$I -$ *Limites et continuité*

I-1 Notion de fonction

Définition (fonction réelle de la variable réelle ou fonction numérique)
Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Si f une fonction qui à tout nombre réel x dans E associe au plus un nombre réel y dans $\mathbb{R}$

Alors
x est appelée variable libre, y est appelée variable dépendante et

f est appelée fonction réelle de la variable réelle ou fonction numérique.

On appelle domaine ou ensemble de défintion de f et on note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des x qui ont une image par f.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E, f(x) \text{ existe}\} \subset E$$

Un élément $a \in \mathcal{D}_f$ est appelé antécédant et $f(a)$ son image.
Si $E = \mathcal{D}_f$ on dit que f est une application.
On note

$$f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

On appelle graphe de f l'ensemble noté C_f et défini par $C_f = \{(x, f(x)), x \in E\}$.
On parle également de courbe représentative de f.

Exemple

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

2. $f(x) = \frac{1}{E(x)-x}$;
$E(x) - x = 0 \Leftrightarrow E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x > 0 \\ x & si\ x \leq 0 \end{cases}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

.4. $f(x) = \begin{cases} x & si\ x\ est\ pair \\ \frac{1}{x(x-1)} & si\ x\ est\ impair \end{cases}$
$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{Z}/\{1\}$

Opérations sur les fonctions

Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques définies sur une même partie D.

1. Somme

La somme de f et g est la fonction notée $f+g$ définie pour tout $x \in D$, par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. Produit

Le produit de f et g est la fonction notée fg définie pour tout $x \in D$, par

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Définition (fonction paire)

Soit D intervalle symétrique (centré en zéro) et $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans D.

On dit que f est paire si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

La courde représentative de f présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées y.

Le domaine d'étude de f est réduit à la partie de D des éléments positifs ou celle des éléments négatifs .

Axe de symétrie

Soit a un réel tel que $\forall x \in Df$, on a $a - x \in Df$ et $a + x \in Df$.

Si $f(a - x) = f(a + x)$ alors la courbe C_f présente une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = a$.

Le domaine d'étude de f est réduit à la partie de D des éléments supérieurs à a ou celle des éléments inférieurs à a.

.

Exemple

$f(x) = x^2 - 2x - 3$. $Df = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - x$ et $1 + x \in \mathbb{R}$ et $f(1 - x) = f(1 + x)$

donc la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

Définition (fonction impaire)

On dit que f est impaire si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

La courbe C_f présente une symétrie par rapport à $l'origine$.

Le domaine d'étude de f est réduit à la partie de Ddes éléments positifs ou celle des éléments négatifs.

Centre de symétrie

Soit a et b deux réels tels que $\forall x \in Df \;\; a - x \in Df$ et $a + x \in Df$ et si

$$f(a - x) + f(a + x) = 2b$$

alors le point $A(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f

Exemple

$f(x) = 2 + \frac{5}{x-3}$; $Df = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Pour tout x de , $1 - x$ et $1 + x \in \mathbb{R}$,
$f(3 - x) + f(3 + x) = 4 = 2 \times 2$ donc $(3,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Définition (fonction périodique)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On dit que f est périodique s'il exite un réel non nul t tel que, $\forall x \in D$ on a

$$f(x + t) = f(x)$$

t est appelé période de f. On dit que f est périodique de période t ou f est t-périodique
Le plus petit nombre positif t s'il existe on note T et on l'appelle période fondamentale de f.

Le domaine d'étude de f est réduit à un intervalle de longueur une période.

Exemple

1. $cosx$ est 2π-périodique ; 2. $cos2x$ est π-périodique.
3. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. (représenter graphiquement $\{x\}$)

Définition (Fonctions croissante, décroissante)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On dit que f est croissante (décroissante) si
$\forall x, y \in D$ si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(y))$

Définition (Fonctions strictement croissante, décroissante)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On dit que f est strictement croissante (décroissante) si
$\forall x, y \in D$ si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$

Définition (Fonctions constante)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.
On dit que f est une fonction constante si
$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in D\ f(x) = c$ on écrit $f = c$.

