Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
LMD Licence 1ère Année Mathématiques-Informatique 2012/2013
Module "Programmation Fonctionnelle"
Date : 26/05/2013

Corrigé de l'examen
(préparé par Mrs Behloul et Isli)

Exercice 1 :

1. Les réponses sont comme suit :
   1.1. f :string→string→int=<fun>
   1.2. f "12" "112012" =f "12" "12012"=1+f "12" "2012"=1+f "12" "012"=1+f "12" "12"
   =1+1+f "12" "2"=1+1+0=2
   1.3. La fonction f compte le nombre de fois que le premier argument est sous-chaîne du deuxième argument (le nombre d'occurrences du premier argument dans le second) ; c'est-à-dire le nombre de possibilités d'écrire y sous forme txv, x et y étant les premier et deuxième arguments de f, et t et v deux chaînes de caractères.
2. let rec fusion L1 L2=if L1=[] then L2

```
let rec fusion L1 L2=if L1=[] then L2
                     else    if L2=[] then L1
                             else    if hd L1<hd L2 then hd L1::fusion (tl L1) L2
                                     else hd L2::fusion L1 (tl L2);;
```

La version ci-dessus de la fonction fusion est une version "avec répétition" (elle ne supprime pas les redondances). Ci-dessous trois versions "sans répétition" de la fonction fusion :

- Version 1 : remplacer la partie en gras par :

```
else    if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
        else hd L1::fusion (tl L1) (tl L2);;
```

- Version 2 : remplacer la partie en gras par :

```
else    if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
        else fusion (tl L1) L2;;
```

- Version 3 : remplacer la partie en gras par :

```
else    if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
        else fusion L1 (tl L2);;
```

Exercice 2 :

1. A est primitif récursif ssi sa fonction caractéristique Car_A est PR :

$$Car_A=\lambda x.\begin{cases}1 \; si \; x \; pair, \\ 0 \; sinon\end{cases}$$

$Car_A(x)=r(2,x+1)=r(S°S°Z(x),S(x))=[r°(S°S°Z,S)](x)$
Donc Car_A est bien PR. En voici une dérivation PR :

g_1=Z PR car de base
g_2= S PR car de base
g_3= r de base (par hypothèse)
g_4= g_2°g_1 PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_1)
g_5= g_2°g_4 PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_4)
Car_A= g_3°(g_5,g_2) PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_3, g_5 et g_2)

Conclusion : l'ensemble A est bien primitif récursif

Scanné avec CamScanner

2. La fonction f_0 vérifie $f_0(x)=1=(S°Z)(x)$. Donc $f_0=S°Z$ et est donc PR grâce à la règle de composition appliquée aux fonctions de base S et Z.

La fonction f_1 vérifie $f_1(x)=x=P_1^1(x)$. La fonction f_1 est la fonction de base P_1^1 et est donc PR.

Hypothèse de récurrence : on suppose l'hypothèse vraie jusqu'à un certain $k \geq 1$: $\forall i \leq k$, f_i est PR

Montrons que l'hypothèse reste vraie pour $i=k+1$:

$f_{k+1}(x)=x^{k+1}=\otimes(f_k(x),x)=[\otimes°(f_k,P_1^1)](x)$. Donc f_{k+1} est PR ; en voici une dérivation PR :

- $g_1=f_k$ PR (hypothèse de récurrence)
- $g_2=P_1^1$ PR car de base
- $g_3=\otimes$ PR
- $f_{k+1}=g_3°(g_1,g_2)$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_3, g_1 et g_2)

Conclusion : $\forall i \geq 0$, f_i PR

3. $g(x)=x^2*r(2,x+1)+x^3*r(2,x)=x^2*car_A(x)+x^3*r(2,x)$. On montre que $h=\lambda x.r(2,x)$ est PR :

$h(x)=r(2,x)=[r°(S°S°Z,P_1^1)](x)$ donc h est PR ; en voici une dérivation PR :

- $g_1=Z$ PR car de base
- $g_2=S$ PR car de base
- $g_3=P_1^1$ PR car de base
- $g_4=g_2°g_1$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_1)
- $g_5=g_2°g_4$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_4)
- $g_6=r$ PR (hypothèse)
- $h=g_6°(g_5,g_3)$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_6, g_5 et g_3)

g(x) devient : $g(x)=[\oplus°(\otimes°(f_2,Car_A),\ \otimes°(f_3,h))](x)$. g est donc PR ; en voici une dérivation PR :

- $g_1=f_2$
- $g_2=Car_A$
- $g_3=\otimes$
- $g_4=g_3°(g_1,g_2)$
- $g_5=f_3$
- $g_6=h$
- $g_7=g_3°(g_5,f_6)$
- $g_8=\oplus$
- $g=g_8°(g_4,g_7)$

Beskri x Souhil Copioe

Scanné avec CamScanner

Exercice 3 :

1. Les réponses sont comme suit :

   A. **Calcul de f(1,20) :**

   Initialement : $q_0 1^2 * 1^{21}$
   2 fois l'instruction (1) : $1^2 q_0 * 1^{21}$
   1 fois l'instruction (2) : $1^2 q_1 1^{22}$
   3 fois l'instruction (3) : $q_1 0 1^{24}$
   1 fois l'instruction (4) : $q_2 1^{24}$
   1 fois l'instruction (5) : $q_3 0 1^{23}$
   1 fois l'instruction (6) : $q_4 1^{23}$
   1 fois l'instruction (7) : $q_5 0 1^{22}$
   1 fois l'instruction (8) : $q_6 1^{22}$
   1 fois l'instruction (9) : $q_7 0 1^{21}$
   1 fois l'instruction (10) : $q_f 1^{21}$
   Donc f(1,20)=20

   Calcul de f(4,3) :

   Initialement : $q_0 1^5 * 1^4$
   5 fois l'instruction (1) : $1^5 q_0 * 1^4$
   1 fois l'instruction (2) : $1^5 q_1 1^5$
   6 fois l'instruction (3) : $q_1 0 1^{10}$
   1 fois l'instruction (4) : $q_2 1^{10}$
   1 fois l'instruction (5) : $q_3 0 1^9$
   1 fois l'instruction (6) : $q_4 1^9$
   1 fois l'instruction (7) : $q_5 0 1^8$
   1 fois l'instruction (8) : $q_6 1^8$
   1 fois l'instruction (9) : $q_7 0 1^7$
   1 fois l'instruction (10) : $q_f 1^7$
   Donc f(4,3)=6

   B. f=λxy.(x+y-1)

2. L'ensemble I des instructions de la machine est comme suit :

I={ (1) $q_0 1 0 q_1$, (2) $q_1 0 D q_2$, (3) $q_2 1 D q_2$, (4) $q_2 * D q_3$, (5) $q_3 1 D q_4$,
(6) $q_4 0 G q_{10}$, (7) $q_4 1 D q_5$, (8) $q_5 1 D q_5$, (9) $q_5 0 G q_6$, (10) $q_6 1 0 q_7$,
(11) $q_7 0 G q_6$, (12) $q_6 * D q_8$, (13) $q_8 0 1 q_8$, (14) $q_8 1 D q_9$, (15) $q_9 0 1 q_{10}$,
(16) $q_{10} 1 G q_{10}$, (17) $q_{10} * G q_{10}$, (18) $q_{10} 0 D q_f$}

La machine commence par remplacer la barre la plus à gauche par un blanc (instruction (1)). Ensuite elle avance jusqu'à arriver sur le deuxième symbole après l'étoile : elle se retrouve alors dans l'état interne q_4. Si ce deuxième symbole est un blanc (instruction (6)), elle recule d'une case et passe dans l'état interne q_{10} qui lui permet d'exécuter la suite (16)-(17)-(18) d'instructions et de passer dans l'état final. Si le deuxième symbole est une barre (instruction (7)), elle avance jusqu'à arriver sur le premier blanc à droite puis recule d'une case pour passer dans l'état q_6 (instruction (9)) qui lui permet alors de supprimer toutes les barres à droite de l'étoile avant de se retrouver dans l'état interne q_6 avec la tête de lecture/écriture sur l'étoile : elle exécute alors les instructions (12)-(13)-(14) pour mettre deux barres à droite de l'étoile et passer dans l'état interne q_{10} lui permettant, grâce aux instructions (16)-(17)-(18), de se ramener dans l'état interne final.

