Chapitre 2 :

Algèbre de Boole

Algèbre de Boole

Introduction

L'ordinateur est constitué de circuits logiques

L'élément de base de ces circuits est le transistor, on a deux états 0 et 1

0 =Bloqué 1 = Conducteur

Les variables d'entrée sont celles sur lesquelles on peut agir directement.
Ce sont des variables logiques indépendantes.

La variable de sortie est celle qui contient l'état de la fonction après l'évaluation des opérateurs logiques sur les variables d'entrée.

Pour réaliser ces circuits et déterminer les variables d'entrée et les variables de sortie on utilisera

l'Algèbre de Boole

Al

Terminologie

- Somme **(OR)** s = a **+** b ou bien s = a **or** b
- Produit **(AND)** s = a * b ou bien s = a **and** b
- A ceci s’ajoute une application unaire :
- Complémentation **(NOT)** $\bar{s}$ ou bien **not**(s)

Algèbre de Boole

Terminologie

- Somme **(OR)** s = a **+** b ou bien s = a **or** b
- Produit **(AND)** s = a ***** b ou bien s = a **and** b ou s = a.b
- A ceci s'ajoute une application unaire :
- Complémentation **(NOT)** $\bar{s}$ ou bien **not**(s)

s = a . b

a	b	a . b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

s = a + b

A	B	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$s = \bar{a}$

A	$\bar{a}$
0	1
1	0

Al

Remarque :

On peut utiliser la terminologie française :

ET pour **AND**

OU pour **OR**

NON pour **NOT**

$s = a . b$

a	b	a . b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$s = a + b$

A	B	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$s = \bar{a}$

A	$\bar{a}$
0	1
1	0

Algèbre de Boole

Théorèmes et postulats de l’algèbre de Boole

Une Algèbre de Boole est constituée d’un ensemble E = {0,1} et de deux lois de composition internes (AND) et (OR) :

Propriétés de l’Algèbre de Boole

1- Commutativité

$$a + b = b + a$$

$$a \, . \, b = b \, . \, a$$

2- Associativité

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \, . \, (b \, . \, c) = (a \, . \, b) \, . \, c$$

Algèbre de Boole

Propriétés de l'Algèbre de Boole

3- Distributivité

$a \, . \, (b + c) = a. \, b + a \, .c$

$a + (b \, . \, c) = (a + b).(\, a + c \,)$

4- Eléments neutre

$a + 0 = a$

$a \, . \, 1 = a$

5- Eléments symétrique

$a + \bar{a} = 1$

$a \, . \, \bar{a} = 0$

Algèbre de Boole

Propriétés déduites

1- Idempotence

a + a = a

a . a = a

2- Élément absorbant

a + 1 = 1

a . 0 = 0

3- Expressions usuelles simplifiées

a + a . b = a

a . (a + b) = a

a + $\bar{a}$ b = a + b

Algèbre de Boole

Les opérateurs NAND et **NOR tables de vérité**

$s = \overline{a \, . \, b}$

a	b	$\overline{a \, . \, b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$s = \overline{a + b}$

a	b	$\overline{a + b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Algèbre de Boole

Le OR exclusif (XOR) et son complément

$s = a \oplus b$

$s = 1 \text{ si } a \neq b$

$s = 0 \text{ si } a = b$

$a \oplus b = \bar{a} \, . \, b + a \, . \, \bar{b}$

$\overline{a \oplus b} = \bar{a} \, . \, \bar{b} + a \, . \, b$

table de vérité

a	b	$a \oplus b$	$\overline{a \oplus b}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Algèbre de Boole

Expressions booléennes

Fonctions logiques et formes normales

On appelle **min terme** de n variables, l'un des produits de ces n variables ou de leurs complémentaires.

Exemple : $a\,\bar{b}\,c$, $\bar{a}\,b\,\bar{c}$ et $a\,b\,c$

sont des min termes d'une fonction de 3 variables a, b, et c

Abc /abc a/bc ab/c /a/bc....

Algèbre de Boole

Expressions booléennes

Fonctions logiques et formes normales

On appelle **max terme** de n variables, l’une des sommes de ces n variables ou de leurs complémentaires.

