Sommaire

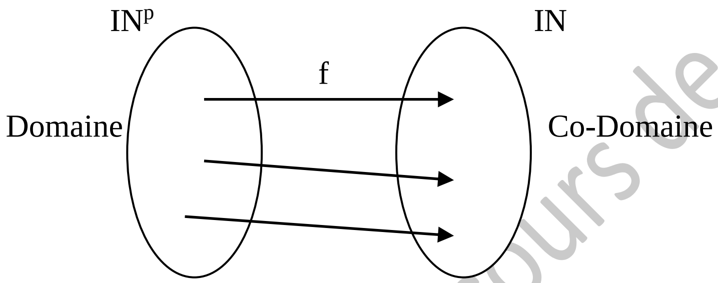
Calculabilité des fonctions

I) INTRODUCTION

La notion de <u>décidabilité</u> d'un problème et les notions qui lui sont liées comme la <u>semi-décidabilité</u>, la <u>calculabilité</u> et la <u>récursivité</u> sont fondamentales pour l'informatique en général ; car elles caractérisent les choses qui sont à sa portée :

- Un problème qu'un ordinateur est susceptible de résoudre est un problème dit décidable càd un problème correspondant à un prédicat décidable. Ce dernier est un terme ayant un sens mathématique rigoureux et indépendant de tout langage de programmation.
- Une fonction qu'un ordinateur peut calculer est une fonction dite récursive càd une fonction à laquelle correspond un processus de calcul (un algorithme qui la calcule). La récursivité elle aussi peut être définie mathématiquement et formellement.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons à la calculabilité des fonctions de IN^p dans IN :



p est appelé l'arité de la fonction f :

- p =1, f est d'arité 1 : f est dite monaire
- p =2, f est d'arité 2 : f est dite binaire
- p =3, f est d'arité 3 : f est dite tertiaire

  …
- p =n, f est d'arité n : f est dite n-aire

Nous généraliserons ensuite aux fonctions de $IN^p \rightarrow IN^q$.

Nous étudierons deux caractérisations de la calculabilité des fonctions :

- Caractérisation avec les fonctions récursives
- Caractérisation avec les machines de Turing

Dans cette première partie, nous traitons la première caractérisation. La deuxième caractérisation fera l'objet de la deuxième partie.

II) LES FONCTIONS RECURSIVES

Notation

Nous utiliserons par la suite la notation dite λ - Notation pour définir une fonction.

Exemple

La fonction ⊕ (somme arithmétique) sera notée : ⊕ = λxy• x+y

Les variables Le corps de la fonction

Nous nous intéressons à présent à la question suivante :

- Etant donnée une fonction f quelconque de $IN^p \rightarrow IN$. f est-elle calculable ?

La réponse sera :

- f est calculable si elle vérifie certains critères.

Pour cela, nous nous donnons des outils permettant de construire cette fonction. Si nous réussissons, cela veut dire que la fonction est calculable. Mais toute construction à besoin de matière première et de règles de construction. Dans notre cas la matière première est constituée des fonctions de base supposées calculables, alors que les règles de construction sont des règles qui nous permettent de combiner des fonctions déjà calculables pour en construire d'autres.

II.1) LES FONCTIONS DE BASE

- La Fonction nulle Z d'arité 0 : $Z=\lambda.\ 0$
- La Fonction successeur S d'arité 1 : $S=\lambda n\ .n+1$
- Les Fonctions Projections d'arité n (n>=1) : $P_i^n=\lambda x_1\ldots x_n.\ x_i\ (1\leq i\leq n)$

Définies par : $Z=0$

$S(n)=n+1 \qquad \forall n\in IN$

$P_i^n(x_1,\ldots,x_n)=x_i \qquad \forall(x_1,\ldots,x_n)\in IN^n$

Cas particulier de P_i^n : si i=n=1 nous obtenons la fonction Identité $P_1^1=\lambda\ x.\ x$

II.2) LES REGLES DE CONSTRUCTION DE FONCTIONS

Ce sont des règles qui permettent de construire des fonctions à l'aide d'autres fonctions calculables. Les fonctions ainsi construites deviennent à leurs tours calculables. Il s'agit des trois (03) règles suivantes :

