1Lic MI - Sections 5 et 6 - Module Alg2 Avril 2020

Exercices Corrigés sur le Calcul Matriciel

Exercice 1 : Soient les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; C=(1 1 -3), D=
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 \\ 1-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

1) Peut-on faire des additions parmi ces matrices ?
2) Quels sont tous les produits possibles (à deux éléments) entre ces matrices ?
3) Quelles sont parmi ces matrices celles dont on peut calculer la puissance p-ième, quel que soit l'entier $p \geq 2$? Pour chacune de celles-ci, calculer sa puissance 2-ième.
4) Quel est le nombre de lignes et le nombre de colonnes du produit E×G ? Calculer $E\times G$

1) **Peut-on faire des additions parmi ces matrices ?**

Rappel: La somme de deux matrices M et N n'est possible que si les deux matrices ont les mêmesimensions (M et N ont le même nombre de ligne et le même nombre de colonnes). Comme toutes les matrices de l'exercice ont des dimensions deux à deux distinctes les seules additions possibles sont

$$A+A,\quad B+B,\quad C+C,\quad D+D,\quad E+E,\quad F+F,\quad G+G$$

2) **Quels sont tous les produits possibles (à deux éléments) entre ces matrices ?**

Rappel: Soient deux matrices M et N. Le produit M.N n'est possible que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N.

Dans ce cas les produits possibles sont:

$$B\times A,\quad C\times B,\quad C\times E,\quad C\times F,\quad D\times B,\quad D\times E,$$
$$D\times F,\quad E\times G,\quad F\times B,\quad F\times E,\quad G\times A$$

3) Quelles sont parmi ces matrices celles dont on peut calculer la puissance p-ième, quel que soit l'entier $p \geq 2$? Pour chacune de celles-ci, calculer sa puissance 2-ième.

Rappel:

Les seules matrices dont on peut calculer les puissances sont les matrices carrées.

Les matrices dont on peut calculer la puissance p-ième sont les matrices A et F.

- Calculons A^2

Par définition $A^2 = A \times A$

On pose $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-1+\sqrt{2}} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-1+\sqrt{2}} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a} = \mathbf{1} \times \mathbf{1} + (\mathbf{-1+\sqrt{2}}) \times (\mathbf{-1}) = 2-\sqrt{2}$,

$\boldsymbol{b} = \mathbf{1} \times (\mathbf{-1+\sqrt{2}}) + (\mathbf{-1+\sqrt{2}}) \times \mathbf{2} = -3+3\sqrt{2}$

$\boldsymbol{c} = (\mathbf{-1}) \times \mathbf{1} + \mathbf{2} \times (\mathbf{-1}) = -3$

$\boldsymbol{d} = (\mathbf{-1}) \times (\mathbf{-1+\sqrt{2}}) + \mathbf{2} \times \mathbf{2} = 5-\sqrt{2}$

On a alors : $A^2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} \\ -3 & 5-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- Calculons F^2

Posons $F^2 = F \times F = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$a = \mathbf{2} \times \mathbf{2} + (\mathbf{-1}) \times \mathbf{1} + \mathbf{4} \times \mathbf{0} = \mathbf{3}$

$\boldsymbol{b} = \mathbf{2} \times (\mathbf{-1}) + (\mathbf{-1}) \times \mathbf{1} + \mathbf{4} \times (\mathbf{-3}) = -15$

$\boldsymbol{c} = \mathbf{2} \times \mathbf{4} + (\mathbf{-1}) \times \mathbf{0} + \mathbf{4} \times (\mathbf{-2}) = 0$

$\boldsymbol{d} = \mathbf{1} \times \mathbf{2} + \mathbf{1} \times \mathbf{1} + \mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{3}$

$e = \mathbf{1} \times (\mathbf{-1}) + \mathbf{1} \times \mathbf{1} + \mathbf{0} \times (\mathbf{-3}) = 0$

$f = \mathbf{1} \times \mathbf{4} + \mathbf{1} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} \times (\mathbf{-2}) = 4$

$g = \mathbf{0} \times \mathbf{2} + (\mathbf{-3}) \times \mathbf{1} + (\mathbf{-2}) \times \mathbf{0} = \mathbf{-3}$

$h = \mathbf{0} \times (\mathbf{-1}) + (\mathbf{-3}) \times \mathbf{1} + (\mathbf{-2}) \times (\mathbf{-3}) = \mathbf{3}$

$\mathrm{i} = \mathbf{0} \times \mathbf{4} + (\mathbf{-3}) \times \mathbf{0} + (\mathbf{-2}) \times (\mathbf{-2}) = \mathbf{4}$

$$F^2 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Quel est le nombre de lignes et le nombre de colonnes du produit E×G ? Calculer $E\times G$

Rappel: Le nombre de ligne du produit de matrices M×N, lorsqu'il est possible est égal au nombre de ligne de M et le nombre de colonnes de $M\times N$ est égal à celui de N.

