USTHB, Faculté de Mathématiques (2021/2022) **L1, MI, Coordination**
Département d'algèbre **Durée : 1h 30 minutes**

Examen d'algèbre 1

Instructions : Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits durant l'examen. Rédiger et justifiez clairement vos réponses.

Exercice 01 :(4 points)
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.
1. Calculer $f(\{-1, 2\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.
2. Soit y un réel fixé. Résoudre l'équation $y = \frac{2+x}{3-x}$.
3. En déduire que f est injective, mais qu'elle n'est pas bijective.
4. Montrer qu' il existe un réel a tel que f soit une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, et expliciter la bijection réciproque.
Exercice 02 :(5 points)
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1 .
3. Soit $a \in \mathbb{R}$.
i) Trouver α et β dans $\mathbb{R}$ pour que $X^4 - X^2 - (a^4 - a^2) = (X^2 - a^2)(X^2 + \alpha X + \beta)$.
ii)Déterminer la classe d'équivalence de a.
Exercice 03 :(7 points)

Soit $G = \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}$. On définit sur G la loi $*$ par :

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

1) Vérifier l'identité :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

En déduire que $*$ est une loi interne.
3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
4) Soit l'application $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par : $f(a, b) = a + ib$ (où $i^2 = -1$)
a)Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'homomorphisme f est-il injectif ? Est-ce un isomorphisme ?
Exercice 04 :(4 points)
On note A l'ensemble de réels suivant :

$$A = \{m + n\sqrt{5}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. On considère l'application φ de A dans lui-même définie, pour tout, $m + n\sqrt{5} \in A$ par :

$$\varphi(m + n\sqrt{5}) = m - n\sqrt{5}$$

Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$.

Correction d'examen d'algèbre 1

Exercice 01 :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.

1. On calcul $f(\{-1,2\}) = \{f(x), x \in \{-1,2\}\} = \{\frac{1}{4}, 4\}$.
$f^{-1}\{-1\} = \{x, f(x) \in \{-1\}\} = \emptyset$

2. On a $y = \frac{2+x}{3-x} \iff [y(3-x) = 2+x$ et $x \neq 3] \iff [x(y+1) = 3y-2$ et $x \neq 3]$. $\star$ Si $y = -1$, il vient $0 = -5$ et l'équation n'a donc pas de solution. $\star$ Sinon l'unique solution est $x = \frac{3y-2}{y+1}$.

3. Tout élément de $\mathbb{R}$ admet donc au plus un antécédent et f est injective. Mais -1 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective et donc pas bijective. Néanmoins f induit une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
La bijection réciproque est : $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{3\}, y \mapsto \frac{3y-2}{y+1}$

Exercice 02 :

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. a)- $\mathcal{R}$ est réflexive car par la réflexivité de l'égalité on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 = x^4 - x^2,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive. b)- $\mathcal{R}$ est symétrique car par la symétrie de l'égalité on a

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y &\iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \\ &\iff y^4 - y^2 = x^4 - x^2 \\ &\iff y\mathcal{R}x,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique. c)- $\mathcal{R}$ est transitive car par la transitivité de l'égalité on a

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\iff \left\{\begin{array}{l} x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \\ y^4 - y^2 = z^4 - z^2 \end{array}\right. \\ &\implies x^4 - x^2 = z^4 - z^2 \\ &\implies x\mathcal{R}z\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive. De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.

$$\dot{0} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\}$$

On a alors

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}0 &\iff x^4 - x^2 = 0 \\ &\iff x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\dot{0} = \{0, 1, -1\}$$

Comme $1 \in \dot{0}$ alors $1\mathcal{R}0$, par suite $\dot{0} = \dot{1}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$,

i) On cherche α et β dans $\mathbb{R}$ pour que $X^4-X^2-(a^4-a^2)=(X^2-a^2)(X^2+\alpha X+\beta)$.
On a $X^4-X^2-(a^4-a^2)=(X^2-a^2)(X^2+\alpha X+\beta)=X^4+\alpha X^3+(\beta-a^2)X^2-\alpha a^2X-\beta a^2$.
Par identification on trouve $\beta=-1+a^2$ et $\alpha=0$, donc l'équation devient comme suite
$X^4-X^2-(a^4-a^2)=(X^2-a^2)(X^2-1+a^2)$.
ii) On détermine la classe d'équivalence de a.

$$\dot{a}=\{x\in\mathbb{R},x\mathcal{R}a\}$$
$$x\mathcal{R}a\Longleftrightarrow x^4-x^2=a^4-a^2$$

