrix} \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a & -\cos a \sin 2a - \sin a \cos 2a \\ \cos a \sin 2a + \sin a \cos 2a & \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3a) & -\sin(3a) \\ \sin(3a) & \cos(3a) \end{pmatrix}
$$

$$C^n = \begin{pmatrix} \cos(na) & -\sin(na) \\ \sin(na) & \cos(na) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad D^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}; \quad D^4 = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

Donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \in \mathbb{N}^*, D^n = 3^{n-1} D.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad E^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}, \quad E^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

La matrice F est nilpotoante, en effet

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F^3 = 0$$

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *On pose* $N = A - I_3$.

1. *Vérifier que* N *est nilpotente et préciser son indice.*

2. *Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*

Solution 4

1. *On a*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & -8 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc N est nilpotente d'indice 3.

2. *On a $A = N + I$, et par suite $A^n = (N+I)^n$, comme $N.I = I.N$ alors on peux utiliser le binôme de Newton,*

$$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k \\ &= C_n^0 N^0 + C_n^1 N^1 + C_n^2 N^2 \\ &= I + nN + \frac{1}{2} n(n-1) N^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$A^n = \begin{pmatrix} 2n^2 - n + 1 & -n(2n-5) & -2n(2n-3) \\ -n(2n-3) & 2n^2 - 7n + 1 & 2n(2n-5) \\ 2n(n-1) & -2n(n-3) & -4n^2 + 8n + 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *(Calcul de puissances en utilisant un polynôme annulateur). Soient la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et le polynôme } P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X.$$

1. *Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.*
2. *Calculer $P(A)$ et déduire A^n.*

Solution 5

1. *Le polynôme P, se factorise de la manière suivante:*

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X\left(X^2 - 3X + 2\right) = X(X-1)(X-2)$$

On remplace les racines de P, dans l'expression

$$X^n = P(X)Q(X) + aX^2 + bX + c,$$

On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2^n \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 2^n \end{cases}$$

Ce qui donne: $a = 2^{n-1} - 1, b = 2 - 2^{n-1}$,

Le reste de la dévision euclidienne est donné par

$$R(X) = \left(2^{n-1} - 1\right) X^2 + \left(2 - 2^{n-1}\right) X$$

2. *On a*

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -14 \\ -4 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -14 & 14 & -30 \\ -8 & 8 & -16 \\ 7 & -7 & 15 \end{pmatrix}$$

On trouve $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = 0$,

On a $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$, *et par suite* $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$, *et comme* $P(A) = 0$, *Alors*

$$\begin{aligned} A^n &= R(A) = \left(2^{n-1} - 1\right) A^2 + \left(2 - 2^{n-1}\right) A \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+2} \\ -2^n & 2^n & -2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 1 - 2^n & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 6 *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* A^2 *et montrer qu'il existe deux réels* a *et* b *que l'on déterminera tel que* $A^2 = aA + bI_3$.

2. *En déduire que* A *est inversible et écrire son inverse* A^{-1}.

Solution 6

1. *On a*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -A + 2I$$

2. *Montrons que* A *est inversible; On a* $A^2 = -A + 2I$ *ou encore* $A^2 + A = 2I$, *en factorisant* A *et en* *multipliant par $\frac{1}{2}$, on trouve*

$$\frac{1}{2}(A+I)A = I$$

On déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I)$, ou enocre

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $A^T A$. A est elle inversible, et quel est son inverse?

Solution 7

On a

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On déduit donc que A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^T$.

Exercice 8 *Soit A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A-2I)^3$, puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Solution 8

On a

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et par suite,

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A-2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$(A-2I)^3 = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}\left(A^2 - 6A + 12I\right)A = I$$

On en déduit que A est inversible, d'iverse:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{8}\left(A^2-6A+12I\right).\\
&= \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3\\ -4 & 7 & -7\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 5\\ 2 & -3 & 9\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 9 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Calculer $A^3-6A^2+12A-8I_3$ et en déduire A^{-1}.

