Corrigé de la Série N° 4: Calcul de probabilités

Exercice 1:

A, B *et* C Trois événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Écrire en fonction de A, B et de C les événements suivants :

1. Tous les événements se réalisent
2. Aucun événement ne se réalise.
3. Au moins un événement se réalise.
4. Exactement un événement se réalise
5. Au plus deux événements se réalisent.

Corrigé:

1. Tous les événements se réalisent.

$$E_1 = A \cap B \cap C$$

2. Aucun événement ne se réalise.

$$E_2 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

3. Au moins un événement se réalise.

$$E_3 = A \cup B \cup C$$

4. Exactement un événement se réalise.

$$E_4 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

5. Au plus deux événements se réalisent.

Ce qui veut dire aucun ou un ou deux événements se réalisent qui est le complémentaire de : $A \cap B \cap C$

$$E_5 = \overline{A \cap B \cap C}$$

Exercice 2 :

I/ Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6, un joueur tire successivement 2 boules avec remise.

1. Décrire l'espace fondamental et donner son cardinal.

2. Calculer la probabilité d'avoir deux nombres pairs.

3. Calculer la probabilité qu'au moins un nombre soit impair.

II/ Reprendre les mêmes questions si le joueur tire les 2 boules successivement sans remise.

III/ Reprendre les mêmes questions si le joueur tire les 2 boules simultanément(en même temps).

Corrigé:

I/ On observe le résultat du 1er tirage dans l'ensemble des chiffres compris

entre 1 et 6 ensuite on observe le résultat du 2ème tirage du même ensemble.

Donc il s'agit d'arrangements avec répétition de 2 éléments parmi 6.

1- L'espace fondamental : $\Omega = \{(i,j); i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ et son cardinal est

$|\Omega| = \widetilde{A}_6^2 = 6^2 = 36$

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),\ldots\ldots\ldots\ldots(1,6) \\ (2,1),(2,2),\ldots\ldots\ldots\ldots(2,6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (6,1),(6,2),\ldots\ldots\ldots\ldots(6,6) \end{matrix}\right\}$$

2- Soit l'évènement A : « avoir les deux nombres pairs ».

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\widetilde{A}_3^2}{\widetilde{A}_6^2} = \frac{9}{36}$ (Le choix se fait parmi les trois chiffres pairs).

3- Soit l'événement B : « avoir au moins un nombre impair ».

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2!\tilde{A}_3^1\tilde{A}_3^1 + \tilde{A}_3^2}{\tilde{A}_6^2} = \frac{27}{36}$ [(Un nombre impair et l'autre pair)ou bien les deux sont impairs].

II/ On observe le résultat du 1er tirage dans l'ensemble des chiffres compris entre 1 et 6 ensuite on observe le résultat du 2ème tirage du même ensemble sauf le chiffre qui a été tiré. Donc il s'agit d'arrangements sans répétition de 2 éléments parmi 6.

1- L'espace fondamental : $\Omega = \{(i,j); i \neq j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ et son cardinal est $|\Omega| = A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1,6) \\ (2,1), (2,2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2,6) \\ (3,1), (3,2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,6) \\ (6,1), (6,2), \ldots\ldots (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

2- Soit l'événement A : « avoir les deux nombres pairs ».

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{30}$ (Le choix se fait parmi les trois chiffres pairs).

3- Soit l'événement B : « avoir au moins un nombre impair ».

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2!A_3^1 A_3^1 + A_3^2}{A_6^2} = \frac{24}{30}$ (Un nombre impair et l'autre pair ou bien les deux impairs).

III/ On observe les deux chiffres tirés en même temps, alors l'ordre n'est plus important.

1- L'espace fondamental :

$$\Omega = \{combinaisons\ sans\ répétition\ de\ 2\ éléments\ parmi\ 6\}$$

et son cardinal est $|\Omega| = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1,6) \\ (2,1), (2,2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2,6) \\ (3,1), (3,2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,6) \\ (6,1), (6,2), \ldots\ldots\ldots (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

2- Soit l'événement A : « avoir les deux nombres pairs ».

