Rappels mathématiques

Introduction

Grandeurs physiques

Grandeurs scalaires
- Unité
- Nombre de fois de l'unité

Exemples : La masse, la charge, l'énergie, ...

Grandeurs vectorielles
- Unité
- Nombre de fois de l'unité
- La direction et le sens.

Exemples : La force, la vitesse, l'accélération, ...

Grandeurs vectorielles

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$A(A_x, A_y, A_z)$ et $B(B_x, B_y, B_z)$ sont deux points de l'espace.

* Le vecteur $\vec{OA}$ est défini par : $\vec{OA} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$
* " $\vec{OB}$ " " : $\vec{OB} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$
* " $\vec{AB}$ " " : $\vec{AB} = (B_x - A_x)\vec{i} + (B_y - A_y)\vec{j} + (B_z - A_z)\vec{k}$

Module d'un vecteur

* $\|\vec{OA}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
* $\|\vec{OB}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$
* $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}$

Mesure algébrique d'un vecteur

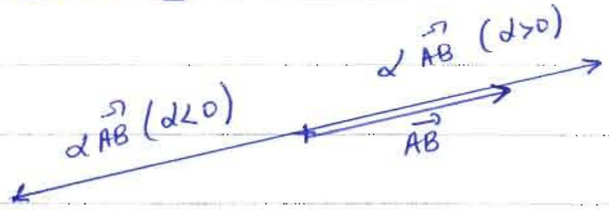
La mesure algébrique d'un vecteur $\vec{AB}$ noté " $\overline{AB}$ " est défini comme suit :

$\overline{AB} = +\|\vec{AB}\|$ si le vecteur $\vec{AB}$ est dirigé dans le sens positif choisi.

$\overline{AB} = -\|\vec{AB}\|$ " " " " négatif "

Propriété :

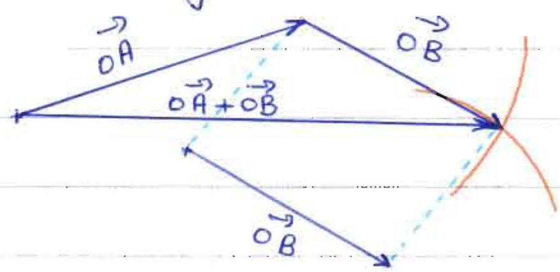
$\vec{AB}$ est un vecteur
α est un scalaire $\Big\} \Rightarrow \alpha \vec{AB}$ est un vecteur.



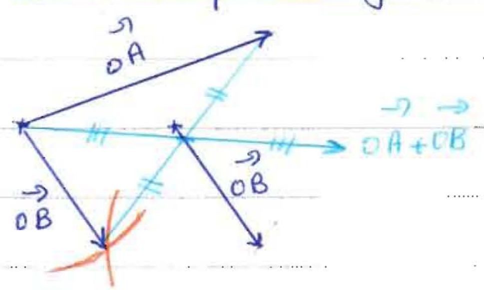
$$\| \alpha \vec{AB} \| = |\alpha| \, \| \vec{AB} \|$$

Somme graphique de deux vecteurs

Méthode du triangle :



Méthode du parallélogramme



Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{OA}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$, noté " $\cdot$ ", est un scalaire donné par :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$= \|\vec{OA}\| \, \|\vec{OB}\| \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}})$$

Application :

Soient $\vec{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

Réponse :

$$\cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\|\vec{OA}\| \, \|\vec{OB}\|} = \frac{(1)(-2) + (2)(0) + (-1)(1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (1)^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = -\frac{3}{\sqrt{30}} \Rightarrow (\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 123{,}2^\circ$$

Calcul du vecteur unitaire $\vec{u}$ parallèle à un vecteur $\vec{AB}$ quelconque :

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire : $\|\vec{u}\| = 1$

$\vec{u} \parallel \vec{AB}$: $\vec{u} = \alpha \vec{AB}$, α est un scalaire.

$$\vec{u} = \alpha \vec{AB} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\alpha \vec{AB}\| = |\alpha| \, \|\vec{AB}\|$$

$$\Rightarrow 1 = |\alpha| \, \|\vec{AB}\| \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\|\vec{AB}\|}$$

$\vec{u} \parallel \bar{a} \vec{AB}$ et dans le même sens : $\alpha = \frac{1}{\|\vec{AB}\|} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

$\vec{u} \parallel \bar{a} \vec{AB}$ et dans le sens inverse : $\alpha = -\frac{1}{\|\vec{AB}\|} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

Application :

calculer le vecteur $\vec{u}$ unitaire et parallèle à $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Réponse :

$\vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{14}$

* Parallèle dans le même sens : $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = -\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

* Parallèle dans le sens inverse : $\vec{v} = \frac{-\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$