Le nombre de ligne de $E\times G$ est 3, le nombre de colonnes de $E\times G$ est 2.

$$E\times G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$a = 1\times 1 + (-1)\times 0 + 2\times(-1) + 0\times(-1) + 2\times 2 = 3$$

$$\boldsymbol{b} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + 2\times(-1) + 0\times 0 + 2\times(-2) = -6$$

$$\boldsymbol{c} = 2\times 1 + 0\times 0 + (-1)\times(-1) + (-1)\times(-1) + 0\times 2 = 4$$

$$\boldsymbol{d} = 2\times 1 + 0\times 1 + (-1)\times(-1) + (-1)\times 0 + 0\times(-2) = 3$$

$$e = 3\times 1 + 1\times 0 + 1\times(-1) + (-1)\times(-1) + (-1)\times 2 = 1$$

$$f = 3\times 1 + 1\times 1 + 1\times(-1) + (-1)\times 0 + (-1)\times(-2) = 5$$

Par suite

$$E\times G = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u> :

Soient les deux matrices carrées d'ordre 2 suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B. = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les deux produits de matrices AB et BA.

2) Que peut-on dire alors de l'anneau $M_2(IR)$?

1) **Calculer les deux produits de matrices AB et BA.**

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et\ B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\quad A.B \neq B.A$

2) Que peut-on dire alors de l'anneau M_2(IR) ?

On déduit que l'anneau M_2(IR) n'est pas commutatif. (Le produit matriciel n'est pas commutatif.)

Exercice3:

Soit les matrices d'ordre 3 suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les deux produits A.B et AC.
2) Est-il possible que la matrice A soit inversible ?
3) Déterminer toutes les matrices A' (carrées d'ordre 3) telles que $AA' = 0$

1**) Calculer les deux produits A.B et AC.**

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 11 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A.C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 11 & -5 & 3 \end{pmatrix} = A.B$$

2) Est-il possible que la matrice A soit inversible ?

Rappel:
Une matrice carrée M d'ordre n est inversible ssi il existe une matrice carré N d'ordre n telle que $M.N = I_n = NM$ où I_n est la matrice identité d'ordre n. N est notée M^{-1} et est appelée inverse de M.

La matrice A n'est pas inversible car si elle l'etait elle admettrit une matrice inverse notée A^{-1} et on aurait:

$$A.B = A.C \Rightarrow A^{-1}.(A.B) = A^{-1}(A.C) \Rightarrow (A^{-1}.A).B = (A^{-1}.A).C \Rightarrow I_3.B = I_3.C \Rightarrow B = C$$

ce qui est absurde. Par suite A n'est pas inversible.

3) Déterminer toutes les matrices A' (carrées d'ordre 3) telles que $AA' = 0$

On pose $A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $A.A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -d+2g & -e+2h & -f+2i \\ 4a-d+2g & 4b-e+2h & 4c-f+2i \end{pmatrix}$

$De\ l'équation\ \ AA' = O$ on obtient les trois systèmes

$$\begin{cases} a = 0 \\ -d+2g = 0 \\ 4a-d+2g = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b = 0 \\ -e+2h = 0 \\ 4b-e+2h = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ -f+2i = 0 \\ 4c-f+2i = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces systmes simples donnent: $a = b = c = 0, d = 2g, e = 2h \; et \; f = 2i$

Par conséquent les matrices A' qui vérifie $A.A' = 0$ sont les matrices de la forme

$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \\ g & h & i \end{pmatrix}$ avec g, h, i des nombres réels quelconques.