Beskri Souhil Copioe

Scanné avec CamScanner

Exo1

1) On a

$$\begin{cases} g(0) = f(0) = cst \\ g(x+1) = f \circ g(x) = f \circ P_1^2(g(x), x) \end{cases}$$

donc g est PR

2) On a

i) $P_1 = P_1^1$ PR

ii) Supposons que P_n est PR, alors

$$P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = P_n(x_1, \dots, x_n) * x_{n+1}$$

$$P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (X) \circ (P_n \circ (P_1^{n+1}, \dots, P_n^{n+1}), P_{n+1}^{n+1})(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

donc P_{n+1} est PR

iii) conclusion : P_n est PR pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) Notons $Mod(x,y) = x \bmod y$, $Z_1(x) = 0$

On a $car_I(x) = x \bmod 2 = Mod(x, 2)$

$$car_I(x) = Mod \circ (P_1^1, S \circ S \circ Z_1)(x)$$

donc car_I est PR

Beskri × Souhil Copie

Scanné avec CamScanner

Exo2

1) $f(x,y) = x+y$

1) $q_0 \, 1 \, D \, q_0$ 2) $q_0 * 1 \, q_1$ 3) $q_1 \, 1 \, G \, q_1$ 4) $q_1 \, 0 \, D \, q_2$

5) $q_2 \, 1 \, 0 \, q_2$ 6) $q_2 \, 0 \, D \, q_3$ 7) $q_3 \, 1 \, 0 \, q_4$ 8) $q_4 \, 0 \, D \, q_{F=5}$

2) $g(x) = x \bmod 2$

$q_0 \, 1 \, 0 \, q_1 \to q_1 \, 0 \, D \, q_2$

$\to q_2 \, 0 \, 1 \, q_{F=7}$

$\to q_2 \, 1 \, 0 \, q_3$

$\downarrow$

$q_3 \, 0 \, D \, q_4$

$\swarrow$ q_4 1 [illegible] q_0

$\searrow$ $q_4 \, 0 \, 1 \, q_5$

$\downarrow$

$q_5 \, 1 \, G \, q_6$

$\downarrow$

$q_6 \, 0 \, 1 \, q_{F=7}$

3) Ajoute 5 aux indices des q_i de la MT de g.

Beskri × Souhil copioe

Scanné avec CamScanner

USTHB – FEI - Département d'Informatique
LMD Licence 1ère Année MI 2017/2018
Date : 24/05/2018 <10h15-11h45>

Examen de Programmation Fonctionnelle
Corrigé (exo 2 question 4 + exo 3)

Exercice 2 (question 4)
Solution :

- Déroulement :

$$q_0 01101010 \xrightarrow{\{(1),(2)\}+} 01101010 q_0 \# \xrightarrow{(3)} 0110101 q_1 0 \xrightarrow{(9)} 0110101 q_4 \# \xrightarrow{(10)} 011010 q_5 1 \xrightarrow{\{(11),(12)\}+} q_5 \# 0110101 \xrightarrow{(13)} q_f 00110101$$

- Opération réalisée par la machine : décalage circulaire à droite
- Indication : {(1),(2)}+ signifie application des instructions (1) et (2) tant que possible (au moins une fois) → advancer d'une case tant que le symbole lu est 0 ou 1
- Idem pour {(11),(12)}+

Exercice 3
Solution :
A)

1) Type inferé :
   f : char -> string -> int = <fun>
2) f \`a\` "alger"=1+ f \`a\` "lger"=1+ f \`a\` "ger"=1+f \`a\` "er"=1+ f \`a\` "r"=1+ f \`a\` ""=1+0=1
   f \`m\` "maman"= 1+f \`m\` "aman" = 1+ f \`m\` "man"= 1+1+ f \`m\` "an" =2+ f \`m\` "n"
   = 2+ f \`m\` "" = 2+0=2
3) f compte le nombre d'occurrences du premier argument (caractère) dans le deuxième (chaine de caractères).

B)

1) let rec max_liste l=if tl l=[] then hd l+0 else if hd l>max_liste (tl l) then hd l else max_liste (tl l) ;;
   max_liste : int list -> int = <fun>
2) let rec g l=if l=[] then [] else max_liste (hd l) ::g (tl l) ;;
   g : int list list -> int list = <fun>

Skri x Sounil Copie

Scanné avec CamScanner

USTHB Département Informatique
1ère MI – Sections 1,2,3,4,5,6,7 8,9, 10

25/05/2014
Examen de Programmation Fonctionnelle

Exercice 1 : (2+1,5+2,5 pts)

A/ Montrer que l'ensemble des entiers naturels multiples de 3 est primitif récursif en supposant que la fonction reste de la division de x par y, noté (restDiv (x,y)), est primitive récursive.

B/ Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

a) $f(n) = n!$ 1,5

b) $g(n) = \sum_{k=0}^{n} k!$ 2,5

NB. Toutes les fonctions démontrées primitives récursives en cours peuvent être utilisée

Exercice 2 : (3+3 pts)

A/ Soit M1<S,E,I>, la machine de Turing où $S = \{1, 0, *\}$ et $E = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_f\}$ avec comme ensemble d'instructions :

I= {1 : q_0 1 0 q_1 ,	5 : q_3 1 D q_3,	9 : q_6 1 G q_6	13 : q_4 * 1 q_8	17 : q_9 1 0 q_{10}
2 : q_1 0 D q_2	6 : q_3 0 G q_4	10 : q_6 * G q_7	14 : q_8 1 G q_8	18 : q_{10} 0 D q_9
3 : q_2 1 D q_2	7 : q_4 1 0 q_5	11: q_7 1 G q_7	15 : q_8 0 1 q_f	19 : q_9 0 G q_9
4 : q_2 * D q_3	8 : q_5 0 G q_6	12 : q_7 0 D q_0,	16 : q_0 * D q_9	20 : q_9 * 1 q_f}

a) Dérouler cette machine pour les configurations initiales suivantes : q_0<u>1</u>*<u>5</u> et q_0<u>3</u>*<u>5</u>. 5*3 1,5

b) Quelle fonction réalise la machine M1? (Justifiez votre réponse). 0,5 1

B/ On veut écrire la machine de Turing (MT) de la fonction f(x, y, z)=(x, y+1) définie de NxNxN dans NxN.

a) Donner le pseudo-algorithme (la démarche suivie) pour réaliser cette fonction. 1

b) Donner les instructions associées à cette machine. 2

Exercice 3 : (4+4 pts)

A/ Soient les fonctions suivantes écrites en Caml:

```
let rec f1 (x,y) = if x= 0 then [] else y::(f1 (x-1 , y));;

let rec f2 x= if x= [] then [] else f1 (fst (hd x), snd (hd x)) @ f2 (tl x) ;;
```

a) Donner le type inféré par chacune des fonctions ci-dessus. 0,5 + 0,5

b) Donner le résultat pour f1(2, 3), f1(3,'a') et f2[(1,"module"); (2,"PRF")]. 0,5 + 0,5 + 1

c) Que fait f1 et f2 ? 0,5 + 0,5

B/ Soit une liste contenant les synonymes d'un mot. Cette liste est triée. Elle peut contenir par exemple les synonymes du mot programme comme suit: ["annonce" ; "calendrier" ; "emploi" "objectif" ; "planification" ; "planning" ; "projet"].

a) Écrire une fonction nbsyn qui compte le nombre de synonymes d'un mot dans une liste. 1

b) Écrire une fonction ajoutmot qui ajoute un mot dans la liste de telle sorte que la liste reste triée. 1,5

c) Écrire une fonction estdansliste qui vérifie si un mot est présent dans la liste. 1,5

Scanné avec CamScanner

Corrigé exam FKF 2013/2014
Behloul / Isli

Exo 1

1/ $Mult3 = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } x = 3k\}$
$= \{0, 3, 6, \dots, 3k, \dots\}$

$Car_{Mult3} : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto Car_{Mult3}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Mult3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$ 0,5

Montrer que Mult3 est PR revient à montrer que Car_{Mult3} est PR.