Solution 9

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 8\\ 2 & 10 & -6 & 12\\ -2 & 10 & -6 & 20\\ -4 & 4 & -4 & 12\end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -12 & 24\\ 0 & 32 & -24 & 48\\ -12 & 36 & -28 & 72\\ -12 & 12 & -12 & 32\end{pmatrix}$$

En remplaçant, $A^3-6A^2+12A-8I_3=0$, et $\frac{1}{8}\left(A^2-6A+12I\right)A=I$, par suite A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\left(A^2-6A+12I\right)$$

Exercice 10 *(Calcul d'inverse.)*

1. *Calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1\\ 5 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 5 & -4 & 3\end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1\\ 4 & -6 & 2\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

2. *Même question pour :*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Solution 10

1. *Les inverses des matrices A_i*

Pour chercher l'inverse de d'une matrice A, on résoude le système $AX = b$. Si A inversible on trouve $X = A^{-1}b$:

Commençons par la matrice A_1 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & -2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_1 \\ -1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & -2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_1 + L_2 \\ L_3 \end{matrix} \backsim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & -2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ \frac{3}{8}L_2 \\ L_3 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 \\ 0 & 1 & -2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ -L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & -\frac{1}{8}b_1 - \frac{3}{8}b_2 + b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \frac{-4}{7}L_3 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14}b_1 + \frac{3}{14}b_2 - \frac{4}{7}b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{42}b_1 - \frac{1}{14}b_2 + \frac{4}{21}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7}b_1 + \frac{3}{7}b_2 - \frac{1}{7}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14}b_1 + \frac{3}{14}b_2 - \frac{4}{7}b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - \frac{2}{3}L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{14}b_1 - \frac{5}{14}b_2 + \frac{2}{7}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7}b_1 + \frac{3}{7}b_2 - \frac{1}{7}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14}b_1 + \frac{3}{14}b_2 - \frac{4}{7}b_3 \end{pmatrix}$$

On déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-3&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad A_3^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-3\\1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad A_4^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-3&1\\-11&5&-3\\-19&9&-7\end{pmatrix}$$

· Les matrices A_5 et A_6 ne sont pas inversibles $(rang\,(A_4)=2$ et $rang\,(A_5)=1)$

2. Les inverses des matrices B_i

$$B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-2&-1\\-1&3&3&2\\0&2&3&1\\1&-6&-7&-3\end{pmatrix}\quad,\quad B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1}=\tfrac{1}{4}B_3,\quad,\quad B_4^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 11 *Pour quelles valeurs du paramètre réel a les matrices suivantes sont-elles inversibles :*

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\2&-2&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&3&a\\a&2a+1&1\\1&a+2&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a&2a+1&1\\1&3&a\\1&a+2&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&-2&a+1&-a\\-1&a+1&-a&1-a\\a&-2a&a&0\\0&a-1&-a-b&2b-a+3\end{pmatrix}.$$

Solution 11

1. *On résout par échelonnement le système $AX=b$, écrit sous la forme*

$$\begin{pmatrix}1&1&1&b_1\\1&a&1&b_2\\2&-2&3&b_3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\-L_1+L_2\\-2L_1+L_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&b_1\\0&a-1&0&-b_1+b_2\\0&-4&1&-2b_1+b_3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\\frac{4}{a-1}L_2+L_3\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&b_1\\0&a-1&0&-b_1+b_2\\0&0&1&-2\frac{a+1}{a-1}b_1+\frac{4}{a-1}b_2+b_3\end{array}\right)\begin{matrix}L_1-L_3\\L_2\\L_3\end{matrix}$$

A est inverisible si et seulement si $ran\,(A)=3$, ce qui est vrai si et seulement si $a-1\neq 0$.

On continue l'échelonement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{3a+1}{a-1}b_1 - \frac{4}{a-1}b_2 - b_3 \\ 0 & a-1 & 0 & -b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2(a+1)}{a-1}b_1 + \frac{4}{a-1}b_2 + b_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ \frac{1}{a-1}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{3a+1}{a-1}b_1 - \frac{4}{a-1}b_2 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1}b_1 + \frac{1}{a-1}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2(a+1)}{a-1}b_1 + \frac{4}{a-1}b_2 + b_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3a+2}{a-1}b_1 - \frac{5}{a-1}b_2 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1}b_1 + \frac{1}{a-1}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2(a+1)}{a-1}b_1 + \frac{4}{a-1}b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Donc l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3a+2}{a-1} & -\frac{5}{a-1} & -1 \\ -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ -\frac{2(a+1)}{a-1} & \frac{4}{a-1} & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ a & 2a+1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \end{pmatrix}$, est inversible si et seulement si $a \notin \{1, -2\}$. Son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{(a+2)(a-1)} \begin{pmatrix} 1 & a+3 & -2a-3 \\ -1 & -1 & a+1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 *Calculer l'inverse des matrices d'ordre n suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Solution 12

