Faculté de mathématiques. Département d'analyse U.S.T.H.B. 2021/22

L1, MI8, Analyse 2 Séries d'exercices n°1

Formule de Taylor-Lagrange et développements limités

I- Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1

Calculer les dérivées successives de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = cosx$; 2. $f(x) = \ln(1+x)$; 3) $f(x) = (x^3 + x + 1)e^x$; 4) $f(x) = (cosx)e^x$

1) $f(x) = cosx$

$f'(x) = -sinx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = -\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$

Supposons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = -sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Donc $cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$

$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$

Supposons par récurrence que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n}$

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(-n)}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n(n-1)!\,(n)\frac{1}{(1+x)^n}$

D'où $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^n}$. Alors

$Ln(1+x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n}$

3) $f(x) = (x^3+x+1)e^x$

$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

$(f(x)g(x))'' = ((f(x)g(x))')' = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)$

$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$; $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Posons $f(x) = x^3+x+1$ et $g(x) = e^x$; $g^{(n)}(x) = e^x$

$((x^3+x+1)e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, f^{(k)}(x)e^x$

$f'(x) = 3x^2+1$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 4$

$(f(x)g(x))^{(n)} = C_n^0 f(x)e^x + C_n^1 f'(x)e^x + C_n^2 f^{(2)}(x)e^x + C_n^3 f^{(2)}(x)e^x$

$= e^x[x^3+x+1+n(3x^2+1)+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]$

$((x^3+x+1)e^x)^{(n)} = e^x(x^3+3nx^2 \mp (3n^2-3n+1)x+n^3-3n^2+3n+1)$

Exercice 2

Démontrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange que

$\forall x \in\ [0,+\infty[$ on a, $1-\frac{1}{3}x\ +\frac{2}{9}\,x^2-\ \frac{14}{81}x^3 \le\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \le 1\ -\frac{1}{3}x\ +\frac{2}{9}\,x^2$

Soit $x>0$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange à $f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t+1}}$ entre 0 et x à l'orde 2,

il existe $c \in\ ]0,x[$ tel que,

$f(x)=f(0)+xf'(0)\ +\ \frac{1}{2}x^2f''(0)+\ \frac{1}{6}x^3f^{(3)}(c)$

$f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t+1}}; f(0)=1$

$f'(t)=-\frac{1}{3}(1+t)^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3}\frac{1}{(1+t)\sqrt[3]{1+t}};\ f'(0)=-\frac{1}{3}$

$f''(t)=\frac{1}{3}\frac{4}{3}(1+t)^{-\frac{7}{3}}=\frac{4}{9}\frac{1}{(1+t)^2\sqrt[3]{1+t}};\ f''(0)=\frac{4}{9}$

$f'''(t)=-\frac{1}{3}\frac{4}{3}\frac{7}{3}(1+t)^{-\frac{10}{3}}=-\frac{28}{27}\frac{1}{(1+t)^3\sqrt[3]{1+t}};\ f'''(c)=-\frac{28}{27}\frac{1}{(1+c)^3\sqrt[3]{1+c}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=1+-\frac{1}{3}x+\ \frac{2}{9}x^2-\ \frac{14}{81}x^3\ -\frac{14}{81}\frac{1}{(1+c)^3\sqrt[3]{1+c}}\ x^3$

$-\frac{28}{27}\frac{1}{(1+c)^3\sqrt[3]{1+c}}\ x^3<0$ d'où $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}<1+-\frac{1}{3}x+\ \frac{2}{9}x^2$

D'autre part, $\frac{1}{(1+c)^3\sqrt[3]{1+c}}<1$ d'où $-\frac{28}{27}\frac{1}{(1+c)^3\sqrt[3]{1+c}}x^3>-\frac{14}{81}x^3$ donc

$1-\ \frac{1}{3}x\ \ +\frac{2}{9}\,x^2-\ \frac{14}{81}x^3>\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

Alors pour tout $x>0$, on a $1-\ \frac{1}{3}x\ \ +\frac{2}{9}\,x^2-\ \frac{14}{81}x^3<\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}<\ 1-\frac{1}{3}x\ \ +\frac{2}{9}\,x^2$

Pour $x=0$ on a égalité.

