Exercice 1

1- Mettre, à la place des pointillés, le connecteur logique qu'il faut : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

a) $x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2;$

b) $z \in \mathbb{C},\ z = \bar{z} \ldots\ldots z\ \in \mathbb{R};$

c) $x \in \mathbb{R},\ x = \pi \ldots\ldots e^{2ix} = 1.$

2- Donner la négation de chacune des assertions suivantes puis dire si elle est vraie ou fausse.

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in\ \mathbb{R},\ x + y > 0;$ b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0;$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0;$ d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y\ \in \mathbb{R},\ y^2 > x.$

3- Nier les propositions suivantes.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) < 1;$

b) l'application f est croissante; (devoir)

c) Il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.

4- Montrer par récurrence les propositions suivantes.

a) Pour tout entier $n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

b) L'inégalité de Bernoulli : pour tout $x > -1$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(1 + x)^n\ \geq 1 + nx;$

c) Pour tout entier $n \geq 5,\ 2^n > n^2$; (devoir)

d) La formule du binôme de Newton : pour tout réels a et b et tout entier naturel n,

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ appelé coefficient binomial de Gauss.

4- Proposer une formule pour la dérivée d'ordre n de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis la démontrer par récurrence dans chacun des cas suivants. (devoir)

a) $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = cosx,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 2

Montrer que si a est un nombre réel tel que, pour tout > 0 , on ait $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.

Exercice 3

Encadrer $x+y,\ x-y,\ xy,\ \frac{x}{y}$ sachant que $x \in [1,\ 6]$ et $y \in [-2,-1]$

Exercice 4

1- Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel et que le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

2- Que peut-on dire de la somme et le produit de deux nombres irrationnels?

Exercice 5

1- Montrer que

a) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel; (cours)

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier; (devoir)

c) $5,632\overline{62}$ est un nombre rationnel puis l'écrire sous forme d'une fraction irreductible;

(cours)

d) 1,03033033303333…03333333…3… est un nombre irrationnel; (cours)

e) $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel (devoir) ; f) $\frac{ln3}{ln2}$ est un nombre irrationnel; (devoir)

g) Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}=0$ alors $a=b=0$.

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|x-1|+|x-2|=2$;

2) $\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10$; (devoir)

3) $-1<\frac{2x}{x^2-1}<1$;

4) $x^3 \leq 1$; (cours)

5) $x+1 \leq \sqrt{x+2}$; 6) $x \leq \sqrt{x}$ puis comparer un nombre positif a avec sa racine carrée.

7) $x \leq x^2$ puis comparer un nombre réel a avec son carré. (cours)

Exercice 6 (devoir)

Soient a, b et c trois nombres réels positifs ou nuls. Montrer les inégalités suivantes.

1) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$; 2) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$; 3) $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2$

Exercice 7

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

des nombres réels.

1) Montrer l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_2+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

2) En déduire l'inégalité $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$

3) Réecrire les sommes, des deux inégalités précédentes, sous forme condensée.

Exercice 8

Soient x et y deux nombres réels. Montrer les inégalités suivantes

1) $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$; (devoir)

Indication :

On peut écrire : $2x = (x+y)+(x-y)$ et $2y = (x+y)+(x-y)$

2) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$;

3) $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$. (devoir)

Indication : poser $a = x-1$ et $b = y-1$ puis utliser l'inégalité triangulaire en considérant les nombres $1, a, b, ab$

Exercice 9 (en cours)

Démontrer l'existence et l'unicité de la partie entière d'un nombre réel.

Exercice 10

Soit x et y deux réels et n un entier naturel non nul. Montrer,

1. $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$;

$\lfloor nx \rfloor \leq nx$ d'où $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$ et comme la fonction partie entière est croissante alors

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor \text{ (1)}$$

D'autre part,

$\lfloor x \rfloor \leq x$ d'où $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ alors $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ car la partie esntière est croissante

Comme la partie entière d'un entier c'est lui-même on aboutit à $n\lfloor\lfloor x \rfloor\rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ d'où

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor \text{ (2)}$$

De (1) et (2) on a l'égalité

2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$;

3. $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$; (devoir)

4. Pour tout entiers relatifs m et p, on a $\left\lfloor \frac{m+p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-p+1}{2} \right\rfloor = m$ (devoir)

<u>Exercice 11</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 3$; 2) $\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor \leq 3$. (devoir)

<u>Exercice 12</u>

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer :

1) $A \subset B \Rightarrow supA \leq supB$ (devoir) et $infA \geq infB$;

Montrons que si A et B sont deux parties minorées de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$ alors $infA \geq infB$.

2) $A \cup B$ est bornée

Montrons que si A et B sont majorées alors $A \cup B$ est majorée et l'on a

b) $inf(A \cup B) = min\,(infA, infB)$; (devoir)

3) $A+B$ est bornée et $\sup(A+B) = supA + supB$ où $A+B = \{a+b, a \in A \; et \; b \in A\}$.

4) Posons $-A = \{-x, x \in A\}$
Montrer que si A est minoré (majoré) alors $-A$ est majoré (minoré) et l'on a

a) $\sup(-A) = -inf A$
b) $inf(-A) = -\sup A$

Exercice 13 (devoir)

Soient x et y deux réels. Montrer que $max(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ et $min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Exercice 14

Les parties suivantes, sont-elles majorées, minorées? Si oui déterminer leurs bornes supérieures, inférieures puis s'ils existent leurs maximums, minimums.

$A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}$; $B = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (devoir); $C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\; ; n, p \in \mathbb{N}^*\right\}$; $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$;

$E =]0,1[\cap \mathbb{Q}$; (devoir) $F = \left\{\frac{1+n^2(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$; (devoir) $G = \left\{\frac{n}{np+1}\; ; n, p \in \mathbb{N}^*\right\}$;

$H = \left\{\frac{x^3}{|x^3-1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}$; $I = \left\{\frac{2^n}{2^n-1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $J = \left\{\frac{x+1}{x+2},\; x \in]-\infty, -3]\right\}$. (devoir)

Exercice 15 (en cours)

Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

Exercice 16 (en cours)

1. Donner trois exemples de voisinages d'un nombre réel a.

2. Dire si 0 est un point adhérent, point intérieur, point d'accumulation ou point isolé de l'ensemble A dans chacun des cas suivants.

a) $A = [1, \; 2] \cup \{0, 1\}$; b) $A =]0, \; 1]$; c) $A = [0, \; 1[$; d) $A = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$.