Polycopié d'algèbre 2

A. DJOUMAKH

10 juin 2021

Table des matières

1 Calcul matriciel **3**

1.1 Calcul matriciel I 3

1.1.1 Definition-Exemples 3

1.1.2 Égalité des Mtrices 4

1.1.3 Transposée d'une matrice 4

1.1.4 Matrices particulières 4

1.2 Opérations sur les matrices 6

1.2.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire 6

1.2.2 Somme de deux matrices de même taille 7

1.2.3 Produit de deux matrices 7

1.3 Puissance d'une matrice carrée 10

1.4 Inverse d'une matrice 12

1.4.1 Matrices équivalentes 13

1.4.2 Matrices échlonnées 15

1.4.3 Définition et calcul du rang d'une matrice 16

1.4.4 Calcul de l'inverse d'une matrice 18

2 Déterminants **21**

2.1 Déterminants d'ordre 2 et 3 21

2.1.1 Définition des mineurs et cofacteurs 23

2.1.2 Déterminants d'ordre quelconque 24

2.1.3 Propriétés des déterminants 25

2.1.4 Calcul des matrices inverses par les déterminants . . . 26

3 Systèmes linéaires d'équations linéaires **34**

3.1 Définitions. Généralités 34

3.1.1 Systèmes de Cramer 35

3.1.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse 37

3.1.3 Résolution par la méthode de Gauss 39

3.1.4 Nombre de solutions 42

3.1.5 Exercices 45

4 Espaces vectoriels **50**
4.1 Espaces vectoriels 50
4.2 Familles de vecteurs 53
4.2.1 Combinaisons linéaires 53
4.2.2 Familles génératrices 54
4.2.3 Familles libres 54
4.2.4 Bases d'un espace vectoriel 55
4.3 Notion d'Application Linéaire 56
4.3.1 matrices et application lineaire 59

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Calcul matriciel I

1.1.1 Definition-Exemples

Définition 1. *Soit n et p deux entiers naturels non nuls.*
Une ***matrice*** *$n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ou \quad A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.

Notation

- On note par $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq m}$ ou tout simplement $A = (a_{ij})_{n\times m}$.
- a_{ij} sont les coefficients de la matrice A, ce sont des nombres réels ou complexes.
- Pour tout coefficient a_{ij}, i est l'indice des lignes et j l'indice des colonnes.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de type $n\times m$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$,($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

Exemple 2. **i** *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.*

ii *a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la $2^{ième}$ ligne et de la $3^{ième}$ colonne, il vaut 5.*

1.1.2 Égalité des Mtrices

Deux Matrices $A = (a_{ij})_{n\times p}$ et $B = (b_{ij})_{n\times p}$ sont égales si :

1. Elles ont le même nombre de lignes.
2. Elles ont le même nombre de colonnes.
3. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et pour tout $j \in \{1, ..., p\}$ on a $a_{ij} = b_{ij}$, c'est à dire les coefficients des deux matrices sont égaux.

Proposition 3. *Les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $n \times p$ sont* ***égales*** *ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.*

1.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 4. *on appelle transposée de $A = (a_{ij})$ la matrice ${}^tA = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par*

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple 5.

— *La matrice ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est la transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 21 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & \pi \end{pmatrix}$.*

— *La matrice ${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 6 \\ -1 & \frac{1}{5} & -3 \end{pmatrix}$ est la transposée de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{5} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.*

Remarque 6.

1. *La transposée d'une matrice carrée est une matrice de même type.*
2. *Si A est une matrice carrée, les termes diagonaux de A et de ${}^tA$ sont les mêmes.*
3. *Intuitivement on voit que pour obtenir ${}^tA$ à partir de A , on fait une symétrie par rapport à la diagonale principale.*

1.1.4 Matrices particulières

Définition 7. *Soit A une matrice $n \times p$.*

— *Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** :* $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

— *Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** :* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$

Définition 8. — *Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— *La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.*

Exemple 9. — *La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.*

— *La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.*

Exemple 10. — *La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'orde 3.*

— *La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.*

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, A est appelée matrice **triangulaire supérieure** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, A est appelée matrice **triangulaire inférieure** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

— Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice unité** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 11. — *Matrice triangulaire supérieure :* $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

— *Matrice triangulaire inférieure :* $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exemple 12. — *Matrice diagonale :* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Proposition 13 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)**.** *Si $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tous i, j.*

$=$

Exemple 14. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, *alors* $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

1.2.2 Somme de deux matrices de même taille

Proposition 15 (Somme de deux matrices de même taille). *Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.*

Exemple 16. *Somme de deux matrices* 2×3 *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2.3 Produit de deux matrices

Proposition 17 (Produit de deux matrices). *Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.*

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit A une matrice ligne de type $(1, m)$ et B une matrice colonne de type $(m, 1)$, alors le produit

$$A \times B = C$$

est une matrice de type $(1, 1)$ constituée par un seul coefficient c_{11} et donnée par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1} \\ &= c_{11} \end{aligned}$$

Exemple 18. *Calculer*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \times 1 + 1 \times 2 + -3 \times 4 = (10).$$

Exemple 19. *calculer* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Présentation du calcul :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & c_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

on a donc $c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 1 \times 3 = 2$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

on a donc $c_{23} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 1 = 4$.

On obtient donc : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque 20. — *Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*
- — *Le produit matriciel **n'est pas commutatif**.*
- — *Soient A, B et C trois matrices, Si $AB = AC$, On ne peut pas simplifier par pour en éduire que $B = C$.*
- — *Si $A \times B = 0_{n\times m}$, on ne peut pas en déduire que soit $A = 0_{n\times m}$ ou bien $B = 0_{n\times m}$.*

Exemple 21. *Pouvez vous calculer* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *?*

Conclure ?

Exemple 22. *Calcuer* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Et $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Mais $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ On remarque que $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 23. *Calculer* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 24. *Soient A, B et C trois matrices dont les produits ci-dessous existent, on a :*
- — *Associativité :*

$$\boxed{(A \times B) \times C = A \times (B \times C).}$$

- — *Distributivité par rapport à l'addition :*

$$\boxed{(A + B) \times C = A \times C + B \times C.}$$

$$\boxed{A \times (B + C) = A \times B + A \times C.}$$

Proposition 25. — $\boxed{(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B).}$

— *Si A est de type (n,m) alors* $\boxed{A \times I_n = A}$ *et* $\boxed{I_n \times A = A.}$

Remarque 26. *On note en général, le produit de deux matrices par*

$$\boxed{A \times B = AB}$$

1.3 Puissance d'une matrice carrée

Puissance d'une matrice

Définition 27. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. La puissance $n-$ième de la matrice A est définie par : $A^0 = I_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \quad fois}$$

Remarque 28. $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \quad fois}$

Attention : $A^n \neq (a_{ij}^n)_{1 \leq i,j \leq p}$

Exemple 29. *Exprimer A^n en fonction de n, où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Pour $n = 2$, On a

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 = A^2 \times A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}*$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$

L'égalité est vraie pour $n = 1$, Et $A^{n+1} = A^n \times A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n+1) & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la récurrence.

Proposition 30. *Soient A, B deux matrices carrée de même ordre, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $A^{k+l} = A^k A^l$.
2. $(AB)^k \neq A^k B^k$.
3. $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(AB)$.

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient A et B deux matrices qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$ Alors*

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{k}{n} A^i B^{n-i},$$

Où $\binom{k}{n} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Remarque 31. *Le calcul de la puissance d'une matrice diagonale est simple à obtenir.*

Exemple 32. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

Vous pouvez par exemple prendre una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Calculer D^2 etD^3.

$D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

Et $D^3 == \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$ **Exercice :** Trouver D^n

1.4 Inverse d'une matrice

Matrices inverses

Définition 33. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que*

$$A \times B = B \times A = I_n;$$

alors on dit que la matrice A est inversible. La matrice B est notée A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A .

Exemple 34. *On considère les matrices suivantes* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a. *Calculer les matrices $B - 2A$ et $A(B - 2A)$.*
b. *En déduire que A est inversible puis calculer A^{-1}.*
c. *En déduire que C est inversible puis calculer C^{-1}.*

Corrigé

a. $B - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A(B - 2A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $A(B - 2A) = 3I_3$
$\Rightarrow \frac{1}{3}A(B - 2A) = I_3$ donc $A\left(\frac{1}{3}(B - 2A)\right) = I_3$ D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(B - 2A)$$

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

c. On remarque que $C = -\frac{1}{2}A$ ou bien $A = -2C$.
Donc $C^{-1} = \left(-\frac{1}{2}A\right)^{-1} = (-\frac{1}{2})^{-1}A^{-1}$. D'où $C^{-1} = -2A^{-1}$

$$C^{-1} = -2\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \\ -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

Théorème 2. *Soient A et B deux matrices carrées de même ordre inversibles. Alors, la matrice produit AB est inversible et on a*
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Exemple 35. *Soit M une matrice carrée vériffiant la relation $M^4 + 3M^3 - 5M + 2I_n = 0_n$. Montrer que M est inversible, et exprimer M^{-1} en fonction de M et de ces puissances.*

Corrigé

La relation $M^4+3M^3-5M+2I = 0_n$ est équivalente à $-M^4-3M^3+5M = 2I_n$. En mettant en facteur M dans la relation (1), on obtient $M(-M^3 - 3M^2 + 5I_n) = 2I_n \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}(-M^3 - 3M^2 + 5I_n)\right) = I_n$

Par définition de la matrice inverse, on déduit que

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(-M^3 - 3M^2 + 5I_n)$$

1.4.1 Matrices équivalentes

Définition 36. *Si A et B sont deux matrices de même dimension, A est dite* ***ligne-équivalente*** *à B si B peut s'obtenir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A.*

Exemple 37. *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont lignes-équivalentes, car la matrice B a été obtenue en divisant sur 2 chacun des éléments de la matrice de A.*

Remarque 38. *Ces opérations sont de la forme :*
- *Multiplier une ligne L_i par λL_i, où λ est un scalaire non nul.*
- *Remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$, où $j \neq i$ et λ est un scalaire.*
- *Permuter les lignes L_i et L_j .*

Ces trois opérations sont appelées opérations élémentaires sur les lignes et peuvent être interprétées en terme de produit matriciel.