Alors pour tout $x\ge 0$ on a $1-\frac{1}{3}x\ \ +\frac{2}{9}\,x^2-\ \frac{14}{81}x^3\le\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\ \le\ 1\ -\frac{1}{3}x\ \ +\frac{2}{9}\,x^2$.

Exercice 3

1) Montrer que $\forall x > 0$,

$$0 \leq ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \leq \frac{x^5}{5!}\, sh(x)$$

2) En déduire que $\frac{433}{384}$ est une valeur approchée de $ch\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3840}$ près : il suffit de montrer que $\left|ch\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{433}{384}\right| < \frac{1}{3840}$

De 1) on déduit que, $0 \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{384} \leq \frac{1}{32\times120}\, sh\left(\frac{1}{2}\right)$

D'où

$0 \leq ch\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{433}{384} \leq \frac{1}{32\times120}\, sh\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $\left|ch\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{433}{384}\right| \leq \frac{1}{32\times120}\, sh\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3840}\, sh\left(\frac{1}{2}\right)$

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $s'h(x) = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc $sh(x)$ est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$. $e < 4$ donc $1 < 2ln2$ ou $\frac{1}{2} < ln2$, alors $sh\left(\frac{1}{2}\right) \leq sh(ln2) = \frac{e^{ln2} - e^{-ln2}}{2} = \frac{3}{4} < 1$.

D'où $\left|ch\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{433}{384}\right| < \frac{1}{3840}$.

II- Développements limités

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Pour $x \neq 0$ on peut écrire $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers zéro lorsque x tend vers zéro. Posons $\varepsilon(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ alors

$f(x) = x^2\varepsilon(x)$ donc f admet un DL en zéro à l'ordre 2. La partie polynômiale est nulle.

2) La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ? Que peut-on en conclure.

En exercice montrer que f n'est pas dérivable deux fois en zéro.

Conclusion : Si une fonction f admet un développement limité en zéro à l'ordre 2 ne nous permet pas de'affirmer que f est dérivable deux fois en zéro.

Exercice 2

Etablir pour chacune des fonctions ci-dessous un développement limité en 0 à l'ordre n.

1) $f(x) = sin(2x) + cos(x^2), n = 3;$

$sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$
$cos(x^2) = 1 + x^3\varepsilon_2(x)$ d'où
$f(x) = 1 + 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

2) $f(x) = e^{3x}\, sin(2x), n = 4;$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x)$$
$$= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$$
$$sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\varepsilon_2(x)$$

$$f(x) = \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 2x + 6x^2 + \frac{23}{3}x^3 + 5x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

3) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x sinx}, n = 3.$

$e^x = 1 + x + x\varepsilon_1(x);\ sinx = x + x\varepsilon_2(x)$ d'où $e^x sinx = x + x\varepsilon_3(x)$.
Le DL de $e^x sinx$ commence par x donc pour avoir Le DL de $\frac{\ln(1+x)}{e^x sinx}$ à l'ordre 3 on doit passer à l'ordre 4 :
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon_4(x)$
$sinx = x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\varepsilon_5(x)$
$e^x sinx = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4\varepsilon_6(x)$
$ln(1+x) = ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_7(x)$

D'où $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x sinx} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_7(x)}{x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4\varepsilon_6(x)} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + x^3\varepsilon_7(x)}{1 + x + \frac{1}{3}x^2 + x^3\varepsilon_6(x)}$

Déterminons le DL de en utilisant deux méthodes différentes.

Première méthode : la division suivant les puissances décroissantes

$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3$	$1+x+\frac{1}{3}x^2$
$-\quad 1+x+\frac{1}{3}x^2$	$1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^3$
$=\quad -\frac{3}{2}x \qquad -\frac{1}{4}x^3$	
$-\quad -\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$	
$=\quad \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$	
$-\quad \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x^4$	
$=\quad -\frac{5}{4}x^3+\frac{1}{2}x^4$	D'où $\frac{\ln(1+x)}{e^x sinx}=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^3+x^3\varepsilon(x)$

Deuxième méthode: Le produit de $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+x^3\varepsilon_1(x)$ par le DL de $\frac{1}{1+x+\frac{1}{3}x^2+x^3\varepsilon_3(x)}$

Posons $X=x+\frac{1}{3}x^2+x^3\varepsilon_3(x)$; on peut écrire $\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+X^3+X^3\varepsilon_8(X)$ d'où

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{3}x^2+x^3\varepsilon_3(x)}=1-x+x^2+\frac{4}{3}x^3+x^3\varepsilon_5(x)$$

$f(x)=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(1-x+x^2+\frac{4}{3}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)$; alors

$$\frac{\ln(1+x)}{e^x sinx}=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x^3+x^3\varepsilon(x).$$

Exercice 3

Etablir pour chacune des fonctions ci-dessous un développement limité en x_0 à l'ordre n.

