Chapitre 3 : Travail et Energie d'un point matériel

I) Introduction :

On a déjà vu que la quantité de mouvement est conservée pour un système isolé. L'objet de ce cours est de voir dans quels cas l'énergie est conservée.

II) Travail et puissance d'une force :

2.1) Travail d'une force :

Le travail d'une force $\vec{F}$ durant son déplacement du point A au point B est donné par :

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} \quad ; \; [W_A^B(F)] = \text{Joule } (J)$$

Cas des coordonnées cartésiennes :

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

$d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Cas des coordonnées polaires :

$\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta$

$d\vec{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_{(r_A, \theta_A)}^{(r_B, \theta_B)} F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta.$$

Cas où la force $\vec{F}$ est constante :

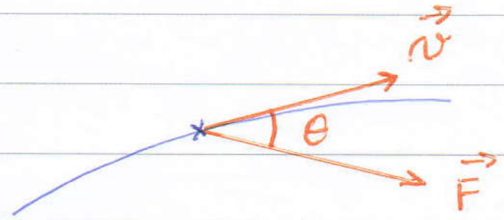
$$W_A^B(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \, \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{F}})$$

* Si $W_A^B(\vec{F}) > 0$, le travail est dit moteur.
* Si $W_A^B(\vec{F}) < 0$, le travail est dit résistant.

2.2) Puissance d'une force :

Soit un mobile de masse m, animé de la vitesse $\vec{v}$ et soumis à la force $\vec{F}$. La puissance de la force $\vec{F}$ est donnée par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \|\vec{F}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}})$$



* La force est dite motrice si $\theta < \pi/2$
* La force est dite résistante si $\theta > \pi/2$
* La puissance de la force est nulle si $\theta = \pi/2$

* $[P] = \text{Watt } (W)$

2.3) Relation entre le travail et la puissance

Puissance moyenne : $P_m = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P = \dfrac{dW}{dt}$

* $1W = \dfrac{1J}{1s}$

III) Energie cinétique :

3.1) Définition :

On appelle énergie cinétique d'une particule de masse m, animée de la vitesse $\vec{v}$, la quantité scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

3.2) Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'une particule entre deux positions A et B, égale au travail de la résultante des forces appliquées sur cette particule :

$$E_{c_B} - E_{c_A} = \Delta E_{c_A}^{\ B} = W_A^B(\vec{F})$$

$\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées sur la particule.

IV) Energie potentielle:

4.1) Exemples :

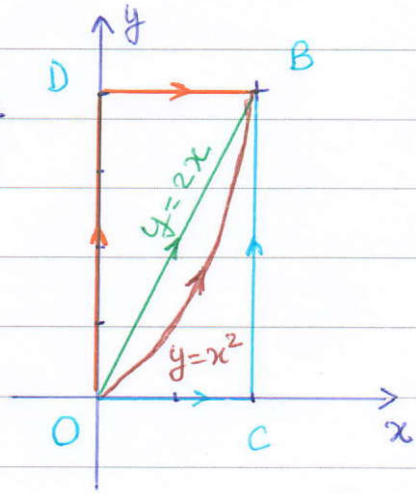
Exemple 1: Calculer le travail de la force $\vec{F_1} = (y^2 - x^2)\vec{i} + 3xy\,\vec{j}$ entre les position $O(0,0)$ et $B(2,4)$ dans les cas suivants:

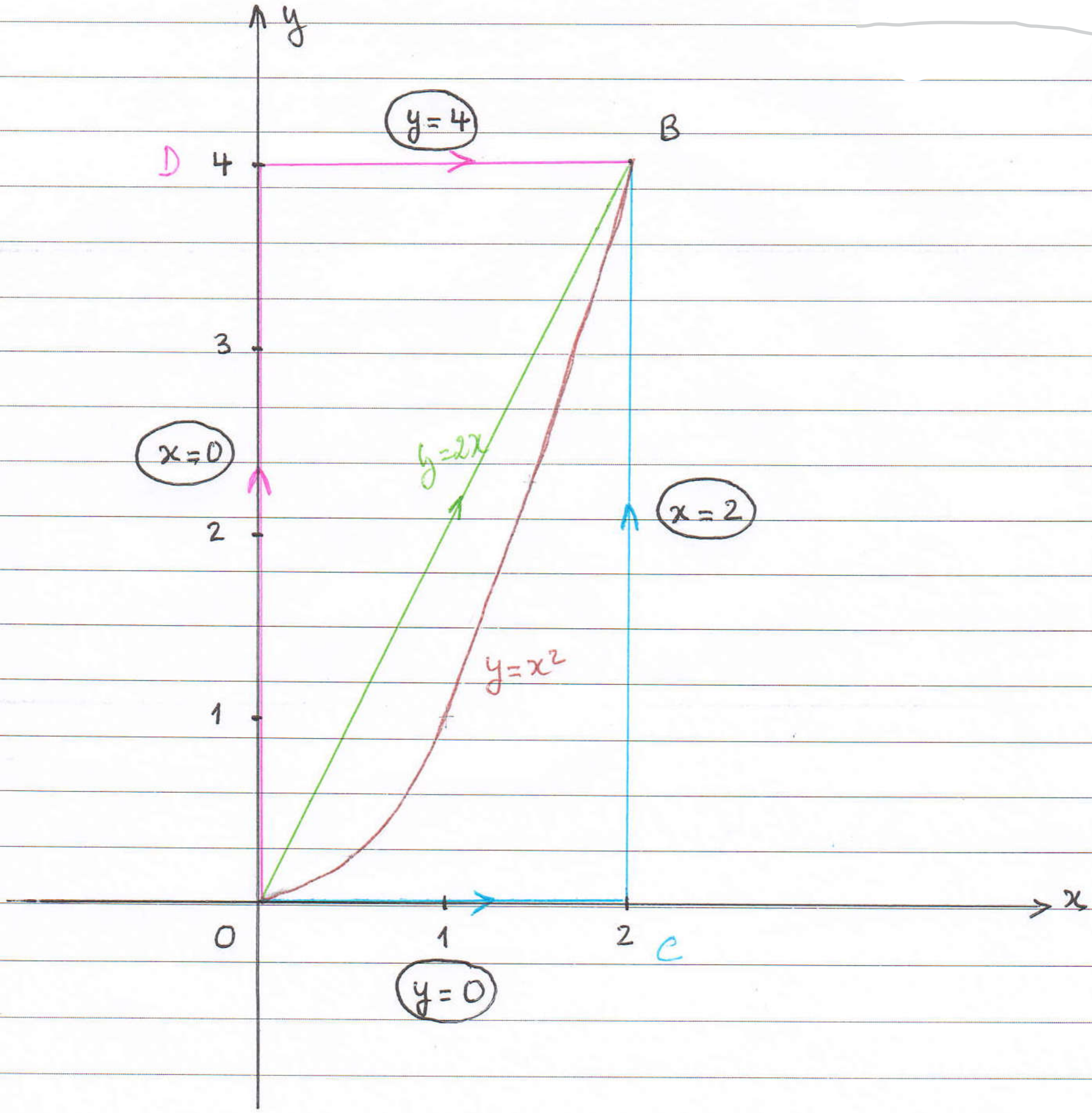
1er cas : $O(0,0) \longrightarrow C(2,0) \longrightarrow B(2,4)$

2eme cas : $O(0,0) \longrightarrow D(0,4) \longrightarrow B(2,4)$

3eme cas : suivant la trajectoire : $y = 2x$

4eme cas : suivant la trajectoire : $y = x^2$





y
y = 4
B
D
4
3
x = 0
y = 2x
x = 2
2
y = x²
1
x
O
1
2
C
y = 0

Réponse :

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \int_0^B \vec{F_1}\cdot d\vec{OM} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (y^2-x^2)\,dx + 3xy\,dy$$

1er cas : $W_0^B(\vec{F_1}) = W_0^C(\vec{F_1}) + W_C^B(\vec{F_1})$

$$\Rightarrow W_0^B(\vec{F_1}) = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \underbrace{(y^2-x^2)\,dx + 3x\cancel{y}^{\,0}\,dy}_{y=0} + \int_{(2,0)}^{(2,4)} \underbrace{(y^2-x^2)\cancel{dx}^{\,0} + 3xy\,dy}_{x=2}$$

$$= \int_0^2 -x^2\,dx + \int_0^4 3\times 2\times y\,dy = -\int_0^2 x^2\,dx + \int_0^4 6y\,dy$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}\right)_0^2 + \left(3y^2\right)_0^4 = -\frac{8}{3} + 48$$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \frac{136}{3}\ J$$