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$ (Le choix se fait parmi les trois chiffres pairs).

3- Soit l'événement B : « avoir au moins un nombre impair ».

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_3^1 C_3^1 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{12}{15}$ (Un nombre impair et l'autre pair ou bien les deux impairs).

Exercice 3:

On effectue deux tirages successifs dans une urne qui contient une boule blanche et deux boules noires identiques. La première boule tirée n'est pas remise dans l'urne, mais elle est remplacée par une boule de l'autre couleur (blanche si on a tirée une noire et vice-versa).

1. Construire l'ensemble fondamental associé à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité de chacun des événements élémentaires constituant l'ensemble
fondamental.

Corrigé :

1. L'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire :

.$\Omega = \{B_1N_2, N_1B_2, N_1N_2\}$

2. La probabilité de chacun des événements élémentaires :

P(B_1N_2)=P(B_1) P(N_2/B_1)=$\frac{1}{3}$. 1

P(N_1B_2)=P(N_1) P(B_2/N_1) = $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$

P(N_1N_2)=P(N_1) P(N_2/N_1) = $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$

3. On vérifie que la somme des probabilités calculées =P(Ω)=1.

P(Ω)=P(B_1N_2) + P(N_1B_2)+ P(N_1N_2)=$\frac{1}{3}$ +($\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$) + ($\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$) =1

Exercice 4:

On estime que 40% des étudiants en 2° année ST à l'USTHB passent le rattrapage du module de Statistique et 60% passent le rattrapage du module de Maths 3, alors que 70% des étudiants passent au moins l'un des deux modules.

1. Écrire les événements associés et donner leurs probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'un étudiant passe les deux rattrapages.
3. Calculer la probabilité qu'un étudiant passe le rattrapage de Statistique mais pas de Maths 3.
4. Calculer la probabilité que l'étudiant passe un seul rattrapage.

Corrigé:

5. **Écrire les événements associés et donner leurs probabilités.**

On note :

S : « Passer le rattrapage de statistique »

M : « Passer le rattrapage de maths 3 »

$P(S) = 0.4$, $P(M) = 0.6$, $P(S \cup M) = 0.7$

6. **Calculer la probabilité qu'un étudiant passe les deux rattrapages.**

C'est-à-dire**,** On calcule $P(S \cap M)$

On a : $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M)$, donc

$P(S \cap M) = P(S) + P(M) - P(S \cup M) = 0.4 + 0.6 - 0.7 = \mathbf{0.3}$

7. **Calculer la probabilité qu'un étudiant passe le rattrapage en Statistique mais pas en Maths 3.**

$$P(S-M) = P(S \cap \overline{M}) = P(S) - P(S \cap M) = 0.4 - 0.3 = \mathbf{0.1}$$

8. **Calculer la probabilité que l'étudiant passe un seul rattrapage**

$$P(S \,\Delta\, M) = P(S) + P(M) - 2P(S \cap M) = 0.6 + 0.4 - 0.6 = \mathbf{0.4}$$

Exercice5:

Deux chasseurs Alpha et Bêta aperçoivent un lièvre.

On désigne par les événements A : « Alpha tue le lièvre »

B : « Bêta tue le lièvre »

On donne $P(A) = \frac{5}{6}$ et $P(B) = \frac{4}{5}$

1/ Les tireurs Alpha et Bêta tirent simultanément : les événements A et B sont donc indépendants.

a) Calculer la probabilité p_1 que le lièvre soit tué.
b) Calculer la probabilité p_2 qu'un seul chasseur tue le lièvre.

2/ Maintenant, Bêta tire le premier ; les événements A et B ne sont plus indépendants. De plus, on sait que si Bêta tire et manque, les chances de Alpha de tuer le lièvre diminuent de moitié.

Quelle est la probabilité p que le lièvre ne soit pas tué ?