1.*On résout le système* $AX = Y$, *qui s'écrit:*

$$\begin{cases} a_1 x_1 = y_1 \\ x_1 + a_2 x_2 = y_2 \\ a_3 x_3 = y_3 \\ \vdots \\ a_n x_n = y_n \end{cases}$$

La matrice A *est inversible si et seulement si le système admet une solution unique, quelque soit* y, *ceci est équivalent à la condition* $a_k \neq 0$, *pour* $1 \leq k \leq n$.
Supposons que cette condition est satisfaite, alors le système admet une solution unique donnée par

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_1} y_1 \\ x_2 = \frac{-1}{a_1 a_2} y_1 + \frac{1}{a_2} y_2 \\ x_3 = \frac{1}{a_3} y_3 \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_n} y_n \end{cases}$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/a_1 a_2 & 1/a_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/a_n \end{pmatrix}$$

2. *On résout le système* $BX = Y$, *on obtient* $X = B^{-1} Y$. *On a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - x_1 = y_1, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - x_2 = y_2, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - x_n = y_n$$

Par sommation des équations terme à terme, on obtient

$$(n-1) \left(\sum_i x_i \right) = \sum_i y_i$$

De même,

$$\begin{aligned}
x_i &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - y_i = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i y_i\right) - y_i \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_i y_i\right) - y_i\right) + \frac{1}{n-1} y_i - y_i \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_i y_i\right) - y_i\right) + \frac{2-n}{n-1} y_i
\end{aligned}$$

d'où

$$B^{-1} = \frac{1}{n-1}\left[B + (2-n)\, I\right]$$

3. Le système $CX = Y$, s'écrit

On a

$$ax_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i = y_1, \qquad ax_2 + \sum_{i=1}^{n} x_i = y_2, \qquad ax_n + \sum_{i=1}^{n} x_i = y_n$$

Ce qui nous donne, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$x_i = \frac{1}{a}\left(y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

On somme les équations termes à termes, on obtient

$$\begin{aligned}
a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
(a+n)\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{a+n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

On remplace,

$$x_i = \frac{1}{a}\left(y_i - \frac{1}{a+n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{a} y_i - \frac{1}{a\,(a+n)}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

ou encore

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{a(a+n)}\left((a+n-1)\, y_1 + y_2 + ... + y_n\right) \\
x_2 = \frac{1}{a(a+n)}\left(y_1 + (a+n-1)\, y_2 + ...y_n\right) \\
\vdots \\
x_n = \frac{1}{a(a+n)}\left(y_1 + y_2 + ... + (a+n-1)\, y_n\right)
\end{cases}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{a(a+n)} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a+n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a+n-1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{a^2+na}(C+(n-2)I)$$

Exercice 13 *On considère la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que la matrice* $N = A - 2I_3$ *est nilpotente et préciser son indice.*

2. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

3. *Montrer que* A *est inversible et exprimer* A^{-1} *en fonction de* N *puis la calculer. (On pourra utiliser la factorisation sur* $\mathbb{R}$ *du polynôme* X^3+8*)*

4. *Soit le polynôme* $Q(X) = X^3 - 5X^2 + 10X - 11$

a. *Ecrire le développement de Taylor de* $Q(X)$ *au point* 2.

b. *Déduire que la matrice* $Q(A) + 3I_3$ *est nilpotente et préciser son indice.*

Solution 13

1. *On a*

$$N = A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Calcule de* A^n

$$\begin{aligned} A^n &= (N+2I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k (2I)^{n-k} \\ &= C_n^0 (2I)^n + C_n^1 N (2I)^{n-1} + C_n^2 N^2 (2I)^{n-2} \\ &= 2^n I + 2^{n-1} nN + 2^{n-3} n(n-1) N^2 \end{aligned}$$