Exemple : $(a+\bar{b}+c)$, $(\bar{a}+b+\bar{c})$ et $(a+b+c)$

sont des max termes d’une fonction de 3 variables a, b, et c

Algèbre de Boole

Première forme normale ou forme disjonctive

Une fonction est sous **forme disjonctive** si elle est représentée par une somme de min termes (somme de produits)

Exemple :

$$F(a, b, c) = a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,\overline{c} + a\,b\,c$$

Deuxième forme normale ou forme conjonctive

Une fonction est sous **forme conjonctive** si elle est représentée par un produit de max termes (produit de sommes)

Exemple :

$$F(a, b, c) = (a + \overline{b} + c)\ (\overline{a} + b + \overline{c})\ (a + b + c)$$

Remarque :

On peut passer d'une forme à l'autre en utilisant la distributivité

Algèbre de Boole

Lois de Morgan (A vérifier à l'aide d'une table de vérité)

$$\overline{a + b} = \bar{a} \, . \, \bar{b}$$

$$\overline{a \, . \, b} = \bar{a} + \bar{b}$$

a	b	/a	/b	a+b	a.b	/(a+b)	/(a.b)	/a./b	/a+/b
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0

Algèbre de Boole

Complément d'une fonction

∀F une fonction booléenne ∃ G tel que G = /F

Pour calculer /F il faut utiliser les Lois de Morgan

Exemple : $F(a, b, c) = a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,\overline{c} + a\,b\,c$

$$\overline{F}(a, b, c) = \overline{a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,\overline{c} + a\,b\,c}$$

$$\overline{F}(a, b, c) = \overline{a\,\overline{b}\,c} * \overline{\overline{a}\,b\,\overline{c}} * \overline{a\,b\,c}$$

$$\overline{F}(a, b, c) = (\overline{a} + b + \overline{c})\ (a + \overline{b} + c)\ (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$$

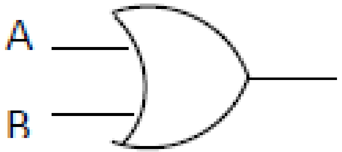
On remarque que pour trouver /F il suffit d'inverser chaque variable et chaque opérateur

Circuits logiques

Un circuit logique est un ensemble de portes logiques reliées entre elles correspondant à une expression algébrique

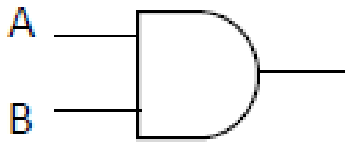
Portes logiques (correspondant à un opérateur logique) :

Porte Or



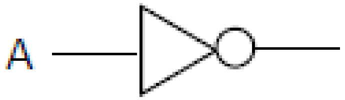
$Y = A + B$

Porte And



$Y = A . B$

Porte Not



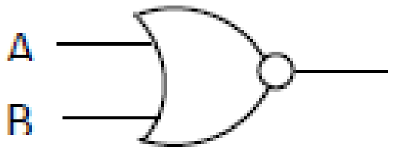
$Y = \overline{A}$

Algèbre de Boole

Circuits logiques

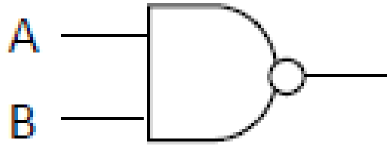
Portes dérivées :

