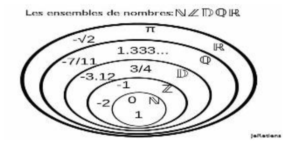
1- Nombres réels

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels $\{0,1,2,\dots\}$
  - $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ privé de 0
  - Toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatif $\{\dots 0,-2,-1,0,1,2,\dots\}$
  - $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$ privé de 0
  - Toute partie finie de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément et un plus grans élément.
- D l'ensemble des nombres décimaux $\left\{\frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\{x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$: $\sqrt{2}, \pi, e, Ln2, \dots$ où
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels



1- Partie entière d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$ appelée partie entière de x:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$E(x)$ peut être notée par $\lfloor x \rfloor$ dite partie entière de x par défaut ou partie entière tout court.

$E(x) + 1$ peut être notée $\lceil x \rceil$ dite entière de x par excès.

Pour tout réel x, tout réel y et tout entier m on a

- $E(m) = m$ et $E(x) = m \Leftrightarrow m \leq x < m + 1$
- $E(x + m) = E(x) + m$
- $x - 1 < E(x) \leq x$
- $E(x)$ est une fonction croissante.
- $E(x)$ est continue en x et n'est pas continue en m c'est-à-dire continue dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice

Montrer que les deux prpriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ E(x) + E(y) \leq E(x+y)$

Corrigé de l'exercice

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, $E(x) \leq x < E(x) + 1$ d'où $E(x) + 1 \leq x + 1 < E(x) + 2$

Alors par définition de la partie entière on a $E(x+1) = E(x) + 1$

2) $E(x)$+$E(y)$ et $E(x+y)$ sont deux entiers relatifs inférieurs à $x+y$

Alors par définition de la partie entière, $E(x+y)$ est le plus grand entier inférieur à x alors $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$.

2- Valeur absolue

Pour tout nombre réel x, on définit la valeur absolue de x notée $|x|$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Pour tout réel x et tout réel y on a

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- Si $a > 0$ alors $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (l'inégalité triangulaire)
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$(la deuxième inégalité triangulaire)

3-Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

- Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

On appelle intervalle toute partie I de $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété de convexité, c'est à dire $\forall a,\ b \in I,\ \forall x \in \mathbb{R}, a < x < b \implies x \in I$

Soit deux réels a et b tels que $a \leq b$.

• Intervalles d'extrémités finies a et b

1- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$: intervalle ouvert
2- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$: intervalle fermé ou segment de $\mathbb{R}$.
3- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$;
4- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$;

• Intervalles d'une (ou deux) extrémité(s) infinie(s)

1-$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$;

2. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$;

3. $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$:

4. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$:

5. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

• distance de a à b :

$d(a,b) = |a-b|$ appelée distance de a à b

• longueur d'un intervalle $]a,b[$ ($[a,b]$) notée est la distance de a à b et notée

$$|]a,b[| = |[a,b]|) = d(a,b) = |a-b|$$

• Supposons $a \neq b$. Un réel c de a et de b est dit milieu (centre) de $[a,b]$ ($]a,b[$) si

$d(a,c) = d(c,b)$ c'est-à-dire $c = \frac{a+b}{2}$.

On dit également que $[a,b]$ ($]a,b[$) est centré en c.

• Soit x_0 est un réel et $h > 0$. Alors $]x_0 - h,\ x_0 + h[$ est un intervalle centré en x_0.

- Droite réelle et Droite réelle achevée

• $\mathbb{R}$ est représenté par une droite dite droite numérique. $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

• $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en prolongeant la relation d'ordre $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel

$$-\infty < a < +\infty$$

alors $\overline{\mathbb{R}}$ est totalement ordonné est appelé droite réelle achevée. On écrit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

On convient que

• Pour tout réel x

$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$

$x + (+\infty) = (+\infty) + x = -\infty$

$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$

et on a

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

• Pour tout réel $x > 0$

$x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$

$x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$

• Pour tout réel $x < 0$

$x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$

$x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$

et on a

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

• Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On écrit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

• Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

On dit que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On écrit $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Dans toute la suite A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$.

4- Borne supérieure, borne inférieure

• Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite majorée si, $\exists M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, x \in A, x \leq M$

On dit que M est un majorant de A ou que A est majoré par M.

• Si $M \in A$ alors M est le maximum de A : $M = maxA$.

• Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite minorée si, $\exists m \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\ x \in A, x \geq M$
On dit que m est un minorant de A ou que A est minoré par m.

• Si $m \in A$ alors m est le minimum de A : $m = minA$.

• Une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est dite bornée si elle est à la fois, majorée et minoréece qui équivaut à dire : $\exists a > 0$ tels que $\forall\ x \in A, |x| \leq a$

• Définition (borne supérieure)

Un nombre réel a est dit borne supérieure de A si a est un majorant de A et b est le plus petit des majorants de A. S'il existe on le note $supA$, alors $\mathcal{M} = [supA, +\infty[$ est l'ensemble de tous les majorants de A.

• Si A possède un maximum alors $supA = maxA$

• Supposons que A est majoré. Si $supA \in A$ alors A possède un maximum : $maxA = supA$

• Supposons que A est majoré. Si $supfA \notin A$ alors A n'admet pas de maximum

• Définition (borne inférieure)

Un nombre réel b est dit borne inférieure de A si b est un minorant de A et b est le plus grand des minorants de A. S'il existe on le note $infA$, alors $m =]-\infty, infA]$ est l'ensemble de tous les minorants de A.

