Corrigé des exercices : Relations binaires

Exercice 1 Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est divisible par } 3.$$

1. $G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y\} = \{(0, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 0), (3, 3), (4, 2)\}$
2. $\mathcal{R}$ réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, x\mathcal{R}x$
   $\mathcal{R}$ non réflexive $\Leftrightarrow \exists x \in E$, non$(x\mathcal{R}x)$.
   On a $1 + 1 = 2$ qui n'est pas divisible pas 3, donc 1 n'est pas en relation avec 1, d'où $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
   Remarque : $(1, 1) \notin G_{\mathcal{R}}$.
3. a) $\mathcal{R}$ symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$.
   On a : $\forall x, y \in E$,

   $$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est divisible par } 3 \Leftrightarrow y + x \text{ est divisible par } 3 \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

   Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   Remarque : $\forall x, y \in E$, si $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$, alors $(y, x) \in G_{\mathcal{R}}$.
   b) $\mathcal{R}$ antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
   $\mathcal{R}$ non antisymétrique $\Leftrightarrow \exists x, y \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$ et $x \neq y$.
   On prend $x = 2$ et $y = 4$ et on a

   $$(2\mathcal{R}4 \text{ et } 4\mathcal{R}2) \text{ et } 2 \neq 4.$$

   Donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

4. $\mathcal{R}$ transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
   $\mathcal{R}$ non transitive $\Leftrightarrow \exists x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z)$ et non$(x\mathcal{R}z)$.
   On prend $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ et on a

   $$(1\mathcal{R}2 \text{ et } 2\mathcal{R}4),$$

   et 1 n'est pas en relation avec 4. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.
   Remarque : $(1, 2), (2, 4) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(1, 4) \notin G_{\mathcal{R}}$

Exercice 2

1. $E = \mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$
   a) Si on prend $x = 1$, 1 n'est pas en relation avec 1, puisque $1 \neq -1$.
   Donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
   b) $\mathcal{R}$ est symétrique puisque

   $$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x).$$

En effet,
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x=-y \Leftrightarrow y=-x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$
c) $\mathcal{R}$ n'est pas transitive puisque si on prend $x=1, y=-1, z=1$, on a
$$1\mathcal{R}(-1) \text{ et } (-1)\mathcal{R}1,$$
et 1 n'est pas en relation avec 1.
d) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car si on prend $x=1, y=-1$, on a
$$1\mathcal{R}(-1) \text{ et } (-1)\mathcal{R}1,$$
et $1 \neq -1$.
Conclusion : $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive donc $\mathcal{R}$ n'est ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence.

2. $E=\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow cos^2(x)+sin^2(y)=1$.
a) $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, $\forall x \in E, cos^2(x)+sin^2(x)=1$.
b) $\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, $\forall x, y \in E$,
$$x\mathcal{R}y \Rightarrow cos^2(x)+sin^2(y)=1.$$
Donc
$$cos^2(x)+sin^2(y)+cos^2(y)+sin^2(x)=1+cos^2(y)+sin^2(x),$$
d'où
$$2=1+cos^2(y)+sin^2(x).$$
Ce qui entraine que
$$cos^2(y)+sin^2(x)=1.$$
Par conséquent, on a $y\mathcal{R}x$.
c) $\mathcal{R}$ est transitive car $\forall x, y, z \in E$,
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow cos^2(x)+sin^2(y)=1$$
et
$$y\mathcal{R}z \Leftrightarrow cos^2(y)+sin^2(z)=1.$$
En sommant les deux égalités membre à membre, on a
$$cos^2(x)+(sin^2(y)+cos^2(y))+sin^2(z)=2,$$
et comme $sin^2(y)+cos^2(y)=1$, alors
$$cos^2(x)+sin^2(z)=1,$$
d'où $x\mathcal{R}z$.
d) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car si on prend $x=0$ et $y=\pi$ alors on a
$$(0\mathcal{R}\pi \text{ et } \pi\mathcal{R}0) \text{ et } 0 \neq \pi.$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique, donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence mais n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique.

3. $E = \mathbb{N}$, $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q$
a) $\mathcal{R}$ est réflexive car $\forall x \in E$, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p = q = 1$, tels que $x = 1.x^1$.
b) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique car si on prend $x = 2$ et $y = 4$, on a

$$2\mathcal{R}4 \text{ avec } (p = 2, q = 1) \text{ ou } (p = 1, q = 2),$$

mais 4 n'est pas en relation avec 2. En effet, supposons que $4\mathcal{R}2$, alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$: $2 = p4^q$, donc 4 divise 2, ce qui est faux. Par suite, 4 n'est pas en relation avec 2.
c) $\mathcal{R}$ est antisymétrique puisque $\forall x, y \in E$,

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^* : y = px^q \cdots (1)$$

et

$$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{N}^* : x = ry^s, \cdots (2)$$

donc en substituant y dans (2), on a

$$x = r(px^q)^s = rp^s x^{qs},$$

d'où

$$x(1 - rp^s x^{qs-1}) = 0.$$

Si $x = 0$, alors $y = 0$, ce qui entraine que $x = y$. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $rp^s x^{qs-1} = 1$, d'où $r = p^s = x^{qs-1} = 1$, donc $r = p = s = 1$ et d'après (2) $x = y$.
Autre méthode plus rapide : on remarque que