On remplace pour trouver,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n-3}n(n-1) & 2^{n-3}n(n-1) - 2^{n-1}n & -2^{n-3}n(n-1) \\ 2^{n-1}n & 2^n - 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n + 2^{n-3}n(n-1) & -2^{n-3}n(n-1) & 2^{n-1}n + 2^n + 2^{n-3}n(n-1) \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-3}\begin{pmatrix} -n^2+n+8 & n^2-5 & -n^2+n \\ 4n & 8-4n & 4n \\ n^2+3n & -n^2+n & n^2+3n+8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. *Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de N puis la calculer. (On pourra utiliser la factorisation sur $\mathbb{R}$ du polynôme X^3+8)*
On a $x^3+8 = (x^2-2x+4)(x+2)$, on remplace x par N on trouve

$$N^3 + 8I = \left(N^2 - 2N + 4I\right)(N+2I)$$

Comme $N^3 = 0$ et onc $A = N+2I$, alors $8I = A(N^2-2N+4I)$, et par suite A est inversible d'inverse A^{-1}

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{8}\left(N^2 - 2N + 4I\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. *Soit le polynôme $Q(X) = X^3 - 5X^2 + 10X - 11$*
a. *Ecrire le développement de Taylor de $Q(X)$ au point 2.*

$$Q(X) = Q(2) + Q'(2)(X-2) + \frac{1}{2!}Q''(2)(X-2)^2 + \frac{1}{3!}Q'''(2)(X-2)^3$$

On calcule les dérivés succives de Q,

$$\begin{array}{ll}
Q'(X) = 3X^2 - 10X + 10 & Q'(2) = 2 \\
Q''(X) = 6X - 10 & Q''(2) = 2 \\
Q'''(X) = 6 & Q'''(2) = 6
\end{array}$$

Par suite,

$$Q(X) = -3 + 2(X-2) + (X-2)^2 + (X-2)^3$$

b. *Déduire que la matrice $Q(A)+3I_3$ est nilpotente et préciser son indice.*

$$\begin{aligned} Q(A)+3I &= -3I+2(A-2I)+(A-2I)^2+(A-2I)^3+3I_3 \\ &= 2N+N^2+N^3 = 2N+N^2 \end{aligned}$$

$$(Q(A)+3I)^3 = \left(2N+N^2\right)^3 = N^6+6N^5+12N^4+8N^3 = 0$$

Exercice 14 *Soient les matrices* $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer P^{-1} et $D=P^{-1}AP$.*

2. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^n=PD^nP^{-1}$.*

3. *Evaluer A^n.*

4. *Calculer le terme général de chacune des suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ en fonction de n et u_0,v_0,w_0 sachant que*

$$\left\{\begin{array}{c} u_{n+1}=u_n+3v_n-3w_n \\ v_{n+1}=u_n+3v_n-w_n \\ w_{n+1}=-2u_n+2v_n \end{array}\right. .$$

Solution 14

1. *Calcule de P^{-1} et $D=P^{-1}AP$.*

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. *Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $A^n=PD^nP^{-1}$.*

On a

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right).....\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D.....\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} \\ &= PD.D.D.....P^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

On peut donner une preuve par réccurrence de cette propriétée:

En effet, pour $n=0$, $A^0=I$ et $PD^0P^{-1}=PIP^{-1}=P$,

Suppons maintenant que $A^n=PD^nP^{-1}$. On a

$$A^{n+1}=A^n.A=\left(PD^nP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)=PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

Ce qui termine la preuve.

3. *Calcule de* A^n

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n \\ 4^n - 2^n & 2^n + 4^n & 2^n - 4^n \\ (-2)^n - 2^n & 2^n - (-2)^n & (-2)^n + 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. *Calculer le terme général de chacune des suites* $(u_n), (v_n), (w_n)$ *en fonction de* n *et* u_0, v_0, w_0 *sachant que*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n - w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$, *le système peut s'écrire sous la forme* $X_{n+1} = AX_n$,

On en déduit que $X_n = A^n X_0$, *et donc*

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n \\ 4^n - 2^n & 2^n + 4^n & 2^n - 4^n \\ (-2)^n - 2^n & 2^n - (-2)^n & (-2)^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 .

1. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice nilpotente. Montrer que* $I_n \pm A$ *est inversible et calculer son inverse.*

2. *On considère la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A - I_4$ *est nilpotente et en déduire* A^{-1}.

Solution 15

1. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice nilpotente. Montrer que* $I_n \pm A$ *est inversible et calculer son inverse.*

Suppons que A est nilpotente d'indice m, c'est à dire $A^m = 0$, On en déduit que

$$I = I^m - A^m = (I - A) \sum_{k=0}^{m-1} A^k$$

On déduit que $I - A$ est inversible d'inverse égale à : $\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.
De même, A étant nilpotente alors $-A$ également et de lême indice m, ce qui donne

$$I = I^m - (-A)^m = (I + A) \sum_{k=0}^{m-1} (-A)^k$$

Donc $I + A$ est inversible d'inverse égale à : $\sum_{k=0}^{m-1} (-A)^k$.
2. *Vérifier que $A - I_4$ est nilpotente et en déduire A^{-1}. On a,en effet*

$$A - I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -4 & 20 \\ 24 & 16 & -8 & 40 \\ 24 & 16 & -8 & 40 \\ -12 & -8 & 4 & -20 \end{pmatrix} \quad et \quad (A - I)^3 = 0$$

On pose $B = A - I$, Alors B est nilpotonte d'indice 3, Donc $I + B = A$ est inversible

$$\begin{aligned} I &= I + B^3 = (I + B)\left(B^2 - B + I\right) \\ &= A\left((A - I)^2 - (A - I) + I\right) \end{aligned}$$

Donc A est invrsible d'inverse

$$A^{-1} = (A - I)^2 - (A - I) + I = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 *On considère la matrice de $M_3(\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Vérifier que la matrice $N = A + I_3$ est nilpotente et préciser son indice.*
2. *Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}$.*
3. *Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de n.*

4. *Soient les polynômes* $P(X) = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 6X + 2$,*et* $Q(X) = X^4 - X^2 + 1$.

a. *Montrer que* -1 *est une racine triple de* P.

b. *Factoriser les polynômes* P, Q *sur* R *et évaluer* $P(A)$.

c. *Déduire que* $Q(A)$ *est inversible.*

Solution 16 ***Notation 17*** *On considère la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifions que la matrice* $N = A + I_3$ *est nilpotente,*

On calcule les puissance de N,

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad N^3 = 0$$

Donc N *est nilpotente d'indice* 3.

2. *Calcule* A^n *pour* n *dans* $\mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} A^n &= (N - I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k N^k I^{n-k} = C_n^0 I - C_n^1 N + C_n^2 N^2 \\ &= I - nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \end{aligned}$$

Au final

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & n \\ -\frac{1}{2}n(n-1) & -\frac{1}{2}(-3n + n^2 - 2) & -\frac{1}{2}n(n-3) \\ \frac{1}{2}n(n-3) & \frac{1}{2}n(n-5) & \frac{1}{2}(-5n + n^2 + 2) \end{pmatrix}$$

3. *Montrer que* A *est inversible et exprimer* A^{-1} *en fonction de* n.

On a $0 = N^3 = (A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$, *et par suite,* $-(A^2 + 3A + 3I) A = I$, *donc* A *est* *inversivble, d'inverse*

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\left(A^2+3A+3I\right) \\ &= -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. *Soient les polynômes* $P = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 7X^2 + 6X + 2,\ \ Q = X^4 - X^2 + 1.$

1. (a) *Montrer que* -1 *est une racine triple de* P.
   On a $P(-1) = 0$, *en calculant les dérivées succives de* P, *on obtient*

$$\begin{array}{ll} P'(X) = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 14X + 6 & P'(-1) = 0 \\ P''(X) = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 14 & P''(-1) = 0 \\ P''(X) = 60X^2 + 72X + 30 & P''(-1) = 18 \neq 0 \end{array}$$

