Faculté de mathématiques. Département d'analyse U.S.T.H.B. 2020/21

L1, MI8, Analyse1 Série d'exercices n°3 : **Fonctions réelles d'une variable réelle**

I- Limites et continuité

Exercice 3

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$; 4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+cosx}{x+sinx}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Ln(1+x^2)}{sin^2x}$;

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{cos^2x+sinx}{x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$; 8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor Lnx \rfloor}{x}$; 9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; 10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinax}{x}$, $a \in \mathbb{R}$; 12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{x}$; 13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - e^x$; 14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$;

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

Posons $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = \lim_{X\to 0} e^{\frac{Ln(1+X)}{X}} = e.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinax}{x}$

si $a = 0$ alors $sinax = sin0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinax}{x} = 0$$

si $a \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinax}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{sinax}{ax}$$

On pose $ax = X$. Alors

$$\lim_{x\to 0} a\frac{sinax}{ax} = \lim_{X\to 0} a\frac{sinX}{X} = a$$

Finalement pour tout réel a on a $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = a.$

12. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(e^{-x})}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(e^{-x})}{x} = 0$$

13. $\lim_{x\to+\infty} x^2 - e^x$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - 1\right) = -\infty$$

14. $\operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x} - x$

$$\operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x} - x = \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+2x)}+x}$$

$$= \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x} = \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x}$$

$$= \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1\right)} = \operatorname{Lim}_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1} = 1$$

Exercice 4

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, montrer que la fonction f ne possède pas de limite en x_0, dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = cosx, x_0 = +\infty$; 2. $f(x) = cos\frac{1}{x}, x_0 = 0$; 3. $f(x) = sinLn|x|, x_0 = 0$.

1. $f(x) = cosx, x_0 = +\infty$

$f(x) = cosx, x_0 = +\infty$

On considère la suite de terme général $n\pi$ quidiverge vers $+\infty$

$f(n\pi) = cosn\pi = (-1)^n$

Alors

n pair $cosn\pi = 1$ donc converge vers 1et pour n impair $cosn\pi = -1$ doncconverge vers -1

Donc $cosx$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2. $f(x) = cos\frac{1}{x}, x_0 = 0$

$f(x) = cos\frac{1}{x}, x_0 = 0$

On considère la suite de terme général $\frac{1}{n\pi}$ quidiverge vers 0

$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = cos\frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = cosn\pi = (-1)^n$

Alors

n pair $cosn\pi = 1$ donc vers 1et pour n impair $cosn\pi = -1$ donc converge vers(-1)

Donc $cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 5

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{Ln|x|} & si\ x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & sinon \end{cases}$; 2. $f(x) = \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$;

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{Ln|x|} & si\ x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & sinon \end{cases}$

f est définie dans $\mathbb{R}$

Pour $x \notin \{-1,0,1\}$ c'est-à-dire pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

$f(x) = \frac{1}{Ln|x|}$ est continue car composées de fonctions continues.

En $x = -1$, $f(-1) = 0$

$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{Ln|x|} = +\infty$ donc f n'est pas continue en $x = -1$.

En $x = 0$, $f(0) = 0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{Ln|x|} = 0 = f(0)$ donc f est continue en $x = 0$.

En $x = 1$, $f(1) = 0$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{Ln|x|} = +\infty$ donc f n'est pas continue en $x = 1$.

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

f est définie dans $\mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, f$ est continue dans car composée de fonctions continues :

Pour $x = m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = \lfloor m \rfloor - \sqrt{m - \lfloor m \rfloor} = m - \sqrt{m - m} = m$

$\lim_{x\to m^-} \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = m - 1 \neq f(m)$ donc f n'est pas continue en m à gauche

$\lim_{x\to m^+} \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = m = f(m)$ donc f est pas continue en m à droite

f est continue en m si $m = m - 1$ ou $0 = -1$: impossible donc f n'est pas continue dans $\mathbb{Z}$. Donc f est continue dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$ et une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & si\ x \leq 1 \\ asin\frac{\pi}{2}x & si\ x > 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue ?

