Série TD n°2. Corrigé
Les fonctions primitives récursives

Exercice 1

1/ moins(x,0)=x-0=x=P_1^1 (x)

$$moins(x, y+1) = \begin{cases} x-(y+1) & \text{Si } x \geq y+1 \\ 0 & \text{Si } x < y+1 \end{cases} = \begin{cases} (x-y)-1 & \text{Si } x-y \geq 1 \\ 0 & \text{Si } x-y < 1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} (x-y)-1 & \text{Si } x-y > 0 \\ 0 & \text{Si } x-y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} moins(x,y)-1 & \text{Si } moins(x,y) > 0 \\ 0 & \text{Si } moins(x,y) = 0 \end{cases} =$$

$\text{pred}\big(moins(x,y)\big) = \text{pred}°P_2^3(x, moins(x,y), y)$ (Avec pred est la fonction prédécesseur)

Remarque

L'opération de soustraction "-" peut être remplacée par la fonction "moins" dans le cas où elle est positive. Par contre, si le résultat d'évaluation de l'opération "-" entre deux arguments est négative, la fonction "moins" entre ces mêmes arguments retourne la valeur nulle. Chose qui permet d'avoir une opération interne à IN contrairement à l'opération "-" qui n'est pas interne. Rappelons qu'on travaille sur les fonctions de IN^p dans IN.

2/ min(x,0)=0=Z_1(x)

$$min(x, y+1) = \begin{cases} x & \text{Si } x < y+1 \\ y+1 & \text{Si } y+1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} x & \text{Si } x-y < 1 \\ y+1 & \text{Si } x-y \geq 1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x & \text{Si } x-y \leq 0 \\ y+1 & \text{Si } x-y > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{Si } x-y \leq 0 \\ y & \text{Si } x-y > 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{Si } x-y \leq 0 \\ 1 & \text{Si } x-y > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{Si } x \leq y \\ y & \text{Si } x > y \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 0 & \text{Si } moins(x,y) = 0 \\ 1 & \text{Si } moins(x,y) > 0 \end{cases} = \min(x,y) + Sg(moins(x,y) =$$

$plus°(P_2^3, Sg°\text{moins}(P_1^3, P_3^3))(x, min(x,y), y)$

Remarque La même fonction peut être prouvée PR en n'utilisant rien que la règle de composition.

$$min(x,y) = \begin{cases} x & \text{Si } x < y \\ y & \text{Si } x \geq y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-0 & \text{Si } x < y \\ y+x-x & \text{Si } x \geq y \end{cases} = \begin{cases} x-0 & \text{Si } x < y \\ x-(x-y) & \text{Si } x \geq y \end{cases} = x - \begin{cases} 0 & \text{Si } x < y \\ x-y & \text{Si } x \geq y \end{cases}$$

$$= x - moins(x,y) = moins\big(x, moins(x,y)\big)$$

$$= moins°\big(P_1^2, moins°(P_1^2, P_2^2)\big)(x,y)$$

Et même d'autres constructions peuvent être trouvées pour cette même fonction.

Exercice 2

1/ $Abs(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{Si } x \geq y \\ y-x & \text{Si } y \geq x \end{cases} = \begin{cases} x-y & \text{Si } x-y \geq 0 \\ 0 & \text{Si } y-x \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{Si } x-y \geq 0 \\ y-x & \text{Si } y-x \geq 0 \end{cases} =$

$\begin{cases} x-y & \text{Si } x \geq y \\ 0 & \text{Si } y \geq x \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{Si } x \geq y \\ y-x & \text{Si } y \geq x \end{cases} = moins(x,y) + moins(y,x) =$

$plus(moins(x,y), moins(y,x)) = moins°\big(moins°(P_1^2, P_2^2), moins°(P_2^2, P_1^2)\big)(x,y)$

Exercice 3

1/ r2(0)=0 mod 2=0=C_0

$\mathrm{r2}(y+1) = (y+1) \bmod 2 = \begin{cases} 1 & \text{Si } y+1 \text{ est impair} \\ 0 & \text{Si } y+1 \text{ est pair} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{Si } y \text{ est pair} \\ 0 & \text{Si } y \text{ est impair} \end{cases} =$

$\begin{cases} 1 & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 0 \\ 0 & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 1 > 0 \end{cases} = \overline{\mathrm{Sg}}\big(\mathrm{r2}(y)\big) = \overline{\mathrm{Sg}}°\mathrm{P}_1^2(\mathrm{r2}(y), y)$

2/ q2(0)=0 div 2=0

$\mathrm{q2}(y+1) = (y+1) \text{ div } 2 = \begin{cases} \mathrm{q2}(y) + 1 & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 1 \\ \mathrm{q2}(y) & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 0 \end{cases} = \mathrm{q2}(y) +$

