Corrigé de la série TD n°1
Les fonctions primitives récursives

Rappelons **les fonctions de base** :

- la fonction nulle d'arité 0, Z
- la fonction successeur d'arité 1, S
- et les fonctions projection d'arité n, P_i^n.

Rappelons aussi :
La règle de composition appliquée à une fonction F

- **$F(x_1,x_2,...,x_n)=H \circ G(x_1,x_2, ...,x_n)$**

La règle de récursion appliquée aux fonctions F1 et F2 d'arité 1 et 2 respectivement

- **F1(0)=Constante=G (fonction d'arité 0)**
- **F1(y+1)=H(F(y),y)**

- **F2(x,0)=G(x)**
- **F2(x,y+1)=H(x,F(x,y),y)**

Exercice 1

1/ $Z_1(0)=0=Z$ fonction de base PR
$Z_1(y+1)=0=Z_1(y)=P_1^2\ (Z_1(y),y)$

2/ plus $(x,0)=x=P_1^1\ (x)$
plus $(x,y+1)=S(x+y)=SoP_2^3$ (x, plus(x,y),y)

3/ mult $(x,0)=0=Z_1(x)$
mult(x,y+1)=Plus(mult(x,y), x)=Plus o (P_2^3, P_1^3) (x, mult(x,y),y)

Exercice 2

1/ Sg(0)=0=Z fonction de base PR
Sg(y+1)=1=S(0)=$S(Z_1(x))$=SoZo P_2^2 (Sg(y),y)

3/ Pr(0)=0=Z
$\mathrm{Pr}(y+1) = y = P_2^2(Pr(y), y)$

Exercice 3

1/

- **Pour n=0 :** $C_0 = \lambda.0$=Z est PR car une fonction de base
- **Hypothèse de récurrence :** Supposons que la constante C_k.= λ. k d'arité 0 est PR pour tout k≤n.
- Montrons que C_{n+1} = λ. n+1 est PR en utilisant la règle de composition **C_{n+1}=n+1=S(n)=S(C_n)=S°C_n** une composition de fonctions PR (S une fonction de base PR et C_n PR d'après l'hypothèse de récurrence). La fonction C_{n+1} est donc PR

Conclusion : la fonction constante d'arité 0 C_n=λ. n est PR pour toute constante n

2/ On le montre par application de la règle de récursion aux fonctions PR G=λ.c (d'arité 0) et H= P_1^2 d'arité 2 :

F(0)=c=g

F(n+1)=c=F(n)= P_1^2(F(n),n)

Exercice 4

1/ fact(0)=1=C_1

fact(y+1)=mult (fact(y), S(y))=mult o (P_1^2, S o P_2^2) (fact(y),y)

2/ puiss (x,0)=x^0=1=C_1

puiss (x,y+1)=mult(puiss(x,y), x)=mult o (P_2^3, P_1^3) (x, puiss(x,y),y)

3/ $\overline{Sg}(0) = 1 = C_1$

$\overline{Sg}(y+1) = 0 = Z_1(y) = Z_1 o P_2^2\left(\overline{Sg}(y), y\right)$

Exercice 5

1/ $F(x,0) = \sum_{k=0}^{0} D(x,k) = D(x,0) = D\big(x, Z(y)\big) = Do(P_1^2, ZoP_2^2)(x,y)$

$F(x,y+1) = \sum_{k=0}^{y+1} D(x,k) = F(x,y) + D(x,y+1) =$
$Plus\ o\ (P_2^3, D\ o\ (P_1^3, S\ o\ P_3^3))(x, F(x,y), y)$

2/ En appliquant la règle de composition
$f(x) = 0 + x + 2x + 3x + \cdots + x^2 = \sum_{k=0}^{x} x * k = \sum_{k=0}^{x} mult(x,k) = \sum_{k=0}^{x} D(x,k) =$
$F(x,x) = F\ o\ (P_1^1, P_1^1)(x)$ avec D est la fonction mult.