

# Polycopié d'algèbre 1

A. DJOUMAKH

26 décembre 2020

# Table des matières

<b>1 Notion de Logique- Ensembles et applications</b>	<b>2</b>
1.1 Logique et quantificateurs . . . . .	2
1.1.1 Outils du raisonnement mathématique . . . . .	2
1.1.2 Connecteurs logiques . . . . .	2
1.1.3 Propriétés des connecteurs logiques . . . . .	4
1.1.4 Quantificateurs . . . . .	5
1.1.5 Différents types de raisonnement . . . . .	5
1.2 Ensembles et Applications . . . . .	6
1.2.1 Sous-ensembles . . . . .	7
1.2.2 Intersection, réunion . . . . .	9
1.2.3 Unions et intersections multiples . . . . .	9
1.2.4 Différence . . . . .	10
1.2.5 Différence symétrique . . . . .	10
1.3 Couples, triplets, . . . . .	10
1.4 Produit cartésien . . . . .	11
1.5 Applications . . . . .	11
1.5.1 Définitions . . . . .	11
1.5.2 Graphe . . . . .	12
1.5.3 Restriction, prolongement . . . . .	12
1.5.4 Composition d'applications . . . . .	13
1.5.5 Image d'une partie . . . . .	13
1.5.6 Image réciproque d'une partie . . . . .	14
1.5.7 Applications injectives . . . . .	14
1.5.8 Applications surjectives . . . . .	15
1.5.9 Applications bijectives . . . . .	15

# Chapitre 1

## Notion de Logique- Ensembles et applications

### 1.1 Logique et quantificateurs

#### 1.1.1 Outils du raisonnement mathématique

**Définition 1** (Assertion). *Une **ASSERTION** est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux. Les deux possibilités sont consignées dans une table de vérité :*

<i>p</i>
<i>v</i>
<i>f</i>

**Exemple 2.** *Tindouf est une ville côtière.*

**Définition 3** (Proposition ou prédicat). *Une **PROPOSITION** (ou prédicat) est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres*

**Exemple 4.** *“ $x < 9$ ” est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 9, fausse pour tous les autres.*

#### 1.1.2 Connecteurs logiques

Il existe cinq connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique, dont nous allons faire la liste :

**Définition 5** (Négation d'une proposition ). *La **NÉGATION** d'une proposition “ $P$ ”, notée “ $\text{non}(P)$ ” ou “ $\bar{P}$ ”, est une proposition qui est vraie lorsque*

*P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie. Par conséquent, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et non(non(P)) sont logiquement équivalentes.*

$p$	$(\text{non}P)$
$v$	$f$
$f$	$v$

**Exemple 6.** La proposition “ $x > 2$ ” est la négation de la proposition “ $x \leq 2$ ”.

**Définition 7** (Conjonction : et). *La CONJONCTION de deux propositions P, Q, notée “P et Q” ou “ $P \wedge Q$ ”, est une proposition vraie si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.*

**Remarque 8.** Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction “P et Q” est toujours fausse.

**Exemple 9.** Les propositions  $x \leq 2$  et  $x \geq 5$  sont incompatibles.

**Définition 10** (Disjonction : ou). *La DISJONCTION de deux propositions P, Q, notée “P ou Q” ou “ $P \vee Q$ ”, est une proposition vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le “ou” est inclusif).*

**Définition 11** (Implication :  $\Rightarrow$ ). *L’IMPLICATION de deux propositions P, Q, notée “ $P \rightarrow Q$ ”, est la proposition “(non(P)) ou Q.”*

**Théorème 1.** P et Q étant deux assertions, si l’implication “ $P \Rightarrow Q$ ” est vraie on dit que c’est un THÉORÈME(c’est-à-dire une assertion démontrée dont P est l’HYPOTHÈSE et Q la CONCLUSION).

**Définition 12** (Équivalence de deux proposition :  $\Leftrightarrow$ ). . *L’ÉQUIVALENCE de deux propositions P, Q, notée “ $P \Leftrightarrow Q$ ”, est la proposition “( $P \Rightarrow Q$ ) et ( $Q \Rightarrow P$ )”.*

**Remarque 13.** 1. Le “ou” mathématique n’est pas exclusif : si les assertions P et Q sont toutes les deux vraies, alors l’assertion (P ou Q) est vraie.

