Matière : Physique 1 (PHYS1)

Intitulé : Mécanique du point matériel

Programme :

Chapitre 1 : Cinématique du point matériel

Chapitre 2 : Dynamique du point matériel

Chapitre 3 : Travail et énergie dans le cas d’un point matériel

Chapitre 1 : Cinématique du point matériel

I. Introduction

L'objet de ce cours est l'étude de la mécanique newtonienne, appelée aussi mécanique classique. Comme l'indique son nom, elle est basée sur les lois de Newton connues comme les lois de la nature.

En réalité, le mouvement d'un corps solide est composé simultanément d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Dans ce cours, on s'intéresse à l'étude des mouvements des corps en négligeant leurs dimensions (point matériel). Ce concept simplifie considérablement l'étude des mouvements des corps. Concrètement, cette approximation consiste à négliger le mouvement de rotation des corps à étudier.

La mécanique classique est subdivisée en trois parties, à savoir :

- **La statique :** Elle s'intéresse à l'équilibre des corps.
- **La cinématique :** C'est l'étude des mouvements des corps indépendamment de leurs causes (forces).
- **La dynamique :** Elle s'intéresse aux rapports existants entre le mouvement et ses causes (Forces).

Dans cette partie de cours, on s'intéresse à l'étude cinématique d'un point matériel.

II. Définitions

II.1. Notion de mouvement

Un corps est en mouvement par rapport à un repère donné si ses coordonnées par rapport à ce repère changent au cours du temps.

II.2. Définition d'un repère

La notion de repère est très importante dans l'étude des mouvements. Considérons par exemple, une personne dans une voiture en mouvement. Cette personne est en mouvement par rapport à un observateur lié à la terre. Par contre, elle est au repos par rapport à un observateur lié à la voiture.

Ainsi, la définition du repère par rapport auquel s'effectue le mouvement est une condition nécessaire dans l'étude des mouvements. De façon simple, on définit un repère par trois points de l'espace non alignés.

II.3. Notion de la position d'un mobile

Un point matériel est un objet de masse finie et de dimensions négligeables. La position du mobile est repérée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

II.4. Notion de la trajectoire

On appelle trajectoire, la courbe ou la ligne qui joint de manière continue les positions successives occupées par le mobile au cours de son déplacement. La trajectoire est une notion relative car elle dépend du repère choisi pour étudier son mouvement. Exemples : Mouvement rectiligne (la trajectoire est une droite) et Mouvement circulaire (la trajectoire est un cercle).

Exemple :

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow x = y$, c'est l'équation d'une droite (c'est la relation mathématique qui lie les coordonnées entres elles).

III. Etude du mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne (appelé aussi mouvement linéaire) est un mouvement qui se fait le long d'une ligne droite **(Figure 1)**. Il est décrit mathématiquement en utilisant une seule dimension spatiale.

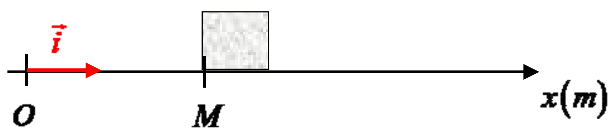


Figure 1 : Mouvement rectiligne

La position M du mobile est repérée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \qquad (2)$$

Il existe deux types de mouvement rectiligne :

- Le mouvement rectiligne uniforme qui se fait à vitesse constante ou accélération nulle.
- Le mouvement rectiligne varié (non uniforme) qui se fait à vitesse variable ou accélération non nulle.

III.1. Diagramme des espaces

Soit un mobile qui se déplace sur une trajectoire rectiligne, par exemple suivant l'axe Ox. Les positions occupées par le mobile aux instants $t_0, t_1, t_2, ...t_n$ sont $x_0, x_1, x_2, ...x_n$ respectivement.