Définition 39. *Soit $n \in \mathbb{N}$*

— *Pour* $i \in \{1, ..., n\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *la matrice* $E_i(\lambda)$ *est obtenue en multipliant par* λ *la* $i-$*ième ligne de* I_n *(et en ne touchant pas aux autres lignes).*

Exemple 40. *Par exemple pour* $n = 5$,

$$E_3(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 41. *Soit* $n \in \mathbb{N}$

— *Pour* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, *la matrice* $E_{i,j}$ *est obtenue en échangeant la* $i-$*ème et la* $j-$*ième ligne de* I_n.

Exemple 42. *Par exemple pour* $n = 5$,

$$E_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 43. *Soit* $n \in \mathbb{N}$

— *Pour* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *la matrice* $E_{i,j}(\lambda)$ *est obtenue en ajoutant* λ *fois la* $j-$*ième ligne de* I_n *à sa* $i-$*ième ligne*

Exemple 44. *Par exemple pour* $n = 5$,

$$E_{2,1}(\mathbf{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 45. *Soit* n, m *deux entiers, et* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$. *Alors :*

1. *Pour* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *et* $\lambda \in K^*$, *la matrice* $E_i(\lambda)A$ *est la matrice obtenue en appliquant à* A *l'opération* $L_i \to \lambda L_i$.
2. *Pour* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, *la matrice*$E_{i,j}A$ *est la matrice obtenue en permutant la* $i-$*ième ligne et la* $j-$*ième ligne de* A.
3. *Pour* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ *et* $\lambda \in K$, *la matrice* $E_{i,j}(\lambda)A$ *est la matrice obtenue en appliquant à* A *l'opération* $L_i \to L_i + \lambda L_j$.

1.4.2 Matrices échlonnées

Définition 46. *Une matrice est échelonnée si :*

— *le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.*

Elle est échelonnée réduite si en plus :

— *le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut* 1 *;*

— *et c'est le seul élément non nul de sa colonne*

— *Le premier élément non nul de chaque ligne dans une matrice échelonnée s'appelle* ***le pivot****.*

Exemple 47. *la matrice suivante est échelonnée et les pivots sont encadrés*

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice suivante n'est pas échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftrightarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \longleftrightarrow & L_4 + L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \quad \longleftrightarrow \quad L_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \quad \longleftrightarrow \quad L_4 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \quad \longleftrightarrow \quad L_4 + \tfrac{3}{4}L_3 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $(A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A)$

1.4.3 Définition et calcul du rang d'une matrice

Définition 48. ***Le rang*** *d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans la matrice échelonnée associée à A. Ce rang est indépendant de la* *manière dont on échelonne la matrice A.*

Exemple 49. *Calculons le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On a vu qu'après échelonnement, on obtient la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Cette matrice A' ayant 4 lignes non nulles, elle est de rang 4. On en déduit que la matrice A est de rang 4

Exemple 50. *Calculons le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

On effectue l'opération élémentaire $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et on obtient la matrice échelonnée $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Cette matrice A' ayant 1 ligne non nulle, elle est de rang 1. On en déduit que la matrice A est de rang 1.

Théorème 3. *Pour toute matrice A on a*
- *— $rg(A) \leq$nombre de lignes de A,*
- *— $rg(A) \leq$ nombre de colonnes de A.*

Proposition 51.
1. *Si A et B sont équivalentes alors $rg(A) = rg(B)$*
2. *$rg({}^tA) = rg(A)$.*
3. *Si le produit matriciel AB est défini, alors $rg(AB) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$.*

Théorème 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *A est inversible.*
2. *Pour tout vecteur colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ a une solution unique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*
3. *L'équation $AX = 0$ a 0 pour seule solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*
4. *A est équivalente par lignes à I_n.*
5. *A est un produit de matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1.4.4 Calcul de l'inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse d'une matrice, une première étape consistera à la transformer en une matrice en échelons.

Définition 52. *Soit A une matrice non nulle ayant au moins deux lignes et une colonne. On dit que A est en échelons lorsqu'elle a les propriétés suivantes :*

— *chaque ligne non nulle a son premier coefficient non nul égal à 1 ;*
— *toute ligne suivant une ligne nulle est nulle ;*
— *si une ligne a son premier coefficient non nul sur une colonne nj, alors la ligne suivante, si elle n'est pas nulle, a son premier coefficient non nul sur une colonne $nk > j$.*

Voilà la forme générale d'une matrice en échelons.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne n'importe quel élément de $\mathbb{K}$.

Exemple 53. *Trouver l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on applique l'algorithme de Gauss :on commence par remplacer L_2 par $L_2 - 4L_1$ et L_3 par $L_3 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis remplacer L_3 par $2L_3 + L_2$ nous amène à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ensuite on remplace L_1 par$-\frac{1}{8}L_2 + \frac{5}{8}L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour finir, remplacer L_1 par $L_1 - 2L_2 - L_3$ nous donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On conclut que A est inversible, et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 54. **1.** *Montrer que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
2. *Calculer la matrice inverse de* ${}^t\!A$ *et comparer la à* ${}^t(A^{-1})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \longleftrightarrow & 2L_2 - L_1 \\ L_3 & \longleftrightarrow & 2L_3 - L_1 \end{array} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 + 3L_3 \\ L_2 & \longleftrightarrow & L_2 - 3L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftrightarrow & \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 & \leftrightarrow & -\frac{1}{10}L_2 \\ L_3 & \leftrightarrow & -L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \longleftrightarrow & L_1 - 4L_2 \\ L_3 & \longleftrightarrow & L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/5 & 4/5 & 3/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible et

$$A^{-1} = (\frac{1}{5}) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors sa matrice transposée ${}^tA$ est également inversible et de plus nous avons

$$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}).$$

Donc

$$({}^tA)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Déterminants

2.1 Déterminants d'ordre 2 et 3

Á toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le déterminant de A, que l'on dénote par $det(A)$ ou encore $|A|$.
Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique des notions de permutations) mais allons plutôt nous concentrer sur le calcul celui-ci.

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple 55. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Le déterminant de A est ainsi

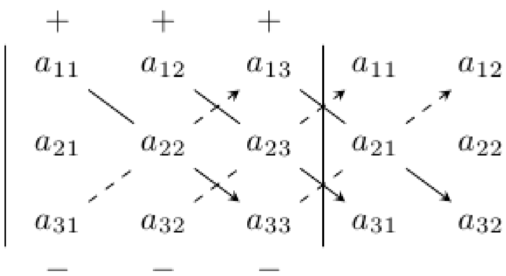
$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7$$

Le déterminant d'une matrice 3×3 peut se calculer de différentes façons. Si c'est une matrice diagonale ou triangulaire, on utilise ce que l'on vient de voir. On peut aussi développer selon une ligne ou une colonne . Sinon on peut utiliser une règle particulière qui ne s'applique que pour les matrices 3×3 : la règle de Sarrus.

On prend donc une matrice 3×3 la plus générale possible

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à répéter les deux premières. Pour chacune des 6 diagonales qui apparaissent,
— on effectue le produit des termes qui y apparaissent, puis on ajoute ces quantités en les affublant d'un signe suivant le schéma suivant :



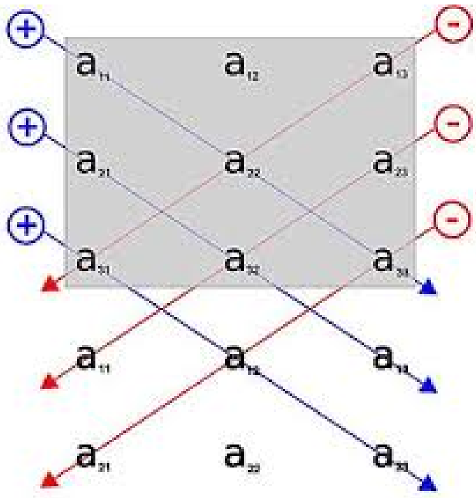
Exemple 56. *Calculer le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right.$

$= 1 \times 3 \times (-1) + (-1) \times 3 \times 2 + 2 \times 0 \times 4 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 3 \times 4 - (-1) \times 0 \times (-1)$

$$= -33$$

— On recopie sous le déterminant les deux premières lignes, puis on trace des diagonales selon le schéma suivant :
— On multiplie ensuite les produits des nombres sur ces six diagonales.