Exercice 4: Calculer les puissances n-ièmes des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rappels: Les puissances n-ièmes d'une matrice carrée M sont définies par

$$M^1 = M \;\; \text{et} \qquad M^{n+1} = M^n.M \quad pour\ tout\ entier\ n \geq 1$$

- Puissances n-ièmes de A;

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$, $A^3 = 4A \coloneqq 2^2A$

On montre par récurrence qu'on a pour tout entier n ≥ 1, $\mathrm{A^n = 2^{n-1}.A}$

- La propriété est bien vérifiée pour n=1 car on a $A^1 = A = 2^{1-1}.A$

-Supposons que la propréiété est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre $n + 1$

$A^n = 2^{n-1}.A$ implique

$$A^{n+1} = A^n.A = (2^{n-1}.A).A = 2^{n-1}.(A.A) = 2^{n-1}.(A^2) = 2^{n-1}.(2A) = (2^{n-1}.2).A = 2^n.A$$

D''où la propriété est bien vraie à l'ordre $n + 1$.

On a alors $\mathbf{A^n = 2^{n-1}.A}$ **pour tout entier naturel n** $\geq \mathbf{1}$

- Puissances n-ièmes de B

$On\ a$; $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, , $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

On montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^N \end{pmatrix}$

-La propriété est bien vrai pour $n = 1$ car $B^1 = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix}$

-On suppose la propriété vraie à l'ordre n, on a alors $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d'où $B^{n+1} = B^n.B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + (2^n - 1)2 \\ 0 & 2^n.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{N+1} \end{pmatrix}$

Par conséquent la propriété est bien vraie pour tout entier $n \geq 1$

Ona donc $pour\ tout\ entier\ naturel\ n \geq 1$, $\mathbf{B^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2^n - 1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2^N} \end{pmatrix}$

Exercice 5 *1) Déterminer le rang de chacun des deux systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :*

$$\{V_1 = (1,0,2), V_2 = (1,1,2), V_3 = (-1,1,-2)\} \ ;$$
$$\{V_1 = (-1,-1,1), V_2 = (1,3,1), V_3 = (0,2,2), V_4 = (1,-1,-3)\} .$$

2) Déterminer le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$\{V_1 = (-1,-1,1,2), V_2 = (2,1,3,1), V_3 = (1,0,2,2), V_4 = (-1,1,-1,-3), V_5 = (0,1,0,1)\} .$$

3) Déterminer le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ suivant :

$$\{P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = 1 + X + X^2 + X^3, P_3 = -X - 2X^3, P_4 = 2 + 2X^2 - X^3\} .$$

Rappel: Pour calculer le rang d'un systeme de vecteurs, il suffit d'echelonner la matrice formée par les comosantes de ces vecteurs**.** Le rang serait alors égal au nombre de lignes non nulles si on fait un echelonnement ligne, le nombre de colonnes non nuls si on fait un echelonnement colonnes.

- Déterminons le rang du systeme de vecteurs $\{V_1 = (1,0,2), V_2 = (1,1,2), V_3 = (-1,1,-2)\}$

  On écrit la matrice formée par les composantes de ces vecteurs et on l'échelonne

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

  Le rang est égal à 2.

- Déterminons le rang du susteme de vecteurs

$$\{V_1 = (-1,-1,1), V_2 = (1,3,1), V_3 = (0,2,2), V_4 = (1,-1,-3)\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est donc égal à 2

Remarques:

- ✓ On aurait pu ecrire les vecteurs en colonnes et echelonner en ligne et utiliser le fait que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée ou simplement échelonner en colonnes.
- ✓ Cette famille est forcément liée puisque le nombre des vecteurs est supérieur à la dimension de l'espace.

- Déterminons le rang du systeme de vecteurs

$$\{V_1 = (-1,-1,1,2), V_2 = (2,1,3,1), V_3 = (1,0,2,2), V_4 = (-1,1,-1,-3), V_5 = (0,1,0,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{5}{2}L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_5 \leftarrow L_5 - \frac{7}{2}L_4 \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est donc égal à 4

- Déterminons le rang du systeme de vecteurs de $IR_3[\![X]\!]$

$$\{P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = 1 + X + X^2 + X^3, P_3 = -X - 2X^3, P_4 = 2 + 2X^2 - X^3\}.$$

On écrit les composantes de chacun des polynomes dans la base canonique de $IR_3[\![X]\!]$.

$P_1 = (1,-1,1,0)$, $P_2 = (1,1,1,1)$, $P_3 = (0,-1,0,-2)$, $P_4 = (2,0,2,-1)$,

On échelonne la matrice formée par ces vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \boldsymbol{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \\ \boldsymbol{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est égal à 3.

