V) Etude du mouvement dans un système de coordonnées

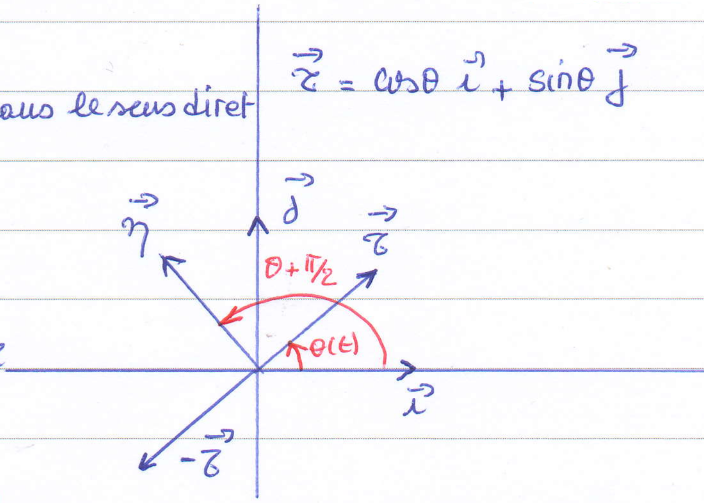
V.1) Dérivée d'un vecteur unitaire

$\|\vec{\tau}\| = 1$

$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{\eta}$ avec $\begin{cases} \|\vec{\eta}\| = 1 \\ \vec{\eta} \perp \text{à } \vec{\tau} \text{ dans le sens direct} \end{cases}$

$\vec{\tau} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$

$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{\tau}$



$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse angulaire

V.2) Systèmes de coordonnées

V.2.1) Repère cartésien : Coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est fixe.

Vecteur position : $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Vecteur déplacement : $d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$= \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$= \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

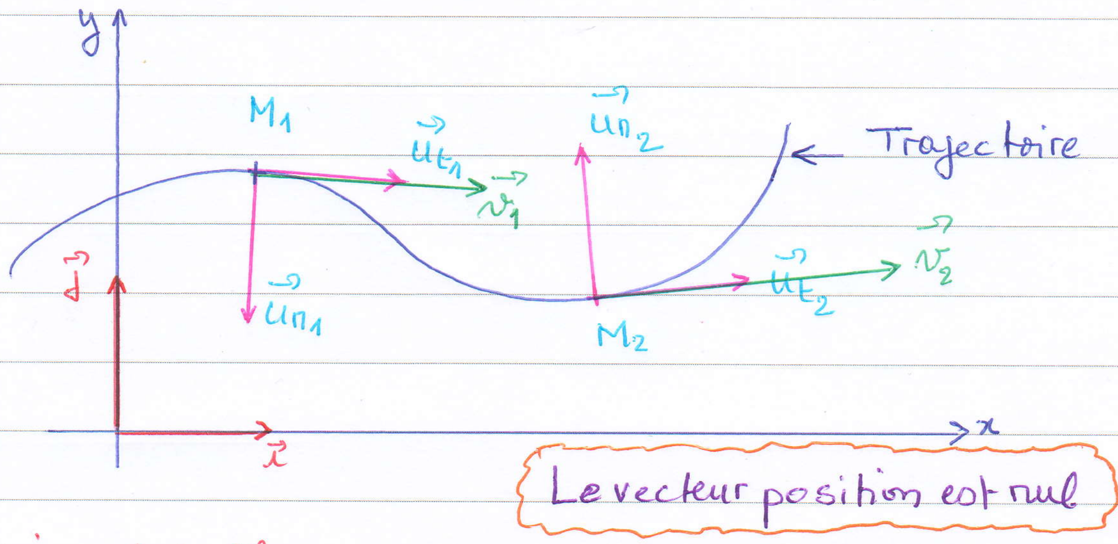
$$= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

II.2.2) Repère de Frenet

Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M.

Le repère de Frenet $(M, \vec{u_t}, \vec{u_n})$ est défini comme suit :

* son origine est la position du mobile M
* $\vec{u_t}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dans le même sens du mouvement : $\vec{u_t} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
* $\vec{u_n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u_t}$ et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire.



Abscisse curviligne :

On définit l'abscisse curviligne $s(t)$ comme étant la distance parcourue par le mobile à partir d'une position $s_0(t_0)$ prise comme référence.

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\,\vec{u_t} + 0\,\vec{u_n} = \frac{ds}{dt}\vec{u_t} = \dot{s}\,\vec{u_t} \quad \left(\|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\right)$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\|\vec{v}\|\,\vec{u_t}\right) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u_t} + \|\vec{v}\|\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|\vec{u_n} = \frac{\|\vec{v}\|}{\rho}\vec{u_n} \quad \left(\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \frac{\|\vec{v}\|}{\rho}\right)$$

ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de Rayon R, $\rho = R$.

$$\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_t + \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho}\vec{u}_n = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

* $a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S}$ est appelée accélération tangentielle du mouvement. Elle décrit la nature du mouvement:

$a_t = 0 \Rightarrow$ Mouvement uniforme

$a_t > 0 \Rightarrow$ " accéléré

$a_t < 0 \Rightarrow$ " décéléré

* $a_n = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{\dot{S}^2}{\rho}$ est appelée accélération normale du mouvement. Elle décrit la courbure de la trajectoire

$a_n = 0 \ (\rho \to \infty) \Rightarrow$ Mvt rectiligne

$a_n \neq 0 \Rightarrow$ Mouvement curviligne.

Distance parcourue par un mobile :

$$\|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \|\vec{v}\|\,dt$$

La distance parcourue par un mobile entre les instants t_0 et t_1 est donnée par :

$$d_{t_0}^{t_1} = \int_{S_0(t_0)}^{S_1(t_1)} ds = S_1(t_1) - S_0(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\|\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{1/2} dt$$