Exemple 57. *Calculer le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ \color{red}1 & \color{red}-1 & \color{red}2 \\ \color{red}0 & \color{red}3 & \color{red}3 \end{vmatrix}$$

$= 1\times3\times(-1)+0\times4\times2+2\times(-1)\times3-2\times3\times2-3\times4\times(-1)-(-1)\times(-1)\times0$

$$= -3 + 0 - 6 - 12 - 12 + 0 = -33$$

2.1.1 Définition des mineurs et cofacteurs

Définition 58. *On appelle déterminant de la matrice A , d'ordre n, le tableau carré contenant les éléments de la matrice limité par deux traits verticaux.*
Notation *:$|A|$ ou*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Définition 59. *On appelle mineur $|M_{ij}|$ de l'élément a_{ij} du déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre$(n-1)$ obtenu en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A*

Exemple 60. — *Pour* $n = 2$, $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$|M_{11}| = d$ *et* $|M_{12}| = c$

Exemple 61. — *Pour* $n = 3$,$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{13}a_{32}$

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$

$|M_{11}| = ?$

Définition 62. *On appelle cofacteur* Δ_{ij} *de l'élément* a_{ij}*, le mineur* $|M_{ij}|$ *affecté du signe* $+$ *ou* $-$ *suivant la relation :*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Exemple 63. *Si* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -3$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = 0$$
$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = -2$$

2.1.2 Déterminants d'ordre quelconque

Définition 64. *La valeur d'un déterminant* $det(A)$ *d'ordre* n *est donnée par un développement suivant :*
une ligne i *:*

$$det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

ou une colonne j *:*

$$det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

Exemple 65. *Calcul de*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

— *Développement suivant la 2ième colonne :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)^{1+2}|M_{12}| + (5)(-1)^{2+2}|M_{22}| + (1)(-1)^{2+3}|M_{32}|$$

$$= +2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +2(9-0) + 5(3-0) - 1(1-12) = 44.$$

— *Développement suivant la 3ième ligne :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (0)(-1)^{1+3}|M_{31}| + (1)(-1)^{3+2}|M_{32}| + (3)(-1)^{3+3}|M_{33}|$$

$$= 0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - (1-12) + 3(5+6) = 44.$$

2.1.3 Propriétés des déterminants

Proposition 66.
1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.*
2. *Si on multiplie l'une des lignes d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$ alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément de $\mathbb{K}$.*

Corollaire 67.
— *Le déterminant d'une matrice ayant une ligne nulle est* 0.
— *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors*

$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$

Proposition 68. *Si on échange deux lignes d'une matrice carrée, le déterminant est multiplié par -1.*

Corollaire 69. — *Si une matrice carrée a deux lignes identiques, son déterminant est nul.*
— *Si à une ligne d'une matrice on ajoute le produit d'un élément de $\mathbb{K}$ par une autre ligne, le déterminant est inchangé.*

Remarque 70. — *Toute matrice peut être mise en échelons par une succession d'opérations élémentaires.*
— *On sait calculer le déterminant d'une matrice échelonnée.*
— *On sait donc calculer tous les déterminants par mise en échelons*

Théorème 5. *Une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.*

Exemple 71. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$ *Et* $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7$

Proposition 72. *Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, alors*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Théorème 6. *Soit A une matrice carrée. Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*
Lorsque A est inversible, on a

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

2.1.4 Calcul des matrices inverses par les déterminants

Définition 73 (Comatrice)**.** *On appelle comatrice (ou matrice adjointe) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée $com(A)$ (ou $adjA$) définie par :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \cdots & \Delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

où Δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini déja à partir du mineur $|M_{ij}|$

Exemple 74. *Trouver $com(A)$ où* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\cdots & -\cdots & +\cdots \\ -\cdots & +\cdots & -\cdots \\ +\cdots & -\cdots & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -(-6) & -6 \\ -(-7) & -5 & -6 \\ -9 & -(3) & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -15 & 6 & -6 \\ 7 & -5 & -6 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition 75 (Matrice inverse). *On appelle matrice inverse de la matrice carrée A d'ordre n, la matrice, si elle existe, notée A^{-1} telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ obtenue par la relation suivante :*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}com(A)}$$

où ${}^{t}com(A)$ est la transposée de la comatrice de A.

Exemple 76. *Trouver l'inverse de A où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ On a $det(A) = -33 \neq 0$ donc A est inversible.*
$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}com(A)$
Et $com(A) = \begin{pmatrix} -15 & 6 & -6 \\ 7 & -5 & 6 \\ -9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ *et* ${}^{t}com(A) = \begin{pmatrix} -15 & 7 & -9 \\ 6 & -5 & -3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-33}\begin{pmatrix} -15 & 7 & -9 \\ 6 & -5 & -3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{7}{33} & \frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{33} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Exercice 77. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a. *Calculer A^2.*
b. *En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.*

Corrigé

a. Nous avons

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & 2 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & 2 \end{pmatrix},$$

et l'on constate que $A^2 = 2I_3 + A$.

b. Nous avons précédemment montré que $A^2 = 2I_3 + A$, c'est-à-dire $A^2 - A = 2I_3$ ou encore $A(A - I_3) = 2I_3$ et finalement nous obtenons

$$A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3.$$

Cette dernière égalité prouve alors que A est inversible

Et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a & -1 & \frac{1}{a} \\ a^2 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 78. *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. *Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?* **2.** *Calculer A_α^{-1} pour $\alpha = 0$*

Corrigé

1. la matrice A_α est inversible ssi $det(A_\alpha) \neq 0$

Et

$$det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 1) - 1(\alpha - 1) + 1(1 - \alpha)$$

$$= \alpha(\alpha^2 - 1) - 2(\alpha - 1) = (\alpha^2 + 2\alpha - 2)(\alpha - 1)$$

donc $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$

2. $A_0^{-1}=?$, d'abord $det(A_0)=2$

$$A_0^{-1}=\frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ou bien

$$A=\begin{pmatrix} 0&1&1&|&1&0&0\\ 1&0&1&|&0&1&0\\ 1&1&0&|&0&0&1 \end{pmatrix}$$

on permute L_1 avec L_3, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&|&0&0&1\\ 1&0&1&|&0&1&0\\ 0&1&1&|&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Puis remplacer L_2 par L_1-L_2 nous amène à

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&|&0&0&1\\ 0&1&-1&|&0&-1&1\\ 0&1&1&|&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Ensuite on remplace L_3 parL_3-L_2 :

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&|&0&0&1\\ 0&1&-1&|&0&-1&1\\ 0&0&2&|&1&1&-1 \end{pmatrix}$$

Puis remplacer L_2 par $2L_2 + L_3$ nous amène à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remplace encore L_1 par $2L_1 - L_2$ nous donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour finir, multiplier tous les lignes par $\frac{1}{2}$ nous donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exemple 79. *Soit la matrice $A(t)$ définie par :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $A(t)A(s) = A(t+s)$.*
2. *La matrice $A(t)$ est-elle inversible*
3. *Calculer $A^n(t), \forall n \in \mathbb{N}$*

Corrigé

—

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ s^2 & 2s & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t+s & 1 & 0 \\ (t^2+s^2+2st) = (t+s)^2 & 2(s+t) & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 $det(A(t)) = 1$ car elle est triangulaire inférieure. Donc elle est inversible.

3 $A^n(t) = A(nt)$. En effet, on a

$$A(t)A(s) = A(s+t) \Rightarrow A^2(t) = A(t)A(t)$$
$$= A(t+t) = A(2t)$$

D'où $A^n(t) = A(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exemple 80. *On considère la matrice suivante* $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -\alpha & 2 & \alpha+1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* $det(A_\alpha)$
2. *Pour quelle valeur de* α*, la mtrice* A_α *est inversible ?*
3. *On pose* $\alpha = 1$*. Soit la matrice* $B = A - I$*, avec* $A = A_1$*.*
   — *Calculer* B^2*, puis déterminer* B^n *pour tout* $n \geq 1$*.*
   — *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 1$ *:* $A^n = (2^n - 1)B + I$*.*
   — *Déterminer les réels* b *et* c *tels que :* $A^3 + bA + cI = 0_3$
   — *Donner la matrice* A^{-1}

Corrigé

1. $det(A_\alpha) = \alpha + 1$
2. A_α est inversible $\Leftrightarrow det(A_\alpha) \neq 0$
   $\Leftrightarrow \alpha \neq -1$
3. On pose $\alpha = 1$, $B = A - I$ donc
   $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

— $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = B$
   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = B$
   Pour $n = 1$ c'est vrai. On suppose que $B^n = B$ et montrons que $B^{n+1} = B$

$$B^{n+1} = B^n B = B^2 = B$$

— Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1 : A^n = (2^n - 1)B + I$
   Pour $n = 1$, on a $A^1 = (2^1 - 1)B + I = B + I$ c'est vrai.