Corrigé:

1) Les tireurs Alpha et Bêta tirent simultanément : les événements A et B sont donc indépendants ($c.$à.$d.$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$)

   c) **Calculer la probabilité P_1 que le lièvre soit tué.**

$$\boldsymbol{P_1} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$= \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{20}{30} = \mathbf{\frac{29}{30}}$$

d) **Calculer la probabilité P_2 qu'un seul chasseur tue le lièvre.**

$$\boldsymbol{P_2} = P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$
$$= \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - 2.\frac{20}{30} = \boldsymbol{\frac{9}{30}}$$

2)- Maintenant, Bêta tire le premier; les événements A et B ne sont plus indépendants. De plus, on sait que si Bêta tire et manque, les chances de Alpha de tuer le lièvre diminuent de moitié.

Quelle est la probabilité $\boldsymbol{P}$ que le lièvre ne soit pas tué ?

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A)}{2} = \frac{5}{12}$$

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P(\overline{A}/\overline{B}) = \big(1 - P(B)\big)\big(1 - P(A/\overline{B})\big) = \frac{1}{5}\,\frac{7}{12} = \frac{7}{60}$$

<u>Exercice 6</u> :

Dans une usine, on utilise deux machines M1 et M2 pour fabriquer des pièces. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0.05 et 0.08. De plus si la machine M1 est en panne, la probabilité que la machine M2 tombe en panne est égale à 0.6.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Les deux machines fonctionnent-elles indépendamment ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir une seule machine qui fonctionne ?

***<u>Corrigé</u>* :**

Soient les événements : M_i : «La machine M_i est en panne» , i $= 1{,}2$

$P(M_1) = 0.05$; $P(M_2) = 0.08$; $P(M_2/M_1) = 0.6$

1. <u>La probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment</u> :

On sait que la probabilité conditionnelle de M_2 sachant M_1est :

$P(M_2/M_1) = \frac{P(M_2 \cap M_1)}{P(M_1)}$

Alors $P(M_1 \cap M_1) = P(M_1)\ P(M_2/M_1) = 0.05\ \ 0.6 = 0.03$

1. Les deux machines fonctionnent-elles indépendamment ?

-On peut directement remarqué que $P(M_2) = 0.08 \neq P(M_2/M_1) = 0.6$ qui veut dire que la panne de la machine M_1augmente la probabilité que la machine M_2 tombe en panne. Donc les deux machines ne fonctionnent pas indépendamment.

-Si non on applique la formule:

Les deux machines M_1 et M_2 fonctionnent indépendamment si et seulement si on a $P(M_1 \cap M_2) = P(M_1)\ P(M_2)$ chose qui n'est pas vérifiée car

$P(M_1 \cap M_2) \neq P(M_1)\ P(M_2)$

0.03≠0.05 0.08

Alors les deux machines ne fonctionnent pas indépendamment.

3- La probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne :

Soit les événements $\overline{M}_i$: «La machine M_i fonctionne» , i $= 1{,}2$

L'événement: « avoir au moins une machine qui fonctionne» = $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$

C'est le complémentaire d'avoir les deux machines en panne au même temps, et on aura:

$P(\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2}) = 1 - \mathrm{P}(M_1 \cap M_2)$ =1-0.03=0.97.

4- La probabilité d'avoir une seule machine qui fonctionne :

- C'est la probabilité d'avoir l'une des deux machines fonctionne et l'autre en panne .C'est ce qui est traduit par la différence symétrique:

$$
\begin{aligned}
P(\overline{M}_1 \Delta \overline{M}_2) &= \mathrm{P}((\overline{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) \cup \mathrm{M}_1 \cap \overline{M}_2) \\
&= \mathrm{P}(\overline{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{M}_1 \cap \overline{M}_2) \\
&= \mathrm{P}(\overline{M}_1) - \mathrm{P}(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) + \mathrm{P}(\overline{M}_2) - \mathrm{P}(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) \\
&= \mathrm{P}(\overline{M}_1) + \mathrm{P}(\overline{M}_2) - 2\,\mathrm{P}(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)
\end{aligned}
$$

en examen, vous donnez directement cette formule.

