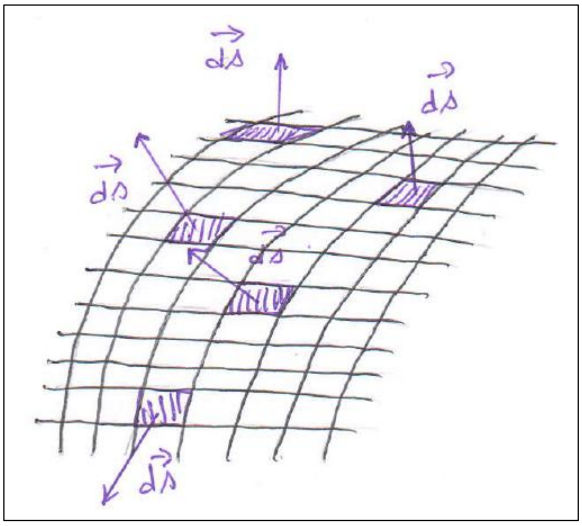
II.7. Théorème de Gauss

II.7.1. Représentation vectorielle d'une surface

Le vecteur surface élémentaire $d\vec{s}$ est défini comme suit :



- Point d'application : Point P centre de la surface élémentaire ds.
- Direction : La droite perpendiculaire à ds et passant par le point P.
- Sens : Il est arbitraire, mais le même pour tous les éléments de surface ds.
- Module : La valeur de la surface ds.

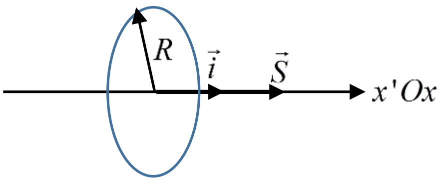
Remarque :

Dans le cas d'une surface fermée, le sens de $d\vec{s}$ est en général de la face interne, dite négative, vers la face externe, dite positive.

Exemples :

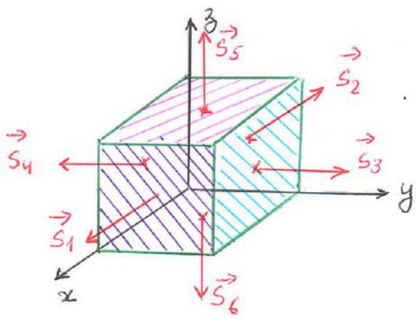
1. Un disque de rayon R :

   $\vec{S} = \pi R^2 \vec{i}$.



2. Un cube de côté a :

   $\vec{S}_1 = a^2 \vec{i}$
   $\vec{S}_2 = -a^2 \vec{i}$
   $\vec{S}_3 = a^2 \vec{j}$
   $\vec{S}_4 = -a^2 \vec{j}$
   $\vec{S}_5 = a^2 \vec{k}$
   $\vec{S}_6 = -a^2 \vec{k}$



II.7.2. Flux d'un vecteur à travers une surface

Par définition, le flux élémentaire $d\phi$ d'un vecteur quelconque $\vec{A}$ à travers la surface élémentaire $d\vec{s}$ est donné par :

$$d\phi = \vec{A}.d\vec{s}.$$

Ainsi, le flux $\phi_s\left(\vec{A}\right)$ du vecteur $\vec{A}$ à travers la surface $\vec{S}$ est donné par :

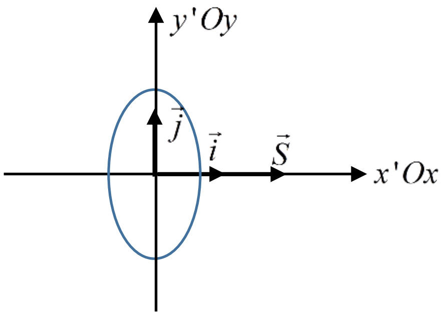
$$\phi_s\left(\vec{A}\right) = \iint_s \vec{A}.d\vec{s}.$$

Remarque :

"$\iint_s$ " signifie qu'on intègre sur la surface S.

Exemple :

Calculer le flux du vecteur $\vec{A}$ à travers la surface d'un disque de rayon R dans les cas suivants :



a) $\vec{A} = A\vec{i}$.

b) $\vec{A} = A\,\vec{j}$.

c) $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j}$.

où A, A_x et A_y sont des grandeurs constantes sur la surface du disque.

Réponse :

$\vec{S} = \pi R^2\,\vec{i}$.

$$\phi_s\left(\vec{A}\right) = \iint_s \vec{A}.d\vec{s} = \vec{A}.\iint_s d\vec{s} = \vec{A}.\vec{S}.$$

a) $\phi_s\left(\vec{A}\right) = \left(A\vec{i}\right).\left(\pi R^2\vec{i}\right) = \pi R^2 A$.

b) $\phi_s\left(\vec{A}\right) = \left(A\vec{j}\right).\left(\pi R^2\vec{i}\right) = 0$.

c) $\phi_s\left(\vec{A}\right) = \left(A_x\vec{i} + A_y\,\vec{j}\right).\left(\pi R^2\vec{i}\right) = \pi R^2 A_x$.