$t(s)$	$x(m)$
t_0	x_0
t_1	x_1
t_2	x_2
....	....
....	....
t_n	x_n

Le diagramme des espaces (**Figure 2**) représente la courbe donnant l'évolution de la position du mobile en fonction du temps.

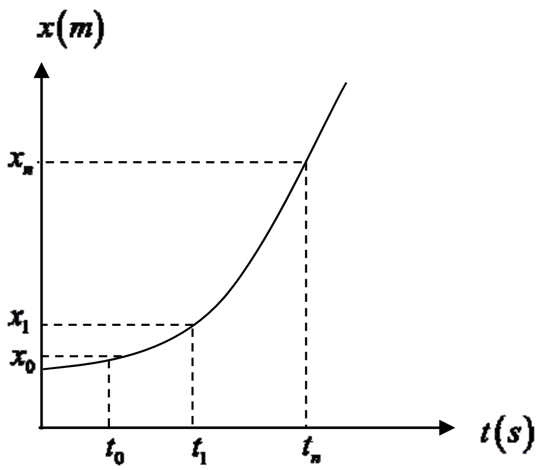


Figure 2 : Diagramme des espaces pour un mouvement rectiligne

III.2. Vitesse

C'est une grandeur physique qui permet de mesurer la rapidité ou encore la façon avec laquelle varie la position au cours du temps. Dans le système international (MKSA), l'unité de la vitesse est le mètre par seconde (m/s).

Mathématiquement, le vecteur vitesse d'un mobile est la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps,

$$\vec{v}(t)=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \tag{3}$$

III.2.1. Vitesse moyenne

Soient les positions occupées par le mobile aux instants t_1 et t_2 sont x_1 et x_2 respectivement. La vitesse moyenne entre ces deux instants est donnée par,

$$v_m\Big|_{t_1}^{t_2}=\frac{x_2(t_2)-x_1(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4}$$

Graphiquement, la valeur de la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est égale à la valeur de la pente de la droite passant par les points (t_1,x_1) et (t_2,x_2).

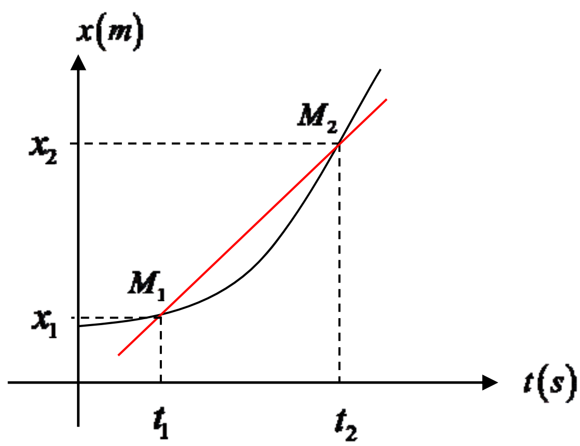


Figure 3 : Illustration du calcul de la vitesse moyenne

Dans le cas où le mobile change de sens durant son mouvement, la définition de la vitesse moyenne telle qu'elle est donnée ci-dessus ne reflète pas la réalité. Par exemple, si la position finale coïncide avec la position initiale du mobile, la vitesse moyenne est nulle bien que le mobile se soit déplacé.

Dans ce cas, on définit la vitesse moyenne scalaire comme étant le rapport entre la distance parcourue d et le temps nécessaire pour la parcourir $t_2 - t_1$,

$$\mathrm{v}_{mscal} = \frac{d}{t_2 - t_1} \tag{5}$$

III.2.2. Vitesse instantanée

Quand l'intervalle de temps est infiniment petit $(\Delta t = t_2 - t_1 \to 0)$, la vitesse moyenne est dite instantanée. Mathématiquement, si on a l'expression de $x(t)$, la vitesse instantanée $\mathrm{v}(t)$ est la dérivée de $x(t)$ et son expression est donnée par,

$$\mathrm{v}_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{6}$$

Graphiquement, la valeur de la vitesse instantanée à l'instant t est égale à la pente de la tangente à la courbe du diagramme des espaces. Du point de vue pratique, cette méthode n'est pas précise. Cependant, il existe une deuxième méthode qui consiste à calculer la vitesse moyenne sur un intervalle de temps relativement petit. Par la suite, nous assimilons cette vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 à la vitesse instantanée au milieu temporaire de ces instants, *i.e.* $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, donnée par :

$$\mathrm{v}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{x_2(t_2) - x_1(t_1)}{t_2 - t_1} \approx \mathrm{v}_i\left(t = \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \tag{7}$$