2eme cas : $W_0^B(\vec{F_1}) = W_0^D(\vec{F_1}) + W_D^B(\vec{F_1})$

$$\Rightarrow W_0^B(\vec{F_1}) = \int_{(0,0)}^{(0,4)} \underbrace{(y^2-x^2)\cancel{dx}^{\,0} + 3\cancel{x}^{\,0}y\,dy}_{x=0} + \int_{(0,4)}^{(2,4)} \underbrace{(y^2-x^2)\,dx + 3xy\,\cancel{dy}^{\,0}}_{y=4}$$

$$= \int_0^2 (16-x^2)\,dx = \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)_0^2 = 32 - \frac{8}{3}$$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \frac{88}{3}\ J$$

3eme cas : $y = 2x \Rightarrow dy = 2\,dx$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (y^2-x^2)\,dx + 3xy\,dy = \int_0^2 \left(\underbrace{4x^2}_{y^2} - x^2\right)dx + 3x\,\underbrace{2x}_{y}\,\underbrace{2\,dx}_{dy}$$

$$= \int_0^2 3x^2\,dx + 12x^2\,dx = \int_0^2 15x^2\,dx = \left(\frac{15}{3}x^3\right)_0^2 = 40\ J$$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = 40\ J$$

4^{eme} cas : $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (y^2 - x^2)\,dx + 3xy\,dy = \int_0^2 \Big(\underbrace{x^4}_{y^2} - x^2\Big)\,dx + 3x\underbrace{x^2}_{y}\underbrace{(2x\,dx)}_{dy}$$

$$= \int_0^2 \left(x^4 - x^2 + 6x^4\right)dx = \int_0^2 \left(7x^4 - x^2\right)dx$$

$$= \left(\frac{7}{5}x^5 - \frac{x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{7\times 32}{5} - \frac{8}{3} = \frac{632}{15}\ J$$

$$W_0^B(\vec{F_1}) = \frac{632}{15}\ J$$

conclusion : $W_0^B(\vec{F_1})$ dépend du parcours suivi.

Exemple 2 : Reprendre les mêmes questions que dans le cas de l'exemple 1 avec $\vec{F_2} = \left(\frac{3}{2}y^2 - x^2\right)\vec{i} + 3xy\,\vec{j}$.

Reponse :

$$W_0^B(\vec{F_2}) = \int_0^B \vec{F_2}\cdot d\vec{OM} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} \left(\frac{3}{2}y^2 - x^2\right)dx + \underbrace{3xy\,dy}_{x\,\underbrace{3y\,dy}_{d\left(\frac{3}{2}y^2\right)}}$$

$$= \int_{(0,0)}^{(2,4)} \frac{3}{2}y^2\,dx - \underbrace{x^2\,dx}_{d\left(\frac{x^3}{3}\right)} + 3xy\,dy$$

$$\frac{d\left(\frac{3}{2}y^2\right)}{dy} = 3y \Rightarrow d\left(\frac{3}{2}y^2\right) = 3y\,dy$$

$$W_0^B(\vec{F_2}) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} \underbrace{\left(\frac{3}{2}y^2\right)dx + x\,d\left(\frac{3}{2}y^2\right)}_{d\left(\frac{3}{2}xy^2\right)} + d\left(-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$W_0^B(\vec{F_2}) = \int_{(0,0)}^{(2,4)} d\left(\frac{3}{2}xy^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}xy^2 - \frac{x^3}{3}\right)_{(0,0)}^{(2,4)} = \frac{136}{3}\ J$$

Conclusion : $W_O^B(\vec{F_2})$ est indépendant du parcours suivi. Il dépend que de la position initiale et la position finale.

4.2) Forces conservatives et forces non conservatives :

* Une force $\vec{F}$ est dite conservative si son travail entre deux positions A et B ne dépend pas du chemin suivi par le système en mouvement, mais il dépend uniquement des positions initiale A et finale B du système :

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dOM} = \text{Constante}$$

Exemple : La force $\vec{F_2} = \left(\frac{3}{2}y^2 - x^2\right)\vec{i} + 3xy\vec{j}$.

* Une force $\vec{F}$ est dite non conservative si son travail dépend du chemin suivi.