II.7.3. Théorème de Gauss

Intérêt :

Il nous permet de calculer le champ électrique de façon très simple, mais dans des situations bien précises.

Histoire :

En 1840, Gauss a calculé le flux total du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S. Il a abouti au théorème suivant :

Théorème :

Dans le vide, le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface fermée quelconque S (appelée surface de Gauss), est égal à $\frac{1}{\varepsilon_0}$ fois la charge électrique $Q_{\text{intérieur}}$ contenue à l'intérieur de cette surface,

$$\phi_s\left(\vec{E}\right) = \oint\!\!\oint_s \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_{\text{intérieur}}}{\varepsilon_0},$$

où ε_0 est la permittivité du vide et la notation "$\oint\!\!\oint_s$ " signifie qu'on intègre sur une surface fermée.

Remarques :

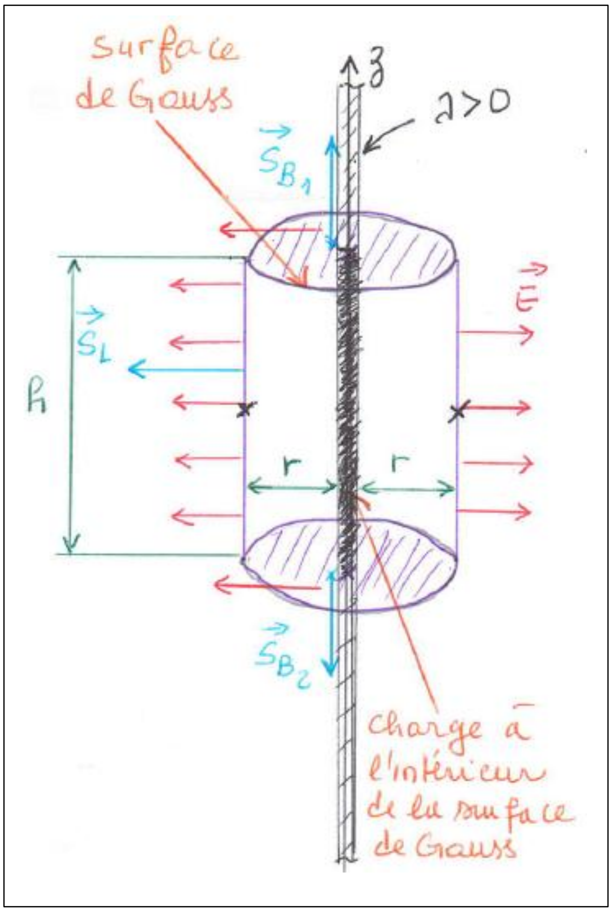
- **a)** Vu la relation intégrale entre le flux et le vecteur champ électrique, il est bien clair qu'on ne peut appliquer le théorème de Gauss que dans des situations bien précises, où nous avons une symétrie dans la distribution des charges électriques.
- **b)** La surface de Gauss est une surface fictive passant par le point dans lequel on veut calculer le champ électrique.
- **c)** Le choix de la surface de Gauss est tel que :
  - i) Le module du vecteur champ électrique soit constant sur la surface de Gauss choisie ou une partie de cette surface. De plus, $\vec{E}$ doit être parallèle à $d\vec{s}$ $\left(\vec{E}\,//\,d\vec{s}\right)$.
  - ii) Le vecteur champ électrique soit perpendiculaire au vecteur surface de Gauss ou une partie de cette surface (*i.e.*, le vecteur champ électrique parallèle à la surface).

II.7.4. Applications

Application 1 : Calcul du champ électrique $\vec{E}$ créé par un fil infini chargé avec une densité de charge linéique λ uniforme (constant)

Réponse :

Pour raison de symétrie, $\vec{E}$ est radial, c'est-à-dire que $\vec{E}$ est perpendiculaire au fil et il dépend que de r, distance entre le fil et le point dans lequel on veut calculer le champ électrique $\vec{E}$.



Ainsi, la surface de Gauss considérée est un cylindre de rayon r et d'hauteur h :

Surface de Gauss = Surface de base 1 $\vec{S}_{B1}$ + Surface de base 2 $\vec{S}_{B2}$ + Surface latérale $\vec{S}_L$.