- Règle de COMPOSITION
- Règle de RECURSION
- Règle de MINIMISATION

II.2.1) Règle de composition :

Définition

Soient H une fonction d'arité m et G1, …, Gm m fonctions d'arité n. La fonction F d'arité n est dite construite par <u>composition</u> à partir des fonctions H et G1, …, Gm si F est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{F=\lambda x_1\ldots x_n.\ H(G1(x_1\ldots x_n),\ldots,Gm(x_1\ldots x_n))}$$

Notation

$H(G1(x_1\ldots x_n),\ldots,Gm(x_1\ldots x_n))$ est noté $[H\circ(G1,\ \ldots,\ Gm)](x_1\ \ldots x_n)$: donc F= H°(G1, …, Gm). C'est la <u>composition généralisée</u>.

Cas particulier : m = 1

$F=\lambda x_1\ldots x_n.\ H(G(x_1,\ldots,x_n))$: nous retrouvons la composition simple H°G.

II.2.2) Règle de récursion

Définition

Soient G une fonction d'arité n et H une fonction d'arité n+2. La fonction F d'arité (n+1) est dite construite par <u>récursion</u> à partir des fonctions G et H si $\forall\ (x_1,\ \ldots,x_n) \in IN^n$

$$\mathbf{F(x_1,\ldots,x_n,0) = G(x_1,\ldots,x_n)}$$

$$\mathbf{F(x_1,\ldots,x_n,y+1)=H\ (x_1,\ \ldots,x_n,\ F(x_1,\ \ldots,x_n,y),y)}$$

Cas particuliers :

- n=1 : F(x,0)=G(x)
  F(x,y+1)=H(x,F(x,y),y)

- n=0 : F(0)=Cst
  F(y+1)=H(F(y),y)

Où Cst est une constante entière considérée comme une fonction d'arité 0 appelée fonction constante.

II.2.3) Règle de minimisation

Définition

Soit G une fonction d'arité n+1 telle que pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in IN^n$ il existe au moins un $y \in IN$ tel que : $G(x_1,\ldots,x_n\ ,y) = 0$.

La fonction F d'arité n est dite construite par <u>minimisation</u> à partir de la fonction G si F est définie da la manière suivante :

$$\mathbf{F=\lambda x_1\ldots x_n.F(x_1,\ \ldots,x_n)}$$

Où $F(x_1,\ \ldots,x_n)$ est le plus petit entier y tel que $G\ (x_1,\ldots,x_n\ ,y)=0$.

Exemple

Soit la fonction G=λxyz. (x+y)/(z+1), avec "/" représentant la division entière. La fonction G vérifie bien la condition : pour tous x, y dans IN, il existe z dans IN tel que G(x,y,z)=0 ; prendre, par exemple, z=x+y. La fonction plus=λxy. x+y est construite par minimisation à partir de G : pour tous x, y dans IN, plus(x,y)=x+y est le plus petit entier tel que G(x,y,plus(x,y))=0.

II.3) LES FONCTIONS PRIMITIVES RECURSIVES ET LES FONCTIONS RECURSIVES :

II.3.1) Fonction Primitive Récursive (PR)

Une fonction est dite PRIMITIVE RECURSIVE (PR) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions PR au moyen des règles de Composition et/ou de Récursion.

Exemple 1

Montrons que la fonction nulle Z_1 d'arité 1 $Z_1 = \lambda x.\ 0$ est PR

$Z_1(0)=0=Z$ fonction de base PR

$Z_1(y+1)=0=Z_1(y)=P_1^2\ (Z_1(y),y)$

Exemple 2

Montrons que la fonction ⊕ d'arité 2 définie par : $\oplus=\lambda xy.\ x+y$ est PR.

Pour ce faire nous allons procéder à une construction en utilisant la règle de récursion :

$\oplus(x,0)= x + 0 = x=P_1^1\ (x\ )$

$\oplus\ (x,y+1) =x+(y+1)=(x+y)+1=\oplus(x,y)+1=S(\oplus(x,y))$

$=S(P_2^3(x,\oplus(x\ ,y),y))$

$=(S\circ P_2^3)(x,\oplus\ (x,y),y)$

Nous avons donc : $G=P_1^1$ est PR car c'est une fonction de base.