Pour $x \in]-\infty, 1[$: $f(x) = (ax)^2$ est continue dans $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale donc continue dans $]-\infty, 1[$

Pour $x \in]1, +\infty[$: $f(x) = asin\frac{\pi}{2}x$ est continue dans $\mathbb{R}$ car composée de fonctions continues dans $\mathbb{R}$ donc continue dans $]1, +\infty[$

En $x_0 = 1$, $f(1) = a^2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax)^2 = a^2 = f(1)$ donc f est continue en 1 à gauche.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} asin\frac{\pi}{2} = 1 = f(1) = a^2 \Leftrightarrow a = 1$

Donc f est continue en 1 à droite et si, et seuelement si, $a = 0$

Alors f est continue en 0 si, et seuelement si, $a = 0$

Finalement

si $a = 0$ alors f est continue dans $\mathbb{R}$

et si $a \neq 0$ alors f n'est continue dans $\mathbb{R}$

Exercice 7

La fonction f est elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = sinxsin\frac{1}{x}$; 2. $f(x) = cos\frac{1}{x}$; 3. $f(x) = sinx\ Ln|x+1|$

1. $f(x) = sinx\ sin\frac{1}{x}$

$f(x) = sinx\ sin\frac{1}{x}$ est définie dans $\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x \to 0} sinx\ sin\frac{1}{x} = 0$ donc f est prolongeable par continuité en $x = 0$

Et son prologement $\tilde{f}(x) = \begin{cases} sinx\ sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

$(\tilde{f}: on\ lit\ f\ tilde)$; $\sim: tilde$.

2. $f(x) = cos\frac{1}{x}$

f est défini dans $\mathbb{R}^*$.

$f(x) = cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en zéro (voir cours) donc n'est pas prolongeable par continuité en zéro.

Exercice 9

1) Montrer que le polynôme $x^5 + x^2 - 4x + 1$ admet au moins trois racines réelles.

2) Montrer que le polynôme $x^7 + x^5 + 4x - 8$ possède une seule racine réelle.

1) Montrer que le polynôme $x^5 + x^2 - 4x + 1$ admet au moins trois racines réelles.

$f(x) = x^5 + x^2 - 4x + 1$ est conitunue dans $\mathbb{R}$.

f est continue dans $]-\infty, 0]$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ et $f(0) = 1$ donc d'après le théorème des valeurs intérmédiare il existe c sur $c_1 \in]-\infty, 0[$ tel que $f(c_1) = 0$.

f est continue sur $[0,1]$; $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ donc d'après le théorème des valeurs intérmédiare il existe $c_2 \in]0,1[$ tel que $f(c_2) = 0$.

f est continue dans $]1, +\infty]$; $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intérmédiare il existe $c_3 \in]1, +\infty[$ tel que $f(c_3) = 0$.

On a

$$c_1 < 0 < c_2 < 1 < c_3$$

Donc le polybôme $x^5 + x^2 - 4x + 1$ possède au moins trois racices réelles.

2) Montrer que le polynôme $x^7 + x^5 + 4x - 8$ possède une seule racine réelle.

On considère $f(x) = x^7 + x^5 + 4x - 8$. f est continue dans $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$ c'est-à-dire que le polynôme

$x^7 + x^5 + 4x - 8$ possède au moins une racine réelle.

D'autre part, $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 4 > 0$ pour tout réel x alors c est unique donc le polynôme possède une seule racine réelle.

II- Dérivabilité

Exercice 2

Calculer les limites suivantes.

1\. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx-1}{sinx}$, $a \in \mathbb{R}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos\pi x}{x}$

1\. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx-1}{sinx}$, $a \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{cosx-cos0}{x-0}}{\frac{sinx-sin0}{x-0}}=\frac{cos\prime(0)}{sin\prime(0)}=0$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$;

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$; posons $f(x)=(1+x)^n-1$ est dérivable en 0 et $f'(0)=n$

f'(x)= $\mathrm{n}(1+x)^{n-1}$; et $f(0)=0$ alors on peut écrire

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{f(x)-f(0)}}{x-0}=f'(0)=n$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{cos\pi x}{x}$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{cos\pi x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{cos\pi x}{x}=-\infty$

Exercice 3

Etudier la dérivabilté des fonctions réelles de la variable réelle suivantes puis calculer leurs dérivées sur leurs domaines de dérivabilité.

