Examen final d'Algèbre 1

Exercice 1.
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

1. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Déterminer les ensembles : $f(\{(0, 0)\})$; $f(\mathbb{R}^2)$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{1\})$.
3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2), (x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Déterminer la classe de $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et en donner une interprétation géométrique.
c) Calculer $f(1, 2)$ et $f(2, 1)$. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

Exercice 2.
Soit $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et soit $*$ la loi de composition interne définie sur G par

$$\forall (a, b), (c, d) \in G, (a, b) * (c, d) = (ac, b + d\sqrt{a})$$

1. La loi $*$ est-elle commutative ?
2. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
3. On pose $H = \{1\} \times \mathbb{Q}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.
4. H est-il commutatif ? Justifier.