2.  $(P \Leftrightarrow Q)$  s’écrit aussi “P si et seulement si Q”, ou encore “P est une condition nécessaire et suffisante pour Q”

On peut résumer les différentes valeurs logiques prises par ces connecteurs logiques en fonction des valeurs logiques de P et Q dans la table de vérité suivante :

$p$	$q$	$p \text{ et } q$	$p \text{ ou } q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v

**Théorème 2** (Lois de de Morgan). Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions.  $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow P \vee \overline{Q}$  et  $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ . (Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

**Théorème 3** (Négation d'une implication). Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions.  $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ .

*Démonstration.* D'après les lois de De Morgan, on a :  $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{P \vee \overline{Q}} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{\overline{Q}} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge Q$ . ■

**Théorème 4** (Contraposée d'une implication). Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions.

$$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q).$$

*Démonstration.* La proposition  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$  est fausse si et seulement si  $\overline{Q}$  est vraie et  $\overline{P}$  est fausse ou encore si et seulement si  $P$  est vraie et  $Q$  est fausse. Ainsi,  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$  a les mêmes valeurs de vérité que  $P \Rightarrow Q$ . ■

### 1.1.3 Propriétés des connecteurs logiques

**Proposition 14.** On peut composer des connecteurs logiques :

1. Si  $(P \Rightarrow Q)$  est vraie et si  $(Q \Rightarrow R)$  est vraie, alors  $(P \Rightarrow R)$  est vraie.
2.  $\text{non}(\text{non}P)$  a même valeur logique que  $P$ .
3.  $\text{non}(P \vee Q)$  a même valeur logique que  $(\text{non}P) \text{ ou } (\text{non}Q)$ .
4.  $\text{non}(P \wedge Q)$  a même valeur logique que  $(\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q)$ .
5.  $P$  et  $(Q \text{ ou } R)$  a même valeur logique que  $(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ .
6.  $P$  ou  $(Q \text{ et } R)$  a même valeur logique que  $(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$ .
7.  $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$  et  $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ .
8.  $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$  et  $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ .
9.  $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$  et  $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ .

**Remarque 15.** (On dit que le « ou » et le « et » sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre.)

*Démonstration.* Démontrons par exemple la première équivalence de à l'aide d'une table de vérité (vous démontrerez le reste de manière analogue à titre d'exercice).

■

### 1.1.4 Quantificateurs

**Définition 16.** — On définit le **quantificateur universel**, noté  $\forall$  (quelque soit) de la manière suivante :

$$\forall x \in E, P(x)$$

signifie que la proposition  $P(x)$  est vrai pour toute valeur de  $x$  prise dans  $E$ , ou encore :  $\{x \in E / P(x) \text{ est vrai}\} = E$

— On définit le **quantificateur existentiel**, noté  $\exists$  (il existe) de la manière suivante :

$$\exists x \in E, P(x)$$

signifie que la proposition  $P(x)$  est vrai pour au moins une valeur de  $x$  prise dans  $E$ , ou encore :  $\{x \in E / P(x) \text{ est vrai}\} \neq \emptyset$ .

**Proposition 17.** On exprime la négation des quantificateurs de la manière suivante :

1. L'assertion  $\overline{(\forall x \in E, P(x))}$  est logiquement équivalente à  $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ .
2. L'assertion  $\overline{(\exists x \in E, P(x))}$  est logiquement équivalente à  $\forall x \in E, \overline{P(x)}$ .

**Proposition 18.** On peut inverser deux quantificateurs de même nature :

1.  $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in F, \exists x \in E P(x, y)$ .
2.  $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in F, \forall x \in E P(x, y)$ .
3.  $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$  n'est en général pas équivalent  $\exists y \in F, \forall x \in E P(x, y)$ .

**Proposition 19.** 1.  $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E / P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x)))$ .  
 2.  $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E / P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)))$  mais  
 $((\forall x \in E / P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$ .  
 3.  $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)))$ . Mais  
 $((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))) \not\Rightarrow (\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x))$ .  
 4.  $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x)))$ .