1) $f(x) = ln(sinx), x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3;$

On pose $t = x - \frac{\pi}{2}$ c'est à dire $x = t + \frac{\pi}{2}$

$f(x) = h(t) = \ln\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right);$

$sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = cost = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)$ d'où

$\ln\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)\right)$; posons $X = -\frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)$;

$\ln(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + X^3\varepsilon_1(X)$ d'où

$\ln\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)\right) = -\frac{1}{2}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)$; alors

$ln(sinx) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$

2) $f(x) = \frac{1+x}{2+x}, x_0 = +\infty, n = 2;$

On pose $t = \frac{1}{x}$ ou $x = \frac{1}{t}$ d'où $f(x) = \frac{1+x}{2+x} = h(t) = \frac{1+\frac{1}{t}}{2+\frac{1}{t}} = \frac{1}{2}\frac{1+t}{1+2t}$

Première méthode : la division suivant les puissances décroissantes

$1 + t$	$1 + 2t$
$-\quad 1 + 2t$	$1 - t + 4t^2$
$=\quad -t$	
$-\quad -t - 2t^2$	
$=\quad 2t^2$	
$-\quad 4t^2$	

d'où $\frac{1}{2}\frac{1+t}{1+2t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + 2t^2 + t^2\varepsilon_1(t)$

Alors $\frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

Deuxième méthode: Le produit de $\frac{1}{2}(1+t)$ par le DL de $\frac{1}{1+2t}$

$\frac{1}{1+2t} = 1 - 2t + 4t^2 + t^2\varepsilon_1(t)$ d'où

$\frac{1}{2}\frac{1+t}{1+2t} = \frac{1}{2}(1+t)\left(1 - 2t + 4t^2 + t^2\varepsilon_2(t)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + 2t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$

$\frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

3) $f(x) = x^{x-1}, x_0 = 1, n = 1;$

$x^{x-1} = e^{lnx^{x-1}} = e^{(x-1)lnx}$; posons $t = x - 1$ c'est à dire $x = t + 1$

$f(x) = h(t) = e^{tln(1+t)} = e^{t(t+\varepsilon_1(t))} = e^{t\varepsilon_1(t)} = 1 + t\varepsilon_2(t)$ d'où

$f(x) = 1 + (x-1)\varepsilon(x-1)$

3) $f(x) = x^5 + 4x^2 + x - 1, x_0 = 0, n = 3$

$f(x) = 1 - x + 4x^2 + x^3(x^2)$

$= 1 - x + 4x^2 + x^3\,\varepsilon(x)$

4) $f(x) = x^5 + 4x^2 + x - 1, x_0 = 1, n = 3$

On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1)$

$f(x) = 5 + 15(x-1) + 14(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1)$

Exercice 4

Déterminer le développement généralisé à l'ordre 2 en 0 de chacune des fonctions suivantes

1) $f(x) = \frac{\ln(1+tg\,x)}{1 - cos\,x}$;

$\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)}$: le développement limité de $1-\cos x$ en 0, commence par $\frac{x^2}{2}$ donc pour avoir un développement limité en 0 de $\frac{ln(1+tgx)}{1-\cos x}$ à l'ordre 2 on fait un développement limité de $\frac{ln(1+tgx)}{1-\cos x}$ en 0 à l'ordre 4=2+2.

$$tg(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{1}{6}x^3+x^4\varepsilon_1(x)}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_2(x)}=x+\frac{1}{3}x^3+x^4\varepsilon_3(x)$$

$$ln(1+tgx)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+x^4\varepsilon_4(x)$$

$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_5(x)$ d'où

$$\frac{ln(1+tgx)}{1-\cos x}=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+x^4\varepsilon_4(x)}{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_5(x)}$$

$$=\frac{2}{x^2}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+x^4\varepsilon_4(x)}{1-\frac{1}{12}x^2+x^2\varepsilon_6(x)}$$