Définition (fonction nulle, non nulle, positive, négative)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D

On dit que f est nulle dans D et on écrit $f = 0$ dans D si $\forall x \in D, f(x) = 0$.

On dit que f est non nulle dans D et on écrit $f \neq 0$ dans D si f n'est pas nulle dans D.

On dit que f est positive (strictement) dans D et on écrit $f \geq 0$ $(f > 0)$ dans D si $\forall x \in D$, $f(x) \geq 0$ $(f(x) > 0)$

On dit que f est négative (strictement) dans D et on écrit $f \leq 0$ $(f < 0)$ dans D si $\forall x \in D$, $f(x) \leq 0$ $(f(x) < 0)$.

Définition (comparaison de deux fonctions)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D et $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

On dit que f égale g dans D et on écrit $f = g$ dans D si $f - g = 0$ dans D

On dit que f est différente de g dans D et on écrit $f \neq g$ dans D si $f - g \neq 0$ dans D

On dit que f est inférieure (strictement) à g dans D et on écrit $f \leq g$ $(f < g)$ si $f - g \leq 0$ $(f - g < 0)$ dans D.

Exemple

1. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

$f = 0$ dans $\mathbb{Z}$ et $f \neq 0$ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. En étudiant le signe $x^2 - x$ dans $\mathbb{R}$, on aboutit à :

Dans $]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, +\infty[$ on a $f > g$

Dans $[0, 1]$ on a $f \leq g$

Retrouver graphiquement ce résultat.

Définition (fonction majorée, minorée, bornée)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D et $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D. Considérons l'ensemble $f(D) = \{f(x), x \in D\}$.

On dit que f est majorée si l'ensemble $f(D)$ est majorée.

On dit que f est minorée si l'ensemble $f(D)$ est minorée.

On dit que f est bornée si l'ensemble $f(D)$ est bornée.

f possède une borne supérieure si, et seulement si f est majorée

On note $\sup\limits_{x \in D} f(x)$, $\sup\limits_{D} f$ ou simplement $\sup f$

Si f n'est pas majorée on convient que $\sup f = +\infty$

f possède une borne inférieure finie si, et seulement si f est minorée.

On note $\inf\limits_{x \in D} f(x)$, $\inf\limits_{D} f$ ou simplement $\inf f$

Si f n'est pas minorée on convient que $\inf f = -\infty$

On dit que f atteint son maximum si $f(D)$ admet un maximum noté , c'est-à-dire $\exists x_0 \in D$, tel que $\sup f = f(x_0) = max f$

On dit que f atteint son minimum si $f(D)$ admet un minimum noté $min f$ c'est-à-dire $\exists x_0 \in D$, tel que $\inf f = f(x_0) = min f$

On dit que f atteint ses bornes si f atteint son maximum et son minimum.

Exemple

1. $f(x) = x^2$; $\inf f = 0$ et $\sup f = +\infty$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\inf f = 0$ et $sup\, f = 1 = max f = f(0)$: f atteint son maximum en zéro.
3. $f(x) = cos x$; $\inf f = -1$ et $sup\, f = 1 = max f = f(0)$: f atteint ses bornes.

Définition (fonction identité)

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$, On appelle fonction identité sur D la fonction notée $I_D : D \longrightarrow D$, définie dans D par $I_D(x) = x$.

Définition (composée de deux fonctions)
Soit D, F et G trois parties non vides de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions définies respectivement dans D et F.
On appelle composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie de D dans G par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Exemple
$f(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{e^x}$.

Définition (fonction réciproque ou inverse)
Deux fonctions f et g telles que $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow D$ sont inverses l'une de l'autre si

$$g \circ f = I_D \text{ et } f \circ g = I_E.$$

Lorsque la fonction inverse de f existe, on la note f^{-1}. Alors

$$f : D \longrightarrow E, f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1} : E \longrightarrow D, x = f^{-1}(y)$$

La courbe de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à la première bissectrice.