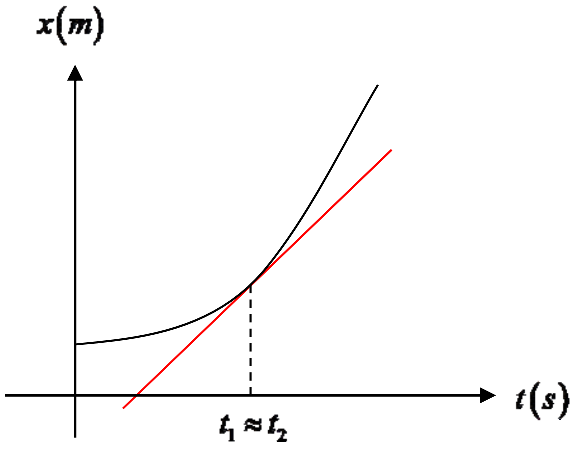


Figure 4 : Illustration du calcul de la vitesse instantanée

III.3. Accélération

L'accélération a, est une grandeur physique qui décrit la variation de la vitesse au cours du temps. Dans le système international MKSA, l'accélération est exprimée en mètre par seconde carrée $\left(m/s^2\right)$.

Le vecteur accélération d'un mobile est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{\mathrm{v}}(t)$ par rapport au temps,

$$\vec{a}(t)=\frac{d\,\vec{\mathrm{v}}(t)}{dt} \qquad (8)$$

III.3.1. Accélération moyenne

Soit un mobile animé de la vitesse v_1 à l'instant t_1 et v_2 à l'instant t_2. Son accélération moyenne est définie par,

$$a_m\Big|_{t_1}^{t_2}=\frac{\mathrm{v}_2(t_2)-\mathrm{v}_1(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} \qquad (9)$$

Graphiquement, c'est la pente de la droite passant par les points $M_1(t_1,\mathrm{v}_1)$ et $M_2(t_2,\mathrm{v}_2)$ représentée sur le diagramme des vitesses.

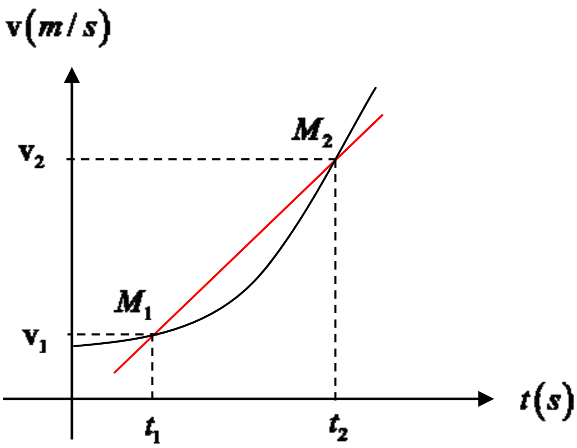


Figure 5 : Illustration du calcul de l'accélération

III.3.2. Accélération instantanée

Lorsque l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ devient infiniment petit $(\Delta t = t_2 - t_1 \to 0)$, l'accélération moyenne est dite instantanée. Son expression est donnée par,

$$a_i(t_2 \approx t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}_2(t_2) - \mathrm{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{10}$$

Graphiquement, l'accélération instantanée à l'instant $t_1 \approx t_2$ est la pente de la tangente dans le diagramme des vitesses $\left(a_i = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)$,