Supposons que $A^n = (2^n - 1)B + I$ est vrai et montrons que $A^{n+1} = (2^{n+1} - 1)B + I$

$A^{n+1} = A^n A = ((2^n - 1)B + I)(B+I) = (2^n-1)B^2+(2^n-1)B+B+I$
$= ((2^n - 1) + (2^n - 1) + 1)B + I = (2^{n+1} - 1)B + I$

— Déterminer les réels b et c tels que : $A^3 + bA + cI = 0_3$

$A^3 = (2^3 - 1)B + I = 7B + I$

$$A^3 = 7\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 & 28 \\ -7 & 8 & 14 \\ -7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

D'où $A^3 + bA + cI = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -13 & 14 & 28 \\ -7 & 8 & 14 \\ -7 & 7 & 15 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} +$
$c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -13 - b + c & 14 + 2b & 28 + 4b \\ -7 - b & 8 + 2b + c & 14 + 2b \\ -7 - b & 7 + b & 15 + 3b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} -13 - b + c = 0 & 14 + 2b = 0 & 28 + 4b = 0 \\ -7 - b = 0 & 8 + 2b + c = 0 & 14 + 2b = 0 \\ -7 - b = 0 & 7 + b = 0 & 15 + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} b = -7 \\ c = 6 \end{cases}$

Donner la matrice A^{-1}

premiere méthode :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}{}^t(Com(A))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix} +(4) & -(-1) & +(1) \\ -2 & +1 & -1 \\ +(-4) & -2 & -(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

deuxieme méthode : On a $A^3 - 7A + 6I = 0_3$, donc

$$A^3 + bA = -6I \Rightarrow A(A^2 - 7I) = -6I \Rightarrow A(-\frac{1}{6})(A^2 - 7I) = I$$

D'où
$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 7I)$$
Et
$$A^2 = (2^2 - 1)B + I = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 12 \\ -3 & 4 & 6 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$
Et
$$A^2 - 7I = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 12 \\ -3 & 4 & 6 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 12 \\ -3 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc
$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 7I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Systèmes linéaires d'équations linéaires

3.1 Définitions. Généralités

Définition 81. *On appelle système de n équations linéaires à p inconnues $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ le système :*

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

avec

- X et B deux matrices colonnes et A appelée matrice de transformation à n lignes et p colonnes.
- Les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *avec* $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
- Les b_{ij} avec $1 \leq j \leq p$ constituent le second membre de S.
  Les lignes sont numérotées par (L_i)
- Le vecteur X est appelé solution du système (S).

— Un système est dit homogène si le second membre est nul, soit $AX = 0$ où 0 représente le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles.
— Système non homogène : $AX = B$, $B \neq 0$.

Exemple 82. *Le système suivant de 4 équations à 3 inconnues* $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = 6 \\ x_1 + x_3 & = 7 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 & = -1 \\ -x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Systèmes de Cramer

Définition 83. *Un système d'équations linéaires est appelé un système de* ***Cramer*** *si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et si la matrice des coefficients est inversible ($det(A) \neq 0$)*

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_n & = b_1 \qquad (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_n & = b_2 \qquad (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_n & = b_n \qquad (L_n) \end{cases}$$

Écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Remarquez que la matrice des coefficients d'un système de Cramer est toujours carrée.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

où $A_j =^t \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix}$

Méthode de résolution

Théorème 7. *Un système de Cramer admet une solution unique donnée par :*

$$x_j = \frac{det(A_1, A_2, \cdots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \cdots, A_n)}{det(A)}$$

Corollaire 84. *Un système de Cramer homogène $Ax = 0$ admet pour unique solution la matrice-colonne* 0.

Exemples

Exemple 85. *Résolution du système :* $\begin{cases} 2x + 3y - z & = 1 \\ 3x + 5y + 2z & = 8 \\ x - 2y - 3z & = 1 \end{cases}$

La matrice A du système est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *D'où* $det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right. =$
$(-30 + 6 + 6) - (-5) - (-8) - (-27) = 22$

Le système est de Cramer et admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{88}{22} = 4$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{-36}{22} = \frac{-18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{22} = \frac{46}{22} = \frac{23}{11}$$

Exemple 86. *Le système d'équations linéaires* $\begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 2 + 13y & = 0 \end{cases}$

est un système de Cramer car $det(A) = -11 \neq 0$
Il n'admet donc que la solution nulle $(x, y) = (0, 0)$

3.1.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Pour résoudre un système de Cramer, on peut toujours procéder comme suit.

- On calcule A^{-1}, l'inverse de la matrice des coefficients A et on effectue le produit $A^{-1}b$.
- Cette méthode est toutefois assez difficile en pratique car elle nécessite le calcul d'un grand nombre de déterminants.

La méthode de Gauss décrite plus loin mène à des algorithmes de résolution des systèmes linéaires beaucoup plus efficaces

Pour $det(A) \neq 0$, la matrice carrée A admet une matrice inverse A^{-1}. Le système sous la forme matricielle $AX = B$ peut être pré-multiplié par A^{-1} afin d'obtenir la solution :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

Donc

$$X = A^{-1}B$$

La détermination de X passe par le calcul de A^{-1}

Exemples

Exemple 87. *Résolution du système :*(S) : $\begin{cases} 3x + 2y & = 11 \\ 2x + y & = 8 \end{cases}$

Le système s'écrit matriciellement

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ *On a* $det(A) = -1 \neq 0$ *et* $A^{-1} = \frac{1}{-1}{}^t \begin{pmatrix} +1 & -2 \\ -2 & +3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ *Donc*

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 88. *Résoudre les systèmes suivants :*

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 2y + 3z & = 5 \\ x + z & = -2 \\ x + y + z & = 3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x + 5y + 4z & = 3 \\ 4x + 5y + 4z & = 0 \\ -x - y - z & = 2 \end{cases}$$

Corrigé

— $det(A_1) = 1 \neq 0$ Donc le système S_1 est de Cramer. Le système est de Cramer et admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 5 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

— $det(A_2) = 1 \neq 0$ Donc le système S_2 est de Cramer et admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 8 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = -7$$

3.1.3 Résolution par la méthode de Gauss

Système sous forme triangulaire

Un système linéaire est sous forme triangulaire s'il est du type

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Comme $det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux a_{ii} sont tous non nuls.
Un système de Cramer sous forme triangulaire est particulièrement facile à résoudre. En effet la dernière équation donne immédiatement $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
En remplaçant x_n par la valeur trouvée dans l'avant-dernière équation, on obtient x_{n-1}. En remontant de cette façon toutes les équations jusqu'à la première, on obtient successivement les valeurs de $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$.

Exemple 89. *Considérons le système*

$$\begin{cases} -x_1 + & x_2 & -3x_3 & = & 6 \\ & 2x_2 + & x_3 & = & 2 \\ & & -4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

La dernière équation donne $x_3 = 0$,la deuxième donne $x_2 = 1$ et la première donne $x_1 = -5$.
L'unique solution est donc $(x_1, x_2, x_3) = (-5, 1, 0)$.

Systèmes équivalents

Définition 90. *Deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils possèdent le même ensemble de solutions. On écrit $S_1 \Leftrightarrow S_2$ pour signifier que les systèmes linéaires S_1 et S_2 sont équivalents*

Méthode de Gauss (ou du pivot)

Étant donné un système de Cramer, on peut toujours se ramener à un système triangulaire en procédant comme suit.

— On choisit une ligne dont le coefficient de x_1 est non nul et on la place en première place. Cela revient à supposer que $a_{11} \neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

— On remplace la deuxième ligne par elle-même plus un multiple de la première de sorte que le coefficient de x_1 dans la nouvelle seconde ligne soit nul : pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$, on calcule

$$a'_{2j} = a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \quad et \quad b'_2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

Ainsi, on a $a_{21} = 0$, comme souhaité.

— On procède ainsi jusqu'à avoir supprimé les coefficients de x_1 dans chaque ligne sauf la première.

— Ainsi, on obtient un système équivalent du type :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a'_{22}x_2+ & \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ & a'_{n2}x_2+ & \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

— On choisit ensuite une ligne pour laquelle le coefficient de x_2 est non nul, et on la place en deuxième ligne.

— On procède ensuite comme précédemment pour supprimer les coefficients de x_2 de toutes les lignes suivantes. Si un de ces coefficients est déjà nul, on laisse la ligne intacte.

— En continuant ce processus, on aboutit à un système de Cramer triangulaire équivalent au système de départ, pour lequel il est facile d'obtenir la solution.

