Faculté de mathématiques. Département d'analyse
L1MI8 Analyse1 Corrigé de l'épreuve Finale

Exercice n°1 (15pts)

Partie A ($7\ pts$) Soit la fonction numérique $f(x) = \begin{cases} e^{sinx} + a & si\ x < 0 \\ \frac{7x+4}{3(x+1)} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) Comment peut-on choisir le nombre réel a pour que f soit continue en $x_0 = 0$. **/2,5pts**

f est défini dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = \frac{4}{3}$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{sinx} + a = e^{sin0} + a = e^0 + a = 1 + a = f(0) \Leftrightarrow 1 + a = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

f est continue en $x_0 = 0$ à gauche si, et seulement si, $a = \frac{1}{3}$. (1pt)

$\frac{7x+4}{3(x+1)}$ est continue dans $\mathbb{R}/\{-1\}$ donc f est continue en $x_0 = 0$ à droite. (1pt)

Donc on peut choisir $a = \frac{1}{3}$ pour que f soit continue en $x_0 = 0$. (0,5 pt)

2) f est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Si oui donner $f'(0)$. **/2pts**

D'après 1 on considère la fonction pour $a = \frac{1}{3}$: $f(x) = \begin{cases} e^{sinx} + \frac{1}{3} & si\ x < 0 \\ \frac{7x+4}{3(x+1)} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{sinx}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{sinx}-1}{x} = \left(e^{sinx}\right)'_{|x=0} = \left(cosx\, e^{sinx}\right)_{|x=0}$=1=$f'_g(0)$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ à gauche. (1pt)

$\frac{7x+4}{3(x+1)}$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ / $\{-1\}$ et $\left(\frac{7x+4}{3(x+1)}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$donc f est dérivable en $x_0 = 0$ à droite et $f'_d(0) = 1$ (0,5pt).

Les deux nombres dérivés en $x_0 = 0$ sont égaux donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0)$=1. (0,5 pt)

3) Montrer en utilisant le théorème adéquat que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique s dans le segment $[0,3]$. On ne calculera pas s. **/2,5pts**

Dans le segment $[0,3]$,

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{7x+4}{3(x+1)} = x \Leftrightarrow 7x + 4 = 3x(x + 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$

On pose $g(x) = 3x^2 - 4x - 4$; g est continue dans $[0,3]$ et $g(0) = -4$ et $g(3) = 11$ (1pt) alors d'après le théorème des valeurs intermédiares il existe $s \in [0,3]$ tel que $g(c) = 0$ donc l'équation $f(x) = x$ possède une solution s dans le segment $[0,3]$. (0,5 pt)

D'autre part g est dérivable et $g'(x) = 6x - 4$ d'où

x	0		$\frac{2}{3}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-4	$\searrow$	$-\frac{16}{3}$	$\nearrow$	11

$6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$ et $6x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ et $g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3} < 0$

Donc s est unique dans $[0,3]$. (1pt)

Partie B $(8\ pts)$ Soit la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n, 0 \leq u_n \leq 4$. **/2pts**

$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{7x+4}{3(x+1)}$ est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n, 0 \leq u_n \leq 4$.

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 4$ (0,5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons par récurrence que $0 \leq u_n \leq 4$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$

$u_{n+1} = f(u_n), f(0) = \frac{4}{3} > 0$ et $f(4) = \frac{32}{15} < 4$ d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. (1,5pt)

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On ne calculera pas sa limite. **/2pts**

La suite (u_n) est définie par une fonction croissante et $u_1 - u_0 = \frac{4}{3} > 0$ donc la suite est croissante (1,5pt). D'après le théorème de la limite monotone (u_n) est convergente. (0,5pt)

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 2| \leq \frac{1}{3}|u_{n-1} - 2|$. **/1,5pt**

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - 2| = |f(u_{n-1}) - 2| = \left|\frac{7u_{n-1}+4}{3(u_{n-1}+1)} - 2\right| = \left|\frac{u_{n-1}-2}{3(u_{n-1}+1)}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{u_{n-1}+1}\right| |u_{n-1} - 2|$ (0,5pt)

D'après la question B-1 on a $0 \leq u_{n-1} \leq 4$ d'où $\left|\frac{1}{u_{n-1}+1}\right| \leq 1$. (0,5pt)

Alors $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3}|u_{n-1} - 2|$ (0,5pt)

4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2|$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. **/2pt**

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2|$.

Pour $n = 0,\ |u_0 - 2| = |u_0 - 2| = \left(\frac{1}{3}\right)^0 |u_0 - 2|$ (0,5pt)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons par récurrence que $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2|$

D'autre part, d'après la question précédente, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$

D'où $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$ (0,5pt).

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2|$

Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |u_n - 2| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2| = 0$ d'où (0,5pt) d'où

$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - 2| = 0$ (0,5pt) ce qui est équivalent à $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$. (0,5pt)

5) Comparer 2 avec la valeur de s de la question 3 de la partie A. Justifier votre réponse. **/1**

La limite l de (u_n) est solution de $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0,4]$ comme $l = 2 \in [0,3]$ et s est unique solution de $f(x) = x$ dans $[0,3]$ alors $s = 2$. (1pt)

Exercice n°2 (/5 pts)

Peut-on prolonger par continuité la fonction $f(x) = \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, en $x_0 = 1$? **/3pts**

Si oui, donner son prolongement. **/2 pts**

f est défini dans $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.

1ère méthode

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x^n - 1}{x - 1}}{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}} = \frac{g'(1)}{h'(1)} = 2n$ où $g(x) = x^n$ et $h(x) = \sqrt{x}$ sont dérivables en 1 et

$g'(1) = n$ et $h'(1) = \frac{1}{2}$ (3pts)

2ème méthode

Posons $X = \sqrt{x}$ alors

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{X \to 1} \frac{X^{2n} - 1}{X - 1} = k'(1)$ où $k(X) = X^{2n}$ est dérivable en 1 et $k'(1) = 2n$

d'où $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2n$. (3pts)

f admet une limite en 1 donc f est prolongeable par continuité en 1 (1pt) et son prolongement qu'on note $\tilde{f}$ est défini par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{\sqrt{x} - 1} & si\ x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ 2n & si\ x = 1 \end{cases}, \text{ (1pt)}$$