Série TD n°2
Les fonctions primitives récursives

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes, sont PR :

1/ La soustraction positive ou nulle "$Moins$" définie par :

$$moins = \lambda xy.\begin{cases} x - y & si\ x \geq y \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2/ Le minimum défini par :

$$min = \lambda xy.\,\text{minimum}(x, y)$$

Exercice 2

1/ En utilisant la rège de composition, Montrer que les deux fonctions suivantes sont PR :

a/ $Abs = \lambda xy.\,|\mathrm{x} - \mathrm{y}|$

b/ $max = \lambda xy.\,\text{maximum}(x, y)$

2/ Montrer, en utilisant le raisonnement par récurrence, que la fonction « maximum » appliquée à n arguments est primitive récursive.

Exercice 3

Montrer que les deux fonctions suivantes sont PR :

a/ Le reste de la division entière d'un nombre par 2, notée "$r2$". $r2 = \lambda x.\,x\ mod\ 2$

b/ Le quotient de la division entière d'un nombre par 2 notée "$q2$" $q2 = \lambda x.\,x\ div\ 2$

Exercice 4

En supposant que la fonction "$quot$", qui désigne le quotient de la division entière de $deux$ entiers est PR, montrer que la fonction "$rest$", qui désigne le reste de la division entière de deux nombres entiers est PR : $rest = \lambda xy.\,x\ mod\ y$

Exercice 5. Décidabilité des ensembles

1/ Montrer que les deux ensembles suivants sont PR

a/ E1 : ensemble des entiers pairs

b/ E2 : ensemble des entiers impairs

2/ Rappelons que si un ensemble A est récursif alors l'ensemble A est décidable. Et que un ensemble PR est un ensemble récursif.

Soient R et S deux sous ensembles récursifs de N. Montrer que les ensembles suivant sont décidables. **a/** $R \cap S$

b/ $R \cup S$

Exercice 6. Relations PR

1/ Montrer que les relations suivantes sont PR

a/ L'égalité binaire

b/ L'inégalité binaire $R_{\leq}$

2/ Soient R1 et R2 deux relations binaires primitives récursives. Montrer que les relations suivantes sont PR

a/ $R1 \wedge R2$ (Avec $\wedge$ est le ET logique)

b/ $\neg R1$ (Avec $\neg$ est la négation logique)