$\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+x^4\varepsilon_4(x)}{1-\frac{1}{12}x^2+x^2\varepsilon_6(x)}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{3}x^4+x^4\varepsilon(x)$ d'où

$$\frac{ln(1+tgx)}{1-\cos x}=\frac{2}{x^2}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{3}x^4+x^4\varepsilon(x)\right)$$

$$\frac{ln(1+tgx)}{1-\cos x}=\frac{2}{x}-1+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

2) $f(x)=\frac{chx}{ln(1+x)}$

$\frac{1}{ln(1+x)}=\frac{1}{x+x\varepsilon_1(x)}$: le développement limité de $ln(1+x)$ en 0, commence par x donc pour avoir un développement limité en 0 de $\frac{chx}{ln(1+x)}$ à l'ordre 2 on fait un développement limité de $\frac{chx}{ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 3=1+2.

$$\frac{chx}{ln(1+x)}=\frac{1+\frac{1}{2}x^2+x^3\varepsilon_2(x)}{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon_1(x)}$$

$=\frac{1}{x}\frac{1+\frac{1}{2}x^2+x^3\varepsilon_2(x)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+x^2\varepsilon_1(x)}$ d'où

$$\frac{chx}{ln(1+x)} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2-\frac{1}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)\right)$$

$$= \frac{chx}{ln(1+x)} = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{5}{12}x-\frac{1}{3}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

Exercice 5 (à traiter plus loin, après le chapitre sur les intégrales)

On définit la fonction f par $f(x) = arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction dérivée f'.

2) En déduire un développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction f.

Exercice 6

Considérons les deux fonctions $f(x) = sin(ln(1+x))$ et $g(x) = ln(1+sin(x))$

Trouver un équivalement simple de $f(x)-g(x)$ en 0.

$f(x) = sin\left(ln(1+x)\right) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{4}x^4+o(x^4)$

$g(x) = ln\left(1+sin(x)\right) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$ d'où

$f(x)-g(x) = \frac{19}{12}x^4+o(x^4)$ donc $f(x)-g(x)\sim_0 \frac{19}{12}x^4$

Exercice 7

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $h(x)=\frac{sin(x)sh(x)}{sin(x^2)}$

$\frac{1}{sin(x^2)} = \frac{1}{x^2+x^2\varepsilon_1(x)}$: le développement limité de $sin(x^2)$ en 0, commence par x^2 donc pour avoir un développement limité en 0 de $\frac{sin(x)sh(x)}{sin(x^2)}$ à l'ordre 2 on fait un développement limité de $\frac{sin(x)sh(x)}{sin(x^2)}$ en 0 à l'ordre 6=2+4.

$$sin(x)sh(x) = \left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^6\varepsilon_1(x)\right)\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^6\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= x^2-\frac{1}{90}x^6+x^6\varepsilon_3(x)$$

Posons $X = x^2$: $sinX = X-\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{120}X^5+X^6\varepsilon_3(X)$ d'où $sin(x^2) = x^2-\frac{1}{6}x^6+x^6\varepsilon_4(x)$

$\frac{sin(x)sh(x)}{sin(x^2)} = \frac{x^2 - \frac{1}{90}x^6 + x^6\varepsilon_3(x)}{x^2 - \frac{1}{6}x^6 + x^6\varepsilon_4(x)} = \frac{1 - \frac{1}{90}x^4 + x^4\varepsilon_3(x)}{1 - \frac{1}{6}x^4 + x^4\varepsilon_4(x)} = 1 + \frac{7}{45}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

2) En déduire un équivalent simple de $h(x) - 1$ au voisinage de 0.