   Donc -1 *est une racine triple de* P

   (b) *Le calcul donne*

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)^3\left(X^2+2\right), \\ Q(X) &= X^4 - X^2 + 1 + 3X^2 - 3X^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^2 - 3X^2 = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right) \end{aligned}$$

   l en résulte que

$$P(A) = (A + I_3)^3\left(A^2 + 2I_3\right) = N^3\left(A^2 + 2I_3\right) = 0.$$

   (c) *Les polynômes* P, Q *sont premiers entre eux car ils n'ont aucune racine en commun et donc d'après le théorème de Bezout, il existe* U, V *de* $\mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$PU + QV = 1,$$

   ce qui donne

$$P(A)U(A) + Q(A)V(A) = I_3,$$

   soit

$$Q(A)V(A) = I_3$$

   ce qui signifie que $Q(A)$ *est inversible d'inverse* $V(A)$.

Exercice 18 *Soit la matrice* $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 1 & a \\ -2a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que pour tous* $a, b \in \mathbb{R} : M(a)\, M(b) = M(a+b)$

2. *En déduire que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N} : M(a)^n = M(na)$.

3. *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{R} : M(a)$ *est inversible et donner son inverse.*

4. *Donner* A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution 17 *Soit la matrice* $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 1 & a \\ -2a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifions que pour tous* $a, b \in \mathbb{R} : M(a)\, M(b) = M(a+b)$

$$\begin{aligned} M(a)\, M(b) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 1 & a \\ -2a & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b^2 & 1 & b \\ -2b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^2 - 2ab - b^2 & 1 & a+b \\ -2a - 2b & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\left(a^2 + 2ab + b^2\right) & 1 & a+b \\ -2(a+b) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(a+b). \end{aligned}$$

2. *En déduire que pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N} : M(a)^n = M(na)$.

$$M(a)^n = \underbrace{M(a)\, M(a) \ldots M(a)}_{n \ \text{facteurs}} = M(\underbrace{a + a \ldots + a}_{n \ \text{terms}}) = M(na).$$

On peut bien evidement donner une preuve par récurrence.
En effet, pour $n = 0$, $M(a)^0 = I$ *et* $M(0 \times a) = M(0) = I$, *Ainsi supposons que la propriété est vraie pour* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$M(a)^{n+1} = M(a)^n\, M(a) = M(na)\, M(a) = M((n+1)\, a)$$

Ce qui termine la preuve.

3. *Montrons que pour tout* $a \in \mathbb{R} : M(a)$ *est inversible et calculons son inverse.*
On a

$$M(a)\, M(-a) = M(0) = I$$

Donc $M(a)$ *est inversible, d'inverse* $M(a)^{-1} = M(-a)$.

4. Calculons A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $A = M(-2)$, et par suite

$$A^n = M(-2)^n = M(-2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4n^2 & 1 & -2n \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 *Soit* $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

1. *Montrer que E est un sous-anneau commutatif de l'anneau $M_2(\mathbb{R})$.*

2. *Déterminer ses éléments inversibles*

3. *Déterminer ses diviseurs de zéro.*

Solution 18

1. *Montrons que E est un sous-anneau commutatif de l'anneau $M_2(\mathbb{R})$.*
   · *En prenant $a = 0$ et $b = 0$ on trouve que la matrice nulle $0_{M_2(\mathbb{R})} \in E$.*

   · *Soient* $A_1 = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix}$ *et* $A_2 = \begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix}$ *deux matrices de E,*

   On a $A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} (a_1-a_2)+(b_1-b_2) & (b_1-b_2) \\ -(b_1-b_2) & (a_1-a_2)-(b_1-b_2) \end{pmatrix}$ *est aussi dans E.*

   Donc $(E, +)$ est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

   · *En prenant ainsi $a = 1$ et $b = 0$ on trouve que la matrice identité $I_2 = 1_{M_2(\mathbb{R})} \in E$.*

   · *On a ainsi* $A_1A_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2)+(a_1b_2+a_2b_1) & (a_1b_2+a_2b_1) \\ -(a_1b_2+a_2b_1) & (a_1a_2)-(a_1b_2+a_2b_1) \end{pmatrix} \in E.$

   · *On vérifie facilement que $A_2A_1 = A_1A_2$*

   E est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$. donc commutatif.