1. $f_1(x)=x|x|$; 2. $f_2(x)=x^{\frac{3}{5}}$; 3. $f_3(x)=cos\sqrt{|x|}$; 4. $f_4(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x<0 \\ 0 & si\ x=0 \\ x\ ln(x)-x & si\ x>0 \end{cases}$.

1. $f_1(x)=x|x|$;

f_1 est définie dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}^*$: f_1 est dérivable car produit de fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^*$ et

Si $x>0,\ f_1(x)=x^2$ d'où $f_1'(x)=2x=2|x|$

et si $x<0,\ f_1(x)=-x^2$ d'où $f_1'(x)=-2x=|x|$;

Alors si $x\in\mathbb{R}^*$, $f_1'(x)=2|x|$

En $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Donc f_1 est dérivable en zéro et $f_1'(0)=0$

Finaleme,t, f_1 est dérivable dans $\mathbb{R}$. et $f_1'(x)=\begin{cases}2|x| \; si \; \neq 0\\ 0 \quad si\; x=0\end{cases}$

2. $f_2(x)=x^{\frac{3}{5}};\, x^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{x^3}$

f_2 est définie dans $\mathbb{R}$ est dérivable dans $\mathbb{R}^*$ (cours) et

$$f_2'(x)=\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\left(\sqrt[5]{x^2}\right)}$$

3. $f_3(x)=cos\sqrt{|x|}\,;$

f_3 est définie dans $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{R}^*$: f_3 est dérivable car composée de fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^*$ et

Si $x>0$ $\left(cos\sqrt{|x|}\right)'=\left(cos\sqrt{x}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{|x|}$

Si $x<0$ $\left(cos\sqrt{|x|}\right)'=\left(cos\sqrt{-x}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{-x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{|x|}$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\left(cos\sqrt{|x|}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{|x|}$.

En $x=0$: $f_3(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\sqrt{|x|}-1}{x}$$

Pour tout réel θon a

$cos2\theta=\cos(\theta+\theta)=cos^2\theta-sin^2\theta$ et $cos^2\theta+sin^2\theta=1$ d'où

$cos2\theta-1=cos^2\theta-sin^2\theta-(cos^2\theta+sin^2\theta)=-2sin^2\theta$ alors

$cos\sqrt{|x|}-1=cos2\frac{\sqrt{|x|}}{2}-1$ d'où $cos2\frac{\sqrt{|x|}}{2}-1=-2sin^2\frac{\sqrt{|x|}}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{cos2\frac{\sqrt{|x|}}{2}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{cos2\frac{\sqrt{x}}{2}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{2sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{2sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{X\to 0^+}\left(\frac{sinX}{X}\right)^2 = -\frac{1}{2} \text{ donc } cos\sqrt{|x|} \text{ est dérivable en zéro à droite.}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{cos\sqrt{|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{cos\sqrt{-x}-1}{x} = -\lim_{x\to 0^-} -\frac{2sin^2\frac{\sqrt{-x}}{2}}{-x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2sin^2\frac{\sqrt{-x}}{2}}{4\frac{\sqrt{-x}^2}{4}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\frac{sin^2\frac{\sqrt{-x}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{X\to 0^+}\left(\frac{sinY}{Y}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ donc } cos\sqrt{|x|} \text{ est dérivable en zéro à gauche.}$$

Les deux nombres dérivés sont différents alors $cos\sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en zéro.

Donc f_3 est dérivable dans $\mathbb{R}^*$ et $f_3'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\sqrt{|x|}$

4. $f_4(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x\ ln(x) - x & si\ x > 0 \end{cases}$

f_4 est définie dans $\mathbb{R}$

Pour $x < 0$: $f_4(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dérivable car composée de fonctions dérivables dans $]-\infty, 0[$ et

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Pour $x > 0$: $f_4(x) = xln(x) - x$ dérivable car composée de fonctions dérivables dans $]0, +\infty[$ et $(xln(x) - x\,)' = ln(x)$.

En $x = 0$, $f_4(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{xlnx-x}{x} = \lim_{x\to 0^+} lnx - 1 = -\infty$$

Donc f_4 n'est pas dérivable en zéro.