$H=(S\circ P_2^3)$ est PR car c'est une composition de deux fonctions de base.

La fonction ⊕ est construite par récursion à partir de 2 fonctions PR, à savoir G et H, donc ⊕ est PR.

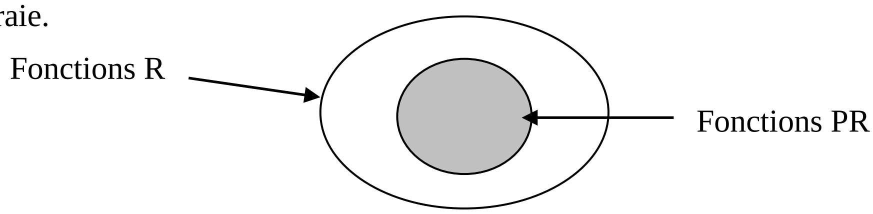
III.3.2) Fonction Récursive (R)

Une fonction est dite RECURSIVE (R) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions R au moyen des règles de Composition et/ou de Récursion et/ou de Minimisation.

Remarques

1/ Toute fonction PRIMITIVE RECURSIVE est RECURSIVE mais la réciproque n'est pas vraie.



2/ Une fonction est PRIMITIVE RECURSIVE si elle est définie sans utiliser la règle de minimisation. Mais dire qu'une fonction RECURSIVE n'est pas PRIMITIVE RECURSIVE signifie que toutes tentative de construction de cette fonction fait intervenir la règle de minimisation.

III.3.3) Dérivation PR (resp. R)

Une fonction F est primitive récursive (resp. récursive) s'il existe une suite finie de fonctions $F_1,\ldots,F_n$ telles que :

- $F_n = F$
- Et pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$
  - soit F_i est une fonction de base,
  - soit il a été déjà prouvé que F_i est primitive récursive (resp. récursive)
  - soit F_i est définie à partir de certaines des fonctions $F_1,\ldots,F_{i-1}$ au moyen de la règle de composition ou de récursion (resp. la règle de composition ou de récursion ou de minimisation).

La suite des fonctions $F_1, \ldots ,F_n$ est appelée une <u>dérivation</u> primitive récursive (resp. récursive) de F

Exemple

Montrons que la fonction $\otimes$ d'arité 2 définie par : $\otimes=\lambda xy.\ x\otimes y$ est PR.

Puis donnons une dérivation primitive récursive de $\otimes$.

Pour ce faire nous allons procéder à une construction en utilisant la règle de récursion :

$\otimes(x,0)=x*0=0=Z(x)$

$\otimes(x,y+1)=x*(y+1)=(x*y)+x=\otimes(x,y)+x=\oplus(\otimes(x,y),x)$

$=\oplus(P^3_2(x,\otimes(x,y),y),P^3_1(x,\otimes(x,y),y))$

$=[\oplus\circ (P^3_2, P^3_1)](x,\otimes(x,y),y)$

Nous avons donc : G=Z est PR car c'est fonction de base.

$H=\oplus\circ (P^3_2, P^3_1)$ est PR car c'est une composition de fonctions PRs, $\oplus$ (déjà montré), P^3_2 (de base) et P^3_1 (de base).

La fonction $\otimes$ est construite par récursion à partir de 2 fonctions PR, à savoir G et H, donc $\otimes$ est PR.

A partir de cette construction, nous pouvons définir pour la fonction $\otimes$, la dérivation PR suivante :

$F_1=Z$	fonction de base (arité 1)
$F_2=\oplus$	PR déjà montrée (arité 2)
$F_3=P^3_2$	fonction de base (arité 3)
$F_4=P^3_1$	fonction de base (arité 3)
$F_5=F_2\circ(F_3,F_4)$	composition appliquée à F_2, F_3 et F_4 (arité 3)

$F_6=\otimes$ récursion appliquée à F_1 et F_5 (arité 2)

En conclusion, la suite de fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 est une dérivation PR de la fonction $\otimes$.