Exemple : La force $\vec{F_1} = (y^2 - x^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$.

Eclaircissement :

* Une force $\vec{F}$ est conservative $\Rightarrow$ quelque soit le parcours suivi,

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dOM} = \text{constante}$$

On peut dire encore que quelque soit le parcours fermé choisi, le travail de la force $\vec{F}$ sur ce parcours fermé est nul :

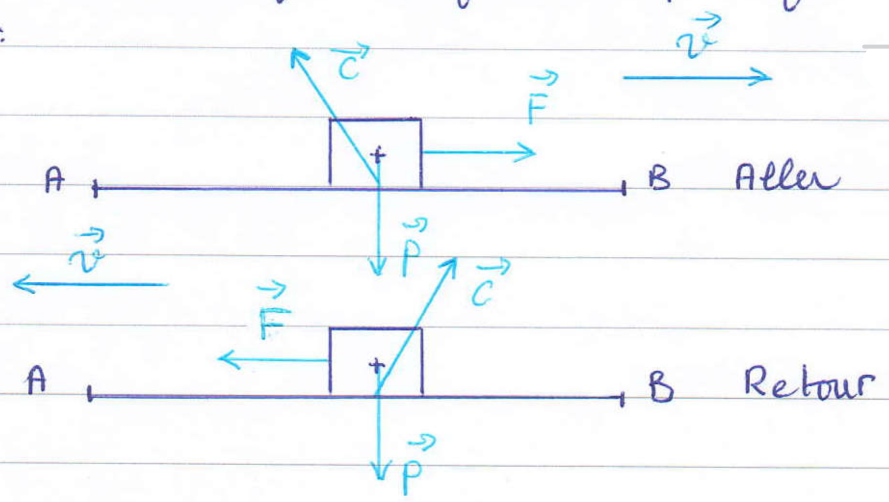
$$\oint \vec{F}.\vec{dOM} = 0$$

* Dans le cas d'une force $\vec{F}$ non conservative, il existe au moins un parcours fermé pour lequel le travail de la force $\vec{F}$ est non nul.

Exemple : Le travail de la force de frottement pour faire un aller-retour est non nul :

$C_\perp = mg$

$C_{\parallel} = \mu_d mg$



$$W_A^B(\vec{C}) = \vec{C}\cdot\vec{AB} = -C_{\parallel}(AB) = -\mu_d mg(AB)$$

$$W_B^A(\vec{C}) = \vec{C}\cdot\vec{BA} = -C_{\parallel}(AB) = -\mu_d mg(AB)$$

$$W_A^A(\vec{C}) = W_A^B(\vec{C}) + W_B^A(\vec{C}) = -2\mu_d mg(AB) \neq 0$$

Conclusion : $\vec{C}$ est une force non conservative.

4.3) Energie potentielle :

Dans le cas d'une force conservative, on peut exprimer son travail en fonction de la variation d'une grandeur physique appelée énergie potentielle :

$$W_A^B(\vec{F}_{conservative}) = \text{Constante} = Ep_A - Ep_B = -(Ep_B - Ep_A) = -\Delta Ep_A^B$$

$$\Rightarrow W_A^B(\vec{F}_{conservative}) = -\Delta Ep_A^B$$

Définition :

L'énergie potentielle est un énergie d'état ou de position. On dit qu'un corps ou système possède de l'énergie potentielle lorsqu'il peut fournir du travail

Exemples :

i) Energie potentielle gravitationnelle

ii) Energie potentielle élastique

iii) Energie potentielle électrique

Remarque :

La force conservative est dite aussi force dérivant d'un potentiel.

Dans le cas d'un déplacement élémentaire :

$$W_A^B(\vec{F}_C) = -\Delta E_{p_A}^{B} \Rightarrow \delta W = \vec{F}.\vec{doM} = -dEp$$

$$\Rightarrow dEp = -\vec{F}.\vec{doM}$$

$$\Rightarrow Ep = -\int \vec{F}.\vec{doM}$$

* Dans le cas d'un mouvement rectiligne suivant l'axe $x'Ox$:

$$dEp = -F\,dx \Rightarrow F = -\frac{dEp}{dx}$$

$$Ep = -\int F\,dx$$

* Dans le cas d'un mouvement rectiligne suivant la direction radiale :

$$dEp = -F\,dr \Rightarrow F = -\frac{dEp}{dr}$$

$$Ep = -\int F\,dr$$

En pratique :

$$\boxed{Ep = -\int F\,dx \Leftrightarrow F = -\frac{dEp}{dx}} \quad \boxed{Ep = -\int F\,dr \Leftrightarrow F = -\frac{dEp}{dr}}$$