Alors f_3 est dérivable dans $\mathbb{R}^*$ et $f_3'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ ln(x) & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 4

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes

$f_1(x) = ln(3 + sin(x))$;

$f_2(x) = ln(\sqrt{1 + x^2})$;

$f_3(x) = Ln\frac{2+cos(x)}{2-cos(x)}$;

$f_4(x) = x^{x+1}$;

$f_5(x) = x^2 cos\frac{1}{x}$;

$f_6(x) = sin(e^x)^2$;

$f_7(x) = x^{\frac{sinx}{x}}$

$f_1(x) = ln(3 + sin(x))$

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $2 \leq 3 + \sin(x) \leq 4$ donc $3 + \sin(x) > 0$. Alors

f_1 est définie dans $\mathbb{R}$ et dérivable dans tout $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables.

et $f_1'(x) = \frac{(3+sin(x))'}{3+sin(x)} = \frac{cosx}{3+sin(x)}$

$f_2(x) = ln(\sqrt{1 + x^2})$;

f_2 est défini et dérivable dans tout $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1+x^2}}$

$\left(\sqrt{1 + x^2}\right)' = (1 + x^2)'\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ d'où

$$f_1'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}$$

$f_3(x) = ln\frac{2+cos(x)}{2-cos(x)}$;

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$ donc

$1 \leq 2+\cos(x) \leq 3$ et $1 \leq 2-\cos(x) \leq 3$ donc $\frac{2+cos(x)}{2-cos(x)} > 0$. Alors

f_3 est définie dans $\mathbb{R}$ et dérivable dans tout $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables et on peut écrire

$$f_3(x) = ln\big(2+cos(x)\big) - ln(2-cos(x))$$

$$f_3'(x) = \frac{\big(2+cos(x)\big)'}{2+cos(x)} - \frac{\big(2-cos(x)\big)'}{2-cos(x)} = \frac{-sinx}{2+\cos x} - \frac{sinx}{2-\cos(x)}$$

$$= \frac{-sinx(2-cos(x))}{(2+\cos x)(2-cos(x))} + \frac{-sinx((2+cos(x))}{(2-\cos(x))(2+cos(x))} = \frac{-4sinx}{4-cos^2(x)}$$

$f_4(x) = x^{x+1}$

$f_4(x) = e^{lnx^{x+1}} = e^{(x+1)lnx}$ est définie et dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$f_4'(x) = \big((x+1)lnx\big)'e^{(x+1)lnx} = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)e^{(x+1)lnx} = \frac{xlnx+x+1}{x}e^{(x+1)lnx}$$

$$f_4'(x) == \frac{xlnx+x+1}{x}x^{x+1}$$

$f_5(x) = x^2 cos\frac{1}{x}$

f_5 est définie dans $\mathbb{R}^*$ et dérivable dans $\mathbb{R}^*$, sa dérivée :

$$f_5'(x) = (x^2)'cos\frac{1}{x} + x^2\left(cos\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2xcos\frac{1}{x} + x^2\left(\frac{1}{x}\right)'(cos)'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2xcos\frac{1}{x} + x^2\left[-\frac{1}{x^2}\left(-sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$= 2xcos\frac{1}{x} + sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$f_6(x) = sin(e^x)^2$;

f_6 est définie dans $\mathbb{R}$ et dérivable dans $\mathbb{R}$ car coomposée de fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$.

$$f_6(x) = sin(e^{2x})$$

$$f_6'(x) = (sin(e^{2x}))' = (e^{2x})'\cos(e^{2x}) = 2e^{2x}cos(e^x)^2$$

$f_7(x) = x^{\frac{sinx}{x}}$

$f_7(x) = e^{lnx^{\frac{sinx}{x}}} = e^{\frac{sinx}{x}lnx}$ est définie dans $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$ car composée de fonctions dérivables et on a

$$f_7'(x) = \left(e^{\frac{sinx}{x}\mathrm{lnx}}\right)' = e^{(x+1)lnx} = \left(\frac{sinx}{x}lnx\right)' e^{\frac{sinx}{x}lnx} = \left[\left(\frac{sinx}{x}\right)' lnx + \frac{sinx}{x}(lnx)'\right] e^{\frac{sinx}{x}lnx}$$

$$= \left[\frac{x(sinx)' - sinx}{x^2} lnx + \frac{sinx}{x}\frac{1}{x}\right] e^{\frac{sinx}{x}lnx} = \left[\frac{xcosx - sinx}{x^2} lnx + \frac{sinx}{x^2}\right] e^{\frac{sinx}{x}lnx}$$

$$f_7'(x) = \left[\frac{[x(cosx) - sinx]lnx + sinx}{x^2}\right] x^{\frac{sinx}{x}}$$

Exercice 5

Soient a et b deux réels et $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinax}{x} & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ e^{bx-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b f est-elle continue dans $\mathbb{R}$.