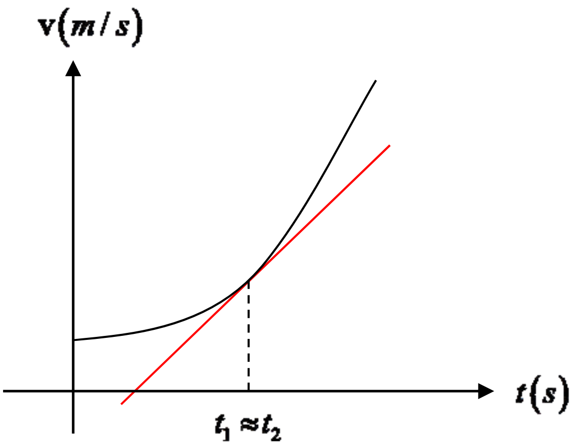


Figure 6 : Illustration de calcul de l'accélération

III.4. Calcul intégral

III.4.1. Calcul de la position d'un mobile à partir du diagramme des vitesses

Dans le cas où le diagramme des vitesses $\mathrm{v}(t)$ est une donnée du problème, on peut calculer la position du mobile à l'instant t par rapport à une position initiale $x_0 = x(t = t_0)$:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{v}\,dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{v}\,dt \tag{11}$$

Graphiquement, on peut calculer l'intégrale dans l'expression précédente en estimant la valeur de l'aire entre la courbe $\mathrm{v}(t)$ et l'axe des temps t (surface hachurée de la figure ci-dessous).

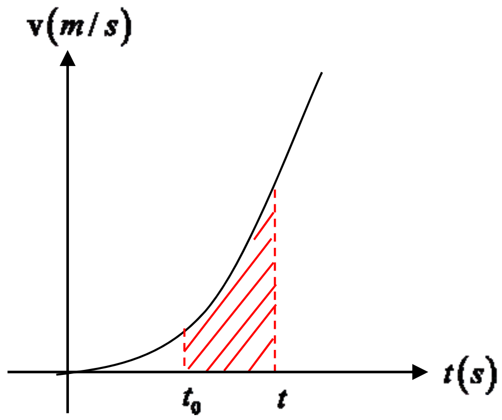


Figure 7 : Calcul de la position d'un mobile à partir du diagramme des vitesses

La distance parcourue par le mobile entre les instants t_0 et t est donnée par l'expression suivante,

$$d_{t_0}^{t} = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}\, dt \qquad (12)$$

Dans le cas où le mouvement du mobile se fait dans les deux sens (sens positif et sens négatif) comme le montre la figure ci-dessous, la distance parcourue est calculée en sommant les valeurs absolues des valeurs des surfaces hachurées,

$$d_{t_0}^{t} = d_{t_0}^{t_1} + d_{t_1}^{t_2} + \ldots + d_{t_n}^{t} = \left| x(t) - x(t_n) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| x(t_i) - x(t_{i-1}) \right| \qquad (13)$$

où les $t_i\,(i = 0, n)$ sont les instants de changement du sens de mouvement.