• Si A possède un minimum alors $infA = minA$

• Supposons que A est minoré. Si $infA \in A$ alors A possède un minimum: $minA = infA$

• Supposons que A est minoré. Si $infA \notin A$ alors A n'admet pas de minimum

• Théorème (propriété de la borne supérieure (inférieure)
Toute partie partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (inférieure)

On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure (inférieure).

• Proposition (Caractérisation de la borne supérieure (inférieure)).
Soit A une partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$.

La borne supérieure (inférieure) de A est l'unique réel $a(b)$ qui possède les deux propriétés suivantes

1- a est un majorant de A.
2- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $x > a - \varepsilon$ $(x < b + \varepsilon)$

• Proposition (Opérations sur la borne supérieure et la borne inférieure).

Supposons que $A \cap B$ est non vide.

1. Si $A \subset B$ alors
$$supA \leq supB \text{ et } infA \geq infB$$

2. $A \cup B$ est bornée et l'on a
$$sup(A \cup B) = max(supA, supB) \text{ et } inf(A \cup B) = min(infA, infB)$$

3. $A \cap B$est bornée et l'on a
$$sup(A \cap B) \leq max(supA, supB) \text{ et } inf(A \cap B) \geq min(infA, infB)$$

En général on n'a pas égalité.

4. $-A$ est bornée et l'on a
$$sup(-A) = -infA \text{ et } inf(-A) = -supA$$

5. $A + B$ est bornée et l'on a
$$sup(A + B) = supA + supB \text{ et } inf(A + B) = infA + infB$$

Borne supérieure et borne inférieure des intervalles

Proposition

Soit a et b deux réels tels que $< b$.

Un intervalle de la forme (a, b) est bornée et on a

• $inf]a, b[= a$ et $sup]a, b[= b$ et ne possède ni maximum ni minimum.

• $inf[a, b] = min[a, b] = a$ et $sup[a, b] = max[a, b] = b$

• $inf\,]a,b] = a$ et $sup\,]a,b] = max\,]a,b] = b$ et admet un maximum mais pas un minimum.

• $inf\,[a,b[= min\,[a,b[= a$ et $sup\,[a,b[= b$ et admet un minimum mais pas un maximum.

Un intervalle de la forme $(a,+\infty,[$ est minoré et non majoré et on a

• $inf\,]a,+\infty[= a$

• $inf\,[a,+\infty[= min[a,+\infty,[= a$

Un intervalle de la forme $]-\infty,b)$ est majoré et non minoré et on a

• $sup\,]-\infty,b[= b$

• $sup\,]-\infty,b] = max\,]-\infty,b] = b$

- **Exemple** (bornes inférieure et supérieure)

Pour chacun des enembles suivants, déterminer s'ils existent la borne inférieure, la borne supérieure, l'ensemble $\mathcal{m}$ de tous les minorant, l'ensemble $\mathcal{M}$ de tous les majorants, le minimum, le maximum.

1- $A_1 = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{2}{x^2+1} \geq 1\right\}$

On résoud dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2}{x^2+1} \geq 1$, d'où $A_1 = [-1,1]$

A_1 est un segment donc borné et admet un mimimum et un maximum :
$infA_1 = minA_1 = -1;\ \mathcal{m} =]-\infty,-1]$
$supA_1 = maxA_1 = 1;\ \mathcal{M} = [1,+\infty[.$

2- $A_2 = \left\{\frac{2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}\right\}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$,
Alors A_2 est l'ensemble $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.
On dresse le tableau de variations de f. (en exercice).
On voit sur le tableau de variations que $\frac{2}{x^2+1}$ est minoré par 0 et majoré par 2.
Donc A_2 admet une borne inférieure $infA_2$ et une borne supérieure $supA_2$.
$2 \in A_2 : 2 = \frac{2}{0+1}$ alors A_2 admet un maximum, $maxA_2 = 2$, d'où $supA_2 + 2$.

Montrons que $infA_2 = 0$.

1. 0 est un minorant de A_2
2. Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $y \in A_2$ tel que, $y < \varepsilon$

c'est-à-dire, cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que, $\frac{2}{x^2+1} < \varepsilon$

$\frac{2}{x^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$ d'où $x \in \left]-\infty, \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}, +\infty\right[$.

On prend $x = \sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}} + 1$, alors $inf A_2 = 0.$

0 n'appartient à A_2 car pour tout réel , $\frac{2}{x^2+1} \neq 0.$

donc $inf A_2$ n'appartient à A_2 alors A_2 n'a pas de minimum.

Fianalement, A_2 est borné, admet un maximum et n'admet pas de minimum.

$inf A_2 = 0; m =]-\infty, 0]$

$sup A_2 = max A_2 = 2; \mathcal{M} = [2, +\infty[$

3- $A_3 = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} > 0$ donc A_3 est minoré par 0 donc admet une borne inférieure $inf A_3$

$n \geq 0 \Leftrightarrow n + 1 \geq 1$ d'où $\frac{1}{n+1} \leq 1$ alors A_3 est majoré par $M = 1 \in A_3$ donc 1 est le maximum de A_3 d'où $sup A_3 = 1$

0 est un minorant de A_3. Montrons que $0 = inf A_3$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ i.e. $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$ $(\varepsilon \ll 1)$

On prend $n = \left\lceil\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right\rceil$.

Donc $0 = inf A_3$. $0 \notin A_3$ donc A_3 n'a pas de minimum.

$inf A_3 = 0; m =]-\infty, 0]$

$sup A_3 = max A_3 = 1; \mathcal{M} = [1, +\infty[$