Partie I : Intégrales au sens de Riemann

Exercice 1

On considère les deux fonctions suivantes,

$$\varphi : [0,2] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 3 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : [0,2] \to \mathbb{R},\ \psi(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ -1 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale $\int_0^2 \varphi(x)dx$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^2 \psi(x)dx$.

Corrigé

Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier,

$$\int_0^2 \varphi(x)dx = \mathcal{A}(\varphi, \sigma(0,1,2)) = \sum_{i=0}^{2}(a_{i+1} - a_i)c_i = (1-0)1 + (2-1)(-2) = -1$$

Remarquons que $\varphi = \psi$ sur $[0,2] \setminus \{1\}$, d'où $\int_0^2 \psi(x)dx = \int_0^2 \varphi(x)dx$ donc

$\int_0^2 \psi(x)dx = -1.$

Exercice 2 (voir TD)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x$ et g la fonction définie sur $[0,1]$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \neq \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

2. g est-elle Riemann-intégrable ? si oui donner la valeur de $\int_0^1 g(x)dx$.

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles Riemann intégrables?

1. $f_1(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [0,2]$;

2. $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$;

3. $f_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}, f_3(x) = \lfloor x \rfloor$; 4. $f_4 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Corrigé

1. $f_1(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [0,2]$;

f_1 est Riemann-intégrable car continue par morceaux sur $[0,2]$.

2. $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$;

f_2 n'est pas Riemann-intégrable car n'est pas bornée dans $[-1,1]$.

3. $f_3 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

f_3 est bornée dans $[0,1]$ mais ne vérifie le critère d'intégrabilité au sens de Riemann (voir cours : exercice traité en cours).

Exercice 4

Calculer, à l'aide des sommes de Riemann, les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x dx$;
2. $\int_0^1 e^x dx$.

Corrigé

Rappelons que si une fonction numérique f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Riemann, et l'on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

1. $\int_0^1 x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

2. $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k \qquad \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k \text{ est la somme d'une suite géométrique}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} \qquad \left(\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{1}{n}n} = e\right)$$

D'où

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e - 1 \quad \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{s\to0} \frac{s}{1-e^s} = -1\right)$$

Partie II : Primitives et application au calcul des intégrales de Riemann

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes.

1. $\int x(x^2+1)dx$; 2. $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x}dx$; 3. $\int cos^2(x)dx$; 4. $\int (1+tg^2(x))dx$; 5. $\int e^x sh^2(x)dx$

Corrigé

1. $\int x(x^2+1)dx$;

Posons $t = x^2+1$ alors $dt = 2xdx$ d'où

$\int x(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + k, k \in \mathbb{R}$, alors

$\int x(x^2+1)dx = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + k$.

2. $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x}dx$;

Posons $t = e^x$ alors $dt = e^x dx$ d'où $dx = \frac{dt}{t}$ et

$\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x}dx = \int \frac{t^3+2t}{t^2}dt = \int tdt + \int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}t^2 + 2ln(t) + k, k \in \mathbb{R}$, alors

$\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x + k$.

3. $\int cos^2(x)dx$;

On a

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$cos^2(x) - sin^2(x) = \cos(2x)$ d'où

$cos^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$;

$\int cos^2(x)dx = \int \frac{1-cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin(2x) + k, k \in \mathbb{R}$, alors

4. $\int (1+tg^2(x))dx$;

$\int \big(1+tg^2(x)\big)dx = \int tg'(x))dx = tgx + k, k \in \mathbb{R}$, alors

5. $\int e^x sh^2(x)dx$

$sh^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}$ d'où

$\int e^x sh^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{-x}\right)dx = \frac{1}{12}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} + k, k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (traité en TD)

Déterminer la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 3 (traité en cours)

Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$

n'admet pas de primitive.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^t \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx, t > 0;$

On pose $s = \sqrt{x}$; $ds = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ alors $= 2sds$.