### 1.1.5 Différents types de raisonnement

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions, pour prouver que l'implication " $P \Rightarrow Q$ " est vraie il existe différents types de raisonnements.

## Raisonnement direct

On suppose que  $P$  est vraie et on montre que  $Q$  est vraie.

## Raisonnement par contraposée

On sait que “ $P \Rightarrow Q$ ” et “ $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ” ont même véracité. Pour montrer “ $P \Rightarrow Q$ ” on peut donc montrer que l’implication “ $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ ” est vraie, i.e. on suppose que  $Q$  est fausse et on montre que  $P$  est fausse.

## Raisonnement par l’absurde

On suppose que “ $P \Rightarrow Q$ ” est fausse (ou, ce qui est équivalent, que “ $P \wedge \text{non}(Q)$ ” est vraie) et on montre que l’on obtient une contradiction.

## Prouver une équivalence

“ $P \Leftrightarrow Q$ ” Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions, pour prouver que l’équivalence “ $P \Leftrightarrow Q$ ” est vraie on peut

- Soit montrer les deux implications  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$  avec l’une des méthodes du paragraphe précédent,
- Soit procéder directement par équivalences :

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q.$$

## Raisonnement par récurrence

Soit  $n_0 \in \mathbf{N}$ . Pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , on considère une proposition  $P(n)$  dépendant de  $n$ . Alors, si  $P(n_0)$  est vraie et si pour tout entier  $n \geq n_0$ , l’implication  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  est vraie, alors pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $P(n)$  est vraie.

## 1.2 Ensembles et Applications

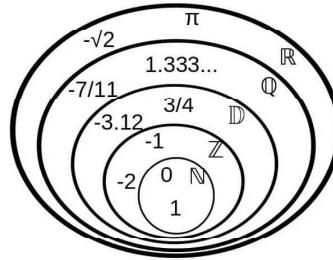
Un *ensemble* est une collection  $E$  d’objets tous distincts. Ceux-ci sont appelés les *éléments* de  $E$ . Un élément de  $E$  se note  $a \in E$ . Deux ensembles sont égaux lorsqu’ils ont les mêmes éléments.

On dit aussi “ $a$  est élément de  $E$ ” ou bien “ $a$  n’est pas élément de  $E$ ” ou encore “ $E$  contient  $a$ ” ou bien “ $E$  ne contient pas  $a$ ”.

Si un ensemble  $E$  est constitué des éléments  $a, b, c$ , on écrira :  $E = \{a, b, c\}$ .

L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi  $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$ . Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire  $a \in a$ .

**Exemple 20.** N, Z, Q, R, C



On décrit un ensemble

- Ou bien en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple,

$$E = \{1, 3, 4, 9\}.$$

- Ou bien en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble déjà connu. Par exemple,

$$E = \{x \in \mathbf{R} /, x \leq \sqrt{3}\}.$$

**Remarque 21.** Il y a un ensemble qui n'a aucun élément, c'est l'ensemble vide, noté  $\emptyset$ .

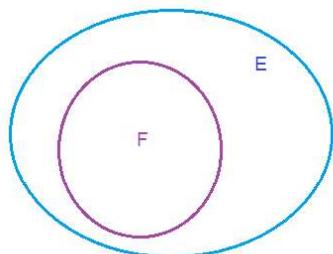
On appelle **singleton** un ensemble de la forme  $E = \{x\}$ .

On appelle **paire** un ensemble de la forme  $E = \{x, y\}$  avec  $x \neq y$ .

### 1.2.1 Sous-ensembles

**Définition 22** (Inclusion). — Un ensemble  $F$  est inclus (contenu) dans  $E$  si tout élément de  $F$  appartient à  $E$ , ce que l'on note :  $F \subset E$ .

- On dit aussi que  $F$  est une **partie**(sous-ensemble) de  $E$ .



**Remarque 23.** 1. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Pour montrer que  $E = F$ , il suffit de montrer que  $F \subset E$  et  $E \subset F$ .

2.  $F \not\subset E$  si  $\exists x \in F, x \notin E$ .
3.  $\emptyset \subset E$  et  $\forall x \in E, x \notin \emptyset$
4.  $(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Rightarrow E \subset G$ .