On applique le théorème de Gauss :

$$\phi_S\left(\vec{E}\right)=\oiint_S \vec{E}.d\vec{s}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi_S\left(\vec{E}\right)=\phi_{S_{B1}}\left(\vec{E}\right)+\phi_{S_{B2}}\left(\vec{E}\right)+\phi_{S_L}\left(\vec{E}\right)$$

$$=\underbrace{\cancel{\iint_{S_{B1}}\vec{E}.d\vec{s}}}_{\vec{E}\perp\vec{S}_{B1}}+\underbrace{\cancel{\iint_{S_{B2}}\vec{E}.d\vec{s}}}_{\vec{E}\perp\vec{S}_{B2}}+\underbrace{\iint_{S_L}\vec{E}.d\vec{s}}_{\substack{E\text{ est constant sur}\\ \text{la surface latérale}}}$$

$$\Rightarrow \phi_S\left(\vec{E}\right)=\bar{E}\,S_L=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$S_L = 2\pi r h$ et $Q_{\text{int}} = \lambda h.$

$\Rightarrow \bar{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$, où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire radial.

- Si $\lambda>0$, $\vec{E}$ est sortant par rapport au fil $\left(\bar{E}>0\right)$.
- Si $\lambda<0$, $\vec{E}$ est rentrant par rapport au fil $\left(\bar{E}<0\right)$.

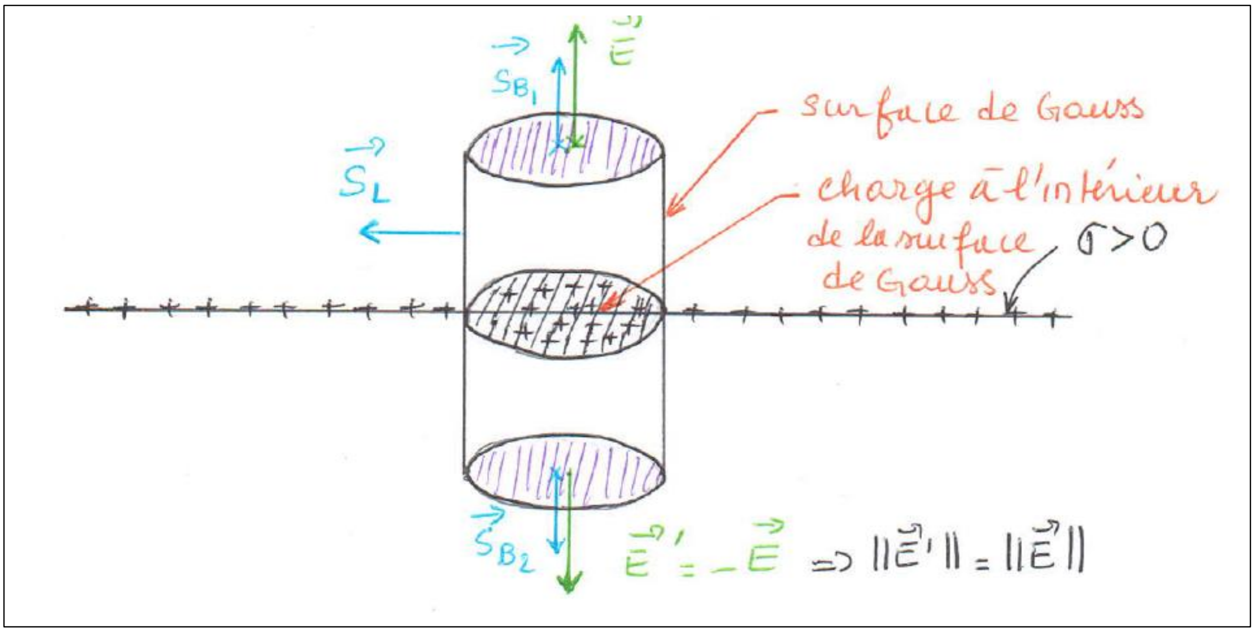
Application 2 : Calcul du champ électrique $\vec{E}$ créé par un plan infini chargé avec une densité de charge surfacique σ uniforme (constant)

Réponse :

Pour raison de symétrie, le champ électrique est perpendiculaire au plan infini.

Ainsi, on choisit comme surface de Gauss un cylindre centré par rapport au plan infini :

Surface de Gauss = Surface de base 1 $\vec{S}_{B1}$ + Surface de base 2 $\vec{S}_{B2}$ + Surface latérale $\vec{S}_L$.