$x = 0$ si, et seulement si $s = 0\ et\ x = t$ si, et seulement si $s = \sqrt{t}$, d'où

$\int_0^t \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{s}{1+s} ds = 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{s}{1+s} ds = 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{s+1-1}{1+s} ds = 2\int_0^{\sqrt{t}} ds$ -2 $\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{1+s} ds$ d'où

$\int_0^t \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2(s - Ln|s+1|)|_0^{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{t} - Ln(\sqrt{t}+1)).$

2. $\int_0^t x^2(1+x^3)^n dx, t > 0$

$s = 1 + x^3$, $ds = (1+x^3)'dx = 3x^2 dx$ d'où $ds = 3x^2 dx$

$\int_0^t x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}\int_1^{1+t^3} s^n ds = \frac{1}{3(n+1)}[(1+t^3)^{n+1} - 1]$

3. $\int_1^2 \frac{ln(x+1)}{x^2} dx;$

On fait une intégration par parties en posant $u = ln(x+1)$ et $v' = \frac{1}{x^2}$

Alors et $u' = \frac{1}{x+1}$ et $v = -\frac{1}{x}$ d'où

$\int_1^2 \frac{ln(x+1)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+1)}{x}|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$ (finir les calculs)

5. $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$; (effectuer le changement de variable $s = e^x$)

6. $\int_0^\pi x sin(x^2) dx$. (effectuer le changement de variable $s = x^2$)

Exercice 5

Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $n < m$.

En utilisant la relation de Chasles, exprimer l'intégrale $\int_n^m \lfloor x \rfloor dx$ en fonction de n et de m.

Exercice 6

Montrer qu'on ne peut pas choisir le changement de variable $t = sinx, x \in \left[\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}\right]$ pour calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sinx} dx$.

Corrigé

Si on utiliser comme changement de variable $t = sinx$ pour calculer $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sinx} dx$

Alors $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sinx} dx = \int_{sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)} \frac{arcsint}{t\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{arcsint}{t\sqrt{1-t^2}} dt = 0$ ce qui est absurde car

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sinx} dx > 0$ puisque $\frac{x}{sinx} > 0$ sur l'intervalle $[\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}]$.

Exercice 7 (traité en TD)

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, t > 0$; (par changement de variable $s = x + 1$ ou par parties : on pose $u = x$)

Par changement de variable

On pose $s = x + 1$ et $ds = dx$;

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{s-1}{\sqrt{s}} ds = \int \sqrt{s} ds - \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{2}{3}\sqrt{s^3} - 2\sqrt{s} = 2\frac{s-3}{3}\sqrt{s}$ d'où

$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = 2\frac{s-3}{3}\sqrt{s}\Big|_1^{t+1} = 2\frac{t-2}{3}\sqrt{(t+1)} + \frac{4}{3}$;

Par parties

On pose $f = x$ et $g' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ d'où $f' = 1$ et $g = 2\sqrt{x+1}$ et

$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = 2x\sqrt{x+1}\Big|_0^t - 2\int_0^t \sqrt{x+1} dx$

$= 2x\sqrt{x+1}\Big|_0^t - \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Big|_0^t$

$= 2t\sqrt{t+1} - 2\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} + \frac{4}{3} = 2\frac{t-2}{3}\sqrt{t+1} + \frac{4}{3}$

2. $\int_1^t \frac{ln(x^2+x)}{x^2}dx, t > 1$; (par parties : on pose $u = ln(x^2 + x)$)

$f(x) = ln(x^2 + x)$ et $g' = \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$ et $g = -\frac{1}{x}$ alors

$\int_1^t \frac{ln(x^2+x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}ln(x^2 + x)|_1^t + \int_1^t \frac{2x+1}{x(x^2+x)} \quad dx$ (finir les calculs)

3. $\int_0^t sinxe^x , t > 0$;

(deux fois par parties : on peut, la première intégration par parties on pose $u = sinx$ et la deuxième intégration par parties en posant $u = cosx$).