Exemples

Exemple 91. *Résolution du système :*

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcll} x + 3y + 4z & = & 50 & (L_1) \\ 3x + 5y - 4z & = & 2 & (L_2) \\ 4x + 7y - 2z & = & 31 & (L_3) \end{array}\right.$$

Elimination de x dans (L_2) et (L_3) :

$$(S):\begin{cases} x+3y+4z &= & 50 \quad (L_1)\\ y+4z &= & 37 \quad (L_2)\leftarrow(L_2-3L_1)\\ 5y+18z &= & 169 \quad (L_3)\leftarrow(L_3-4L_1)\end{cases}$$

Elimination de y dans (L_3)

$$(S):\begin{cases} x+3y+4z &= & 50 \quad (L_1)\\ y+4z &= & 37 \quad (L_2)\leftarrow(L_2-3L_1)\\ 2z &= & 16 \quad (L_3)\leftarrow(L_3-5L_2)\end{cases}$$

D'où de (L_3) : $z=8$
Puis de (L_2) : $y=37-4z=5$
Enfin de (L_1) : $x=50-3y-4z=3$.
Les solutions de S sont donc $(3,5,8)$

Remarque importante

Pas besoin de vérifier a priori qu'on est en présence d'un système de Cramer. En effet, la méthode de Gauss aboutira à un système triangulaire de Cramer si et seulement si le système S de départ est de Cramer (puisque les deux systèmes sont équivalents).

Exemple 92.

$$(S):\begin{cases} x+2y-2z+3w &= 2\\ 2x+4y-3z+4w &= 5\\ 5x+10y-8z+11w &= 12\end{cases}$$

Le système (S) donne la matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2\\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5\\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12\end{array}\right)$

On remplace L_2 par L_2-2L_1 et L_3 par L_3-5L_1, on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\end{array}\right)$$

Ensuite remplacer L_3 par L_3-2L_2,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Et remplacer L_1 par $L_1 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice échelonnée réduite équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + 2y - w & = & 4 \\ z - 2w & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 4 - 2y + w \\ z & = & 1 + 2w \end{array}\right.$$

3.1.4 Nombre de solutions

Résultat fondamental :

Un système possède zero, une seule ou une infinité de solutions. Si le système possède zero on dit qu'il est incompatible, impossible ou incohérant. Si le système possède une seule ou une infinité de solutions on dit qu'il est compatible, possible ou cohérant.

Cas où il y a autant d'équations que d'inconnues : $m = n$ et la matrice A est carrée.

Systèmes homogènes

— Si A est inversible (le déterminant de A est différent de 0), le système a la solution unique : $X = 0$, vecteur nul et $rang(A) = n$. Formellement, $X = A^{-1}0 = 0$.

— Si A n'est inversible (le déterminant de A est égal à 0), le système a une infinité de solutions (en plus de la solution nulle).

Exemple 93 (1). *Résoudre le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution unique

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$det(A) = 27$et le rang de A est 3.

Exemple 94 (2)**.** *Résoudre le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -2y - 3z \\ 4(-2y - 3z) + 5y + 6z = -3y - 6z & = & 0 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x & = & z \\ y & = & -2z \\ z & = & z \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions

$$X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où z est l'inconnue qui peut prendre une valeur arbitraire.
Le déterminant de la matrice vaut 0, le rang de la matrice est 2.

Exemple 95 (3)**.** *Le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent à $x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z$, donc il a une infinité de solutions

$$X = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où y et z sont les inconnues auxiliaires qui peuvent prendre une valeur arbitraire. L'ensemble de ces solutions est le plan d'équation : $x + 2y + 3z = 0$.
Le déterminant de la matrice vaut 0, le rang de la matrice est 1.

Système non homogène : $AX = B$, $B \neq 0$

— **Si A est inversible** , le système a la solution unique : $X = A^{-1}B$ (écriture formelle). On a $X \neq 0$

— **Si A est non inversible**,pour qu'il y ait au moins une solution, il faut que le rang de A soit le même que le rang de la matrice AB, matrice formée par A à laquelle B est accolé.

Exemple 96 (4)**.** *Résoudre le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce système n'a pas de solution. Avec la méthode de Gauss, on aboutit à l'équation $0 \cdot x_3 = -5$. Le système est impossible.
On peut vérifier que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

est 3 alors que celui de A est 2.

Exemple 97 (5)**.** *Résoudre le système*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ce système a une infinité de solutions :

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} + z \\ \frac{4}{3} - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve la solution générale de l'exemple plus une solution particulière.
On vérifie que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

est égal à 2*, donc égal à celui de* A*.*

Cas où le nombre d'équations est différent du nombre d'inconnues : $m \neq n$ et la matrice A n'est pas carrée

$m > n$: il y a plus d'équations que d'inconnues

Le système est dit sur-déterminé. En général, le système n'aura pas de solutions. Pour le vérifier, soit on met en oeuvre la méthode de Gauss, ce qui précisera les impossibilités, soit on détermine le rang de AB et on compare à celui de A.

$m < n$: il y a moins d'équations que d'inconnues

Le système est dit sous-déterminé. Il y aura une infinité de solutions que l'on pourra expliciter en fonctions d'inconnues arbitraires à choisir.

Résolution des systèmes linéaires à matrices rectangulaires

On considère le système linéaire (S) de n équations à m inconnues, donné par sa forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

La résolution de ce type de système à matrice rectangualire A du type $n \times m$ est résumée dans la proposition suivante

Proposition 98. — *Le système (S) est compatible si et seulement si le rang de la matrice augmentée est égal au rang de la matrice A. Autrement dit : $rg(A|b) = rg(A)$.*
— *Si le rang de la matrice augmentée est strictment supérieur au rang de la matrice A ($rg(A|b) > rg(A)$) alors le système (S) est incompatible.*

3.1.5 Exercices

Exercice 99 (1). **a.** *Résoudre les systèmes suivants*

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right. , \qquad \left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right. .$$

b. *Résoudre les systèmes simultanés suivants*

$$\left.\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right., \qquad \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Corrigé

On utilise la méthode du pivot de Gauss.

a. •

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & -1/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1 & -7/12 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 7/12 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 13/12 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -11/12 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 7/12 \end{array}$$

On obtient donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/12 \\ -11/12 \\ 7/12 \end{pmatrix}$.

•

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y+4z+t & = & 2 \\ 2x+5y+z+t & = & 2 \\ 2x+5y+5z+2t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 8 & 1/2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 8 & 1/2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/4 & -1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -3/2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/4 & -1/4 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-3/2t & = & 3 \\ y+3/4t & = & -3/4 \\ z+1/4t & = & -1/4 \end{array}\right.$$

Donc

$$\begin{cases} x &= \quad 3/2t+3 \\ y &= -3/4t-3/4 \\ z &= -1/4t-1/4 \end{cases}$$

Finalement, le système admet une infinité de solutions données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t+3 \\ -\frac{3}{4}t-\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}t-\frac{1}{4} \end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R} \right\}.$$

b. •

$$\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y+6z &= 2 \mid 1 \\ 3x+4y+5z &= 2 \mid 2 \\ 2x+2y+2z &= 1 \mid 1 \\ 4x+5y+9z &= 4 \mid 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 2/3 & 1/3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 & 2/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 4/3 & -1/3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & -1/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

Le 1ersystème n'admet donc pas de solution.

Le 2^{e}système admet une unique solution donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{array}{cccc|c|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x+y+2z+2t &=& 1 & 2 \\ 2x+3y+z+2t &=& 2 & 1 \\ x+5z+4t &=& 1 & -1 \\ x+2y+2z+t &=& 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cccc|c|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|c} \mathbf{1} & 0 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c|c} \mathbf{1} & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{array}$$

Le 2^e^système n'admet donc pas de solution.
Le 1^er^système admet une infinité de solutions données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7z+1 \\ -3z \\ z \\ -3z \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 100 (2)**.** *Résoudre, en discutant suivant les valeurs des réels a, b, c et d, les systèmes suivants*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+2z &=& a \\ x+y &=& b \\ x+y+z &=& c \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& a \\ 2x-y+4z &=& b \\ 4x+3y-2z &=& c \\ 3x+y+z &=& d \end{array} \right..$$

- $$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & a \\ 0 & -1 & -2 & -a+b \\ 0 & -1 & -1 & -a+c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & a \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & a-b \\ 0 & 1 & 1 & a-c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & -a+2b \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & a-b \\ 0 & 0 & -1 & b-c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & -a+2b \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & a-b \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -b+c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -a+2c \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & a+b-2c \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -b+c \end{array}$$

Quelles que soient les valeurs de a, b, c, ce système admet donc une unique solution donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2c \\ a+b-2c \\ -b+c \end{pmatrix}.$$

height•

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & a \\ 2 & -1 & 4 & b \\ 4 & 3 & -2 & c \\ 3 & 1 & 1 & d \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & a \\ 0 & -5 & 10 & -2a+b \\ 0 & -5 & 10 & -4a+c \\ 0 & -5 & 10 & -3a+d \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & a \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & (2a-b)/5 \\ 0 & 1 & -2 & (4a-c)/5 \\ 0 & 1 & -2 & (3a-d)/5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & (a+2b)/5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & (2a-b)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (2a+b-c)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (a+b-d)/5 \end{array}$$

Ce système admet donc des solutions si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a+b-c & = & 0 \\ a+b-d & = & 0 \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & 2a+b \\ d & = & a+b \end{array} \right. ,$$

et dans ce cas, les solutions sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -z+\frac{a+2b}{5} \\ 2z+\frac{2a-b}{5} \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\},$$

(le système admet une infinité de solutions).