On applique le théorème de Gauss : $\phi_S\left(\vec{E}\right) = \oiint_S \vec{E}.d\vec{s} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

$$\Rightarrow \phi_S\left(\vec{E}\right) = \phi_{S_{B1}}\left(\vec{E}\right) + \phi_{S_{B2}}\left(\vec{E}\right) + \phi_{S_L}\left(\vec{E}\right)$$

$$= \underbrace{\iint_{S_{B1}} \vec{E}.d\vec{s}}_{\substack{\vec{E}\text{ est constant}\\ \text{sur } S_{B1}}} + \underbrace{\iint_{S_{B2}} \vec{E}.d\vec{s}}_{\substack{\vec{E}\text{ est constant}\\ \text{sur } S_{B2}}} + \underbrace{\cancel{\iint_{S_L} \vec{E}.d\vec{s}}}_{\vec{E}\perp d\vec{S}_L}$$

$$\Rightarrow \phi_S\left(\vec{E}\right) = E\,S_{B1} + E\,S_{B2} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$S_{B1} = S_{B2}$ et $Q_{\text{int}} = \sigma S_{B1}$ $\quad\Rightarrow\quad E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

- Si $\sigma > 0$, $\vec{E}$ est sortant par rapport au plan.
- Si $\sigma < 0$, $\vec{E}$ est rentrant par rapport au plan.

Application 3 : Calcul du champ électrique $\vec{E}$ créé par une sphère de rayon R chargée avec une densité de charge surfacique σ uniforme (constant)

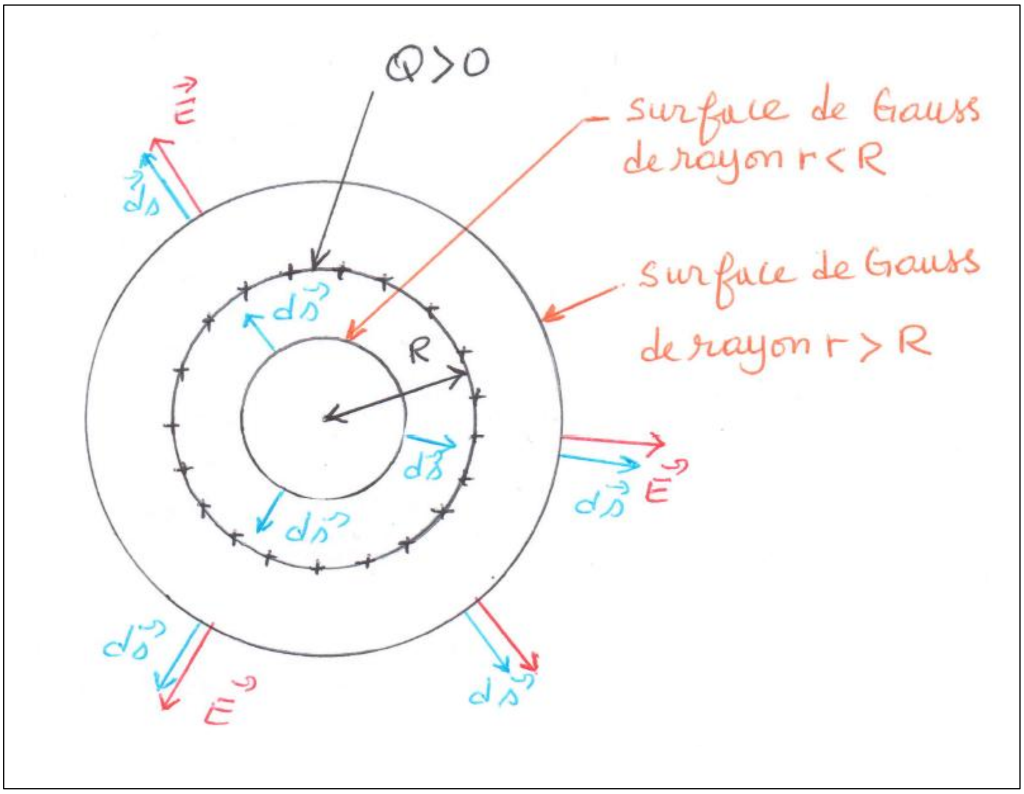
Réponse :

Rappel :

- Surface d'une sphère de rayon R : $S = 4\pi R^2$.
- $\sigma = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow Q = 4\pi R^2 Q$.

Pour raison de symétrie, le champ électrique $\vec{E}$ est radial et il dépend que de r (distance entre le centre de la sphère chargée et le point dans lequel on veut calculer $\vec{E}$).

Ainsi, on choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon r concentrique par rapport au sphère chargée.



On applique le théorème de Gauss : $\phi_S\left(\vec{E}\right) = \underbrace{\oiint_S \vec{E}.d\vec{s}}_{E\text{ est constant sur la surface de Gauss}} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{E}\,S = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ S = 4\pi r^2 \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \bar{E} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2}}.$$

- Si $r < R: \quad Q_{\text{int}} = 0 \ \Rightarrow \ \bar{E} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{E} = \vec{0}$.
- Si $r > R: \quad Q_{\text{int}} = Q \ \Rightarrow \ \bar{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ \Rightarrow \ \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire radial.

- Si $Q > 0$, $\vec{E}$ est sortant par rapport à la sphère chargée.
- Si $Q < 0$, $\vec{E}$ est rentrant par rapport à la sphère chargée.