$f(x) = sinx$ et $g'(x) = e^x$ d'où

$f'(x) = cosx$ et $g(x) = e^x$ d'où

$\int_0^t sinxe^x dx = sinxe^x - \int_0^t cosxe^x dx$

$f(x) = cosx$ et $g'(x) = e^x$; $f'(x) = sinx$ et $g(x) = e^x$

$\int_0^t cosxe^x dx = cosxe^x + \int_0^t sinxe^x dx$

Alors

$\int_0^t sinxe^x dx = sinxe^x - cosxe^x|_0^t - \int_0^t sinxe^x dx$

d'où

$2\int_0^t sinxe^x dx = sinxe^x - cosxe^x|_0^t = sinte^t - coste^t + 1$

Finalement,

$\int_0^t sinxe^x dx = \frac{sinte^t - coste^t + 1}{2}$

4. $\int_{-1}^1 sinx\ shx\ dx$;

(deux fois par parties : on peut, la première intégration par parties on pose $u = sinx$ et la deuxième intégration par parties en posant $u = cosx$).

5. $\int_1^t lnxdx , t > 1$; (par parties en posant $u = lnx$)

6. $\int_0^\pi xcosx\ dx$; (par parties en posant $u = x$)

7. $\int_0^1 arcsinx\, dx$; (par parties en posant $u = arcsinx$)

8. $\int_0^t Arcsinx\, dx\,, |t| < 1.$ (par parties en posant $u = Arcsinx$)

Exercice 8

Calculer les primitives suivantes $I = \int \frac{sinx}{sinx+cosx} dx$ et $J = \int \frac{cosx}{sinx+cosx} dx$

$I = \int \frac{sinx}{sinx+cosx} dx$ et $J = \int \frac{cosx}{sinx+cosx} dx$

$I + J = \int \frac{sinx}{sinx+cosx} dx + \int \frac{cosx}{sinx+cosx} dx = \int \frac{sinx+cosx}{sinx+cosx} dx = \int dx = x$

$I - J = \int \frac{sinx}{sinx+cosx} dx - \int \frac{cosx}{sinx+cosx} dx = \int \frac{sinx-cosx}{sinx+cosx} dx$

on pose $t = sinx + cosx$ alors $dt = (cosx - sinx)$ d'où

$I - J = -\int \frac{dt}{t} = -ln|t|$

Alors

$2I = x - ln|cosx + sinx|$ d'où

$I = \frac{1}{2}x + ln\frac{1}{\sqrt{|cosx+sinx|}} + k + k, k \in \mathbb{R}$

$2J = x + ln|cosx + sinx|$ d'où

$J = \frac{1}{2}x + ln\sqrt{|cosx + sinx|} + k,\ k \in \mathbb{R}$

Exercice 9

Calculer les intégrales, des fonctions rationnelles, suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{x}{3x-2} dx$; 2. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx$; 3. $\int_1^2 \frac{x+2}{x(x+1)^2} dx$; 4. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x-2} dx$; 5. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+4} dx$;

6. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$; 7. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx$; 8. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx$; 9. $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx$.

Corrigé

1. $\int_0^1 \frac{x}{3x-2} dx$

$\int \frac{x}{3x-2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x-2+2}{3x-2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x-2}{3x-2} dx + \frac{1}{3}\int \frac{2}{3x-2} dx$

$= \frac{1}{3}\int dx + \frac{2}{9}\int \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\ln|3x-2|$ d'où

$\int_0^1 \frac{x}{3x-2}dx = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\ln|3x-2|\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\ln 2.$

2. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$

$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \ln|x^2+x-3|$ d'où

$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \ln(x^2+x-3)|_0^1 = ln3.$

$\int_1^2 \frac{x+2}{x(x+1)^2}dx$;

$\frac{x+2}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$, où a, b et c sont des constantes réelles à déterminer d'où

$\int \frac{x+2}{x(x+1)^2}dx = a\int \frac{1}{x}dx + b\int \frac{1}{x+1}dx + c\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

$= aln|x| + bln|x+1| + c\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

Posons $t = x+1, dt = dx$

$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{1}{-2+1}t^{-2+1} = -\frac{1}{t}$ d'où $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1}$

Alors

$\int \frac{x+2}{x(x+1)^2}dx = aln|x| + bln|x+1| - c\frac{1}{x+1}$

Déterminons les constantes a, b et c .