**Remarque 24.** L'inclusion entre ensembles correspond à l'implication. Si  $F = \{x \in E \mid P(x) \text{ est vraie}\}$  et  $G = \{x \in E \mid Q(x) \text{ est vraie}\}$ , alors

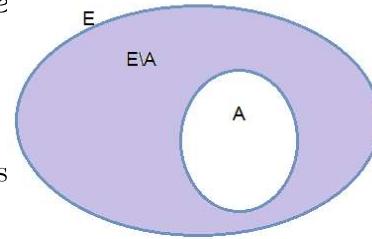
$$(F \subset G) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))).$$

## Complémentaire

$F$  est un sous-ensemble de  $E$ , son *complémentaire dans  $E$*  est

$$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}.$$

On le note parfois  $C_E F$  ou  $F^C$ , lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguité,  $\bar{F}$ .



**Exemple 25.** Les éléments du complémentaire  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  sont appelés nombres irrationnels.  $\sqrt{2}$  est l'un d'entre eux.

**Exemple 26.** Dans l'ensemble  $I$  des étudiants de MI<sub>5</sub>, le complémentaire du groupe 1 est  $\overline{G_1} = I \setminus G_1 = G_2 \cup G_3 \cup G_4$ .

**Théorème 5.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ . Alors on a :

1.  $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$ .
2.  $A^{C^C} = A$ .

*Démonstration.* 1. Supposons que  $A \subset B$  et montrons que  $B^C \subset A^C$ , pour cela il suffit de montrer que tout élément de  $B^C$  est un élément de  $A^C$ .

Soit  $x \in B^C$ , alors  $x \notin B$ . Mais puisque  $A \subset B$ ,  $x \notin A$ , ie  $x \in A^C$ .

Réciproquement, on suppose que  $B^C \subset A^C$  et on doit prouver que  $A \subset B$ , i.e tout élément de  $A$  est un élément de  $B$ . Soit donc  $x \in A$ , alors  $x \notin A^C$  et puisque  $A^C \subset B^C$ ,  $x \notin B^C$ , c'est à dire que  $x \in B$

2. On a les équivalences

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A^{C^C}.$$

ce qui signifie que  $A^{C^C} = A$ .

■

## L'ensemble des parties d'un ensemble

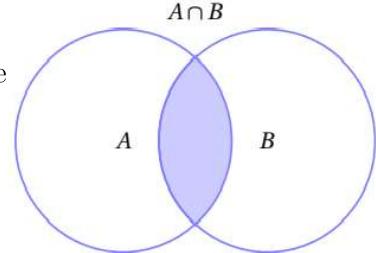
Soit  $E$  un ensemble, On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble dont les éléments sont exactement tous les sous-ensembles de  $E$ .

**Exemple 27.** Si  $E = \{1, 2\}$ , alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$ .

### 1.2.2 Intersection, réunion

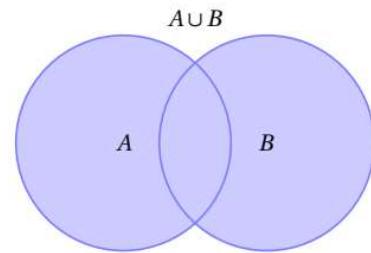
**L'intersection** de deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$ , c'est

$$F \cap G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ et } (x \in G)\}$$



**La réunion** de deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$ , c'est

$$F \cup G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ ou } (x \in G)\}$$



**Exemple 28.** Soient  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $B = \{2, 4, 6, 9\}$ . On a alors :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}.$$

et

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

**Remarque 29.** L'union est à prendre au sens large, i.e.  $F \cap G \subset F \cup G$ .

### 1.2.3 Unions et intersections multiples

Si  $F_1, \dots, F_i, \dots$  sont des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ , leur intersection  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent à tous les  $F_i$  et

leur réunion  $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui appartiennent à au moins un  $F_i$ ,

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \mid (\forall i \in \mathbf{N})(x \in F_i)\}, \quad \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \mid (\exists i \in \mathbf{N})(x \in F_i)\}.$$

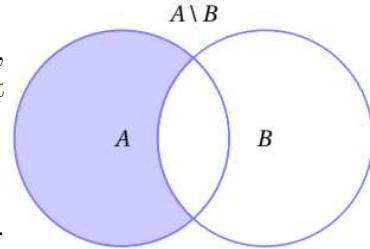
**Ensembles disjoints.** On dit que  $F$  et  $G$  sont *disjoints* si  $F \cap G = \emptyset$ . Ne pas confondre distincts et disjoints.