$Car_{Mult3}(x) = \overline{Sg}(restDiv(x,3))$ 1
$= [\overline{Sg} \circ restDiv \circ (P_1^1, S \circ S \circ S \circ Z)](x)$ 0,5

Dérivation PR :
$f_1 = Z$
$f_2 = S$
$f_3 = f_2 \circ f_1$
$f_4 = f_2 \circ f_3$
$f_5 = f_2 \circ f_4$
$f_6 = P_1^1$
$f_7 = Div$
$f_8 = f_7 \circ (f_6, f_5)$
$f_9 = \overline{Sg}$

$f_{10} = f_9 \circ f_8 = f_{Mult3}$

copie souhila xsoussi

Scanné avec CamScanner

B/ 1. a/ $f(n) = n!$

$f(0) = 0! = 1 = cste$ $\underline{\underline{0{,}5}}$

$f(y+1) = \circledast(f(y), y+1) = \underbrace{\left[\circledast \circ \left(P_1^2, S \circ P_2^2\right)\right]}_{h}(f(y), y)$ $\underline{\underline{1}}$

Définition PR :

$f_1 = 1 = cste$ (arité 0)

$f_2 = P_2^2$

$f_3 = P_1^2$

$f_4 = \circledast$ $\quad f_5 = S \quad f_6 = f_5 \circ f_2$

$f_7 = f_4 \circ (f_3, f_6)$

$f_8 = f$ (def. de récurrence avec

$g = f_1$ et

$h = f_7$).

bekri×soulaij copie.

b/ $g(n) = \sum_{k=0}^{n} k!$

~~Preuve par récurrence~~

$\cancel{f(0) =}$

$g(0) = 0! = 1 = cste$ $\underline{\underline{0{,}5}}$

$g(y+1) = g(y) + (y+1)!$

$= \oplus\left(g(y), (f \circ S)(y)\right)$

$\underline{\underline{2}}$ $= \left[\oplus \circ \left(P_1^2, f \circ S \circ P_2^2\right)\right](\ldots$

Scanné avec CamScanner

Dérivation PR:

$f_1 = 1 = \text{cste}$ (arité 0)

$f_2 = P_2^2$

$f_3 = S$

$f_4 = f_3 \circ f_2$

$f_5 = f$

$f_6 = f_5 \circ f_4$

$f_7 = P_1^2$

$f_8 = \oplus$

$f_9 = f_8 \circ (f_7, f_6)$

$f_{10} = g$ (r. d. avec $g = f_1$ et $h = f_9$)

Exo 2:

1/ $q_0\ \underline{1} * \underline{5} \equiv q_0 11 * 111111$

a/ $q_0 11 * 111111 \xrightarrow{*} q_f 1$ (1)

$q_0\ \underline{3} * \underline{5} \xrightarrow{*} q_f 1$ (1,5)

b/ $f = \lambda x\,y \cdot \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y, \\ x-y & \text{sinon} \end{cases}$ (0,5)

2/ a/ • On vérifie que la bande contient bien un triplet d'entiers (x, y, z)

• On remplace toutes les barres après la dernière * par des 0

(1)

• On ... la dernière * par 1

on revient ... la barre ... plus à gauche
et on passe dans l'état interne final

b/ $I = \{(1)\ q_0 1 D q_0,\ (2)\ q_0 * D q_1,\ (3)\ q_1 1 D q_1,$
$(4)\ q_1 * D q_2,\ (5)\ q_2 1 D q_2,\ (6)\ q_2 0 G q_3,$
(2) $(7)\ q_3 1 0 q_4,\ (8)\ q_4 0 G q_3,\ (9)\ q_3 * 1 q_5,$
$(10)\ q_5 1 G q_5,\ (11)\ q_5 * G q_5,\ (12)\ q_5 0 D q_f\}$

Exo 3

A/ a/ let rec f1(x,y) = if x=0 then [] else y::(f1 (x-1, y))
(0,5) f1 : int * 'a → 'a list = <fun>

let rec f2 x = if x = [] then []
else f1 (fst (hd x), snd (hd x))
@ f2 (tl x);;

(0,5) f2 : (int * 'a) list → 'a list = <fun>

b/ (0,5) + (0,5) + (1)

c/ (0,5) + (0,5)

B/ a/ (1)

b/ (1,5)

c/ (1,5)

Scanné avec CamScanner

Exo3

Solution

A)

0,5 0,5

a) f1 : int * 'a -> 'a list = <fun> et f2 : (int * 'a) list -> 'a list = <fun>

b) f1(2, 3)=[3 ;3], 0,5

f1(3,'a')=['a' ; 'a' ; 'a'] 0,5

f2[(1,"module"); (2,"PRF")]=["module" ; "PRF" ; "PRF"] 1

c) f1 est la fonction de décompression qui prend une liste de données compressées et retourne la liste initiale 0,5

f2 est la fonction de compression, qui prend une liste de données et retourne la liste de données compressée. 0,5

B/

a) let rec nbsyn list= if list = [] then 0 else 1+ nbsyn (tl list);; 1

b) let rec ajout list elt= if list=[] then [elt] else if elt < (hd list) then elt::list else (hd list) ::ajout (tl list) elt;; 1,5

c) let rec verifdanslist list mot= if list =[] then false else if hd list = mot then true else verifdanslist (tl list) mot ;; 1,5

beskri +souhil copie

Scanné avec CamScanner

Département d'Informatique
1ère MI –USTHB- mai 2013

Examen de PRF

Exercice 1 : (1.5; 2; 0.5; 4)

1. Soient les fonctions suivantes:

```
# let lg x= string_length x;;
# let souschaine1 x y = sub_string x 0 (lg y);;
# let souschaine2 x = sub_string x 1 (lg x-1);;
# let rec f x y = if lg x > lg y then 0 else if x = souschaine1 y x
        then 1+ f x (souschaine2 y ) else f x (souschaine2 y);;
```

1.1. Donner le type inféré par la fonction f.

1.2. Calculer f "12" "112012";;

1.3. Que fait la fonction f ?

2. Ecrire la fonction **fusion** qui accepte comme paramètres deux (2) listes triées **L1** et **L2**. Elle retourne une liste L triée par fusion de **L1** et **L2**.

Exemple : **fusion** [1; 3; 7] [3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8] = [1 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8]

Exercice 2 : (1; 3; 2)

1. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in N / x \text{ est pair}\}$ est primitif récursif.
2. Montrer que la fonction $f_i : x \rightarrow f_i(x) = x^i$ est primitive récursive, pour tout $i \in N$.
3. Déduire que la fonction suivante est primitive récursive :

$$g(x) = \lambda xy. \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ est pair} \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut utiliser la fonction primitive récursive « reste de la division de y par x », qu'on note r(x,y).

Exercice 3 : (3; 3)

1. Soit la fonction, $f : N^*xN^* \rightarrow N$, que calcule la Machine de Turing M=<S,E,I> définie par:

$S = \{0, 1, *\}$ $\quad E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$

$I = \{ 1 : q_0 1 D q_0 ;\ 2 : q_0 * 1 q_1 ;\ 3 : q_1 1 G q_1 ;\ 4 : q_1 0 D q_2 ;\ 5 : q_2 1 0 q_3 ;$
$6 : q_3 0 D q_4 ;\ 7 : q_4 1 0 q_5 ;\ 8 : q_5 0 D q_6 ;\ 9 : q_6 1 0 q_7 ;\ 10 : q_7 0 D q_f \}$

A/ Calculer f(1,20) et f(4,3).