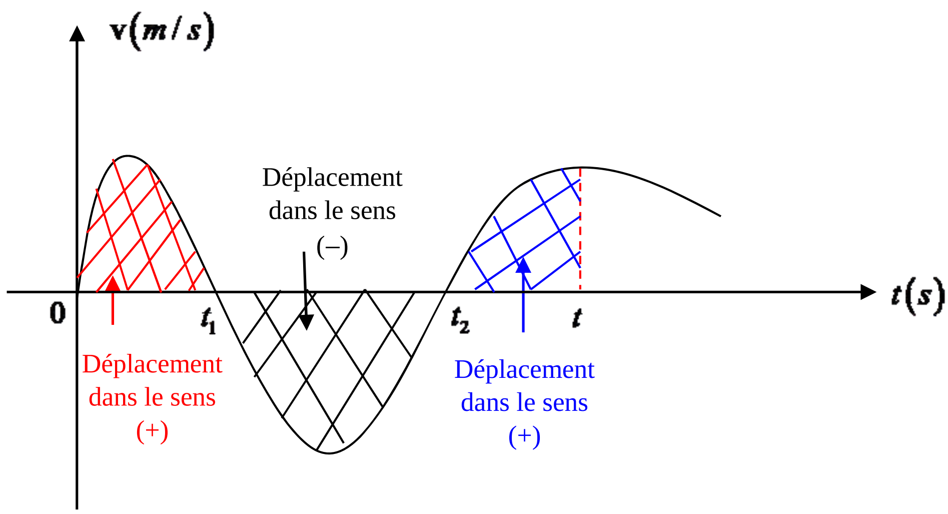


Figure 8 : Calcul de la position du mobile dans le cas où le mouvement se fait dans les deux sens (sens positif et sens négatif)

III.4.2. Calcul de la vitesse à partir du diagramme des accélérations

La vitesse est liée à l'accélération par la relation suivante :

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \qquad (14)$$

Connaissant la vitesse du mobile à l'instant $t_0 \left(\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}(t = t_0) \right)$, on peut la calculer à l'instant t par l'expression suivante :

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt \qquad (15)$$

Graphiquement, on peut calculer l'intégrale dans l'expression précédente en estimant la valeur de l'aire entre la courbe $a(t)$ et l'axe des temps t (surface hachurée de la figure ci-dessous).

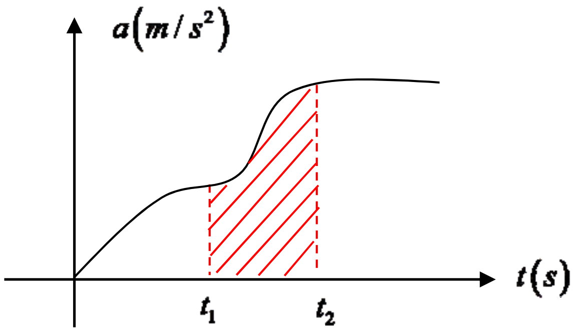


Figure 9 : Diagramme des accélérations

III.5. Nature du mouvement

La nature du mouvement est déduite à partir de celle du produit scalaire de la vitesse par l'accélération $(\vec{\mathrm{v}}.\vec{a})$. Dans le cas d'un mouvement rectiligne,

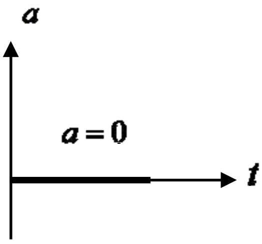
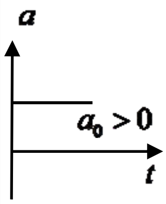
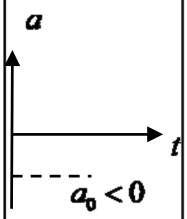
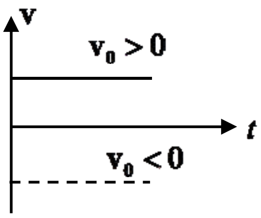
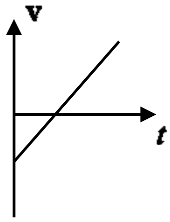
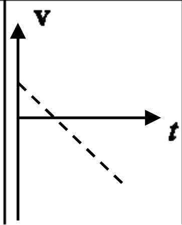
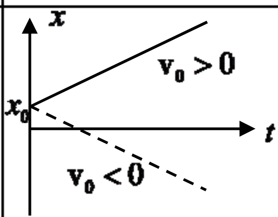
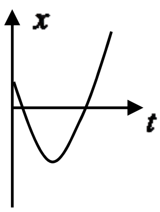
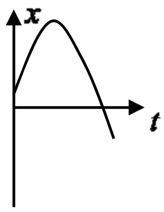
$$\vec{\mathrm{v}}.\vec{a} = \bar{\mathrm{v}}\ \bar{a} \qquad (16)$$

Ainsi, on distingue deux cas :

- $\vec{a}.\vec{\mathrm{v}} > 0$: Le mouvement est rectiligne accéléré (uniformément si a constante).
- $\vec{a}.\vec{\mathrm{v}} < 0$: Le mouvement est rectiligne décéléré ou retardé (uniformément si a constante).