On dit que des ensembles  $F_i$  sont *deux à deux disjoints* si  $(\forall i \in \mathbf{N}) (\forall j \in \mathbf{N}), i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Ne pas confondre avec  $\bigcap_i F_i = \emptyset$ .

#### 1.2.4 Différence

**La différence** de deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$ , c'est l'ensemble des éléments de  $F$  qui n'appartiennent pas à  $G$ ,

$$F \setminus G = \{x \in E \mid ((x \in F) \text{ et } (x \notin G))\} = F \cap (E \setminus G).$$

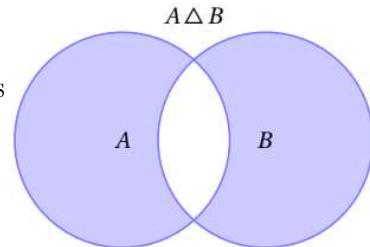


**Exemple 30.**

#### 1.2.5 Différence symétrique

**La différence symétrique** de deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  d'un ensemble  $E$ , c'est

$$F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G).$$



**Exemple 31.**

### 1.3 Couples, triplets,...

Si on se donne deux objets mathématiques  $x$  et  $y$ , on peut construire un troisième objet qu'on note  $(x, y)$  et qu'on appelle **couple**  $(x, y)$ .

$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \text{ et } y = v.$$

**Définition 32.** On dit qu'un objet  $z$  est un couple s'il existe des objets  $x$  et  $y$  tels que  $z = (x, y)$ .

Si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont trois objets, on peut construire un quatrième objet qu'on note  $(x, y, z)$  et qu'on appelle triplet  $(x, y, z)$ .

Le triplet  $(x, y, z)$  est défini par

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

## 1.4 Produit cartésien

**Définition 33.** Soient  $E$  et  $F$  des ensembles. Leur **produit cartésien**  $E \times F$  est l'ensemble qui possède un élément, appelé couple  $(x, y)$  pour chaque  $x \in E$  et chaque  $y \in F$ , avec la convention que, pour tous  $x, x' \in E$  et tous  $y, y' \in F$ ,

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x') \text{ et } (y = y').$$

**Exemple 34.**

Plus généralement, étant donnés des ensembles  $E_1, \dots, E_n$ , on définit leur produit  $E_1 \times \dots \times E_n$  comme l'ensemble qui possède un élément, appelé  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  pour chaque  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ , avec la même convention. On note  $E^n$  le produit de  $n$  copies de  $E$ .

**Exemple 35.**

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un élément du produit  $E_1 \times \dots \times E_n$ . On appelle  $x_j$  sa  $j$ -ème coordonnée, ou sa  $j$ -ème composante, ou sa *projection sur le  $j$ -ème facteur*.

Soient  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles finis. Si  $N_i$  est le nombre d'éléments de  $E_i$ , alors le nombre d'éléments de  $E_1 \times \dots \times E_n$  est le produit  $N_1 \dots N_n$ .

## 1.5 Applications

### 1.5.1 Définitions

**Définition 36.** Une application, c'est deux ensembles  $E$  (l'ensemble de départ ou de définition) et  $F$  (l'ensemble d'arrivée) et un procédé  $f$  pour associer à chaque élément  $x$  de  $E$  un élément de  $F$  noté  $f(x)$ . Lorsque l'espace d'arrivée  $F = \mathbf{R}$ , on parle souvent **de fonction**.