B/ Déduire la définition de la fonction f.

2. Donner les instructions de la machine de Turing correspondant à la fonction $F : N^*xN \rightarrow NxN$ qui associe au couple (x,y) le résultat de (x-1, sg(y)).

houskri souhil copie

Scanné avec CamScanner

Exo 3.

1. A/ $f(1,20) =$

$q_0 1^2 * 1^{21} \xrightarrow{2\times(1)} 1^2 q_0 * 1^{21} \xrightarrow{(2)} 1^2 q_1 1^{22} \xrightarrow{3\times(3)} q_1 0 1^{24}$

$\xrightarrow{(4)} q_2 1^{24} \xrightarrow{(5)} q_3 0 1^{23} \xrightarrow{(6)} q_4 1^{23} \xrightarrow{(7)} q_5 0 1^{22}$

$\xrightarrow{(8)} q_6 1^{22} \xrightarrow{(9)} q_7 0 1^{21} \longrightarrow q_f 1^{21}$

$(1,20) \xrightarrow[\text{de la MT}]{\text{Instructions}} \underline{20}$

$(1,20) \longrightarrow 1+20-1$

$f(4,3) =$

$q_0 1^5 * 1^4 \xrightarrow{5\times(1)} 1^5 q_0 * 1^4 \xrightarrow{(2)} 1^5 q_1 1^5 \xrightarrow{6\times(3)} q_1 0 1^{10}$

$\xrightarrow{(4)} q_2 1^{10} \xrightarrow{5} q_3 0 1^9 \xrightarrow{(6)} q_4 1^9 \xrightarrow{(7)} q_5 0 1^8$

$\xrightarrow{(8)} q_6 1^8 \xrightarrow{(9)} q_7 0 1^7 \xrightarrow{(10)} q_f 1^7$

$(4,3) \xrightarrow[\text{de la MT}]{\text{Instruction}} \underline{6}$

$(4,3) \longrightarrow 6 = 4+3-1$

Conclusion : $f = \lambda xy.(x+y-1)$

bestkri1 sounil copie

Scanné avec CamScanner

Corrigé examen PRF ① 20/05/2015
Belhoul / Ishi

Exo 1.

1.1 f : string → string → int = <fun> (1,5)

1.2 f "12" "112012" = f "12" "12012" = 1 + f "12" "2012"
= 1 + f "12" "012" = 1 + f "12" "12"
= 1 + 1 + f "12" "2"
= 1 + 1 + 0 = 2 (2)

1.2 La fonction f compte le nombre de fois que le premier argument est sous-chaîne du deuxième argument (le nombre d'occurrences du 1er argument dans le second). (0,5)

2. let rec fusion L1 L2 = (4)
if L1 = [] then L2
else if L2 = [] then L1
else if hd L1 < hd L2 then
hd L1 :: fusion (tl L1) L2

avec répétition: else hd L2 :: fusion L1 (tl L2)

sans répétition vers ①:
else if hd L2 < hd L1 then
hd L2 :: fusion L1 (tl L2)
else
hd L1 :: fusion (tl L1) (tl L2)

sans répétition vers ②: else fusion (tl L1) L2;;
sans répétition: else fusion L1 (tl L2);;

beskri*souhil*copie

Scanné avec CamScanner

Exo 2 :

1. A est PR ssi la fonction caractéristique Car_A est PR

$$Car_A : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longmapsto Car_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$Car_A(x) = \cancel{1 - (x \bmod 2)}\ r(2, x+1)$$

$$= r\left(S \circ S \circ Z(x), S(x)\right)$$

$$= \left[r \circ \left(S \circ S \circ Z, S\right)\right](x)$$

2. $f_i : x \longmapsto f_i(x) = x^i$

$f_0 : x \longmapsto f_0(x) = 1$ fonction constante $\Rightarrow$ PR

$f_1 : x \longmapsto f_1(x) = x = P_1^1(x) \Rightarrow f_1 = P_1^1$ fonction de base $\Rightarrow$ PR

HR : On suppose que l'hypothèse est vraie jusqu'à un certain $k \geq 1$:

$$\forall i \leq k \quad f_i \text{ PR}$$

Montrons que l'hypothèse reste vraie pour $i = k+1$

$$f_{k+1} : x \longmapsto f_{k+1}(x) = x^{k+1} = \circledast\left(f_k(x), x\right)$$

$$= \underbrace{\left[\circledast \circ \left(f_k, P_1^1\right)\right]}_{PR}(x)$$

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}$, f_i PR

beskri×souhil copie

Scanné avec CamScanner

3 $g = \lambda x. \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ pair,} \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}$

$$g(x) = x^2 * r(2, x+1) + x^3 * r(2, x)$$

$$\cancel{= \oplus(\otimes(f_2, r(}$$

On a $r(2, x+1) = car_A(x)$ et car_A est PR

Montrons que $h = \lambda x. r(2, x)$ est PR :

$$h(x) = r(2, x)$$

$$= [r \circ (S \circ S \circ Z, P_1^1)](x) \Rightarrow h \text{ est PR}$$

$g(x)$ devient :

$$g(x) = x^2 * car_A(x) + x^3 * h(x)$$

$$= [\oplus \circ (\otimes \circ (f_2, car_A), \otimes \circ (f_3, h))](x)$$

$\Rightarrow g$ $\underline{PR}$

COPIE
eskaki×souhil

Scanné avec CamScanner

Exo 3 :

2. $F : \begin{cases} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ (x,y) \longmapsto F(x,y) = (x-1, sg(y)) \end{cases}$

$S_g = \lambda x . \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1) $I = \{(1)\ q_0 1 0 q_1,$

$(2)\ q_1 0 D q_2,$

$(3)\ q_2 1 D q_2,$

$(4)\ q_2 * D q_3,$

$(5)\ q_3 1 D q_4,$

2) $(6)\ q_4 0 G q_{14},$

$(7)\ q_4 1 D q_5,$

$(8)\ q_5 1 D q_5,$

$(9)\ q_5 0 G q_6,$

$(10)\ q_6 1 0 q_7,$

$(11)\ q_7 0 G q_6$

$(12)\ q_6 * D q_7,$

$(13)\ q_7 0 1 q_8,$

$(14)\ q_8 1 D q_9,$

$(15)\ q_9 0 1 q_{10},$

$(16)\ q_{10} 1 G q_{10},$

$(17)\ q_{10} * G q_{10},$

$(18)\ q_{10} 0 D q_f \}$

Deskri+souhil copie

Scanné avec CamScanner

Exercice 1 :

1°/ Montrer que la fonction suivante est primitive récursive (PR).

$$eq(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

2°/ Montrer la relation suivante, en considérant $div(n,m)$ comme la division entière de n par m :

$$div(n+1,m) = div(n,m) + eq(m*(1+div(n,m)), n+1)$$

3°/ Montrer que $div(n,3)$ est Primitive Récursive. en utilisant la question 2.

Toutes les fonctions PR , vue en cours, peuvent être utilisées à part le reste de la division de x par y.

Exercice n°2 :

On désire représenter les entiers relatifs par la machine de Turing en adoptant la convention suivante :

- Un nombre n>0 est représenté par le symbole '+' suivi de (n+1) barres.
- Un nombre n<0 est représenté par le symbole '-' suivi de (n+1) barres.
- Le nombre 0 est représenté par +1 ou -1.