II.4) LA RECURSIVITE DES FONCTIONS DE IN^p DANS IN^q

Nous pouvons étendre les notions de fonctions primitives récursivesq et de fonctions récursives aux fonctions de $IN^p \rightarrow IN^q$ avec $q \geq 1$.

Pour cela, nous utiliserons le fait qu'une fonction F de IN^p dans IN^q peut être décomposée en q fonctions F_i de $IN^p \rightarrow IN$ comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} IN^p & \xrightarrow{\quad F \quad} & IN^q & \xrightarrow{\quad P_i^q \quad} & IN \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & (y_1, \dots, y_q) & \longmapsto & y_i \end{array}$$

$$F_i=P_i^q \circ F$$

Alors F est dite primitive récursive (resp. récursive) si et seulement si toutes les fonctions de projection $F_i= P_i^q \circ F$ $(1 \leq i \leq q)$ sont PR (resp. R).

Exemple

Montrons que la fonction F définie comme suit est PR :

$$\begin{array}{rcl} F : IN^2 & \longrightarrow & IN^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x*y) \end{array}$$

Soit F_1 la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccccc} IN^2 & \xrightarrow{\quad F \quad} & IN^2 & \xrightarrow{\quad P_1^2 \quad} & IN \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x*y) & \longmapsto & (x+y)=y_2 \end{array}$$

$$F_1=P_1^2 \circ F$$

$F_1=\oplus$ donc PR.

De même soit F_2 la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccccc} IN^2 & \xrightarrow{\quad F \quad} & IN^2 & \xrightarrow{\quad P_2^2 \quad} & IN \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x*y) & \longmapsto & (x+y)=y_2 \end{array}$$

$$F_2=P_2^2 \circ F$$

$F_2=\otimes$ donc PR.

Conclusion : F_1 et F_2 sont PR donc F est PR

II.5) RECURSIVITE POUR LES ENSEMBLES ET RELATIONS

II.5.1) Récursivité pour les ensembles

Définition : Fonction caractéristique d'un ensemble

Soit A un sous ensemble de IN^p, nous appelons fonction CARACTERISTIQUE de A (par rapport à IN^p) , notée Car_A , la fonction :

$$Car_A : \quad IN^p \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$X \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } X \in A \\ 0 \text{ si } X \notin A \end{cases}$$

Définition : Ensemble récursive

Un ensemble A est dit RECURSIF (resp. PREMITIF RECURSIF) si sa fonction caractéristique Car_A est récursive (resp. primitive récursive).

Définition : Ensemble décidable

Un ensemble A de IN^p est dit DECIDABLE si nous pouvons décider quelque soit $x \in IN^p$ si $x \in A$ ou si $x \notin A$.

Proposition

Si A est un ensemble RECURSIF alors A est un ensemble DECIDABLE.

<u>Indications sur la preuve</u>

En effet, si un ensemble A est récursif cela signifie que la fonction caractéristique de A, soit Car_A, est elle même récursive. Donc nous savons calculer la valeur $Car_A(x)$ et cela quelque soit $x \in IN^p$. De plus, comme l'ensemble des images de Car_A étant restreint à 2 valeurs : 0 ou 1, nous sommes devant 2 cas :

- ou bien $Car_A(x) = 1$ au quel cas $x \in A$.
- ou bien $Car_A(x) = 0$ au quel cas $x \notin A$.

En conclusion, quelque soit $x \in IN^p$ nous pouvons toujours décider si $x \in A$ ou si $x \notin A$.

Exemple

Soient E1 et E2 deux sous ensembles primitifs récursifs de N. Montrons que l'ensemble $E1 \cap E2$ est décidable.

