Faculté de mathématiques. Département d'analyse U.S.T.H.B. 2021/22

L1, MI8, Analyse 2 Séries d'exercices n°1

Formule de Taylor-Lagrange et développements limités

I- Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1

Calculer les dérivées successives de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = cosx$; 2. $f(x) = \ln(1+x)$; 3) $f(x) = (x^3 + x + 1)e^x$; 4) $f(x) = (cosx)e^x$

Exercice 2

Démontrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange que

$\forall x \in [0, +\infty[$ on a, $1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \leq 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$

Exercice 3

1) Montrer que $\forall x > 0,\ 0 \leq ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{4!} \leq \frac{x^5}{5!} sh(x)$

2) En déduire que $\frac{433}{384}$ est une valeur approchée de $ch\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3840}$ près.

II- Développements limités

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

2) La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ? Que peut-on en conclure.

Exercice 2

Etablir pour chacune des fonctions ci-dessous un développement limité en 0 à l'ordre n.

1) $f(x) = sin(2x) + cos(x^2), n = 3$; 2) $f(x) = e^{3x}\, sin(2x), n = 4$; 3) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x sinx}, n = 3$.

Exercice 3

Etablir pour chacune des fonctions ci-dessous un développement limité en x_0 à l'ordre n.

1) $f(x) = ln(sinx), x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$; 3)$f(x) = \frac{1+x}{2+x}, x_0 = +\infty, n = 2$;

4) $f(x) = x^{x-1}, x_0 = 1, n = 1$; 5)$f(x) = x^2 + 4x^2 + x - 1, x_0 = 1, n = 3$

Exercice 4

Déterminer le développement généralisé à l'ordre 2 en 0 de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \frac{\ln(1+\tan x)}{1 - cos\, x}$;

2) $f(x) = \frac{chx}{xln(1+x)}$

Exercice 5 (à traiter plus loin, après le chapitre sur les intégrales)

On définit la fonction f par $f(x) = arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction dérivée f'.

2) En déduire un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction f.

Exercice 6

Considérons les deux fonctions $f(x) = sin(ln(1 + x))$ et $g(x) = ln(1 + sin(x))$

Trouver un équivalement simple de $f(x) - g(x)$ en 0.

Exercice 7

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $h(x)=\frac{sin(x)sh(x)}{sin(x^2)}$

2) En déduire un équivalent simple de $h(x)-1$ au voisinage de 0.

Exercice 8

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{shx}{sinx}$; 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$; 3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{cos(x)} - e^{ch(x)}}{cos(x) - ch(x)}$; 4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\frac{e^{x}-1}{x}$.

Exercice 9

Etudier localement les fonctions suivantes au point indiqué.

1) $f(x) = ln\,2 + ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ en zéro

2) $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{4(x-1)}$, en $+\infty$;

Exercice 10 (devoir)

Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2} - x\right)$; 2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sinx}\right)^{\frac{sinx}{x-sinx}}$. On pourra poser $X = \frac{x-sinx}{sinx}$.

Exercice 11 (devoir)

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

2) En déduire le développement à l'ordre 2 de $\left(1+\frac{1}{X}\right)^{X}$ en $+\infty$.

3) En déduire $\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$

Exercice 12 (devoir)

Soit f l'application définie par $f(x) = 2x + sin(x)$

1) Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 en $x = 0$.

2) Montrer que f est une bijection et que sa bijection réciproque f^{-1} est de classe C^3 puis en déduire que f^{-1} a un développement limité à l'ordre 3.

3) En utilisant la relation $f^{-1}f(x) = x$, en déduire le développement limité de f^{-1}