2. *Déterminons ses éléments inversibles et ses diviseurs de zéro. Etant donnée une matrice quelconque* $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$*, en utilisant une élimination de Gauss, on peut montrer que M est*

inversible si et seulement si $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$*, et son inverse est donné par* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*, inverse:*

$M^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Donc une matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in E$*, est inverisble si et seulement si* $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2 \neq 0$*, soit* $a \neq 0$*. Dans ce cas son inverse est donné par*

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}.$$

3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c+d & d \\ -d & c-d \end{pmatrix} \in E - \{O\}$ *telles que* $AB = O$*. On a*

$$\begin{aligned} AB &= O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ac+(ad+bc) & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-(ad+bc) \end{pmatrix} = O \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ac = 0 \\ ad+bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } c = 0 \\ ad+bc = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

par suite si $a \neq 0$ *alors* $c = d = 0$ *ce qui n'est pas, donc forcément* $a = 0$ *et donc* $b \neq 0$*. Il en résulte que les diviseurs de zéro de* E *sont*

$$\left\{\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.\right\}$$

Exercice 20 *On munit* $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *de la loi de compostion* $\otimes$ *définie par*

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{F}, \ (x,y) \otimes (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

1. *Montrer que* $(\mathbb{F}, \otimes)$ *est un groupe abélien.*

2. *Dans* $M_2(\mathbb{F})$ *l'ensemble des matrices carrées de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{F}.$$

   (a) *Montrer que pour tout* $(a,b) \in \mathbb{F}$*, la matrice* M *s'écrit sous la forme* $M = aK + bL$*, où* K *et* L *sont deux matrices dans* $M_2(\mathbb{F})$ *à déterminer.*

(b) *Calculer* L^2.

(c) *Montrer que* $\mathbb{E}$ *est un sous-groupe de* $M_2(\mathbb{F})$ *pour la multiplication usuelle des matrices. Ce groupe est-il abélien?*

3. *On considère l'application* f *définie par a.*

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{E}, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{F}, \otimes) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \longmapsto & (a, b) \end{array}$$

(a) *Montrer que* f *est morphisme de groupes.*

(b) *Calculer* $\ker f$. f *est-il injectif?*

(c) *Calculer* $\operatorname{Im} f$. f *est-il surjectif?*

(d) f *est-il un isomorphisme?*

Solution 19

1. *On munit* $\mathbb{F} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *de la loi de composition* $\otimes$ *définie par*

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{F}, \ (x,y) \otimes (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Montrons que $(\mathbb{F}, \otimes)$ *est un groupe abélien.*
La commutativité
Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$*, l'opération* $\otimes$ *est commutative si* $(x,y) \otimes (x',y') = (x',y') \otimes (x,y)$*. On a*

$$\begin{aligned} (x,y) \otimes (x',y') &= (xx' - yy', xy' + x'y) \\ &= (x'x - y'y, x'y + xy') \\ &= (x',y') \otimes (x,y) \end{aligned}$$

L'associativité
Soit $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$*, l'opération* $\otimes$ *est associative si*

$$((x,y) \otimes (x',y')) \otimes (x'',y'') = (x,y) \otimes ((x',y') \otimes (x'',y''))$$

$$\begin{aligned} ((x,y) \otimes (x',y')) \otimes (x'',y'') &= (xx' - yy', xy' + x'y) \otimes (x'',y'') \\ &= ((xx' - yy')x'' - (xy' + x'y)y'', (xx' - yy')y'' + x''(xy' + x'y)) \\ &= (xx'x'' - yy'x'' - xy'y'' - x'yy'', xx'y'' - yy'y'' + x''xy' + x''x'y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x,y)\otimes((x',y')\otimes(x'',y'')) &= (x,y)\otimes(x'x''-y'y'',x'y''+x''y') \\
&= (x(x'x''-y'y'')-y(x'y''+x''y'),x(x'y''+x''y')+(x'x''-y'y'')y) \\
&= (xx'x''-xy'y''-yx'y''-yx''y',xx'y''+xx''y'+x'yx''-y'y''y)
\end{aligned}
$$