D'après **i)** On a $X^4-X^2-(a^4-a^2)=(X^2-a^2)(X^2-1+a^2)$.
Pour trouver les classe de a on cherche la solution de l'équation $(X^2-a^2)(X^2-1+a^2)=0$.
Cela implique $\begin{cases}(X^2-a^2)=0, & ;\\ (X^2-1+a^2)=0, & .\end{cases}$ implique $\begin{cases}X=\pm a, & ;\\ X=\pm\sqrt{1-a^2}, & a\in[-1,1].\end{cases}$
d'où

$$\dot{a}=\left\{a,-a,-\sqrt{1-a^2},+\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Exercice 03 :
Soit $G=\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}$. On définit sur G la loi $*$ par :

$$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

1) On Vérifie l'identité :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac)^2-2acbd+(bd)^2+(ad)^2+2adbc+(bc)^2=(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2$
Donc Obtient

$$(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

On déduit que $*$ est une loi interne.
$*$ est une loi interne si et seulement si $(ac-bd,ad+bc)\neq(0,0)$ On pose $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$,
cela implique $\begin{cases}a^2=-b^2, & ;\\ c^2=-d^2, & .\end{cases}$ contradiction, donc $(ac-bd,ad+bc)\neq(0,0)$ d'ou la lois $*$ est interne.
2) On Montre que $(G,*)$ est un groupe commutatif.
La loi est commutative car

$$\forall(a,b),(c,d)\in G:(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,cb+da)=(c,d)*(a,b)$$

L'élément neutre :

$$\forall(a,b)\in G,\exists(e,e')\in G:(a,b)*(e,e')=(e,e')*(a,b)=(ae-be',ae'+be)=(a,b)$$

Ce que est implique $\begin{cases}ae-be'=a, & ;\\ ae'+be=b, & .\end{cases}$ D'après la question **1)** on trouve $(e,e')=(1,0)$
L'élément symétrique

$$\forall(a,b)\in G,\exists(a',b')\in G:(a,b)*(a',b')=(a',b')*(a,b)=(aa'-bb',ab'+ba')=(1,0)$$

Ce que est implique $\begin{cases}aa'-bb'=1, & ;\\ ab'+ba'=0, & .\end{cases}$ D'après la question **1)** on trouve $(a',b')=(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$.
La Lois $*$ est associative car :

$$\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in G:((a,b)*(c,d))*(e,f)=(a,b)*((c,d)*(e,f))$$

Par conséquence $(G, *)$ est un groupe commutative.
4) Soit l'application $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par : $f(a, b) = a + ib$ (où $i^2 = -1$)
a) On montre que f est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
On a

$$\forall (a, b), (c, d) \in G : f((a, b) * (c, d)) = f(ac - bd, ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc)$$

et

$$\forall (a, b), (c, d) f((a, b).f(c, d)) = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

Donc $f((a, b) * (c, d)) = f(a, b).f(c, d))$. Par conséquence f est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
b. On determine le $Ker(f)$
$Ker(f) = \{(a, b) \in G, f(a, b) = 1, \}$ òu 1 est l'élément neutre de groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$,
$f(a, b) = 1$ implique que $a + ib = 1$ donc $(a, b) = (1, 0)$ d'òu f est injective.
f n'est pas un isomorphisme car f n'est pas surjective (car l'équation $f(a, b) = a+ib = 1+i\sqrt{2}$ n'admet pas solution dans $G = \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}$).

Exercice 04 : 1. L'ensemble A est non vide. Il suffit de vérifier que A est un sous-groupe pour l'addition, et que la multiplication est stable. Soient m, n, m', n' quatre éléments de $\mathbb{Z}$.

$$(m + n\sqrt{5}) - \left(m' + n'\sqrt{5}\right) = (m - m') + (n - n')\sqrt{5}$$

Donc

$$(m + n\sqrt{5}) - \left(m' + n'\sqrt{5}\right) \in A$$
$$\left(m' + n'\sqrt{5}\right) = (mm' + 5nn') + (mn' + m'n)\sqrt{5}$$

Donc

$$(m + n\sqrt{5}) \times \left(m' + n'\sqrt{5}\right) \in A$$

2. Observons d'abord que pour tout élément a de $A, \varphi(\varphi(a)) = a$. Donc φ est une bijection, puisque tout élément de A a pour antécédent $\varphi(a)$. Montrons maintenant que φ est un morphisme pour l'addition.

$$\varphi\left((m + n\sqrt{5}) + \left(m' + n'\sqrt{5}\right)\right) = \varphi\left((m + m') + (n + n')\sqrt{5}\right) = (m + m') - (n + n')\sqrt{5}$$
$$= (m - n\sqrt{5}) + \left(m' - n'\sqrt{5}\right) = \varphi(m + n\sqrt{5}) + \varphi\left(m' + n'\sqrt{5}\right)$$

Montrons enfin que φ est un morphisme pour la multiplication.

$$\begin{aligned}\varphi((m + n\sqrt{5}) \times \left(m' + n'\sqrt{5}\right)) &= \varphi\left((mm' + 5nn') + (mn' + m'n)\sqrt{5}\right) \\ &= (mm' + 5nn') - (mn' + m'n)\sqrt{5} = (m - n\sqrt{5}) \times \left(m' - n'\sqrt{5}\right) \qquad (1) \\ &= \varphi(m + n\sqrt{5}) \times \varphi\left(m' + n'\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$