Chapitre 4

Espaces vectoriels

4.1 Espaces vectoriels

Définition 101. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un ensemble (non vide). On appelle opération externe ou loi externe ou action de $\mathbb{K}$ sur E la donnée d'une application définie sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times E$ et à valeur dans E.*

Définition 102. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel lorsqu'il est muni **d'une loi de composition interne commutative**, notée $+$ et d'une **opération externe** de $\mathbb{K}$, notéee $\cdot$, telle que :*

1. *$(E, +)$ est un groupe additif d'élément neutre noté 0_E ou 0.*
2. *Les lois $+$ et $\cdot$ sont compatibles entre elles et avec les lois de la structure de corps de $\mathbb{K}$. C'est-à-dire qu'elles vérifient :*
   - *(a)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E; \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
   - *(b)* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E; \quad (\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$
   - *(c)* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E; \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
   - *(d)* $\forall u \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$

Proposition 103. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Alors pour tout λ de $\mathbb{K}$ et tout u de E, on a :*
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- $0 \cdot u = 0_E$.
- $(-1_{\mathbb{K}}) \cdot u = -u$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow u = 0_E \;\; ou \;\; \lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

Exemple 104. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel,* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *est un $\mathbb{C}-$e.v.*

Sous espace vectoriel

Théorème 8. *Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel si et seulement si il vérifie les 3 propriétés suivantes :*

1. $F \neq \emptyset$ *(ce qui revient à démontrer que $0_E \in F$).*
2. $\forall u, v \in F; u + v \in F$
3. $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u \in F$.

On peut remarquer que l'on peut condenser les deux dernières propriétés :

Théorème 9. *Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel si et seulement si : $F \neq \emptyset$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, \quad \lambda u + \mu v \in F$.*

Remarque 105. *Donc il faudra retenir deux choses :*
— *Tout sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel.*
— *Tout sous espace vectoriel de E contient le vecteur nul 0_E.*
Donc le plus souvent pour démontrer que $F \neq \emptyset$, on montre que $0_E \in F$.

Exemple 106.
1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car;*
   — $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$.
   — *Soient $(x, y), (x', y') \in F$ et $\lambda, \mu in \mathbb{R}$ Montrons que $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F$, c'est à dire $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in F$*
   On a $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = \lambda 0 + \mu 0 = 0$. car $(x, y) \in F \Rightarrow x + y = 0$, et$(x', y') \in F \Rightarrow x' + y' = 0$. Ainsi $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F$, F est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. $F = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, en effet,*
   — $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ *car* $(0, 0, 0) = (0 + 0 + 0, 0 - 0, 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.
   — *Soeint $X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda X + \mu Y \in F$; on a : $X \in F$ donc $X = (x+y+z, x-y, z)$, $Y \in F$ donc $Y = (x'+y'+z', x'-y', z')$, Et $\lambda X + \mu Y = \lambda(x+y+z, x-y, z) + \mu(x'+y'+z', x'-y', z') = ((\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z'), (\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y'), (\lambda z+\mu z'))$ D'où $\exists x" = \lambda x + \mu x', \exists y" = \lambda y + \mu y', \exists z" = \lambda z + \mu z'$, ainsi $\lambda X + \mu Y = (x" + y" + z", x" - y", z") \in F$*

Autres exemples fondamentaux

Théorème 10. *L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un élément de $\mathbb{K}$.*

Théorème 11. *L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il est muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un élément de $\mathbb{K}$.*

Exemple 107.
1. *L'ensemble$M_{n\times m}(\mathbb{K})$ des matrices a coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$*
2. *L'ensemble$F(\mathbb{R})$ des fonctions a variables réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Intersecion-somme-somme directe

Intersecion des s-e-v

Théorème 12. *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

Démonstration. Soit $(F_i)_{i\in I}($ une famille (finie ou infinie) de sous espaces vectoriels de E et $F = \cap_{i\in I} F_i$. Montrons que F est un sous-espace de E.
- Tout d'abord, 0_E appartient à tous les F_i puisque ce sont des sous espaces. Donc0_E appartient à F. Donc F n'est pas vide.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$. Donc le vecteur u appartient à $F = \cap_{i\in I} F_i$. Donc $\forall i \in I, u \in F_i$. De même $\forall i \in I, v \in F_i$. Or pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace de E. Donc $\forall i \in I, \lambda u+\mu v \in F_i$. Alors $\lambda u+\mu v \in F$. d'où $F = \cap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Remarque 108. *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

On peut penser à la réunion de deux droites vectorielles distinctes : la somme d'un vecteur de l'une et d'un vecteur de l'autre n'appartient ni à l'une ni à l'autre.

Somme de deux sous espaces vectoriels

Soient E_1, E_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v E, on appelle somme de deux espaces vectoriels,E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ l'ensemble suivant :

$$E_1 + E_2 = \{u \in E / \exists u_1 \in E_1, \exists u_2 \in E_2 / u = u_1 + u_2\}.$$

Proposition 109. *La somme de deux s.e.v de E_1 et E_2 (d'un même $\mathbb{K}-$e.v) est un s.e.v de E contenant $E_1 \cup E_2$, i.e., $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$, appelé somme des deux sous-espaces E_1 et E_2.*
C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant E_1 et E_2.

Démonstration. — Tout d'abord, 0_E appartient à E_1 et à E_2 puisque ce sont des sous espaces. Donc $0_E = 0_E + 0_E$ appartient à E. Donc E n'est pas vide.
— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$. Le vecteur u appartient à $E_1 + E_2$. Donc il existe $u_1 \in E_1 et u_2 \in E_2$ tels que $u = u_1 + u_2$. De même il existe $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$ tels que $v = v_1 + v_2$.
Donc $\lambda u + v = \lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)$.
Or E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels. Donc $\lambda u_1 + v_1 \in E_1$ et $\lambda u_2 + v_2 \in E_2$. Donc $\lambda u + v \in E_1 + E_2$. Donc $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition 110. *On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall U = U_1 + U_2$, il existe un unique vecteur $U_1 \in E_1$, un unique vecteur $U_2 \in E_2$, $U = U_1 + U_2$, on note*

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

Théorème 13. *La somme des deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E est directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.*

Sous espace supplémentaires

Définition 111. *Soient E_1 et E_2 deux s.e.v d'un même $\mathbb{K}$-e.v E, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E_1 \oplus E_2 = E$*

Exemple 112. *$E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, $E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$, on a $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$, donc E_1 et E_2 sont supplémentaires.*

4.2 Familles de vecteurs

4.2.1 Combinaisons linéaires

Définition 113. *Un vecteur u d'un espace vectoriel E est combinaison linéaire de n vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ de E s'il existe des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Exemple 114. *Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$*
P est combinaison linéaire des polynômes : $x \mapsto x^2$,$x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$.
Mais on peut remarquer que l'on a aussi : $P(x) = 2x^2 + (x + 1)^2$. Donc P

est aussi combinaison linéaire des polynômes : $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto (x+1)^2$*. On a ainsi une infinité de décompositions.*

Théorème 14. *Si* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *sont* n *vecteurs d'un espace vectoriel* E*, l'ensemble des combinaisons linéaires de ces* n *vecteurs est un sous espace vectoriel de* E *appelé sousespace engendré par ces* n *vecteurs. On le note :*

$$Vect\langle u_1, u_2, \cdots, u_n\rangle = \{u \in E/\exists \alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{K}; u = u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n\}$$

4.2.2 Familles génératrices

Définition 115. *Une famille* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *de vecteurs d'un sous-espace vectoriel* F *est une famille génératrice de* F *si* $Vect\langle u_1, u_2, \cdots, u_n\rangle = F$ *, c'est-à-dire si tout vecteur de* F *est combinaison linéaire de* $u_1, u_2, \cdots, u_n$

Exemple 116. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y - z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *.*
Tout vecteur de F *s'écrit :* $u = (x, y, z) = (x, y, x+2y) = x(1, 0, 1)+y(0, 1, 2)$.
Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$ *et* $u_2 = (0, 1, 2)$ *appartiennent à* F *et tout vecteur de* F *est combinaison linéaire de* u_1 *et* u_2*. Donc les vecteurs* $u_1 = (1, 0, 1)$ *et* $u_2 = (0, 1, 2)$ *forment une famille génératrice de F.*
On peut remarquer qu'il n'y a pas unicité. Par exemple, l'équation $x+2y-z = 0$ *s'écrit aussi* $x = z - 2y$ *ou bien* $y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}z$

Proposition 117. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* E*.*

1. *Toute famille de vecteurs de* F *contenant une famille génératrice de* F *est elle même une famille génératrice de F.*
2. *Si tous les vecteurs* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *d'une famille génératrice de F sont combinaisons linéaires de* k *vecteurs* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *de* F*, alors les vecteurs* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *forment une famille génératrice de F.*

4.2.3 Familles libres

Définition 118. *Une famille* $1u_1, u_2, \cdots, u_n$ *de vecteurs d'un espace vectoriel* E *est une famille libre de* E *si toute combinaison linéaire nulle de* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *a tous ses coefficients* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *nuls :*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *sont linéairement indépendants.*

Exemple 119. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *, on considère la famille de vecteurs* $u_1 = (1, -1, 2)$ *et* $u_2 = (2, 1, 3)$. *Pour étudier la dépendance linéaire de ces deux vecteurs, on résout* $\alpha u_1 + \beta u_2 = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} u_1 + \beta u_2 = (0,0,0) &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta &=& 0 \\ \alpha - \beta &=& 0 \\ 2\alpha + 3\beta &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = \beta = 0$.