$h(x) - 1 = \frac{\sin(x)sh(x)}{\sin(x^2)} - 1 = 1 + \frac{7}{45}x^4 + x^4\varepsilon(x) - 1 = \frac{7}{45}x^4 + x^4\varepsilon(x).$

Donc $\frac{\sin(x)sh(x)}{\sin(x^2)} - 1 \sim_0 \frac{7}{45}x^4$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{shx}{sinx}$;

$sh(x) = x + x\varepsilon_1(x)$

$sinx = x + x\varepsilon_2(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{shx}{sinx} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x\varepsilon_1(x)}{x + x\varepsilon_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)}$;

$\sin(3x) = 3x + x\varepsilon_1(x)$

$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + x^3\varepsilon_2(x)$ d'où

$3x - \frac{3}{2}sin(2x) = 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + x\varepsilon_1(x)}{2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + \varepsilon_1(x)}{2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)} = +\infty.$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{cos(x)} - e^{ch(x)}}{cos(x) - ch(x)}$;

$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ d'où $e^{cos(x)} = e^{1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)} = ee^{-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}$

Posons $X = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$; $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon_2(X)$;

$e^{cos(x)} = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\right) = e - \frac{e}{2}x^2 + x^2\varepsilon_4(x)$

$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_5(x)$ d'où $e^{ch(x)} = e^{1+\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_5(x)} = ee^{\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon_5(x)}$

Posons $t = \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_5(x)$; $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon_6(t)$;

$e^{ch(x)} = e\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)\right) = e + \frac{e}{2}x^2 + x^2\varepsilon_7(x)$

D'où $e^{cos(x)} - e^{ch(x)} = -ex^2 + x^2\varepsilon_8(x)$ et $cos(x) - chx = -x^2 + x^2\varepsilon_8(x)$. Alors

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{cos(x)}-e^{ch(x)}}{cos(x)-ch(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-ex^2+x^2\varepsilon_6(x)}{-x^2+x^2\varepsilon_8(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-e+\varepsilon_6(x)}{-1+\varepsilon_8(x)} = e.$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{e^x-1}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{ln\frac{e^x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-2\frac{lnx}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-2\frac{lnx}{x}\right)} = +\infty.$$

<u>Exercice 9</u>

Etudier localement les fonctions suivantes au point indiqué.

1) $f(x) = ln\, 2 + ln\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ en zéro

Posons $X = x + \frac{1}{2}x^2$; $ln\,(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon_1(X)$ d'où

$f(x) = g(X) = \ln 2 + \ln(1 + X)$ d'où

$f(x) = ln2 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$

$f(x)$ admet un DL en zéro à l'ordre $n = 2 \geq 1$ donc f est dérivable en zéro et l'équation de la tangeante à sa courbe C_f est donnée par : $y = x + ln2$.

Position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à sa tangente en zéro.

$f(x) - y = \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ a le signe de $\frac{3}{2}x^2$ donc $f(x) - y > 0$.

Alors C_f est au dessus de sa tengeante en zéro à gauche et à droite.

2) $f(x)=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{4(x-1)}$, en $+\infty$;

Posons $X=\frac{1}{x}$ c'est-à-dire $x=\frac{1}{X}$.

$$f(x)=h(X)=\frac{\frac{1}{X}\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}}{4\left(\frac{1}{X}-1\right)}=\frac{\frac{1}{X}\sqrt{\frac{1}{X^2}(X^2+1)}}{4\frac{1}{X}(1-X)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{X^2}}\sqrt{X^2+1}}{4(1-X)}=\frac{\frac{1}{|X|}\sqrt{X^2+1}}{4(1-X)}=\frac{1}{4}\frac{1}{X}\frac{\sqrt{1+X^2}}{1-X}$$

$\sqrt{1+X^2}=1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+X^2\varepsilon_1(x)$ d'où

$$\frac{\sqrt{1+X^2}}{1-X}=\frac{1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+X^2\varepsilon_1(X)}{1-X}=1+\frac{3}{2}X+\frac{3}{8}X^2+X^2\varepsilon_2(X)$$

$\frac{1}{4}\frac{1}{X}\frac{\sqrt{1+X^2}}{1-X}=\frac{1}{4}\frac{1}{X}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}X+X\varepsilon_2(X)$ alors

$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ donc

La courbe C_f de la fonction f admet une asymptote d'équation : $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$

Position de la courbe C_f de la fonction f par rapport à son asymptôte en $+\infty$.

$f(x)-y=\frac{3}{32}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ a le signe de $\frac{3}{32}\frac{1}{x}$ donc

$f(x)-y<0$ au voisinage de $-\infty$ et $f(x)-y>0$ au voisinage de $+\infty$. Alors

C_f est en dessous de son asymptôte au voisinage de $-\infty$ et au dessus de au voisinage $+\infty$.