Au lieu de dire

*soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$*

On dit souvent

*Soit une application  $f : E \rightarrow F$ .*

Ou encore

$$E \xrightarrow{f} F$$

**Exemple 37.** — La fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \sin x$ . Sous-entendu  $F = \mathbf{R}$ .

- La fonction  $f$  définie sur  $]0, 1[$  par  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ . Sous-entendu  $F = \mathbf{R}$ .
- L'application identique  $\text{id}_E : E \rightarrow E$ , définie par  $\text{id}_E(x) = x$ .
- La fonction caractéristique ou fonction indicatrice  $c_A : E \rightarrow \{0, 1\}$  d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$ , définie par  $c_A(x) = 1$  si  $x \in A$ ,  $c_A(x) = 0$  sinon.
- L'application  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  appelée conjugaison, qui, à un nombre complexe  $z = x + iy$  associe son conjugué  $\bar{z} = x - iy$ .
- Une application de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$  (resp.  $\mathbf{C}$ ) s'appelle une suite de réels (resp. de complexes), et on note volontiers  $u_n$  au lieu de  $f(n)$ . Par exemple,  $u_n = \frac{1}{n+1}$ .

### 1.5.2 Graphe

Le **graphe** d'une application  $f : E \rightarrow F$  est le sous-ensemble  $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$  du produit  $E \times F$ .

**Exemple 38.** La courbe représentative d'une fonction définie sur une partie de  $\mathbf{R}$  est le graphe de cette fonction.

Une courbe représentative coupe chaque droite parallèle à l'axe  $Oy$  en au plus un point. Un cercle n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction.

### 1.5.3 Restriction, prolongement

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application entre ensembles et  $A \subset E$  une partie de  $E$ . La **restriction** de  $f$  à  $A$  est l'application  $f|_A : A \rightarrow F$  définie par  $f|_A(x) = f(x)$  pour  $x \in A$ .

**Exemple 39.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par  $f(x) = x^2$ . Elle n'est pas croissante, mais sa restriction à  $[0, +\infty[$  est croissante, sa restriction à  $] -\infty, 0]$  est décroissante.

**Prolonger**  $f : E \rightarrow F$  à des ensembles  $E'$  contenant  $E$  et  $F'$  contenant  $F$ , c'est trouver une application  $g : E' \rightarrow F'$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = g(x)$ .

**Exemple 40.** Soit  $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Sa courbe représentative suggère fortement de la prolonger à  $\mathbf{R}$  entier en posant  $g(0) = 1$ . Pourquoi ?

#### 1.5.4 Composition d'applications

**Définition 41.** Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow H$  sont des applications, on définit l'**application composée**  $g \circ f : E \rightarrow H$  par  $g \circ f(x) = g(f(x))$ , pour  $x \in E$ .

**Exemple 42.** Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $g(y) = \sin y$ . Alors  $g \circ f(x) = \sin(\sqrt{x})$  est définie sur  $\mathbf{R}_+$  et n'est pas périodique.  $f \circ g(y) = \sqrt{\sin x}$  est une fonction périodique, définie seulement sur une réunion d'intervalles. Par conséquent,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

**Proposition 43.** La composition des applications est associative, i.e. si  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ , alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

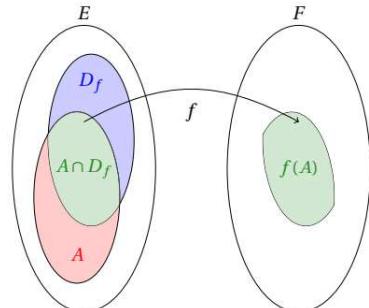
qu'on peut donc noter  $h \circ g \circ f$ .

**Preuve.** Les deux applications composées ont même ensemble de départ  $E$  et même ensemble d'arrivée  $H$ . Si  $x \in E$ ,  $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ . ■

#### 1.5.5 Image d'une partie

**Définition 44.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application et  $A \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ , son image (aussi appelée **image directe**) est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\}$$

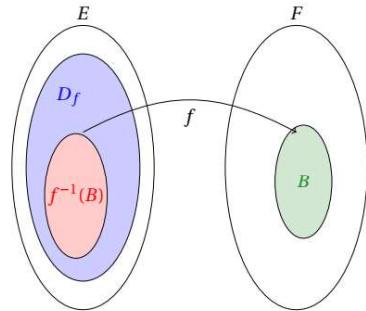


**Remarque 45.** On a évidemment  $f(\emptyset) = \emptyset$ .

### 1.5.6 Image réciproque d'une partie

**Définition 46.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application et  $B \subset F$  un sous-ensemble de  $A$ , son **image réciproque** est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



**Remarque 47.** Attention à ne pas confondre l'image réciproque de  $B$ , qui existe toujours, avec l'image de  $B$  par  $f^{-1}$ , qui n'existe que si  $f$  est une bijection. Ici on ne suppose rien sur  $f$ .