III.6. Mouvements rectilignes particuliers

Dans le tableau ci-dessous, nous récapitulons les cas des mouvements rectilignes uniformes $(a=0)$ et uniformément variés (a est une constante différente de zéro).

<table>
<tr><td colspan="2">Mouvement Rectiligne Uniforme
(MRU)</td><td colspan="3">Mouvement Rectiligne Uniformément Varié
(MRUV)</td></tr>
<tr><td>Equation horaire</td><td>Diagramme</td><td>Equation horaire</td><td colspan="2">Diagramme</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a(t)=0$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Accélération constante
$a(t)=a_0$</td><td>$a(t)>0$</td><td>$a(t)<0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Vitesse
constante
$v(t)=v_0$</td><td></td><td>$v(t)=a_0 t+v_0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x(t)=v_0 t+x_0$</td><td></td><td>$x(t)=\frac{1}{2}a_0 t^2+v_0 t+x_0$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Exercice d'application 1 :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne suivant l'axe $x'Ox$. Le diagramme de son accélération en fonction du temps est donné par la **figure (10)**. À l'instant initial, il passe par l'origine avec une vitesse initiale $v_0 = 4\,m/s$ dans le sens des x positifs.

1) Tracer le diagramme des vitesses du mobile entre les instants $t=0s$ et $t=8s$.

2) Quelles sont les différentes phases du mouvement ? Préciser leurs natures.

3) Déterminer à l'instant $t=6s$, la position du mobile ainsi que la distance parcourue.

4) Représenter les vecteurs position, vitesse et accélération du mobile à $t=6s$.

Echelles : $1cm \rightarrow 1m$, $1cm \rightarrow 2m/s$ et $1cm \rightarrow 6m/s^2$.

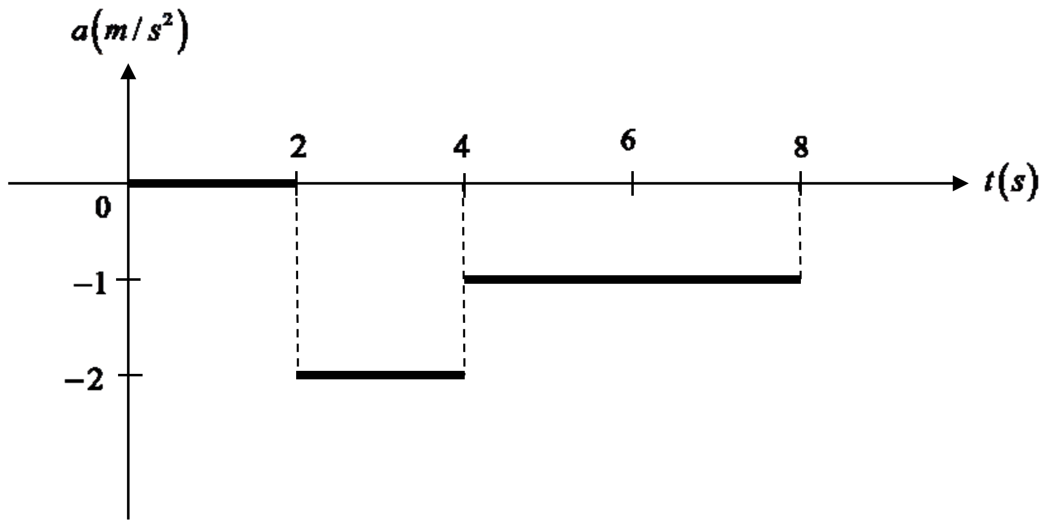


Figure 10: L’évolution de l’accélération du mobile en fonction du temps

Réponse :

1) Diagramme des vitesses du mobile entre les instants $t = 0s$ et $t = 8s$.