Ecrire la machine de Turing qui calcule la fonction suivante :

$$F(x,y) = \begin{cases} (x \bmod 3,\, y) & \text{si } x > y \\ P_{2,2}(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $P_{i,n}(x_1, \ldots x_i, \ldots x_n)$ correspond à la fonction projection du $i^{ème}$ élément parmi n.

Exemples : F(+4,-2)

0	+	1	1	1	1	1	*	-	1	1	1	0

0	+	1	1	*	-	1	1	1	0

F(-3,+5)

0	-	1	1	1	1	*	+	1	1	1	1	1	1	0

0	+	1	1	1	1	1	1

Exercice n°3 :

1. Soient les fonctions suivantes en Caml Light :

```
# let lg x = string_length x ;;
# let souschaine x= sub_string x 1 (lg x-1) ;;
# let rec f x=if x="" then [] else if x.[0] >=`0` & x.[0]<=`9` then
            (int_of_char(x.[0]) - 48) :: f(souschaine x) else f(souschaine x);;
```

1.1 Donner le type inféré par la fonction f.

1.2 Calculer f "1ad2b3c" ;;

1.3 Que fait la fonction f ?

Remarque : Les codes ASCII des caractères 0, 1, 2, ..., 9 sont respectivement 48,49,50,...,57.

2. Ecrie en Caml une fonction « Ajout_uplet (a,b) x » où (a,b) est un couple d'entiers et x est une liste de couples d'entiers, qui retourne une liste de quadruplets dont les deux premiers éléments sont a et b et les deux suivants sont pris dans x.

Exemple : Ajout_uplet (2,3) [(1,2) ;(4,8) ;(2,7)]=[2,3,1,2 ; 2,3,4,8 ; 2,3,2,7]

Beskri souhil copie

Scanné avec CamScanner

Département d'Informatique –USTHB
1ère MI – Module PRF

2009/2010

Epreuve de moyenne durée (1)

Exercice n°1 : (3 ; 2.5 ; 1.5)

1/ Ecrire une machine de Turing qui calcule la fonction f(x,y) suivante : (si x=0 alors y sinon x). Dans l'écriture des instructions, encadrez la partie correspondant au alors et celle correspondant au sinon.

2/ Soit l'ensemble des instruction de la Machine de Turing M=<S,E,I> suivante :

I = {	1 : q_0 1 D q_1;	9 : q_6 # D q_7	17 : q_{11} 1 D q_{11}	25 : q_{13} 0 1 q_{14}
	2 : q_1 1 D q_2	10 : q_7 1 # q_8	18 : q_{12} 1 G q_{12}	26 : q_{14} 1 G q_{14}
	3 : q_2 1 G q_2	11 : q_8 # D q_9	19 : q_{12} * G q_{12}	27 : q_{14} * G q_{14}
	4 : q_2 0 D q_3	12 : q_9 1 D q_9	20 : q_{12} # D q_0	28 : q_{14} # 1 q_{15}
	5 : q_2 # D q_3	13 : q_9 * D q_{11}	21 : q_0 * G q_{14}	29 : q_{15} 1 G q_{14}
	6 : q_3 1 # q_4	14 : q_9 0 * q_{10}	22 : q_1 * D q_{13}	30 : q_{14} 0 D q_f}
	7 : q_4 # D q_5	15 : q_{10} * D q_{11}	23 : $q_{[illegible]}$ * D q_{13}	
	8 : q_5 1 # q_6	16 : q_{11} 0 1 q_{12}	24 : q_{13} 1 D q_{13}	

a) Donnez les résultats f(6) et f(10) calculés par la machine de Turing M ;
b) Déduire la fonction f d'arité 1 de N – {0,1} -> N que calcule la machine de Turing M définie ci dessus.

Exercice n°2 : (3 ; 2)

Soient les relations $R_2(x_1,x_2)$ et $R_3(x_1,x_2,x_3)$ définies comme suit :
$R_2(x_1,x_2)$ est vraie si $x_1 >= x_2$, fausse sinon **et** $R_3(x_1,x_2,x_3)$ est vraie si $x_1 >= x_2 >= x_3$, sinon elle est fausse.

a/ Montrer que R_2 est primitive récursive.
b/ **Déduire** que R_3 est aussi primitive récursive.

On rappelle que la fonction caractéristique $car_R(x_1,\ldots,x_n)$ d'une relation $R(x_1,\ldots,x_n)$ est une fonction prenant la valeur 1 si $R(x_1,\ldots,x_n)$ est vraie sinon si $R(x_1,\ldots,x_n)$ est fausse, elle prend la valeur 0.

Exercice n°3: (1.5; 1; 2, 2, 1.5)

1. Donner une fonction CAML qui calcule la surface d'un demi cercle de rayon r.
2. Evaluer l'expression suivante: [1;2]@(8::tl [5;6;7;8])@[hd (tl [45;569;7889;78])];;
3. Soient les fonctions CAML suivantes :

let f1 ch = string_length ch-1;; **let** f2 ch= sub_string ch 1 (f1 ch);; **let** f3 ch = sub_string ch 0 1;;
let rec f5 ch x = if ch= "" then "" else if x=0 then f5 (f2 ch) 1 else (f3 ch)^(f5 (f2 ch) 0);;

a/ Donner les types inférés par CAML de ces fonctions .
b/ Calculer: - f5 "Kamel" 0 - f5 "Kamel" 1 -f5 "Kamel" 4 - f5 "Aminata" 0
c/ Que fait la fonction f5 ?

Beskri Souhil copie

Scanné avec CamScanner

21/06/2009

Rattrapage de Programmation Fonctionnelle

Exercice I (2, (1-1.5-1.5-2))

1) Donner la machine de Turing qui calcule la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ (x, x+1) & sinon \end{cases}$$

2) Soit l'ensemble des instructions de la Machine de Turing T =<S, E, I> suivant :

I = { 1 : q_0 1 0 q_1 5 : q_2 * G q_4 7 : q_6 1 G q_7 10 : q_3 0 D q_0

2 : q_1 0 D q_2 5 : q_4 0 1 q_8 8 : q_7 0 1 q_8

3 : q_2 1 0 q_3 6 : q_0 * G q_5 9 : q_5 0 1 q_6

a) Donner les résultats des fonctions f(0,0), f(5,26) et f(8,251) calculé par la machine de Turing T.

Remarque : Justifier vos réponses

c) Déduire la fonction f binaire que calcule la machine de Turing T définie ci-dessus.

Exercice II (1,2,1.5,1.5)

1/ Montrer que la famille des fonctions constantes $f_a = \lambda x.a$ où a une constante entière est primitive récursive.

2/ Montrer que toutes les fonctions $g_a = \lambda x.\ sg(|x-a|)$ sont primitives récursives.

3/Un ensemble est dit décidable si sa fonction caractéristique est primitive récursive. La fonction caractéristique d'un ensemble A est définie comme suit

$$Car_A(x) = \begin{cases} 1 & Si\ x \in A' \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

Montrer que tout ensemble à deux éléments D = {a, b} où a ≠ b est décidable.

4/ Dans le cas où a = b, montrez que D est aussi décidable.

Exercice III (1.5, 1.5, 3)

Soit la fonction récursive f suivante écrite en CAML :

```
# let rec f x y = if x < y then x else f((x-y) y);;
```

1). Calculer (en donnant toutes les étapes d'exécution) les applications suivantes :

```
# f 8 4 ;;        # f 7 3 ;;
```

2) Que calcule cette fonction f ?

3) Ecrire en CAML la fonction récursive g qui calcule le quotient de la division entière x par y.

Remarque : On ne pourra pas utiliser les opérations (/ et mod) pour écrire g.

beskri+sohbil copie

Scanné avec CamScanner

Exercice I (3+2+1)

1) Donner la machine de Turing qui calcule la fonction r3 d'arité 1 qui détermine le reste de la division de x par 3.