Porte Nor



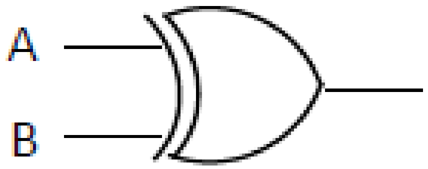
$Y = \overline{A + B}$

Porte Nand



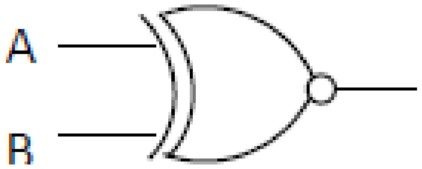
$Y = \overline{A \, . \, B}$

Porte Xor



$Y = A \oplus B$

Porte NXOR



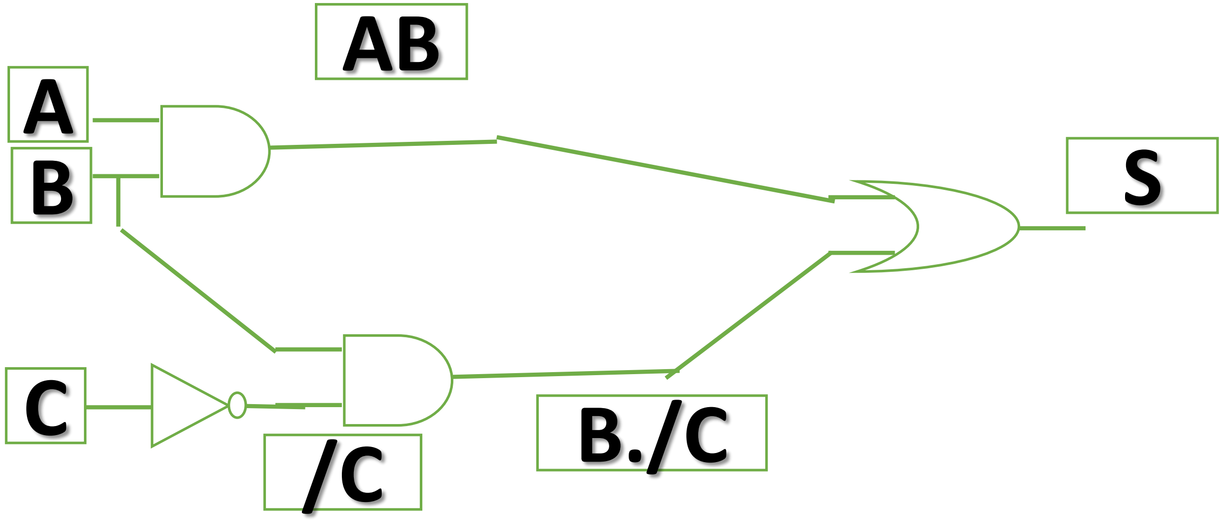
$Y = \overline{A \oplus B}$

Algèbre de Boole

Circuits logiques

Circuit logique correspondant à l'expression algébrique :

S = A B + B./C



Algèbre de Boole

Table de vérité d'une fonction

La Table de Vérité d'une fonction consiste à retrouver les valeurs de celle-ci pour chaque combinaison de variables.

Table de vérité d'une fonction

Soit la fonction :

$F(A, B, C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B$

$F(A, B, C) =$ 1 si un de ses termes est égal à 1

$\overline{A}\,B\,C = 1$ si $A = 0$ $B = 1$ et $C = 1$ $F(0\,1\,1) = 1$

$A\,\overline{B}\,\overline{C} = 1$ si $A = 1$ $B = 0$ et $C = 0$ $F(1\,0\,0) = 1$

$A\,B = 1$ si $A = 1$ et $B = 1$ $F(1\,1\,0) = 1$ et $F(1\,1\,1) = 1$

Algèbre de Boole /F = /A/B/C + /A/BC +/AB/C + A/BC

La Table de Vérité de F est :

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Pour tirer l'expression d'une fonction à partir d'une Table de Vérité on fait la somme des min termes où F = 1

$F(A, B, C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

$F(A, B, C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B$

$\overline{F}(A, B, C)$ est obtenu en faisant la somme des min termes où F = 0

$\overline{F}(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

$\overline{F}(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

Algèbr

On retrouve la <u>forme conjonctive</u> de cette fonction à partir de $\overline{F}$. $F(A, B, C) = \overline{\overline{F}}(A, B, C$

$F(A, B, C) = (A + B)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$

La Table

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Pour tirer l'expression d'une fonction à partir d'une Table de Vérité on fait la somme des min termes où F = 1

$F(A, B, C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

$F(A, B, C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B$

$\overline{F}(A, B, C)$ est obtenu en faisant la somme des min termes où F = 0

$\overline{F}(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

$\overline{F}(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$

Simplification des fonctions booléennes

1- Simplification algébrique

Pour simplifier algébriquement une fonction booléenne, on utilise les propriétés de l'algèbre de Boole : idempotence, absorption, distributivité, mise en facteur …etc

Algèbre de Boole

Exemple :

$$F(a,b,c) = \bar{a}\, b\, c + a\, \bar{b}\, \bar{c} + a\, b\, c + \bar{a}\, b\, \bar{c} + a\, \bar{b}\, c + a\, b\, \bar{c}$$

$$F(a,b,c) = b\, c\, (\bar{a} + a) + b\, \bar{c}\, (\bar{a} + a) + a\, \bar{b}\, (\bar{c} + c)$$

$$F(a,b,c) = b\, c + b\, \bar{c} + a\, \bar{b}$$

$$F(a,b,c) = b\, (c + \bar{c}) + a\, \bar{b}$$

$$F(a,b,c) = b + a\, \bar{b} \qquad (b + a)(b + \bar{b})$$

$$F(a,b,c) = b + a$$

Algèbre de Boole

2- Simplification par le tableau de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh est une table de vérité à 2 dimensions.

La numérotation des lignes et des colonnes se fait selon **le code de Gray,**
On passe d'une ligne à la suivante **en changeant un seul bit** et d'une colonne à la suivante **en changeant un seul bit** également.