**Remarque 48.** On a :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ pour toute partie } A \text{ de } E$$

et

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \text{ pour toute partie } B \text{ de } F.$$

En effet, si  $x \in A$ , alors  $y = f(x) \in f(A)$  et donc  $x \in f^{-1}(f(A))$ , d'où la première inclusion.

Si  $y \in f(f^{-1}(B))$ , il existe alors  $x \in f^{-1}(B)$  tel que  $y = f(x)$ . Or la relation  $x \in f^{-1}(B)$  signifie que  $f(x) \in B$ , c'est à dire que  $y = f(x) \in B$ , d'où la deuxième inclusion.

### 1.5.7 Applications injectives

**Définition 49.** On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est **injective** si, pour tous  $x, y \in E$ ,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

Ou bien encore l'implication équivalente :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Si  $f$  est injective, on dit que  $f$  est une **injection** de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque 50.** Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis et s'il existe une application injective de  $E$  dans  $F$ , alors  $E$  a moins d'éléments que  $F$ .

### 1.5.8 Applications surjectives

**Définition 51.** On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est **surjective** si, pour tout  $y \in F$ , il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Autrement dit,  $f$  est surjective si et seulement si  $f(E) = F$ .

Si  $f$  est surjective, on dit que  $f$  est une **surjection** de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque 52.** Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis et s'il existe une application surjective de  $E$  dans  $F$ , alors  $E$  a plus d'éléments que  $F$ .

### 1.5.9 Applications bijectives

**Définition 53.** On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est **bijective** si, pour tout  $y \in F$ , il existe un et un seul  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Autrement dit,  $f$  est bijective si et seulement si  $f$  est à la fois injective et surjective.

Si  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est une **bijection** entre  $E$  et  $F$ .

**Exemple 54.** Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , où  $A \subset \mathbf{R}$ , est bijective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèle à l'axe  $Ox$  en exactement un point. Une fonction affine non constante est bijective.

**Remarque 55.** Si  $E$  et  $F$  sont des ensembles finis et s'il existe une application bijective de  $E$  dans  $F$ , alors  $E$  a autant d'éléments que  $F$ .

**Définition 56.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective. Sa réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est définie par l'assertion

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$

**Théorème 6.** 1. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective. Alors il existe une application unique  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ . Cette application  $g$ , appelée **application réciproque** (ou inverse) de  $f$ , sera notée  $f^{-1}$ .

2. Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications bijectives. Alors l'application composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

*Démonstration.* 1. Considérons l'application  $g : F \rightarrow E$  définie par  $g(y) = x$ , où  $x$  est l'unique élément de  $E$  tel que  $y = f(x)$ . L'application  $g$  est bien définie, et on a  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ . En effet, pour tout  $x \in E$ , on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = id_E(x).$$

D'autre part, pour  $y \in F$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  (car  $f$  est bijective) et on a

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id_F(y).$$

Soit  $g_0$  une autre application de  $F$  dans  $E$  vérifiant les mêmes propriétés que  $g$ , montrons que  $g = g_0$ , ce qui prouvera l'unicité de  $g$ . Pour tout  $y \in F$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$  et on aura  $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = id_E(x) = (g_0 \circ f)(x) = g_0(f(x)) = g_0(y)$ .

2. Pour vérifier que  $g \circ f$  est bijective il suffit de montrer que pour tout  $z \in G$ , il existe un seul  $x \in E$  tel que  $z = (g \circ f)(x)$ . Soit  $z \in G$ , comme  $g$  est bijective, il existe donc un unique  $t \in F$  tel que  $z = g(t)$ . L'application  $f$  étant aussi bijective, il existe un unique  $x \in E$  tel que  $t = f(x)$ . De là on déduit qu'il existe un seul  $x \in E$  tel que  $z = g(t) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ . Enfin, il est facile de vérifier que

$$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = id_G$$

et

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = id_E,$$

donc, d'après le 1), on a  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

■