2) Soit I l'ensemble des instructions de la Machine de Turing T =<S, E, I> suivant :

I = {1 : q_0 1 D q_0 6 : q_3 0 D q_4 11 : q_7 1 G q_8 16 : q_{11} 0 1 q_{12} }
2 : q_0 * 1 q_1 7 : q_4 1 0 q_5 12 : q_8 1 0 q_9
3 : q_1 1 G q_1 8 : q_5 0 D q_6 13 : q_9 0 D q_8
4 : q_1 0 D q_2 9 : q_6 1 D q_7 14 : q_8 0 1 q_{10}
5 : q_2 1 0 q_3 10 : q_7 0 G q_{12} 15 : q_{10} 1 G q_{11}

a- Dérouler la machine T si on suppose que la configuration initiale du ruban est :

a1- q_0 $\underline{0}$ * $\underline{0}$

a2- q_0 $\underline{2}$ * $\underline{1}$

b- Déduire la fonction binaire (arité 2) calculée par T.

beskri+souhil copie

Exercice II (3+3)

1) Soit C_n la fonction constante d'arité 1, définie comme suit :

$C_n(x) = n$ Où n est une constante entière.

Montrer que C_n est Primitive Récursive.

2) En déduire que la fonction F suivante est Primitive Récursive :

$F(x) = ax + b$ Où a et b sont des constantes entières.

Exercice III (2+2+1+3)

Première Partie :

Soient les fonctions, écrites en CAML, f et g suivantes:

```
# let rec f x lst = if lst=[] then false else if x = hd lst then true else f x (tl lst);;
```

```
# let rec g lst = if lst = [] then [] else if f (hd lst) (tl lst) then g (tl lst) else (hd lst) :: g (tl lst) ;;
```

1) Donner le type, inféré par CAML, des fonctions f et g.
2) Evaluer l'application suivante et donner le résultat obtenu : # g [3;5;1;2;3;3;5;8];;
3) Que fait la fonction g ?

Deuxième Partie :

4) Ecrire en CAML, la fonction *palind* qui détermine si une chaîne de caractères est un palindrome.
Exemples de chaînes palindromes : " radar ", "ELLE", "eluparcettecrapule".

Scanné avec CamScanner

Exercice I (4)

1) Montrer que la fonction G définie comme suit est primitive récursive.

$G(x,y) = (f1(x), f2(x,y))$ tel que

$f1 = \lambda x.\, x \text{ DIV } 2$ (DIV : la division entière) et $f2 = \lambda xy.(x+y)$!

Rmq : Les seules fonctions que l'on peut considérer comme primitive récursives sont le +, * et r(x,y) reste de la division de y par x, sg et $\overline{sg}$.

Exercice II (3,2,3)

A) Soit l'ensemble des instructions de la Machine de Turing T =<S,E,I> suivant :

I = {1 : q_0 1 D q_1	6 : q_3 0 G q_2	11 : q_6 1 # q_7	16 : q_9 1 D q_9	20 : q_{11} # 1 q_{12}
2 : q_1 0 1 q_2	7 : q_3 1 G q_4	12 : q_7 # G q_7	17 : q_9 * D q_{10}	21 : q_{12} 1 G q_{11}
3 : q_2 1 G q_2	8 : q_4 1 G q_4	13 : q_7 * G q_8	18 : q_{10} # D q_{10}	22 : q_{11} * G q_{13}
4 : [illegible] 0 D q_{14}	9 : q_4 0 * q_5	14 : q_8 1 G q_8	19 : q_{10} 1 1 [illegible]	23 : q_{13} 1 G q_{13}
[illegible] 1 D q_3	10 : q_5 * D q_6	15 : q_8 0 1 q_9	20 : q_{10} 0 G q_{11}	24 : q_{13} 0 D q_{14}}

1) Donner les résultats f(4), f(0), f(2) et f(1) calculées par la machine de Turing T.

2) Déduire la fonction f d'arité 1 que calcule la machine de Turing T définie ci-dessus.

B) Donner la Machine de Turing H qui calcule la fonction $h : N^2 \to N^2$ suivante:

$$h(x,y) = \begin{cases} (0,y) & si\ x\ impair \\ (1,y) & si\ x\ pair \end{cases}$$

Exercice III (3,3,2)

A) Ecrire en langage CAML la fonction de Collatz suivante :

$$Col(x) = \begin{cases} 1 & Si\ \ x = 0\ ou\ x = 1 \\ Col(x\ DIV\ 2) & Si\ \ x\ est\ pair \\ Col(3x+1) & Si\ \ x\ est\ impair. \end{cases}$$

B) Soient les fonctions suivantes écrites en CAML :

```
# let lg x = string_length x;;

# let sc x = sub_string x 1 (lg x - 1);;

# let rec f x y = if lg x = 0 then 0 else if sub_string x 0 1 = y then 1+f (sc x) y else f (sc x) y;;
```

1) Donner le type des fonctions ci-dessus ?

2) Que calcule la fonction f ?

beskri+souhil copie

Scanné avec CamScanner

(1)

Exercice 1

$$G(x,y) = (f_1(x), f_2(x,y))$$
$$= (x \text{ div } 2, (x+y)!)$$

$$f_1(x) = P^2_1(G(x,y)) \qquad f_2(x,y) = P^2_2(G(x,y))$$
$$= P^2_1 \circ G(x,y) \qquad = P^2_2 \circ G(x,y)$$

G est PR ssi f_1 et f_2 le sont

$$f_1(x) = x \text{ div } 2$$

$$\begin{cases} f_1(0) = 0 \text{ div } 2 = 0 = C^{te} \\ f_1(y+1) = (y+1) \text{ div } 2 = \begin{cases} y \text{ div } 2 & \text{si } y \text{ est pair} \\ y \text{ div } 2 + 1 & \text{si } y \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y \text{ div } 2 & \text{si } r(2,y) = 0 \\ y \text{ div } 2 + 1 & \text{si } r(2,y) = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y \text{ div } 2 \\ y \text{ div } 2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } y \text{ est impair} \end{cases}$$

$$= y \text{ div } 2 + r(2,y)$$
$$= f_2(y) + r(S(S(Z(y))), y)$$
$$= \oplus(f_2(y), r(S(S(Z(P^2_2(f_2(y),y)))), P^2_2(f_2(y), y)$$
$$= \underbrace{\oplus \circ (P^2_1, r \circ (S \circ S \circ Z \circ P^2_2, P^2_2))}_{\text{PR car composition de fonctions PRs}}(f_2(y), y)$$

2/ $f_2(x,y)$

$$f_2(x,0) = x! \text{ -- PR car } \begin{cases} \text{fact } 0 = 0! = 1 = C^{te} \\ \text{fact}(x+1) = \text{fact } x * (x+1) = \text{fact } x * S(x \\ = \otimes(\text{fact } x, S(x)) = \otimes \circ (P^2_1, S \circ P^2_2)(\text{fact} \end{cases}$$
$$= \text{fact } x$$

beskri+souhil copie

Scanné avec CamScanner

ii) ?

$=1$

$q_0 10 \xrightarrow{4/} 1 q_1 0 \xrightarrow{7/} 1 q_2 1 \xrightarrow{3/} 0 q_2 1^2 \xrightarrow{3/} q_2 01^2 \xrightarrow{4/} 0 q_{14} 1^2$

$f(0) = 1$

?

$=11$

$q_0 1^2 \xrightarrow{1/} 1 q_1 10 \xrightarrow{5/} 1^2 q_3 0 \xrightarrow{4/} 1 q_2 1 \xrightarrow[2 fois]{3/} q_2 01^2 \xrightarrow{4/} q_{14} 1^2$

$f(1) = 1$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ (x, x) & \text{si non} \end{cases}$

$h(x, y) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } x \text{ impair} \\ (1, y) & \text{si } x \text{ pair} \end{cases}$

$S = \{0, 1, *\}$

$E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$

Inst = { $q_0 1 0 q_1$, $q_1 0 D q_2$, $q_2 1 0 q_3$, $q_3 0 D q_0$

x impair) : $q_0 * G q_4$, $q_4 0 1 q_f$,

x pair) : $q_2 * G q_5$, $q_5 0 1 q_6$, $q_6 1 G q_7$, $q_7 0 1 q_f$

}

beskri-souhil-copie

Scanné avec CamScanner

$0)$?