Définition 120. *Une famille 1de vecteurs d'un espace vectoriel* E *est une famille liée de* E *si ce n'est pas une famille libre.*

Remarque 121. *Dans un espace vectoriel* E, *tout vecteur non nul est libre*

4.2.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 122. *Une famille* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *de vecteurs d'un sous-espace vectoriel* F *(éventuellement* E*) est une base de* F *si elle est à la fois libre et génératrice de* F.

Remarque 123 (Définition). *Si* $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ *alors les scalaires* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *s'appellent les coordonnées du vecteur* u *dans la base* $u_1, u_2, \cdots, u_n$

Exemple 124. *Montrons que les* $f_1 = (1, -1)$, $f_2 = (1, 1)$ *il forment une base de* $\mathbb{R}^2$, *montrons que*

1. $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(x, y) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \Leftrightarrow (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1)$ *ainsi*

$$\lambda_2 = \frac{x + y}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{x - y}{2},$$

   donc $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice.*

2. $\{f_1, f_2\}$ *est libre* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\alpha + \beta, \beta - \alpha) = (0, 0) \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Théorème 15. *Si* $e_1, e_2, cdots, e_n$ *et* $e'_1, e'_2, cdots, e'_m$ *sont deux bases de l'espace vectoriel* E, *alors* $n = m$. *En d'autre termes, si un espace vectoriel admet une base alors toutes les bases de* E *ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace* E. *D'où la définition suivante.*

Définition 125. *Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de base $B = e_1, e_2 \cdots, e_n$, alors*

$$dim(E) = Card(B).$$

où $dim(E)$: est la dimension de E et $Card(B)$: est le cardinal de B.

Remarque 126. *donc chercher une base pour un espace vectoriel c'est trouver une famille de vecteurs dans E, qui forment un famille libre et génératrice de E, le nombre d'éléments de cette famille représente $dimE$.*

Proposition 127 (Propriétés des sous-espaces vectoriels)**.** *Dans un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$:*

- *Tout sous-espace vectoriel F est de dimension finie et $dimF \leq dimE$.*
- *Un sous-espace vectoriel F est égal à E si et seulement si $dimE = dimF$.*
- *Tout sous-espace vectoriel de E admet un sous-espace vectoriel supplémentaire.*
- *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E avec $F \subset G$, alors $dimF \leq dimG$ et l'on a l'équivalence $F = G \Leftrightarrow dimF = dimG$.*
- *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a : $dim(F+G) = dimF + dimG - dim(F \cap G)$.*
- *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $dim(E) = dimF + dimG$.*
- *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $dimE = dimF + dimG$.*

4.3 Notion d'Application Linéaire

Définition 128.

1. *Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et soit f une application de E dans F, on dit que f est une application linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad et \quad f(\lambda \dot{x}) = \lambda \dot{f}(x),$$

où d'une manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2. *Si de plus f est bijective, on dit alors que f est un isomorphisme de E dans F.*
3. *Une application linéaire de $(E, +, \cdot)$ dans $(E, +, \cdot)$ est dite un endomorphisme.*

4. *Un isomorphisme de $(E, +, \cdot)$ dans $(E, +, \cdot)$ est aussi appelé un automorphisme de E dans E.*

Exemple 129. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x-y \end{array}$$

est une application linéaire, car :$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y') = \lambda x+\mu x' - (\lambda y+\mu y') \Rightarrow f(\lambda(x,y)+\mu(x',y')) = \lambda(x-y)+\mu(x'-y') = \lambda f(x,y)+\mu f(x',y')$

Proposition 130. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Démonstration. 1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F$.

2. $f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0_E) = 0_F \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

■

Définition 131. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. *On appelle* ***image*** *de f et on note Imf l'ensemble défini comme suit*

$$Imf = \{y \in F / \exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x)/x \in E\}.$$

2. *On appelle* ***noyau*** *de f et on note $kerf$ l'ensemble défini comme suit :*

$$kerf = \{x \in E / f(x) = 0_F\},$$

On note parfois $kerf$, par $f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition 132. *Si f est une application linéaire de E dans F,alors si $dimImf = n < +\infty$ alors n est appelé* ***rang*** *de f et on note $rg(f)$.*
Imf et $kerf$ sont des sous espaces vectoriels de E.

Exemple 133. *Déterminons le noyau de l'application f129, $kerf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x-y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. ainsi $kerf = \{(x,-x)/x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1)/x \in \mathbb{R}\}$*
donc le $kerf$ est un sous espace vectoriel engendré par $u = (1,-1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{u\}$.

Proposition 134. *Soit f une application linéaire de E dans F on a les équivalences suivantes :*

1. *f est surjective $\Longleftrightarrow Imf = F$.*
2. *f est injective $\Longleftrightarrow kerf = \{0_E\}$.*

Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

Proposition 135. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et f, g deux applications linéaires de E dans F. Si E est de dimension finie n et $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E, alors $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.*

Démonstration. 1. L'implication ($\Leftarrow$) est evidente.

2. Pour ($\Rightarrow$) on a E est engendré par $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, comme f et g sont linéaires, alors

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n),$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + \cdots + \lambda_n g(e_n),$$

donc si on suppose que $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $f(e_k) = g(e_k)$ donc on déduit que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

■

Remarque 136. *Pour que deux applications linéaires f et g de E dans F soient égales il suffit qu'elles coincident sur une base du $\mathbb{K}$- espace vectoriel E.*

Exemple 137. *Soit g une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que*

$$g(1, 0) = (2, 1), g(0, 1) = (-1, -1)$$

alors déterminons la valeur de g en tous points de $\mathbb{R}^2$, en effet on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ donc $g(x, y) = g(x(1, 0) + y(0, 1)) = xg(1, 0) + yg(0, 1) = x(2, 1) + y(-1, -1) = (2x - y, x - y)$ ainsi

$$g(x, y) = (2x - y, x - y).$$

Théorème 16. *Soit f une application linéaire de E dans F avec dimension de E est finie, on a :*

$$\boxed{\textit{dim E=dim Im(f)+dim Kerf}}$$

Proposition 138. *Soit f une application linéaire de E dans F avec $dimE = dimF = n$. On a alors les équivalences suivantes :*

$$f \text{ est isomorphisme} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est injective}$$
$$\Leftrightarrow dimIm(f) = dimF \Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dimkerf = 0 \Leftrightarrow kerf = \{0_E\},$$

de cette proposition, on déduit que si f est un isomorphisme de E dans F avec $dimE$ finie alors nécessairement $dimE = dimF$ en d'autres termes si $dimE \neq dimF$ alors f ne peut être un isomorphisme.

Exemple 139. 1. *L'application $f_1(x, y) = x - y$ n'est pas un isomorphisme car $dim\mathbb{R}^2 \neq dim\mathbb{R}$.*

2. *Soit $g(x, y) = (2x - y, x - y)$, g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ on a,$dim\mathbb{R}^2 = dim\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme car $dimkerg = 0$ en effet :*

$$kerg = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(2x - y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\},$$

c'est même un automorphisme

Composition de deux applications linéaires

Proposition 140. *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est linéaire

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs de E, α et β deux éléments de $\mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcll} g \circ f(\alpha u + \beta v) & = & g(f(\alpha u + \beta v)) & \text{(définition de } g \circ f) \\ & = & g(\alpha f(u) + \beta f(v)) & \text{(linéarité de } f) \\ & = & \alpha g(f(u) + \beta g(f(v)) & \text{(linéarité de } g) \\ & = & \alpha g \circ f(u) + \beta g \circ f(v) & \text{(définition de } g \circ f) \end{array}$$

■

4.4 Représentation matricielle

Définition 141. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$, notée $Mat(f, B, B')$ est la matrice de la famille $f(B) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$:

$$Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B})).$$

$Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est un élément de $M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Voici à quoi ressemble cette matrice : les coefficients sont donc indicés ij avec $i = 1 \dots p$ en vertical et $j = 1 \dots n$ en horizontal. Ces coefficients seront d'ailleurs écrits dans cet ordre, colonne par colonne.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{p1} & \dots & m_{pj} & \dots & m_{pn} \end{pmatrix}$$

4.4.1 calcul des coefficients de la matrice représentative de φ

Calculons maintenant ces coefficients.