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x \leqslant y$$

et

$$y\mathcal{R}x \Rightarrow y \leqslant x,$$

alors

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x \Rightarrow x = y.$$

d) $\mathcal{R}$ est transitive car $\forall x, y, z \in E$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^* : y = px^q$$

et

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists r, s \in \mathbb{N}^* : z = ry^s.$$

On en déduit que

$$z = r(px^q)^s = (rp^s)x^{sq},$$

et donc $z = ux^v, u = rp^s \in \mathbb{N}^*$ et $v = sq \in \mathbb{N}^*$, d'où $x\mathcal{R}z$.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique, donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre mais pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique

Exercice 3 Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y.$$

1. a) Pour tout x réel, on a $x^3 - x^3 = x - x$, donc $x\mathcal{R}x$, $\mathcal{R}$ est donc réflexive.
   b) $\mathcal{R}$ est symétrique car $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
   $$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow y^3 - x^3 = y - x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$
   c) $\mathcal{R}$ est transitive car $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,
   $$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y \cdots (1)$$
   et
   $$y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y^3 - z^3 = y - z. \cdots (2)$$
   En sommant (1) et (2) membre à membre, on obtient,
   $$x^3 - z^3 = x - z,$$
   d'où $x\mathcal{R}z$.
   $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique, donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned}\overline{x} &= \{y \in \mathbb{R}, y\mathcal{R}x\} && (1)\\ &= \{y \in \mathbb{R}, y^3 - x^3 = y - x\} && (2)\\ &= \{y \in \mathbb{R}, (y-x)(y^2 + xy + x^2) = y - x\} && (3)\\ &= \{x\} \cup \{y \in \mathbb{R}, y \neq x, y^2 + xy + x^2 = 1\}. && (4)\end{aligned}$$
   Résolvons en y l'équation $y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$.
   On a $\Delta = -3x^2 + 4$.
   a) $\Delta > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}[$.
   L'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}$ et $x_2 = \frac{-x-\sqrt{-3x^2+4}}{2}$. Donc,
   $$\overline{x} = \{x, x_1, x_2\}.$$
   b) $\Delta < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$. L'équation n'admet pas de solutions, d'où
   $$\overline{x} = \{x\}.$$
   c) $\Delta = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ ou $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
   L'équation admet une solution double $x_1 = x_2 = -\frac{x}{2}$. Donc
   Si $x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$, alors $\overline{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = \{\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.
   Si $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, alors $\overline{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \{\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.
   $$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, x_1, x_2\}, x \in]\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}[\} \cup \{\{x\}, x \in]-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[\} \cup \{\overline{\frac{-2}{\sqrt{3}}}, \overline{\frac{2}{\sqrt{3}}}\}.$$
3. $\overline{\pi} = \{\pi\}$ car $\pi \in]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

Exercice 4 On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. a) $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, il existe $a = 1$ et $b = 1$ tels que $x = 1.x$ et $y = 1.y$.
b) $\mathcal{R}$ est symétrique car

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \text{ et } y' = by,$$

donc

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x = \frac{1}{a}x' \text{ et } y = \frac{1}{b}y'.$$

On pose $a' = \dfrac{1}{a}$ et $b' = \dfrac{1}{b}$, donc $\exists a' > 0, \exists b' > 0 : x = a'x'$ et $y = b'y'$, d'où $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$.
c) $\mathcal{R}$ est transitive puisque

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \text{ et } y' = by$$

et

$$(x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \Leftrightarrow \exists a' > 0, \exists b' > 0 : x'' = a'x' \text{ et } y'' = b'y'.$$

En substituant x' dans x'' et y' dans y'', on obtient

$$x'' = aa'x \text{ et } y'' = bb'y.$$

On pose $aa' = a''$ et $bb' = b''$. Donc $\exists a'' > 0, \exists b'' > 0 : x'' = a''x$ et $y'' = b''y$, d'où $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$.

2. a) $\overline{(1, 0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (1, 0)\mathcal{R}(x, y)\}$
$(1, 0)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x = a.1 \text{ et } y = b.0$. Donc

$$\overline{(1, 0)} = \{(a, 0), a > 0\} =]0, +\infty[\times\{0\}$$

b) $\overline{(0, -1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (0, -1)\mathcal{R}(x, y)\}$
$(0, -1)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x = a.0 \text{ et } y = b.(-1)$. Donc

$$\overline{(0, -1)} = \{(0, -b), b > 0\} = \{0\}\times] - \infty, 0[$$

c) $\overline{(1, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (1, 1)\mathcal{R}(x, y)\}$
$(1, 1)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x = a.1 \text{ et } y = b.1$. Donc

$$\overline{(1, 1)} = \{(a, b), a > 0, b > 0\} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

3. Pour couvrir complètement $\mathbb{R}^2$, la question précédente suggère de rajouter les classes $\overline{(-1, 0)}$, $\overline{(-1, -1)}$, $\overline{(0, 0)}$, $\overline{(0, 1)}$, $\overline{(-1, 1)}$ et $\overline{(1, -1)}$. Il y a exactement 9 classes d'équivalence qui forment une partition de $\mathbb{R}^2$.