Partie I : Intégrales au sens de Riemann

Exercice 1

On considère deux fonctions φ et ψ définies par,

$$\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi : [0,2] \to \mathbb{R}, \psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale $\int_0^2 \varphi(x)dx$ puis en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^2 \psi(x)dx$.

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x$ et g la fonction définie sur $[0,1]$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \neq \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

2. g est-elle Riemann-intégrable ? si oui donner la valeur de $\int_0^1 g(x)dx$.

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles Riemann intégrables?

1. $f_1(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [0,2]$; 2. $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$;

3. $f_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}, f_3(x) = \lfloor x \rfloor$; 4. $f_4 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Exercice 4

Calculer, à l'aide des sommes de Riemann, les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x dx$;

2. $\int_0^1 e^x dx$.

Partie II : Primitives et application au calcul des intégrales de Riemann

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes.

1.$\int x(x^2+1)dx$; 2.$\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x}dx$; 3.$\int cos^2(x)dx$; 4.$\int(1+tg^2(x))dx$; 5. $\int e^x sh^2(x)dx$

Exercice 2

Déterminer la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int \frac{1}{1+x^2}dx$ telle que $F(1)=0$.

Exercice 3

Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\neq 1\\ 1 & si\ x=1\end{cases}$

n'admet pas de primitive.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^t \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx, t>0$;

2. $\int_0^1 x^2(x^3+1)^n dx, n\in\mathbb{N}$;

3. $\int_0^1 \frac{(arcsinx)^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4. $\int_1^2 \frac{(\ln(x+1))^2}{x}dx$;

5.$\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$;

6. $\int_0^\pi xsin(x^2)dx$.

Exercice 5

Soit $n,m\in\mathbb{Z}$ tels que $n<m$.

En utilisant la relation de Chasles, exprimer l'intégrale $\int_n^m \lfloor x\rfloor dx$ en fonction de n et de m.

Exercice 6

Montrer qu'on ne peut pas choisir le changement de variable $t=sinx, x\in\left[\frac{\pi}{3},2\frac{\pi}{3}\right]$ pour calculer l'intégrale $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\frac{\pi}{3}} \frac{x}{sinx}dx$.

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, t > 0;$

2. $\int_1^t \frac{Ln(x^2+x)}{x^2} dx, t > 1;$

3. $\int_0^t sinxe^x, t > 0;$

4. $\int_{-1}^1 sinx\, shx\, dx$;

5. $\int_1^t lnxdx, t > 1;$

6. $\int_0^\pi xcosx\, dx$;

7. $\int_0^1 arcsinx\, dx;$

8. $\int_0^1 Arcsinx\, dx.$

Exercice 8

Calculer les primitives suivantes.

$$I = \int \frac{sinx}{sinx+cosx} dx \text{ et } J = \int \frac{cosx}{sinx+cosx} dx$$

Exercice 9

Calculer les intégrales, des fonctions rationnelles, suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{x}{3x-2} dx$; 2. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$; 3. $\int_1^2 \frac{x+2}{x(x+1)^2} dx$; 4. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+x-2} dx$; 5. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+4} dx$;

6. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$; 7. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx$; 8. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx$; 9. $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx.$

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx$; 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$; 3. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1} dx$; 4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$; 5. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$;

6. $\int_0^1 sin^2x\, dx$; 7. $\int_0^1 \frac{1}{cosx} dx$; 8. $\int_0^1 sh^3(x)\, dx$; 9. $\int_0^1 \frac{1}{ch^2(x)} dx$; 10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin2x+2cosx} dx.$

Exercice 11

Calculer à l'aide des intégrales, les limites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

2. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^3k}}$

3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$

Exercice 12

1. Montrer que pour tout entier n, on a

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$

Exercice 13

Pour tout entier non nul n, posons

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

1. En intégrant I_n par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

2. Calculer par partie I_1 puis en déduire la valeur de I_2.

Exercice 14

Considérons la fonction F définie sur $]1,+\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{lnt}{(t-1)^2}dt$

1. Montrer que F est bien définie sur $]1,+\infty[$ et que $F > 0$ sur $]1,+\infty[$.

2. Pour $s \in]1,+\infty[$ et c un nombre réel tel que $1 < c < s$, posons $G(s) = \int_c^s \frac{1}{sint}dt$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 1, F(x) = G(x^2) - G(x)$.

b) En déduire que F est dérivable dans $]1,+\infty[$ puis déterminer sa dérivée.

3. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{lnt}{(t-1)^2}$ puis déterminer $F(x)$ et retrouver sa dérivée.