2. Pour quelles valeurs de a et b f est-elle dérivable dans $\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b f est-elle continue dans $\mathbb{R}$.

f est définie dans $\mathbb{R}$.

En $x < 0$: $f(x) = \frac{sinax}{x}$ est continue car composée de fonctions continues.

En $x > 0$: $f(x) = e^{bx-x}$ est continue car composée de fonctions continues.

En $x = 0$: $f(0) = 1$

Si $a \neq 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a\frac{sinax}{ax} = a = f(0) = 1$: donc f est continue en zéro à gauche si $a = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{bx-x} = 1 = f(0) = 1$: donc f est continue en zéro à droite $\forall b \in \mathbb{R}$

Alors f est continue en zéro si $a = 1$ et $\forall b \in \mathbb{R}$

Si $a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{sinax}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{sin0\times x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 \neq f(0) = 1$; donc f n'est pas continue en zéro à gauche lorsque $a = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{bx-x} = 1 = f(0) = 1$: f est continue en zéro à droite $\forall b \in \mathbb{R}$

Alors f est continue en zéro si $a = 1$ et $\forall b \in \mathbb{R}$

Finalement, pour $a = 1$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, f est continue dans $\mathbb{R}$.

2. Pour quelles valeurs de a et b f est-elle dérivable dans $\mathbb{R}$.

En $x < 0$: $f(x) = \frac{sinax}{x}$ est dérivable car composée de fonctidérivables.

En $x > 0$: $f(x) = e^{bx-x}$ est dérivable car composée de fonctionsdérivables.

En $x = 0$: $f(0) = 1$

$a = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{sinx}{x}-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{sinx-x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(sinx-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{cosx-1}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(cosx-1)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-sinx}{2} = 0$$

Donc, pour $a = 1$, f est dérivable en zéro à gauche.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{bx-x}-1}{x} = (e^{bx-x})'(0) = ((b-1)e^{bx-x})(0) = b-1$$

donc f est dérivable en zéro à droite $\forall b \in \mathbb{R}$

Alors f est dérivable en zéro si $b - 1 = 0$ donc si $b = 1$

Finalement f est continue dans $\mathbb{R}$ si $a = 1$ et pour tout réel b

et dérivable dans $\mathbb{R}$ si $a = b = 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x + \frac{x\,ln(x)}{1-x} & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x\,ln(x)}{1-x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\,ln(x)}{1-x} = 0 = f(0)$$

donc f est continue en zéro à droite.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x + \frac{x\,ln(x)}{1-x}\right) = 1 - \lim_{x \to 1^-} \frac{x\,ln(x)}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x\,ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{ln(x)+1}{1} = 1 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(x + \frac{x\,ln(x)}{1-x}\right) = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 1 à gauche.

f est continue dans $[0,1]$ et dérivable dans $]0,1[$ et $f(0) = f(1)$ alors d'après le théorème de Rolle si il existe $c \in]a, b[$tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 8

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ ax^2 + bx + c & sinon \end{cases}$

1- Déterminer a, b et c dans $\mathbb{R}$ pour que f soit continue.

Exercice 9

On considère l'application $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$ est continue car composée de fonctions continues.

En $x = 0$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = 0 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en zéro.}$$

Donc f est continue dans $[-1,1]$.

2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ puis calculer sa dérivée puis résoudre dans $]-1,1[$, l'équation $f'(x) = 0$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$ est dérivable car composée de fonctions dérivables.

Sa dérivée en $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)' x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2} = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)x^2-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}\right)x^2-\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)x^2-\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)x^2-\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

En $x = 0$, $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Donc f est dérivable dans $]-1,1[$ et sa dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in]-1,1[, f'(x) \neq 0$ donc $f'(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $]-1,1[$.