$\frac{x+2}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ (1)

Pour déterminer a

Pour $x \neq 0$, on multiplie les deux membres de l'égalité de (1) par x

$\frac{x+2}{x(x+1)^2}x = \frac{a}{x}x + \frac{b}{x+1}x + \frac{c}{(x+1)^2}x$ d'où

$\frac{x+2}{(x+1)^2} = a + \frac{b}{x+1}x + \frac{c}{(x+1)^2}x$ puis on fait tendre x vers zéro : On obtient : $a = 2$

Pour déterminer c :

Pour $x \neq -1$, on multiplie les deux membres de l'égalité de (1) par $(x+1)^2$

$\frac{x+2}{x(x+1)^2}(x+1)^2 = \frac{a}{x}(x+1)^2 + \frac{b}{x+1}(x+1)^2 + \frac{c}{(x+1)^2}(x+1)^2$ d'où

$\frac{x+2}{x} = \frac{a}{x}(x+1)^2 + b(x+1) + c$ puis on fait tendre x vers (-1) : on obtient $c = -1$

D'où (1) s'écrit

$\frac{x+2}{x(x+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{b}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ (2)

Pour obtenir b, dans (2) on fait $x = 1$ et on a $\frac{3}{4} = 2 + \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$. D'où $b = -2$

Alors

$\int \frac{x+2}{x(x+1)^2} dx = 2ln|x| - 2ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$. Donc

$\int_1^2 \frac{x+2}{x(x+1)^2} dx = 2ln|x| - 2ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\Big|_1^2$

$= 2ln2 - 2ln3 + \frac{1}{3} - 2ln2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - ln9$

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx$; 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$; 3. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$; 4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$; 5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$;

6. $\int_0^1 sin^2x\, dx$; 7. $\int_0^1 \frac{1}{cosx} dx$; 8. $\int_0^1 sh^3(x)\, dx$; 9. $\int_0^1 \frac{1}{ch^2(x)} dx$; 10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin2x+2cosx} dx$.

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx$;

$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1}$ d'où $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx = 2(\sqrt{2} - 1)$

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$;

$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}} dx$,

on pose $t^2 = \frac{x+1}{2x+1}$ d'où $t^2(2x+1) = x+1$ ou $x(2t^2-1) = 1-t^2$

i.e. $x = \frac{1-t^2}{2t^2-1}$ d'où $dx = \left(\frac{1-t^2}{2t^2-1}\right)' dt = \frac{-2t(2t^2-1)-4t(1-t^2)}{(2t^2-1)^2} dt = \frac{-2t}{(2t^2-1)^2} dt$

Alors

$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{-2t}{(2t^2-1)^2} dt$ (finir les calculs)

3. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$;

On pose $t = x^2 + 1$ d'où $dt = 2dx$ alors

$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}$

D'où $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ donc

$\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}|_1^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}) = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

On met x^2+3x+2 sous forme canonique (que le trinôme possède ou non des racines)

$$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}\left[4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-1\right]$$

$=\frac{1}{4}[(2x+3)^2-1]$ d'où $\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2x+3)^2-1}$ et

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=2\int \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^2-1}}dx$; posons $t=2x+3$ alors $dt=2dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=argsht$ d'où

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=argsh\,(2x+3)$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=argsh5\ -argsh3$

5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$;