$= 1$

$q_0 10 \xrightarrow{4} 1 q_1 0 \xrightarrow{4} 1 q_2 1 \xrightarrow{3} 0 q_2 1^2 \xrightarrow{3} q_2 0 1^2 \xrightarrow{4} 0 q_{14} 1^2$

$f(0) = 1$

?

$= 11$

$0 1^2 \xrightarrow{4} 1 q_1 10 \xrightarrow{5} 1^2 q_3 0 \xrightarrow{6} 1 q_2 1 \xrightarrow[2 fois]{3} q_2 0 1^2 \xrightarrow{4} q_{14} 1^2$

$f(1) = 1$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ (x, x) & \text{si non} \end{cases}$

2

$h(x, y) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } x \text{ impair} \\ (1, y) & \text{si } x \text{ pair} \end{cases}$

3

$S = \{0, 1, *\}$

$E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$

Inst = { $q_0 1 0 q_1$, $q_1 0 D q_2$, $q_2 1 0 q_3$, $q_3 0 D q_0$

x impair) : $q_0 * G q_4$, $q_4 0 1 q_f$,

x pair) : $q_2 * G q_5$, $q_5 0 1 q_6$, $q_6 1 G q_7$, $q_7 0 1 q_f$

}

$0 d\ddot{u} 1 k$

$q_1 q_3 q_0$

beskri souhir copie

Scanné avec CamScanner

Ex.3

```
# let rec col x = if (x=0 or x=1) then 1
                  else if x mod 2 = 0 then col (x/2)
                  else col (3*x+1) ;;
```

(3)

```
1/ # let lg x = string_length x ;;
lg : string -> int = <fun>
```

(1)

```
# let sc x = sub_string x 1 (lg x - 1) ;;
sc : string -> string = <fun>
# let rec f x y = if lg x = 0 then 0
                  else if sub_string x 0 1 = y then 1+f (sc x) y
                  else f (sc x) y ;;
f : string -> string -> int = <fun>
```

(1)

2/ La fonction f calcule le nombre d'occurence d'un caractère (~~introduit~~ sous forme de chaine) dans une chaine de caractères. (2)

bekri+souhil copie

TCE 1	18/06	10.45 _ 12.45
" 2	"	13h00 15.. _
ALGO 2	20/06	10H45 _
PROF	21/06	10H45 _
ALG2	23/06	13H.00
STR	27	10H45
STAT	28	10H45
ELECT	29	08H 30
ANALY2	30	13H

copie

USTHB, Département Informatique 22.05.2012

Examen Final Module PRF
MI Section 5

Exercice 1 :

Soit la fonction $F_2(x_1,x_2)$ de $N^2 \rightarrow N$ définie comme suit :

$$F_2(x_1,x_2)=\begin{cases} 1 \text{ si } x_1=x_2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1/ Vérifier que le fonction $F_2 = \overline{sg}(|x_1 - x_2|)$

2/ Déduire que la fonction F_2 est primitive récursive (PR).

3/ Déduire que la relation $R_{\neq}$ est PR. $R_{\neq} = \{(x_1,x_2) \in N^2 / x_1 \neq x_2\}$

4/ Montrer par récurrence (en supposant F_2 PR) que la fonction F_n de $N^n \rightarrow N$ suivante est PR.

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases} 1 \text{ si } x_1=x_2=\ldots=x_n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère les fonctions vues en cours comme primitives récursives

Exercice 2 :

A/ Les codes ASCII des lettres alphabétiques majuscules 'A', 'B', 'C' …, 'Y', 'Z'sont respectivement (01000001), (01000010), (01000011), …(01011001), (01011010). Et ceux des lettres minuscules 'a', 'b', 'c', …, 'y', 'z' sont respectivement (01000001), (01000010), (01000011), …(01011001), (01011010).

1/ Quelle est la différence entre un code d'une lettre majuscule et son équivalent en minuscule ?

2/ En supposant que le blanc (vide) est représenté par le symbole # (au lieu de 0) et que la tête de Lecture/Ecriture se pointe sur le bit le plus à gauche du code, Ecrire la machine de Turing qui convertit le code ASCII d'une lettre majuscule au code ASCII de la lettre minuscule équivalente ('A'→'a', 'B'→'b', …, 'Y'→'y', 'Z'→'z'). **Exemple :** # # # 0 1 1 0 0 1 0 0 # # représente le code ASCII de la lettre D.

B/ Soit la fonction f d'arité 1 de $N \rightarrow N$ calculable par la machine de Turing M=<S,E,I> définie par :

$S=\{0,1\}$ $E=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_f\}$

I={ 1/q_0 1 0 q_1,
2/q_1 0 D q_2, 8/q_6 1 G q_6,
3/q_2 1 D q_2, 9/q_6 0 G q_7,
4/q_2 0 D q_3, 10/q_7 1 G q_8, 14/q_7 0 D q_9,
5/q_3 0 1 q_4, 11/q_8 1 G q_8, 15/q_9 0 D q_{10},
6/q_4 1 D q_5. 12/q_8 0 D q_0. 16/q_{10} 1 0 q_{11},
7/q_5 0 1 q_6. 13/q_9 1 D q_3, 17/q_{11} 0 D q_f }

1/ Calculer f(0) et f(3).

2/ Déduire la définition de la fonction f.

Exercice 3 :

A/ **1/** Ecrire en CAML la fonction lg qui calcule la longueur d'une chaîne de caractères

2/ Ecrire en CAML, en utilisant la fonction lg, la fonction « recuperer » qui permet de récupérer les caractères d'une chaîne de caractères dans une liste de caractères.

Exemple : recuperer "USTHB"= ['U','S','T','H','B']

B/ Soit la déclaration CAML de la fonction « trouver » suivante :

```
# let rec trouver h f = if h = [] then [] else if f (hd h)=true then (hd h) :: trouver(tl h) f
                                              else trouver (tl h) f ;;
```

1/ Donner le type inféré par CAML pour cette fonction.

2/ Soient h = [2;7;8;3;21;6] et f la fonction booléenne « est_pair ». Calculer trouver h f en donnant toutes les étapes de calcul.

3/ Que fait la fonction « trouver » ?

cherche les élt pairs et les mets ds une liste

Scanné avec CamScanner

Partie I/ Fonctions Récursives

Exercice 1 :

Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives en utilisant la méthode par récursion:

a/ $Sg = \lambda x. \begin{cases} x-1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Pred

b/ $exp = \lambda xy.\ x^Y$

c/ $Sg = \lambda x. \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

d/ $\overline{Sg} = \lambda x. \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

e/ $fact = \lambda x.\ x\,!$

f/ $moins = \lambda xy. \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x<y \end{cases}$

Exercice 3 :

Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives en utilisant la méthode par composition:

a/ $min = \lambda xy.$ Minimum (x,y)

b/ $max = \lambda xy.$ Maximum (x,y) $(x-y)+y$

d/ $Abs = \lambda xy.\ |x-y|$

Exercice 4 :

Montrer en utilisant le raisonnement par récurrence que la fonction « maximum » appliquée à n arguments est primitive récursive.

Examens : Fonctions Récursives

Examen (rattrapage Septembre 2008)

Montrer que la fonction F définie comme suit est primitive récursive :

$$F(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & \text{si } r(x,y) < q(2,x) \\ q(x,y)+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où les fonctions q et r sont respectivement les fonctions binaires quotient et reste vues en cours.