Proposition

Si $f : D \longrightarrow E$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $f : E \longrightarrow D$ telle

$$g \circ f = I_D \text{ et } f \circ g = I_E.$$

g est la bijection réciproque de f : $g = f^{-1}$.

$$y = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow y = f^{-1}(x), \forall x \in E$$

Exemple

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1,$ est bijective. $y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$.
D'où $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$$y = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

I-2 Limite

Définition (limite finie en un point fini)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert I centré en x_0 privé de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ ou tend vers ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I \ (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall \in I \ (x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x_0} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$

Proposition (caractéisation séquentielle de la limite d'une fonction)

f a une limite l fini ou infini en x_0 fini ou infini si, et seulement si pour toute suite (x_n) dans $I \setminus \{x_0\}$ convergent vers x_0, la suite $f(x_n)$ converge vers l.

Exemple

1. Montrons que $cosx$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Considérons la suite définie par $x_n = 2n\pi$ et la suite définie par $x'_n = (2n+1)\pi$.
Les deux suites (x_n) et (x'_n) divergent vers $+\infty$.
$\cos(x_n) = \cos(2n\pi)$ =et $\cos(x'_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1$
$\cos(x_n)$ converge vers 1 et $\cos(x'_n)$ converge vers -1. Donc $cosx$ n'a pas de limite en $+\infty$

2. Montrons que $cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en $zéro$

Considérons la suite de terme général $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et la suite de terme général $x'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$.
Les deux suites (x_n) et (x'_n) divergent vers $zéro$.
$\cos(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$ et $\cos(x'_n) = \cos((2n+1)\pi) = -1$
$\cos(x_n)$ converge vers 1 et $\cos(x'_n)$ converge vers -1. Donc $cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en $zéro$.

Définition (limite infinie en un point fini à droite)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]x_0, \ x_0 + h[, h > 0$, et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ ou tend vers ℓ en x_0 à droite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I \ (x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$

Définition (limite infinie en un point fini à gauche)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]x_0 - h,\ x_0[, h > 0$, et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet pour limite ℓ ou tend vers ℓ en x_0 à droite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$

Définition (limite finie en un point infini)
Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]a, +\infty[, a > 0$ (respectivement $]-\infty, b[, b < 0$).
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ en $+\infty$ $(-\infty)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (x > B\ (x < -B) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty\ (-\infty)} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty\ (-\infty)} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty\ (-\infty)}{\longrightarrow} \ell$

Définition (limite infinie en un point fini)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert I centré en x_0 privé de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A\ (f(x) < -A))$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ ou $\lim\limits_{x_0} f = +\infty\ (-\infty)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty\ (-\infty)$

Définition (limite infinie en un point fini à droite)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]x_0,\ x_0 + h[, h > 0$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ en x_0 à droite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow f(x) > A\ (f(x) < -A))$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = +\infty\ (-\infty)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} +\infty\ (-\infty)$

Définition (limite infinie en un point fini à gauche)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]x_0 - h,\ x_0[, h > 0$, et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ en x_0 à droite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (x_0 - \eta < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > A\ (f(x) < -A))$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = +\infty\ (-\infty)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} +\infty\ (-\infty)$

Définition (limite infinie en un pointin fini)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert $I =]a, +\infty[, a > 0$ (respectivement $]-\infty, b[, b < 0)$.
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ en $+\infty$ $(-\infty)$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } \forall x \in I\ (x > B\ (x < -B) \Longrightarrow | \Longrightarrow f(x) > A\ (f(x) < -A))$$

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ ou $\lim\limits_{+\infty(-\infty)} f = +\infty\ (-\infty)$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty(-\infty)}{\longrightarrow} +\infty\ (-\infty)$

Proposition (unicité de la limite)
Lorsqu'une fonction a une limite alors cette limite lmite est unique.

Proposition
Lorsqu'une fonction a une limite finie en x_0 fini ou infini alors f est bornée dans un voisinage de x_0.