Energie potentielle gravitationnelle :

La force d'interaction gravitationnelle est donnée par :

$$\vec{F} = -m\frac{Gm_T}{r^2}\vec{u}_r = -m\underbrace{\frac{Gm_T}{R_T^2}}_{g_0}\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}_r = -mg_0\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}_r$$

L'énergie potentielle gravitationnelle correspondante à cette force est donnée par :

$$E_p(r) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{OM} = -\int -mg_0\frac{R_T^2}{r^2}dr = -mg_0R_T^2\int -\frac{dr}{r^2}$$

Rappel : $\int -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r} + cste$

$$\boxed{E_p(r) = -mg_0\frac{R_T^2}{r} + cste}$$

En supposant que l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle à l'infini :

$$E_p(r\to\infty) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + cste \Rightarrow cste = 0$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{E_p(r) = -mg_0\frac{R_T^2}{r}}$

Energie potentielle gravitationnelle au voisinage de la surface de la Terre : $h \ll R_T$

où : R_T est le rayon moyen de la Terre et h est la hauteur par rapport à la surface de la Terre.

$$E_p(r) = -mg_0\frac{R_T^2}{r} + cste = -mg_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)} + cste \quad \text{ou } r = R_T + h$$

$$\Rightarrow E_p(h) = -mg_0\frac{R_T^2}{R_T}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)} + cste = -mg_0R_T\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1} + cste$$

$h << R_T \Rightarrow \frac{h}{R_T} << 1$

Rappel : $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ avec $\varepsilon << 1$

Donc : $\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{h}{R_T}$

$$E_p(h) = -m g_0 R_T \left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1} + cte \simeq -m g_0 R_T \left(1-\frac{h}{R_T}\right) + cte$$

$$\Rightarrow E_p(h) = m g_0 h + \underbrace{\left(-m g_0 R_T + cte\right)}_{cte' \text{ (nouvelle constante)}}$$

En supposant que $E_p(h=0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + cte' \Rightarrow cte' = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(h) = m g_0 h}$$

Energie potentielle élastique :

La force élastique est une force de rappel. Elle est donnée par :

$$\vec{T} = -K \vec{OM}$$

L'énergie potentielle élastique correspondante à cette force est donnée par :

$$E_p = -\int \vec{T} \cdot d\vec{OM} = -\int -K \vec{OM} \cdot d\vec{OM} = K \int d\left(\frac{OM^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2} K (OM)^2}$$ En supposant que la constante d'intégration est nulle.

Remarque : $OM = \Delta l$ est l'étirement ou la compression du ressort ou de l'élastique.

V) Energie mécanique totale :

5.1) Définition :

L'énergie mécanique totale E_T d'un système est définie comme étant la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p,

$$E_T = E_c + E_p$$

5.2) Théorème de l'énergie mécanique totale :

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_{c_A}^{B} = W_A^B(\vec{F}_c) + W_A^B(\vec{F}_{NC}) \quad (1)$$

Avec : $\vec{F}_c$ est la résultante des forces conservatives agissant sur le système
$\vec{F}_{NC}$ est la résultante des forces non conservatives agissant sur le système.

Pour les forces conservatives, on peut exprimer leur travail en fonction de leur énergie potentielle correspondante ;

$$W_A^B(\vec{F}_c) = -\Delta E_{p_A}^{B} \quad (2)$$

En remplaçant l'expression (2) dans l'expression (1), on obtient :

$$\Delta E_{c_A}^{B} = -\Delta E_{p_A}^{B} + W_A^B(\vec{F}_{NC}) \Rightarrow \underbrace{\Delta E_{c_A}^{B} + \Delta E_{p_A}^{B}}_{\Delta E_{T_A}^{B}} = W_A^B(\vec{F}_{NC})$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_{T_A}^{B} = E_{T_B} - E_{T_A} = W_A^B(\vec{F}_{NC})}$$

Dans le cas où le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, alors son énergie mécanique totale sera conservée, $\Delta E_T = 0$