Algèbre de Boole

Simplification par le tableau de Karnaugh

$$F\,(A\,B\,C\,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$$

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Algèbre de Boole

Simplification par le tableau de Karnaugh

$$F(A\,B\,C\,D) = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D} + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$$

Chaque case représente une combinaison.

Si on prend une case dans un tableau de Karnaugh, toutes les cases qui lui sont adjacentes n'auront qu'un seul bit qui change donc une seule variable change

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Algèbre de Boole

Simplification par le tableau de Karnaugh

$$F(A\,B\,C\,D) = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D} + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$$

Cha

Si c

Kar ntes

n'au

dor

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Algèbre de Boole

ab cd ,	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	1
11	1	1	0	0
	1	1	0	0

d) = /a/c d + /ac/d+ /b/c d

Algèbre de Boole

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

c,d) = cd + /c/d+ ab + ac

Pour la forme conjonctive (produit de sommes) on travaille avec les zéro.

Algèbre de Boole

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0

$$\overline{F}(a,b,c,d) = \bar{c}\bar{d} + ab + cd + ac$$

$$F = \overline{\overline{F}}(a,b,c,d) = \overline{\bar{c}\bar{d} + ab + cd + ac}$$

$$\overline{\overline{F}}(a,b,c,d) = F = (c+d)(\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c})$$

Fonction incomplète

On dit qu'une fonction est incomplète si elle n'est pas définie en tous ses points.

Dans ce cas les points où elle n'est pas définie prendront la valeur X.

Lors de la simplification de la fonction par le tableau de Karnaugh, si une case contenant X est adjacente à une case contenant 1, on pourra donner la valeur 1 à ce X de façon à simplifier la fonction.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Fonction incomplète

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X	1
11	0	0	X	X
10	1	1	x	x

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Fonction incomplète

ab cd ,	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	1	1	X=1	1
11	0	0	X	X
10	1	1	X=1	X=1

F(a,b,c,d) = \cd + c\d

Fonction incomplète

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	X	0
01	1	X	0	1
11	1	0	X	1
10	0	0	1	X

F(a,b,c,d) = ac + \bd + b\c\d

Fonction incomplète

Une serrure de sécurité s’ouvre en fonction de quatre clés A, B, C et D.

Le fonctionnement de la serrure est définie comme suit :

- S (A B C D) = 1 si au moins deux clés sont utilisées

- S(A B C D)= 0 sinon

- Les clés A et D ne peuvent pas être utilisées en même temps.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

Fonction incomplète

Un
qu

Le
co

S (
uti

S(A
pa

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	X	X
11	1	1	x	x
10	0	1	1	1

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

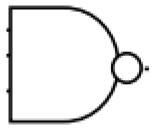
cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	X	X
11	1	1	X	X
10	0	1	1	1

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	1
			1	X

F(a,b,c,d) = cd + bd+ bc+ ab+ ac

Algèbre de Boole

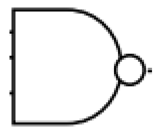
Utilisation des portes NAND



Pour réaliser le circuit d’une fonction à l’aide de portes NAND il faut que la fonction soit sous forme disjonctive, il suffit alors de la complémenter 2 fois et d’utiliser les lois de Morgan.

$$F(ABC) = A\,B\,C + A\,\overline{B} + B\,\overline{C}$$

Utilisation des portes NAND



Pour réaliser le circuit d’une fonction à l’aide de portes NAND il faut que la fonction soit sous forme disjonctive, il suffit alors de la complémenter 2 fois et d’utiliser les lois de Morgan.

$$F(ABC) = A\,B\,C + A\,\overline{B} + B\,\overline{C}$$

$$F(ABC) = \overline{\overline{A\,B\,C + A\,\overline{B} + B\,\overline{C}}} \quad = \quad \overline{\overline{A\,B\,C}\;.\;\overline{A\,\overline{B}}\;.\;\overline{B\,\overline{C}}}$$