Proposition (Opérations sur les limites)
Soit f et g deux fonctions numériques ayant pour limites respectives ℓ et ℓ' finis ou infinis en x_0 fini ou infini. Alors

Cas ℓ et ℓ' finis

1. $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$

2. $\lim\limits_{x_0} fg = \ell\ell'$. En particulier, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x_0} \alpha f = \alpha\ell$

3. Si $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$ et si $\ell = 0$ alors $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{|f|} = +\infty$

Cas ℓ infini $\ell = +\infty$ $(-\infty)$ et ℓ' fini

1. $\lim_{x_0}(f+g) = +\infty\ (-\infty)$

2. Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{x_0} fg = +\infty\ (-\infty)$ si $\ell' > 0$ et $\lim_{x_0} fg = +\infty\ (-\infty)$ si $\ell' < 0$
En particulier, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x_0} \alpha f = +\infty\ (-\infty)$ si $\alpha > 0$ $\lim_{x_0} \alpha g = +\infty\ (-\infty)$ si $\alpha > 0$

3. $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

Cas ℓ et et ℓ' infinis

1. $\lim_{x_0}(f+g) = +\infty\ (-\infty)$ si $\ell > 0$ et $\ell' > 0 (\ell > 0$ et $\ell' > 0)$

2. Si $\lim_{x_0} fg = +\infty\ (-\infty)$si $\ell\ell' > 0$ ($\ell\ell' < 0$)

Les formes indéterminées

$+\infty - \infty$; $\pm\infty \times 0$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$

Proposition (limite de la composée)
Soit f et g deux fonctions numériques telles f a une limite ℓ fini ou infini en x_0 fini ou infini et g a une limite ℓ' fini ou infini en ℓ c'est-à-dire $\lim_{x_0} f = \ell'$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$ Alors

$$\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$$

Proposition (comparaison des limites)

Soit f et g deux fonctions numériques définies dans un intervalle centré en x_0 fini ou infini sauf peut être en x_0 telle que $f < g$ alors

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ fini et $\lim_{x_0} g = \ell'$ fini alors $\ell \leq \ell'$

Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} g = +\infty$

Si $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x_0} f = -\infty$

I-3 Continuité

Définition (continuité en un point)
Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie dans un intervalle centré en x_0.
On dit que f est continue en x_0 si f admet une limte en x_0 égale à $f(x_0)$.

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$

Proposition (caractéisation séquentielle de la continuité)
f est continue en x_0 si, et seulement si $\forall$ la suite (x_n) telle que $\forall n, x_n \in I \setminus \{x_0\}$ convergent vers x_0 , la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$.

Définition (continuité en un point à droite)
Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie dans un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + h[, h > 0.$

On dit que f est continue en x_0 à droite si f admet une limte en x_0 à droite égale à $f(x_0)$.

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = f(x_0)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} f(x_0)$

Définition (continuité en un point à gauche)
Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie dans un intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0], h > 0.$

On dit que f est continue en x_0 à gauche si f admet une limte en x_0 à gauche égale à $f(x_0)$.

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = f(x_0)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} f(x_0)$

Proposition
Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie dans un intervalle centré en x_0.
f est continue en x_0 si, et seulement si f est continue en x_0 à droite et en x_0 à gauche.

Définition (continuité sur un intervalle)
Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle ouvert
f est continue dans I si f est continue en tout point de I. C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in I, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Proposition (Opérations sur les fonctions continues)

Soit f et g deux fonctions numériques définies dans intervalle I et continue en $x_0 \in I$.

1. $f+g$ est contune en x_0

2. fg est contune en x_0

3. Si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est contune en x_0

Proposition (composée de fonctions continues)

Soit f une fonction numérique définie dans intervalle I et g une fonction numérique définie dans intervalle J telles que $f(I) \subset J$
Si f et continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Définition (prolongement pa continuité)
Soit intervalle ouvert I contenant x_0 et f une fonction numérique définie dans I sauf en x_0.
On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite l en x_0 et la fontion $\tilde{f}$ définie dans I par
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ l & si\ x = x_0 \end{cases}$ est appelé prologement par continuité de f en x_0.
Exemple

1. $f(x) = \frac{sinx}{x}$ définie dans $\mathbb{R}^*$ a pour limite $l = 1$ en zéro donc prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction qu'on note $\tilde{f}$ définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ définie dans $\mathbb{R}^*$n' a pas de limite en zéro donc n'est prolongeable par continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est continue sur un segment $[a, b]$ alors
pour tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$

Corollaire 1
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et $f(a)\ f(b) < 0$ alors
il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Exemple

Montrer que l'équation $Lnx + 3x - 2 - Ln2 = 0$ possède une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.
Posons pour $x \in [1, 2]$, $f(x) = Lnx + 3x - 2 - Ln2$.
f est continue dans $[1, 2]$ et $f(1)f(2) < 0$ alors il existe $c \in [1,2]$ tel que $f(c) = 0$.
Donc c est solution de l'équation considérée.
Comme f est croissante dans $[1, 2]$ alors c est unique.