Remarque: La famille des vecteurs précédents n'est pas libre donc ne peut constituer une base de $IR_3[\![X]\!]$.

Rappel: Dans un espace vectoriel de dimension n, E, une famille de n vecteurs de E forme une base de E ssi cette famille est libre..

Exercice 6 *1) Soient les deux matrices diagonales :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que l'on a AB et BA. Conclusion ?
2) Montrer qu'une matrice diagonale quelconque est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

1) On a $A.B = I_3$ et $B.A = I_3$

On en déduit que les matrices A et B sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

$A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$

2) **Montrer qu.une matrice diagonale quelconque est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.**

-Rappel: Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est égal à n.

Il est évident que le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses coefficients non nuls.

On en déduit qu'une matrice diagonale est inversible ssi tous ses coefficients sont non nuls.

Execice 7:

En utilisant la méthode du pivot de Gauss dire si les matrices suivantes sont inversibles et dans le cas affirmatif trouver l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice A est-elle inversible? Il suffit que son rang soit égal à 3

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 3 donc A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \\ \boldsymbol{L_2 \leftarrow 20L_2 - 3L_3} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1} \\ \boldsymbol{L_2 \leftarrow \frac{1}{20}L_2} \\ \boldsymbol{L_3 \leftarrow \frac{1}{20}L_3} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{20} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \end{array}\right)$$

On a alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{20} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

2) Déterminons l'inverse de la matrice B

On utilise la methode du pivot de gauss:

Dans cette methode, on ecrit à gauche la matrice qu'on veut inverser et à droite la matrice identité.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$
$\boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$
$\boldsymbol{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{L_4 \leftarrow L_4 - L_2 + L_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Le rang de la matrice B est égal à 4 donc B est inversible.

$\boldsymbol{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - 2L_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_4}$
$\boldsymbol{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{L_3 \leftarrow -L_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On a alors: $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 8</u>:

1) Vérifier que les matrices $A = .\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sont nilpotentes

2) Vérifier que toute matrice de type $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente

3) Montrer que si M est une matrice carrée telle que $M = I - N$ où I est la matrice identité et N une matrice nilpotente, alors M est inversible.

4) S'inspirer de la question précédente pour montrer que la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et trouver son inverse M^{-1}.

Rappel : Une matrice M est dite nilpotente si M est une matrice carrée et s.il existe un entier

$$n \geq 1 \; tel \; que \; M^n = 0.$$

1) Vérifier que les matrices A, B et C sont nilpotentes.

- Vérifier que la matrice A est nilpotente

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est bien nilpotente $(n = 2)$

- Vérifier que la matrice B est nilpotente

$$b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B est bien nilpotente

- Vérifier que la matrice C est nilpotente

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$C^3 = C^2 . C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C est donc nilpotente ($n = 3$)

2) Vérifier que toute matrice de type $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{ou}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **est nilpotente**

- Posons $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Les deux matrices sont donc nilpotentes.

3) Montrer que si M est une matrice carrée telle que $M = I - N$ où I est la matrice identité et N une matrice nilpotente, alors M est inversible.

Rappel:

Si A et B sont deux matrices carrées telles que $A.B = B.A$ alors on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1}. + A^{n-2}.B + \ ... + \ A.B^{n-2} + B^{n-1}$$

Posons $A = I \ et \ B = N$

Comme N est nilpotente alors il existe une $n \geq 1$ tel que $N^p = 0$

Comme $N.I = I.N$ On aura alors

$$I^p - N^p = (I - N)(I^{p-1} + I^{p-2}.N + \ ... + \ I.N^{p-2} + N^{p-1})$$

Or $I^p = I^{p-1} = I^{p-2} = \cdots =$I et $N^p = 0$

$d'o$ù I = (I-N)$(I + N + N^2 + \ ... + N^{p-2} + N^{p-1})$ = M. (I $+ N + N^2 + \ ... + N^{p-2} + N^{p-1}$)

Par conséquent M est inversible et son inverse est égal (I $+ N + N^2 + \ ... + N^{p-2} + N^{p-1}$)

4) S'inspirer de la question précédente pour montrer que la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et trouver son inverse M^{-1}.

On pose $N = I - M$

N= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ N est nilpotente d'apres la question 2 . On a $N^3 = O \ (p = 3)$, et d'aprés la question 3

$M = I - N$ est inversible et son inverse est

$$I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$