$\begin{cases} 1 & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 1 \\ 0 & \text{Si } \mathrm{r2}(y) = 0 \end{cases} = \mathrm{q2}(y) + \mathrm{Sg}\big(\mathrm{r2}(y)\big) = \mathrm{plus}\big(\mathrm{q2}(y), \mathrm{Sg}(\mathrm{r2}(y))\big) =$

$\mathrm{plus}°(\mathrm{P}_2^3, \mathrm{Sg}°\mathrm{r2}°\mathrm{P}_3^3)(x, q2(y), y)$

Exercice 5

1/

a/ $Car_{Pair}(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \text{ } pair \\ 0 & \text{Si } x \text{ } impair \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{Si } r2(x) = 0 \\ 0 & \text{Si } r2(x) = 1 \end{cases} = \overline{Sg}°\mathrm{r2}(x)$

b/ $Car_{Impair}(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \text{ } impair \\ 0 & \text{Si } x \text{ } pair \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{Si } r2(x) = 1 \\ 0 & \text{Si } r2(x) = 0 \end{cases} = Sg°\mathrm{r2}(x)$

2/ **a/** $Car_{R \cap S}(x) = \begin{cases} 1 & Si \ x \in R \cap S \\ 0 & Si \ x \notin \mathrm{R} \cap \mathrm{S} \end{cases} = \begin{cases} 1 & Si \ Car_R(x) = 1 \ et \ Car_S(x) = 1 \\ 0 & Si \ Car_R(x) = 0 \ ou \ Car_S(x) = 0 \end{cases} =$

$\begin{cases} 1 & Si \ Car_R(x) \times Car_S(x) = 1 \\ 0 & Si \ Car_R(x) \times Car_S(x) = 0 \end{cases} = Sg(Car_R(x) \times Car_S(x) = Sg°mult°(Car_R, Car_S)(x)$

b/ $Car_{R \cup S}(x) = \begin{cases} 1 & Si \ x \in R \cup S \\ 0 & Si \ x \notin \mathrm{R} \cup \mathrm{S} \end{cases} = \begin{cases} 1 & Si \ Car_R(x) = 1 \ ou \ Car_S(x) = 1 \\ 0 & Si \ Car_R(x) = 0 \ et \ Car_S(x) = 0 \end{cases} =$

$\begin{cases} 1 & Si \ Car_R(x) + Car_S(x) > 0 \\ 0 & Si \ Car_R(x) + Car_S(x) = 0 \end{cases} = Sg(Car_R(x) + Car_S(x)) = Sg°plus°(Car_R, Car_S)(x)$

Exercice 6

1/ **a/** $Car_{Equal}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ Si } x = y \\ 0 \text{ Si } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ Si } x - y = 0 \\ 0 \text{ Si } x - y \neq 0 \end{cases} =$

$$\begin{cases} 1 \text{ Si } |x-y| = 0 \\ 0 \text{ Si } |x-y| \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ Si } Abs(x,y) = 0 \\ 0 \text{ Si } \mathrm{Abs}(x,y) \neq 0 \end{cases} = \overline{Sg}(Abs(x,y)) = \overline{Sg}\circ Abs(x,y)$$

2/ **a/**

$$Car_{R1\wedge R2}(x,y) = \begin{cases} 1 si (x,y) vérifie R1 \wedge R2 \\ 0 \sin on \end{cases} = \begin{cases} 1 si (x,y) vérifie R1, et, vérifie R2 \\ 0 \sin on \end{cases} = \begin{cases} 1 si Car_{R1}(x,y) = 1, et Car_{R2}(x,y) = 1 \\ 0 \sin on \end{cases}$$

$$Car_{R1\wedge R2}(x,y) = \begin{cases} 1 si Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y) = 1 \\ 0 si Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y) = 0 \end{cases} = Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y) = mult^\circ(Car_{R1}, Car_{R2})(x,y)$$

Ou encore

$$Sg^\circ mult(Car_{R1}, Car_{R2})(x,y)$$

b/

$$Car_{R1\vee R2}(x,y) = \begin{cases} 1 si Car_{R1}(x,y) + Car_{R2}(x,y) \geq 1 \\ 0 si Car_{R1}(x,y) + Car_{R2}(x,y) = 0 \end{cases} = Sg(Car_{R1}(x,y) + Car_{R2}(x,y)) = Sg^\circ plus(Car_{R1}, Car_{R2})(x,y)$$

Reste à faire
Exercice 2 : 1/ b, 2/
Exercice 4
Exercice 6 : 1/b/

Pour plus d'exercices avec corrigés, voir le site de M. Isli:

http://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PRF.htm