L'élément neutre

On cherche s'il existe un élément $(e_1,e_2)\in\mathbb{F}$*, tel que pour tout* $(x,y)\in\mathbb{F}$*, tel que*

$$(x,y)\otimes(e_1,e_2)=(x,y)\,,$$

ou encore $(xe_1-ye_2,xe_2+ye_1)=(x,y)\,,$ *on résout le système*

$$\begin{cases} xe_1-ye_2=x \\ ye_1+xe_2=y \end{cases}$$

le déterminant de ce système est $x^2+y^2\neq 0.$ *et par suite on a une solution unique,*

$$e_1=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \quad et \quad e_2=0$$

On trouve $(1,0)$ *comme élément neutre.*

Le symétrique

On vérifié si pour tout $(x,y)\in\mathbb{F}$*, il existe* $(x',y')\in\mathbb{F}$ *tel que* $(x,y)\otimes(x',y')=(1,0)\,.$

On obtient le système

$$\begin{cases} xx'-yy'=1 \\ yx'+xy'=0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $x^2+y^2\neq 0,$ *et admet comme solution*

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2} \ \ et\ y'=\frac{y}{x^2+y^2}$$

2. *Dans* $M_2(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrice carrées à coefficients réels, on considère l'ensemble* E *des matrice de la forme*

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   (a) *Montrer que pour tout* $a,b\in\mathbb{R}$*, la matrice* M *s'écrit sous la forme* $M=aK+bL$*, où* K *et* L *sont deux matrices dans* $M_2(\mathbb{R})$ *à déterminer.*

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) *Calculer* L^2

$$L^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -K = -I_2$$

3. *Montrer que* $\mathbb{E}$ *est un sous-groupe de* $M_2(\mathbb{F})$ *pour la multiplication usuelle des matrices. Ce groupe est-il abélien?*

   (a) *La matrice identité* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1K + 0L \in E$

   (b) *Soient* $M = aK + bL$ *et* $N = a'K + b'L$ *dans* $\mathbb{E}$, *on montre que* $M \times N \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} M \times N &= (aK + bL)(a'K + b'L) = aa'K^2 + ab'KL + ba'LK + bb'L^2 \\ &= aa'K + ab'L + ba'L - bb'K \\ &= (aa' - bb')K + (ab' + ba')L \end{aligned}$$

   et donc $M \times N \in \mathbb{E}$

   (c) *Soient* $M = aK + bL \in \mathbb{E}$, *on montre que* $M^{-1} \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)K + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)L \in M_2(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{E}$ *est un sous groupe de* $M_2(\mathbb{F})$.
   Soient $M = aK + bL$ *et* $N = a'K + b'L$ *dans* $\mathbb{E}$

$$\begin{aligned} M \times N &= (aa' - bb')K + (ab' + ba')L \\ &= (a'a - b'b)K + (a'b + ab')L = N \times M \end{aligned}$$

   Donc $\mathbb{E}$ *est abélien*

4. *On considère l'application* f *définie par*

$$f: \quad (\mathbb{E}, \times) \quad \to (\mathbb{F}, \otimes); \quad aK + bL \mapsto (a, b)$$

   (a) *Montrer que* f *est morphisme de groupes*
   Soit $M = aK + bL$ *et* $N = a'K + b'L$ *dans* E, *on a* $M * N = (aa' - bb')K + (ab' + ba')L$
   et par suite $f(M * N) = (aa' - bb', ab' + ba') = (a, b) \otimes (a', b') = f(M) \otimes f(N)$

(b) *Calculer* $\ker f$. f *est-il injectif?*

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in E,\ \textit{tel que } f(M) = (1,0)\} \\ &= \{M \in E,\ \textit{tel que } (a,b) = (1,0)\} = I_2 \end{aligned}$$

Comme $\ker f$ *est réduit à l'élément neutre de* $(\mathbb{E}, \times)$ *alors* f *est injectif.*

(c) *Calculer* $\operatorname{Im} f$. f *est-il surjectif?*

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(M),\ M \in (\mathbb{E}, \times)\} \\ &= \{f(aK + bL),\quad (a,b) \in \mathbb{F}\} \\ &= \{(a,b),\quad (a,b) \in \mathbb{F}\} = \mathbb{F} \end{aligned}$$

Donc f *est surjectif .*

(d) *Comme* f *est un morphisme injectif et surjectif, alors* f *est un isomorphisme.*