Si nous arrivons à montrer que l'ensemble est récursif, nous pouvons conclure que l'ensemble est bien décidable. Nous utilisons la règle de composition pour montrer que l'ensemble est bien PR et conclure par la suite qu'il est récursif. Rappelons qu'un ensemble est PR si sa fonction caractéristique $Car_{E1 \cap E2}$ est PR.

$$\mathbf{Car_{R\cap S}(x)} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E1 \cap E2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E1 \text{ et } x \in E2 \\ 0 \text{ si } x \notin E1 \text{ ou } x \notin E2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) = 1 \text{ et } \mathrm{Car}_{E2}(x) = 1 \\ 0 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) = 0 \text{ ou } \mathrm{Car}_{E2}(x) = 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x) = 1 \\ 0 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x) = 0 \end{cases} = \mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x)$$
$$= \otimes\circ(\mathbf{Car_R}, \mathbf{Car_S})(\mathbf{x})$$

Ou encore

$$\mathbf{Car_{R\cap S}(x)} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x) = 1 \\ 0 \text{ si } \mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x) = 0 \end{cases} = \mathrm{Sg}(\mathrm{Car}_{E1}(x) * \mathrm{Car}_{E2}(x))$$
$$= \mathbf{Sg}\circ\otimes\circ(\mathbf{Car_{E1}}, \mathbf{Car_{E2}})(\mathbf{x})$$

La fonction $\mathrm{Car}_{E1\cap E2}$ est une composition de fonction PR, elle est donc PR. Par conséquent, elle est récursive et l'ensemble E1$\cap$E2 est récursif et donc décidable.

Remarque

Nous remarquons à travers cet exemple qu'une même fonction peut avoir plusieurs constructions différentes.

Définition : Ensemble effectivement énumérable

Un ensemble A est dit EFFECTIVEMENT ENUMERABLE si et seulement s'il existe une fonction F récursive telle que l'ensemble des images de F est l'ensemble A lui même.

Remarque

D'une manière analogue, nous pouvons étendre la notion de RECURSIVITE aux relations.

II.5.2) Récursivité pour les relations

Définition : Fonction caractéristique d'une relation

Soit R une relation définie sur l'ensemble IN^p, nous appelons fonction CARACTERISTIQUE de R (par rapport à IN^p), notée Car_R, la fonction :

$$\mathrm{Car}_R : IN^p \longrightarrow \{0 , 1\}$$
$$X \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si X vérifie la relation R} \\ 0 \text{ si X ne vérifie pas la relation R} \end{cases}$$

Définition : Relation récursive

Une relation R est dite RECURSIVE (resp. PREMITIVE RECURSIVE) si Car_R est récursive (resp. primitive récursive).

Exemple

Soient deux relations binaires primitives récursives R1 et R2 définies sur les entiers naturels. Montrons que la relation R1$\wedge$R2 est PR (Avec $\wedge$ est le ET logique).

Nous devons montrer que la fonction caractéristique $\mathrm{Car}_{R1\wedge R2}$ de la binaire R1$\wedge$R2 est PR (une relation binaire est définie sur deux entier x et y).

$$\mathbf{Car_{R\wedge S}(x,y)} = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \text{ vérifie } R1\wedge S \\ 0 \text{ si } (x,y) \text{ne vérifie pas } R1\wedge R2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \text{vérifie } R1 \text{ et } (x,y) \text{ vérifie } R2 \\ 0 \text{ si } (x,y) \text{ ne vérifie pas } R1 \text{ ou } (x,y) \text{ ne vérifie pas } R2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } Car_{R1}(x,y) = 1 \text{ et } Car_{R2}(x,y) = 1 \\ 0 \text{ si } Car_{R1}(x,y) = 0 \text{ ou } Car_{R2}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y) = 1 \\ 0 \text{ si } Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y) = 0 \end{cases} = Car_{R1}(x,y) * Car_{R2}(x,y)$$

$$= \otimes\circ(\mathbf{Car_{R1}}, \mathbf{Car_{R2}})(\mathbf{x})$$

Si les deux relations R1 et R2 sont PR, alors leurs fonctions caractéristiques respectives Car_{R1} et Car_{R2} sont elles aussi PR.

La fonction $Car_{R1\wedge R2}$ est donc construite par composition à partir de fonctions PRs, elle est donc PR. La relation $R1\wedge R2$ est alors PR.

Remarque

Là aussi, nous pouvons avoir une autre composition $Sg\circ\otimes\circ(Car_{R1}, Car_{R2})(x,y)$de la conjonction de relation