On met x^2+x+1 sous forme canonique

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1\right]$$

d'où $\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$

Et

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}}dx$; $t=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx$ ou $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$

Posons $t=chs$; $dt=shsds$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int \frac{shs}{\sqrt{ch^2s+1}}ds=\int \frac{shs}{\sqrt{sh^2s}}ds=\int \frac{shs}{|shs|}ds=\int ds=s$ d'où

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=argch\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$. Alors

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=argch(\sqrt{3})-argch\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

6. $\int_0^1 sin^2x\,dx$;

$sin^2x+cos^2x=1$ et

$cos2x=cos^2x-sin^2x$

d'où $sin^2x=1-cos2x$ et

$\int sin^2xdx=\frac{1}{2}\int(1-cos2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sin2x$ alors

$\int_0^1 sin^2x\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}sin2.$

7. $\int_0^1 \frac{1}{cosx} dx;$

On pose $t = tg\frac{x}{2}$ d'où $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. (voir cours) Alors

$\int \frac{1}{cosx} dx = 2\int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1-t^2}dt$;

$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$ (1)

Pour $t \neq 1$ on multiplie les deux membres de (1) par $(1-t)$ puis en faisant tendre t vers 1 on obtient $a = \frac{1}{2}$

Pour $t \neq -1$ on multiplie les deux membres de (1) par $(1+t)$ puis on fait tendre t vers (-1) on obtient $b = -\frac{1}{2}$

D'où $\int \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt = \frac{1}{2}ln|1-t| - \frac{1}{2}ln|1+t|$. Alors

$\int \frac{1}{cosx} dx = \frac{1}{2}ln\left|1 - tg\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}ln\left|1 + tg\frac{x}{2}\right|$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{cosx} dx = \frac{1}{2}ln\left|1 - tg\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}ln\left|1 + tg\frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}ln\left(1 - tg\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(1 + tg\frac{1}{2}\right)$$

$$= ln\left(\sqrt{\frac{1-tg\frac{1}{2}}{1+tg\frac{1}{2}}}\right)$$

8. $\int_0^1 sh^3(x)\, dx;$

$sh^3(x) = sh^2(x)sh(x) = (ch^2(x) - 1)sh(x)$. Posons $t = ch(x)$ alors $dt = sh(x)dx$ et

$\int sh^3(x) = \int sh^3(x) = \int (ch^2(x) - 1)sh(x)dx = \int (t^2 - 1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t$ d'où

$\int sh^3(x) = \frac{1}{3}ch^3(x) - chx$. Alors

$$\int_0^1 sh^3(x)\, dx = \frac{1}{3}ch^3(1) - ch(1) - \frac{1}{3}ch^3(0) - ch(0)$$

$$\int_0^1 sh^3(x)\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}\right)^3 - \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}\right) - \frac{4}{3}$$

Exercice 11

Calculer à l'aide des intégrales, les limites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

On peut écrire

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{b-a}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ où

Posons $f(x) = x^2$; $a = 0$ et $b = 1$. f est continue dans $[0,1]$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$

On peut écrire $\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{\frac{n\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{b-a}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Posons $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $a = 0$ et $b = 1$. f est continue dans $[0,1]$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

On pose $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$ ou $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt,$

D'où

$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -4\int_1^0\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = 4\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$\int\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt = 4\int\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}dt = 4\int\frac{1}{1+t^2}dt - 4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$

$\int\frac{1}{1+t^2}dt = arctgt$

Pour calculer $\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$, intégrons par parties $\int\frac{1}{1+t^2}dt$ en posant

$f = \frac{1}{1+t^2}$ et $g' = 1$ alors $f' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ et $g = t$ et

$\int\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t}{1+t^2} + 2\int\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{t}{1+t^2} + 2\int\frac{1}{1+t^2}dt - 2\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$ d'où

$\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}arctgt,$ donc

$4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = 4arctgt - 2\frac{t}{1+t^2} - 2arctgt$ d'où

