 

# Corrigé de l'Examen final

Mme DJOUMAKH

8 avril 2021

**Les réponses non justifées ne sont pas notées.**

**Solution 1**

*Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$définie par*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

1. *L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?*
   (a) (1pt). *L'application $f$ n'est pas injective.(un raisonnement par contre exemple) En effet $f(-2, 1) = f(-1, 2) = 5$ alors que $(-2, 1) \neq (-1, 2)$.*
   (b) (1pt). *L'application $f$ n'est pas surjective.(un raisonnement par contre exemple) En effet pour $z = -5$ il n'existe aucun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telle que*
   $$-5 = x^2 + y^2 = f(x, y).$$
   (c) (0.5pt). *L'application $f$ n'est ni injective ni surjective donc $f$ n'est pas bijective.*
2. *Déterminer les ensembles :*
   (a) (0.5pt). $f(\{(0, 0)\}) = \{f(x, y), \quad (x, y) \in \{(0, 0)\}\} = \{f(0, 0) = 0\} = \{0\}$
   (b) (0.5pt). $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}\} = \{x^2 + y^2\}$ *et* $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_+$
   (c) (0.5pt). $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in \{0\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0\}$. *Et* $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. *Donc* $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$.
   (d) (0.5pt).$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in \{1\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. *Donc $f^{-1}(\{1\})$ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.*
   ***Remarque :*** *Il faut bien écrire un ensemble. Par exemple l'écriture* $f(\{(0, 0)\}) = f(0, 0) = 0$ ***est fausse***.
3. *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par*
   $$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t).$$
   *Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence*
   (a) (1pt). *On a* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow f(x, y) = f(x, y)$. *Par conséquent $\mathcal{R}$ est refléxive.*

(b) (1pt).

$$(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow x^2+y^2=z^2+t^2 \Rightarrow z^2+t^2=x^2+y^2 \Rightarrow (z,t)\mathcal{R}(x,y)$$

*Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.*

***Remarque :***

$\mathcal{R}$ *est symétrique* $\Leftrightarrow [(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)]$.

*Et* ***PAS*** $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow f(x,y)=f(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow f(x',y')=f(x,y)$ *donc*

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y')=(x',y')\mathcal{R}(x,y).$$

(c) (1pt)

$$\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(z,t) \\ (z,t)\mathcal{R}(x',y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z^2+t^2 \\ z^2+t^2=x'^2+y'^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=x'^2+y'^2 \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x',y').$$

*Donc $\mathcal{R}$ est transitive.*

*Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

4. *La classe de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et l'interprétation géométrique de $\overline{(a,b)}$*

(a) (1pt) *La classe de $(a,b)$*

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(a,b)\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=f(a,b)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=a^2+b^2\}\end{aligned}$$

(b) (1pt) *l'interprétation géométrique de $\overline{(a,b)}$ : $\overline{(a,b)}$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.*

5. $(0.5pt+0.5pt)$. *On trouve $f(1,2)=5$ et $f(2,1)=5$.*
$(1pt=0.5+0.5)$ *La relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. En effet $(2,1)\mathcal{R}(1,2)$ et $(1,2)\mathcal{R}(2,1)$ mais $(1,2)\neq(2,1)$.*

**Solution 2**

*Soit $G=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et soit $*$ la loi de composition interne définie sur $G$ par*

$$\forall (a,b),(c,d)\in G, \quad (a,b)*(c,d)=(ac, b+d\sqrt{a})$$

1. (1pt).*On a $(a,b)*(c,d)=(ac,b+d\sqrt{a})$et $(c,d)*(a,b)=(ca,d+b\sqrt{c})$. Il est clair que*

$$b+d\sqrt{a}\neq d+b\sqrt{c}$$

*On peut aussi donner un contre exemple. Donc $*$ n'est pas commutative.*

2. *Montrons que $(G,*)$ est un groupe.*

(a) $(1.5pt=0.75+0.75)$ *L'associativité : Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in G$*

$$((a,b)*(c,d))*(e,f)=(ac,b+d\sqrt{a})*(e,f)=(ace,b+d\sqrt{a}+f\sqrt{ac})$$

*Et*

$$\begin{aligned}(a,b)*((c,d)*(e,f)) &= (a,b)*(ce,d+f\sqrt{c}) = (ace, b+\left(d+f\sqrt{c}\right)\sqrt{a}) \\ &= (ace, b+d\sqrt{a}+f\sqrt{ac})\end{aligned}$$

*Alors $*$ est associative.*

(b) (1pt) *L'élément neute : Si* $(G,*)$ *admet un élément neutre* $(e,e')$ *; on aura pour tout* $(a,b) \in G$,

$$(a,b)*(e,e') = (e,e')*(a,b) = (a,b)$$

*à droite :*

$$(a,b)*(e,e') = (a,b) \Leftrightarrow (ae, b+e'\sqrt{a}) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} ae = a \\ b+e'\sqrt{a} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 \\ e' = 0 \end{cases}.$$

(0.5pt) *On vérifié ainsi que pour tout* $(a,b) \in G$ ,

$$(1,0)*(a,b) = (a,b).$$

(c) (1pt) *L'élément symétrique : Soit* $(a,b) \in G$, *on cherche* $(a',b') \in G$, *tel que* $(a,b)*(a',b') = (1,0)$. *On obtient le système :*

$$\begin{cases} aa' = 1 \\ b+b'\sqrt{a} = 0 \end{cases}$$

*Ce qui nous donne* $(a',b') = (\frac{1}{a}, \frac{-b}{\sqrt{a}})$.
(0.5pt) *On vérifie de même que*

$$(\frac{1}{a}, \frac{-b}{\sqrt{a}})*(a,b) = (1,0)$$

3. *On pose* $H = \{1\}\times\mathbb{Q} = \{(1,\frac{a}{b}), \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\}$. *Montrons que* $H$ *est un sous-groupe de* $G$.
   (a) (0.5pt) *L'élément neutre de* $(G,*)$,$(1,0) \in 1\times\mathbb{Q} = H$.
   (b) (1.5pt)*Soient* $(1,\frac{a}{b}),(1,\frac{a'}{b'}) \in H$. *Alors*

$$(1,\frac{a}{b})*(1,\frac{a'}{b'})^{-1} = (1,\frac{a}{b})*(1,-\frac{\frac{a'}{b'}}{\sqrt{1}}) = (1,\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'})$$

*Et comme* $\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$, *donc*

$$(1,\frac{a}{b})*(1,\frac{a}{b})^{-1} \in H.$$

(1.5pt = 0.75+0.75) *En cas ou utilise* $(a,b)*(a',b') \in H$ *et* $(a',b')^{-1} \in H$.

4. (1pt)*On a* $(1,\frac{a}{b})*(1,\frac{a'}{b'}) = (1,\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'})$, *et l'addition est commutative dans* $\mathbb{Q}$ *donc*

$$(1,\frac{a'}{b'})*(1,\frac{a}{b}) = (1,\frac{a}{b})*(1,\frac{a'}{b'}).$$

*Par conséquent* $(H,*)$ *est commutatif.*