Prenons l'image du vecteur e_1 de la base de $\mathcal{B}$ cette image est un donc élément de F, qui s'écrit dans la base de $\mathcal{B}'$:

$$\varphi(e_1) = m_{11}e'_1 + \dots + m_{i1}e'_i + \dots + m_{p1}e'_p$$

Ces coefficients seront ceux qui figureront dans la première colonne de la matrice.

nous avons de manière semblable l'image de e_j de $\mathcal{B}$ qui s'écrit :

$$\varphi(e_j) = m_{1j}e'_1 + \dots + m_{ij}e'_i + \dots + m_{pj}e'_p$$

etc... jusqu'à l'élément e_n qui s'écrit :

$$\varphi(e_n) = m_{1n}e'_1 + \dots + m_{in}e'_i + \dots + m_{pn}e'_p$$

Arrivé à ce stade nous avons rempli notre matrice.

Dès lors elle nous servira à calculer l'image de n'importe quel élément de **E** par l'application linéaire φ dans **F**.

4.4.2 Calcul des images des éléments avec cette matrice

Les éléments de **F** s'écriront :

soit v un élément de **E**, calculons son image :

$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_j e_j + \dots + \alpha_n e_n$

on peut l'écrire en colonne (sous forme d'une matrice d'une seule colonne dite « matrice colonne » ou « vecteur colonne ») :

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_j \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$ son image dans l'espace vectoriel **F** par l'application linéaire φ sera égale au produit de la matrice **M** par ce vecteur colonne :

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_j \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ a_j \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{p1} & \dots & m_{pj} & \dots & m_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ a_j \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Le nombre n de colonnes de la matrice (≪ sa largeur ≫) doit être égal au nombre n de lignes du vecteur (sa ≪ hauteur ≫).

Exemple 142. *Soit* $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & (2x + y + z, x + 2y + z, x + y) \end{array}$
Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4.3 Propriétés des matrices représentatives des applications linéaires :

— la matrice d'une somme d'applications linéaires est la somme de leurs matrices.
— la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit de leurs matrices.
— la matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective est l'inverse de sa matrice.

Ces propriétés donnent toute la puissance des applications linéaires représentées par des matrices. Elles facilitent la manipulation et le traitement mathématique d'objets complexes dans les domaines déjà cités (imagerie numérique, traitement du signal, détection du signal dans le bruit) et bien d'autres (physique, mécanique quantique, théories de jauge, cryptographie, traitement d'images, calcul d'images de synthèse en 3D (OpenGL), projection 3D-¿2D, logiciels d'astronomie, jeu vidéo, etc, etc...)

Théorème 17. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces de dimensions finies non nulles. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.*

1. $\forall(f,g) \in (L(E,F))^2,\ \ Mat(f+g,\mathcal{B},\mathcal{B}') = Mat(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')+Mat(g,\mathcal{B},\mathcal{B}')$.
2. $\forall f \in (L(E,F)),\ \ Mat(\lambda f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \lambda Mat(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')$

Théorème 18. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n et p. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.*
L'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : L(E,F) & \to & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. L'application ϕ est linéaire d'après le théorème précédent. Ensuite, si f est un élément de $L(E,F)$ tel que $Mat(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = 0$, alors l'application linéaire f s'annule sur la base $\mathcal{B}$ et donc $f = 0$. Puisque $\dim(L(E,F)) = np = \dim(M_{p,n}(\mathbb{K})) < +\infty$, on en déduit que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. ■

4.4.4 Matrice d'une composée

Théorème 19. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}-$espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n, p et q. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. Alors,*

$$Mat(g \circ f,\mathcal{B},\mathcal{B}'') = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Remarque 143. *Remarquez que l'ordre dans lequel s'effectue le produit est l'ordre dans lequel s'écrit la composition. matrice de $g \circ f$ = (matrice de g)(matrice de f).*

Démonstration. Posons $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$ et $C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$.
Soit $x \in E$. Soient X, Y et Z les vecteurs colonnes, éléments de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $M_{q,1}(\mathbb{K})$ respectivement, dont les composantes sont les coordonnées de x, $f(x)$ et $g(f(x))$ dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ respectivement. On a d'une part $Z = CX$ et d'autre part $Z = BY = BAX$. Par suite, pour tout X de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $CX = BAX$, on en déduit que $C = BA$. ■

Exemple 144. *On considère les applications linéaires :*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\quad (x,y,z) \mapsto (2x - z, 3x + y + 2z)$$

et

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y) \mapsto (x + y, -y, 2x - y).$$

1. *Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.Puis, déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*
2. *calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.*
3. *Calculer les matrices AB, BA.*

Réponse :

1. On trouve :
$$A = Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Et
$$B = Mat_{B',B}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
2. $(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(2x-z, 3x+y+2z) = (5x+y+z, -3x-y-2z, x-y-4z)$ et $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x+y, -y, 2x-y) = (3y, 7x)$.

— On trouve
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

— Et
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposition 145. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace de dimension finie non nulle notée n. Soit B une base de E. Alors, $\mathbf{Mat_B}(Id_E) = I_n$.*

Théorème 20. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces de même dimension finie non nulle notée n. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f \in L(E,F)$. Alors, f est un isomorphisme si et seulement si $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est **inversible**. Dans ce cas,*
$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f))^{-1}.$$

Démonstration. Supposons $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'},(f) = A$ inversible. Notons g l'élément de $L(F,E)$ de matrice A^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.
$Mat_{\mathcal{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A \times A^{-1} = I_n$, et donc $g \circ f = Id_E$.
De même, $Mat_{\mathcal{B}'}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = A \times A^{-1} = I_n$, et donc $f \circ g = Id_F$. On en déduit que l'application linéaire f est bijective et donc, est un isomorphisme de E sur F. ∎

Démonstration. Supposons que f soit un isomorphisme de E sur F. Posons $B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}} f^{-1}$ (et toujours $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$).
$B \times A = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) \times Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$,.
et de même, $A \times B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}'}(Id_F) = I_n$.
On en déduit que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$. ∎

Exemple 146. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :*

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3 \end{aligned}$$

1. *Pour tout vecteur $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ déterminer $f \circ f(X)$.*
2. *En déduire que f est inversible (c'est-à-dire bijective) et déterminer f^{-1}.*

1. La matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $Mat_{\mathcal{B}}(f) \times Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Donc $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ f) = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$
2. Il existe une application g telle que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$ donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

   Théorème 21. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in L(E)$.*

(a) $\forall p \in \mathbb{N}, Mat(\mathcal{B},(f^p)) = (Mat(\mathcal{B},(f))^p$.

(b) *Si de plus* $f \in GL(E)$*, alors* $\forall p \in \mathbb{Z}, Mat(\mathcal{B},(f^p)) = (Mat(\mathcal{B},(f)))^p$.

Démonstration. se démontre par récurrence. Si $p < 0$, le théorème précedent fournit $Mat_{\mathcal{B}}(f^p) = (Mat_{\mathcal{B}}(f^{-p}))^{-1} = ((Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-p})^{-1} = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^p$. ∎

4.5 Changement de bases

Matrice de passage

Théorème 22. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $Mat_B(u_1, \cdots, u_n)$ est inversible.*

Démonstration. Posons $A = Mat_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de A, pour tout $1 \leq i, j \leq n, \quad f(e_i) = u_i$ et donc $(u_1, \cdots, u_n)$ base de $E \Leftrightarrow f \in GL(E) \Leftrightarrow A \in GL_n(K)$. ∎

Définition 147. *Soient E un $\mathbb{K}-$espace de dimension finie non nulle n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.*
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 148. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Sachant que les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont définis par :* $\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_3' = e_1 - e_3 \end{cases}$
la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P^{-1} sera la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$, obtenue en explicitant les vecteurs de base de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base

Théorème 23. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace de dimension finie non nulle n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.*
Soit $x \in E$. Soit X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la base $\mathcal{B}'$). Alors,

$$X = PX'.$$

Exemple 149.

Démonstration. (a) Soit $x \in E$. Soit X (resp. X, X) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}, \mathcal{B}$).

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X' = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''.$$

Ainsi, pour tout élément X de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''$. On en déduit que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

(b) i. Il est clair que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

ii. On sait déjà que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible. Ensuite,

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$$

et donc $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

■

La formule de changement de base et applications linéaires

Théorème 24. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies non nulles notées n et p respectivement. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ deux bases de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases de F. Soient $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1} \in GL_p(\mathbb{K})$. Soit $f \in L(E, F)$. Soient $A = Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = Mat(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors,*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Soit X (resp. X) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}$). Soit Y (resp. Y) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}'_1$). Donc

$$QY' = Y = AX = APX$$

et donc $Y = Q^{-1}APX$. D'autre part, $Y = BX$. Ainsi, $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $Q^{-1}APX = BX$. D'où, $B = Q^{-1}AP$. ■

cas particulier

Théorème 25. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimensions finie non nulle notées n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$.*
Soit $f \in L(E)$. Soient $A = Mat(f, \mathcal{B}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $B = Mat(f, \mathcal{B}') \in M_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$B = P^{-1}AP.$$