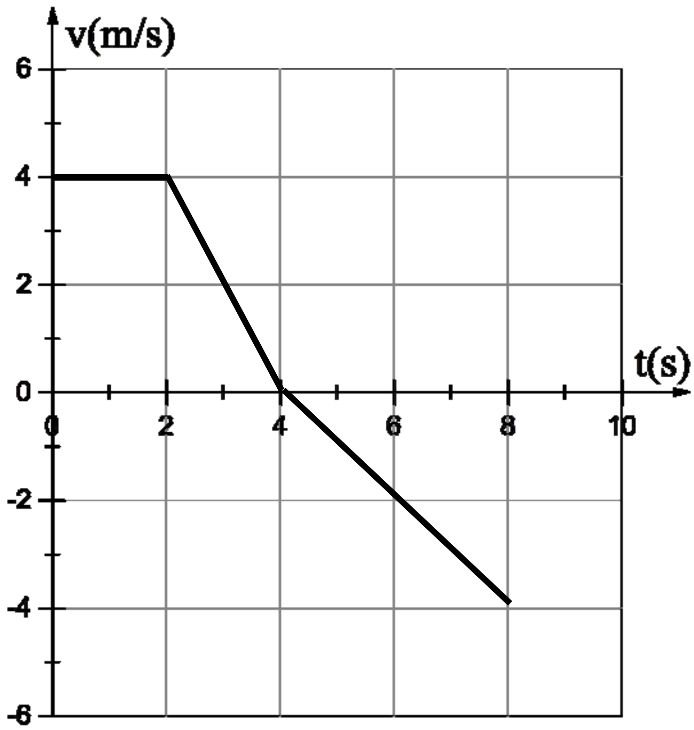


Figure 11 : L’évolution de la vitesse du mobile entre les instants $\boldsymbol{t = 0s}$ et $\boldsymbol{t = 8s}$

2) Phases du mouvement :

- $0 < t < 2s$: $a = 0$ et v constante : mouvement rectiligne uniforme.
- $2s < t < 4s$: $a.\text{v} < 0$ et a constante : mouvement rectiligne uniformément décéléré.
- $4s < t < 8s$: $a.\text{v} > 0$ et a constante : mouvement rectiligne uniformément accéléré.

3)

- La position du mobile à $t = 6\,s$:

$$x(6) = x(0) + \int_0^6 \mathrm{v}\,dt = 0 + 2\times4 + \frac{2\times4}{2} + \frac{2\times(-2)}{2},$$

$x(6) = 10\,m$.

- La distance du mobile entre $t = 0\,s$ et $t = 6\,s$:

$$d = |2\times4| + \left|\frac{2\times4}{2}\right| + \left|\frac{2\times(-2)}{2}\right| = 14\,m.$$

4) Représentation des vecteurs position, vitesse et accélération du mobile à $t = 6\,s$.

$\overrightarrow{OM}(6\,s) = 10\vec{i}$, $\vec{\mathrm{v}}(6\,s) = 2\vec{i}$ et $\vec{a}(6\,s) = -6\vec{i}$.

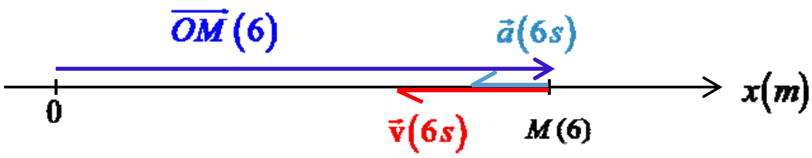


Figure 12 : Représentation des vecteurs positions, vitesse et accélération