Corollaire 2
Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ estun intervalle.

Exemple

1. $\cos([0,\ 2\pi[) = [-1, 1]$

2. $\cos([0,\ \pi[) =]-1, 1]$

3. $\cos(]0,\ 3\pi[) = [-1, 1]$

Théorème
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteintses bornes.

Théorème (théorème de la bijection).
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
Si f est continue et strictement monotone sur I, alors
1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que .

Exemple

2. $Ln:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est continue et strictement croissante dans $]0, +\infty[$ donc admet une fonction réciproque qu'on note e^x : $\mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie, continue et strictement décroissante dans $\mathbb{R}$

$$y = Lnx, \forall x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow y = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

2. $cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$, est continue et strictement décroissante dans $[0, \pi]$ donc admet une fonction réciproque qu'on note $arccosx$: $[-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$ définie, continue et strictement décroissante dans $[-1,1]$

$$y = cosx, \forall x \in [0, \pi] \Leftrightarrow y = arccosx, \forall x \in [-1,1]$$

3. $tg: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, est continue et strictement croissante dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc admet une fonction réciproque qu'on note $arctgx$: $\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ définie, continue et strictement décroissante dans $\mathbb{R}$

$$y = tgx, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow y = arctgx, \forall x \in \mathbb{R}$$

4. $sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$, est continue et strictement croissante dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc admet une fonction réciproque qu'on note $arcsinx$: $[-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ définie, continue et strictement croissante dans $[-1,1]$

$$y = sinx, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y = arcsinx, \forall x \in [-1,1]$$

Définition (continuité uniforme)
Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle non vide I.
On dit que f est continue uniformément dans I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \forall x' \in I, (|x - x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Définition (caractérisation séquentielle de la continuité uniforme)
Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle non vide I.
f est continue uniformément dans I si, etseulement si,
$\forall (x_n) \in I$ et $\forall (x'_n) \in I$ telles que la suite $(x_n - x'_n)$ converge vers zéro alors la suite $(f(x_n) - f(x'_n))$ Converge vers zéro.

Proposition (la continuité uniforme et continuité)
Soit f une fonction numérique définie dans un intervallenon vide I.
Si f est uniformément continue dans I alors f est continue dans I.
La réciproque est vrai lorsque l'intervalle I est un segemnt.

Proposition (condition nécessaire pour la continuité uniforme)
Si f est continue uniformément dans un intervalle ouvert $]a, b[$ borné ou non alors f possède une limite finie en a à droite et une limite finie en b à gauche.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue dans tout intervalle de la forme $]0, a[$ puisque sa limite en zéro à droite est infinie, a fini ou infini.

Définition (fonction Lipshitzienne)

Soi f une fonction numérique définie dans un intervalle non vide I.
On dit que f est Lipshitzienne de rapport α ou α –Lipshitzienne dans I si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \forall x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq \alpha |x - x'|$$

Si $\alpha < 1$ on dit que la fonction est contractante.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [1, +\infty[$ est 1 –Lipshitzienne.
Soit $x, x' \in [1, +\infty[$ alors $xx' \geq 1$ donc $\frac{1}{xx'} \leq 1$
$|f(x') - f(x)| = \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x'}{xx'}\right| = \frac{1}{xx'}|x' - x| \leq |x' - x|$
$\frac{1}{x}$ est 1 –Lipshitzienne dans $[1, +\infty[$.

Proposition (fonction Lipshitzienne et continuité uniforme)

Soi f une fonction numérique définie dans un intervalle non vide I.
Si f est α –Lipshitzienne dans I alors ou f est uniformément continue dans I.