$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = 4\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = 2arctgt - 2\frac{t}{1+t^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Exercice 12

1. Montrer que pour tout entier n, on a

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \frac{1}{n+1}$$

$0 < x < 1$ alors $x^n > 0$ et $x + 1 > 1$ d'où $\frac{1}{1+x} < 1$ donc $\frac{x^n}{1+x} < x^n$ alors

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ d'où l'inégalité $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \frac{1}{n+1}$

2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

On a $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \frac{1}{n+1}$, d'autre part comme $\frac{x^n}{1+x} > 0$ alors $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx > 0$

Alors

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \frac{1}{n+1}$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ ilvient $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

Exercice 13 (traité en cours)

Pour tout entier non nul n, posons $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

1. En intégrant I_n par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

2. Calculer par partie I_1 puis en déduire la valeur de I_2.

Exercice 14

Considérons la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt$

1. Montrer que F est bien définie sur $]1, +\infty[$ et que $F > 0$ sur $]1, +\infty[$.

$\frac{lnt}{(t-1)^2}$ est continue dans $]1,+\infty[$ donc Riemann-intégrable et comme $\frac{lnt}{(t-1)^2} > 0$ dans $]1,+\infty[$ alors pour tout $x > 1$, $\int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt > 0$ donc $F > 0$ sur $]1,+\infty[$.

2. Pour $s \in]1,+\infty[$ et c un nombre réel tel que $1 < c < s$, posons $G(s) = \int_c^s \frac{lnt}{(t-1)^2} dt$.

a) Montrer que pour tout réel > 1, $F(x) = G(x^2) - G(x)$.

$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt$, d'après la relation de Chasles, pour tout $x < c < x^2$

$$\int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = \int_x^{c} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt + \int_c^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = \int_c^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt - \int_c^{x} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = G(x^2) - G(x)$$

b) En déduire que F est dérivable dans $]1,+\infty[$ puis déterminer sa dérivée.

G est dérivable dans $]1,+\infty[$ et $G'(s) = \frac{lns}{(s-1)^2}$ donc F est dérivable dans $]1,+\infty[$ et

$$F'(x) = \left(G(x^2) - G(x)\right)' = 2xG'(x^2) - G'(x)$$
$$= 2x\frac{lnx^2}{(x^2-1)^2} - \frac{lnx}{(x-1)^2} = \frac{lnx}{(x-1)^2}\left(\frac{4x}{(x+1)^2} - 1\right) = \frac{lnx}{(x-1)^2}\left(\frac{4x-(x+1)^2}{(x+1)^2}\right) = \frac{2x-x^2-1}{(x^2-1)^2} lnx = -\frac{lnx}{(x+1)^2}$$

3. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{lnt}{(t-1)^2}$ puis déterminer $F(x)$ et retrouver sa dérivée.

Intégrons par parties en posant $u = lnt$ et $v' = \frac{1}{(t-1)^2}$ alors $u' = \frac{1}{t}$ et $v = -\frac{1}{t-1}$ et

$$\int \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = -\frac{lnt}{t-1} + \int \frac{1}{t(t-1)} dt$$

$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$ (1)

Pour $t \neq 0$ on multiplie les deux membres de (1) par t puis on fait tendre t vers 0 :on obtient $a = -1$

Pour $t \neq 1$ on multiplie les deux membres de (1) par $t - 1$puis on fait $t \longrightarrow 1$: on obtient $b = 1$

D'où

$$\int \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = -\frac{lnt}{t-1} - \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t-1} dt = -\frac{lnt}{t-1} - lnt + ln(t-1).$$

Alors

$$\int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2} dt = -\frac{lnt}{t-1} - lnt + ln(t-1)\Big|_x^{x^2} = ln(x+1) - \frac{x}{x+1} ln(x)$$

D'où $F'(x) = -\frac{lnx}{(x-1)^2}$.