Examen (rattrapage 2010)

Montrer de deux façons différentes que la fonction $f(x,y,z) = x^* y^*z$ est primitive récursive. On suppose que la fonction $f(x,y) = x^*y$ est primitive récursive .

Examen (30/05/2009)

1/ Monter que la fonction G définie comme suit est primitive récursive ;

$G(x,y) = (f1(x), f2(x,y))$ tel que

$F1 = \lambda x.$ X DIV 2 (DIV : la division entière) et $f2 = \lambda xy.\ (x+y)\,!$

Remarque : Les seuls fonctions que l'on peut considérer comme primitive récursives sont le $\dot{+}$, $\dot{*}$, r(x,y) reste de la division de y par x, sg et $\overline{sg}$.

Examen(2010)

Soient les relations $R_2(x_1,x_2)$ et $R_3(x_1,x_2,X_3)$ définies comme suit :

Scanné avec CamScanner

Examens : Machine de Turing

Examen (rattrapage Septembre 2008)

Soit l'ensemble des instructions de la machine de Turing T =< S,E,I> suivant :

I= {1 : q_0 1 D q_0,	5 : q_1 1 G q_1,	9 : q_4 1 D q_4	13 : q_6 1 G q_6	17 : q_7 * 0 q_8
2 : q_0 * D q_0	6 : q_1 0 D q_2	10 : q_4 * D q_4	14 : q_6 * G q_6	18 : q_8 0 D q_0}
3 : q_0 0 * q_1	7 : q_2 1 0 q_3	11: q_4 0 1 q_5	15 : q_6 0 D q_7	
4 : q_1 * G q_1	8 : q_3 0 D q_4	12 : q_5 1 G q_6	16 : q_7 1 1 q_2	

Déterminer la fonction calculée par la machine T en justifiant votre résultat.

Examen (31/05/2009)

A/ Soit l'ensemble des instructions de la machine de Turing T =< S,E,I> suivant :

I= {1 : q_0 1 D q_1,	6 : q_3 0 G q_2,	11 : q_6 1 # q_7	16 : q_9 1 D q_9	21 : q_{11} # 1 q_{12}
2 : q_1 0 1 q_2	7 : q_3 1 G q_4	12 : q_7 # G q_7	17 : q_9 * D q_{10}	22 : q_{12} 1 G q_{11}
3 : q_2 1 G q_2	8 : q_4 1 G q_4	13 : q_7 * G q_8	18 : q_{10} # D q_{10}	23 : q_{11} * G q_{13}
4 : q_2 0 D q_{14}	9 : q_4 0 * q_5	14 : q_8 1G q_8	19 : q_{10} 1 1 q_6	24 : q_{13} 1 G q_{13}
5 : q_1 1 D q_3	10 : q_5 * D q_6	15 : q_8 0 1 q_9	20 : q_{10} 0 G q_1	25 : q_{13} 0 D q_{14}}

1/ Donner les résultats f(4), f(0), f(2) et f(1) calculées par la machine de Turing T.

2/ Déduire la fonction f d'arité 1 que calcule la machine de Turing T définie ci-dessus.

3/ Donner la machine de Turing H qui calcule la fonction $h : N^2 \rightarrow N^2$ suivante :

$$h(x,y) = \begin{cases} (0,y) & \text{si } x \textit{ impair} \\ (1,y) & \text{si } x \textit{ pair} \end{cases}$$

Examen (2010)

~~1/ Ecrire~~ une machine de Turing qui calcule la fonction f(x)=(x/2,x/2). Donner un pseudo algorithme qui explique le fonctionnement de la machine.

2/ Déterminer la fonction d'arité 1 de N → N que calcule la Machine de Turing M=<S,E,I> définie ci-dessous :

I= {1 : q_0 1 0 q_1	2 : q_1 0 D q_2	3 : q_2 0 1 q_f	4 : q_2 1 0 q_3	5 : q_3 0 D q_4
6 : q_4 0 1 q_f	7 : q_4 1 1 q_f}			

Examen (2010)

1/ Ecrire une machine de Turing qui calcule la fonction f(x,y) suivante : **(si x=0 alors y sinon x)**. Dans l'écriture des instructions, encadrez la partie correspondant au **alors** et celle correspondant au **sinon.**

2/ Soit l'ensemble des instruction de la Machine de Turing M=<S,E,I> suivante :

I={ 1 : q_0 1 D q_1	9 : q_6 # D q_7	17 : q_{11} 1 D q_{11}	25 : q_{13} 0 1 q_{14}
2 : q_1 1 D q_2	10 : q_7 1 # q_8	18 : q_{12} 1 G q_{12}	26 : q_{14} 1 G q_{14}
3 : q_2 1 G q_2	11 : q_8 # D q_9	19 : q_{12} * G q_{12}	27 : q_{14} * G q_{14}
4 : q_2 0 D q_3	12 : q_9 1 D q_9	20 : q_{12} # D q_0	28 : q_{14} # 1 q_{15}
5 : q_2 # D q_3	13 : q_9 * D q_{11}	21 : q_0 * G q_{14}	29 : q_{15} 1 G q_{14}
6 : q_3 1 # q_4	14 : q_9 0 * q_{10}	22 : q_1 * D q_{13}	30 : q_{14} 0 D q_f}
7 : q_4 # D q_5	15 : q_{10} * D q_{11}	23 : q_2 * D q_{13}	
8 : q_5 1 # q_6	16 : q_{11} 0 1 q_{12}	24 : q_{13} 1 D q_{13}	

a) Donnez les résultats f(6) et f(10) calculés par la machine de Turing M ;

b) Déduire la fonction f d'arité 1 de N –{0,1} -> N que caloule la machine de Turing M définie ci dessus.

Beskri Souhil copie

Scanné avec CamScanner

USTHB -1ère MI NOM : Prénom :

Examen PRF Section : Groupe :

Exercice n°1 : (2,75+4+1,25)

1. Soit la fonction CAML suivante :

let rec f x = if x= "" then "" else if (x.[0]=`a` or x.[0]=`A`) then f (sub_string x 1 (string_length x -1)) else (sub_string x 0 1) ^ f (sub_string x 1 (string_length x -1)) ;;

a. Donner le type de cette fonction.

....

b. Calculer f "Amina", f "cou" et f 13.6
(*<u>calculer f au verso de cette page</u>*)

c. Que fait la fonction f ?

....

2. Les fonctions suivantes manipulent des listes :

a. Ecrire une fonction CAML f1 qui permet de supprimer les x premiers éléments d'une liste si le nombre des éléments de celle–ci est supérieure à x et retourne la liste vide sinon.

....

....

....

....

....

....

b. Ecrire une fonction f2 similaire à f1, sauf que celle-ci supprime les x éléments à la fin de la liste.

....

....

....

....

....

c. Déduire la fonction f3 qui permet d'extraire une sous liste, constituée des éléments commençant à la position x jusqu'à la position y. Si l'extraction ne peut pas avoir lieu, la fonction retourne la liste vide.

....

Exemples :

f 1 [5 ;6 ;3 ;4] 2= [3 ;4] f 1 [5 ;6 ;3 ;4] 6= []

f 2 [5 ;6 ;3 ;4] 2= [5 ;6] f 2 [5 ;6 ;3 ;4] 6= []

f 3 [5 ;6 ;3 ;4] 1 3= [5 ;6 ;3] f 3 [5 ;6 ;3 ;4] 3 5 = []

On supposera comme prédéfinies les fonctions « nombre éléments d'une liste » -nbElm - , et « supprimer dernier élément d'une liste » -SupDerElm -.

3. Donnez le résultat retourné pour chaque ligne de la session CAML suivante :

let a= 3;; ....a = ...

let a = 1 and b = 2 in 2*a+b ;;...............a = ...& b = ...

a;; ....a = ...

b;; ....b = ...

Beskri+Souhil copie

Scanné avec CamScanner