Algèbre de Boole

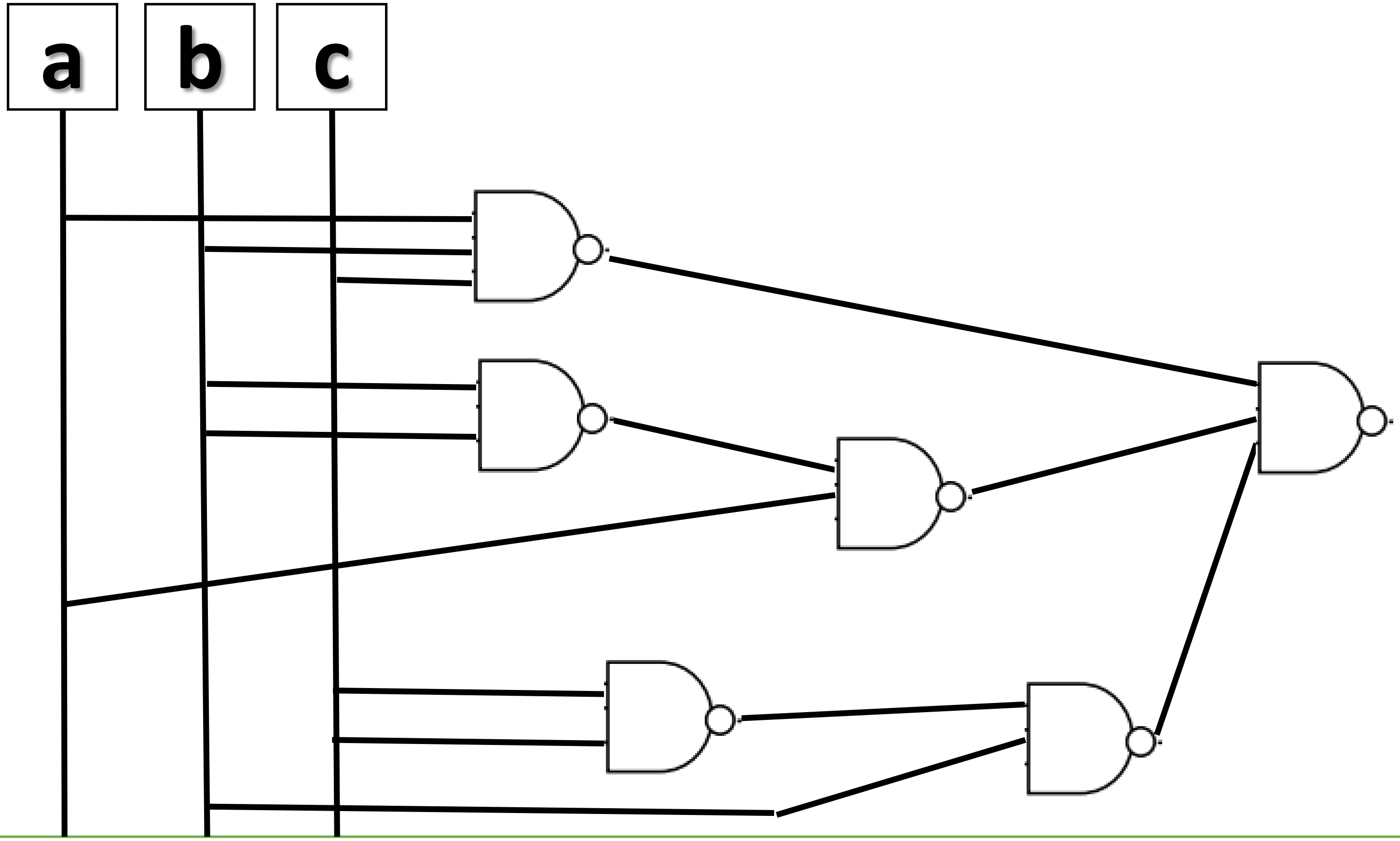
Utilisation des portes NAND

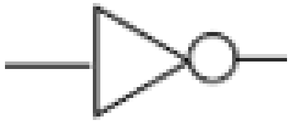
/B = /(BB) = /(B+B)

B*B = B

$$F(ABC) = A\,B\,C + A\,\overline{B} + B\,\overline{C}$$

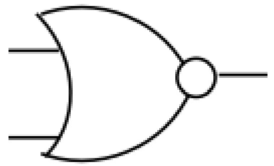
$$F(ABC) = A\,B\,C + A\,\overline{B} + B\,\overline{C} = \overline{\overline{A\,B\,C}\,.\,\overline{A\,\overline{B}}\,.\,\overline{B\,\overline{C}}}$$





Algèbre de Boole

Utilisation des portes NOR



Pour réaliser le circuit d’une fonction à l’aide de portes NOR il faut la fonction soit sous forme **conjonctive**, il suffit alors de la **complémenter 2 fois** et d’utiliser les lois de Morgan.

$$G(ABC) = (A + B)(A + \overline{C})$$

$$G(ABC) = \overline{\overline{(A + B)(A + \overline{C})}} = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(A + \overline{C})}}$$

Algèbre de Boole

Utilisation des portes NOR

$$G(ABC) = (A + B)(A + \overline{C})$$

$$G(ABC) = \overline{\overline{(A + B)(A + \overline{C})}} = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(A + \overline{C})}}$$