$$= (1 - \mathrm{P}(M_1)) + (1 - \mathrm{P}(M_2)) - 2\,[1 - \mathrm{P}(M_1 \cup M_2)]$$

$= (1 - P(M_1)) + (1 - P(M_2)) - 2\,[1 - [P(M_1) + P(M_2)\text{-}P(M_1 \cap M_2)]]$

= 0.95 + 0.92 - 1- 2[1-(0.05+0.08-0.03)]=0.07

- <u>Ou plus simplement:</u> on peut remarquer qu'une seule machine qui fonctionne est exactement la même chose qu'une seule machine en panne.

$P(\overline{M}_1 \Delta \overline{M}_2) = P(M_1 \Delta M_2) = P(M_1) + P(M_2) - 2\,P(M_1 \cap M_2)$

=0.05+0.08-2(0.03) =0.07

Exercice 7 :

On dispose de trois urnes **U_1 ,U_2 , U_3 .**
L'urne **U_1** contient **01** boule blanche et **02** boules noires,
L'urne **U_2** contient **02** boules blanches et **03** boules noires.
L'urne **U_3** contient **03** boules blanches et **04** boules noires.
On lance un dé bien équilibré. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à **2**, on tire une
boule de l'urne U_1, si le dé donne un numéro **$2< d\leq 5$**
on tire une boule de l'urne **U_2** , si non on tire de l'urne **U_3 .**
1. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne **U_1 .**

<u>Exercice 8:</u>

Une entreprise recrute chaque année des étudiants au niveau BAC+3. Elle effectue une sélection à l'aide d'un test écrit sous forme de QCM. Les candidats retenus doivent ensuite effectuer un entretien.

Les candidats choisissent, selon leurs compétences un test parmi deux. On admet que 40% des candidats choisissent le premier test, à l'issue duquel 10% sont sélectionnés et que le reste des candidats choisissent le second test, à l'issue duquel 30% sont sélectionnés.

1. A l'aide des informations contenues dans l'énoncé, décrire les événements qui interviennent et donner leurs probabilités.
2. On prélève une fiche au hasard d'un candidat. Quelle est la probabilité que le candidat soit sélectionné?
3. Un candidat est sélectionné, calculer la probabilité qu'il ait choisi le premier test.

***<u>Corrigé</u>* :**

1-<u>A l'aide des informations contenues dans l'énoncé, on peut décrire les événements suivants :</u>

Soient T_i: «Le candidat a choisi le $i^{ème}$ sujet » , $i = 1,2$

S: «Le candidat est sélectionné »

Alors les probabilités données sont:

$P(T_1)=0.4$; $P(T_2)=0.6$; $P(S/T_1)=0.1$; $P(S/T_2)=0.3$

2- <u>La probabilité que le candidat soit sélectionné</u>:

$\{T_1, T_2\}$ forment bien un système complet d'événements, ce qui nous permet d'utiliser la formule des probabilités totales:

$P(S)= P(S\cap \Omega)=P(S\cap (T_1 \cup T_2))=P((S\cap T_1)\cup(S\cap T_2))$

$=P (S\cap T_1) + P(S\cap T_2)$

$=P(T_1)\, P(S/T_1) + P(T_2)\, P(S/T_2)$ en examen, vous donnez directement cette formule.

$=0.4 \;\; 0.1+ 0.6 \;\; 0.3=0.22$

3-Un candidat est sélectionné, calculer la probabilité qu'il ait choisi le premier test. Ce qui est équivalent à chercher la probabilité conditionnelle de T_1 sachant S:

$P(T_1 /S)=\frac{P(T_1\cap S)}{P(S)}=\frac{P(T_1)P(S/T_1)}{P(S)}=\frac{0.4 \;\; 0.1}{0.22}=0.18$ (formule de Bays)