Chapitre 2 : Intégrales au sens de Riemann et primitives

Partie 1 :

Intégrales au sens de Riemann

Partie 1 :

Intégrales au sens de Riemann

1.1. Fonctions en escalier

1.1.1. Définition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$.

On appelle subdivision de $[a, b]$, une suite finie, strictement croissante, de nombres appartenant à $[a, b]$, tels que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On note, $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Le support de cette subdivision est l'ensemble noté $s(\sigma)$, défini par $s(\sigma) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Le pas de cette subdivision noté $\delta(\sigma)$ est le maximum des longueurs des intervalles (a_{i-1}, a_i), $i = 1, \ldots, n$ i.e. $\delta(\sigma) = \max_{i=1,\ldots,n} |a_i - a_{i-1}|$.

La subdivision est dite à pas égal ou équidistante si tous les intervalles $(a_i - a_{i-1})$ ont même longueur

1.1.1.1. Exemple

1) $\sigma = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ est une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$; $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = 1$;

$s(\sigma) = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$; le pas $\delta(\sigma) = \frac{1}{2}$; σ n'est pas équidistante.

2) $\sigma' = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ est une subdivision de $[0, 1]$; $\delta(\sigma) = \frac{1}{4}$; σ est équidistante.

1.1.2. Définition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On appelle réunion de deux subdivisions σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$, la subdivision σ'' de $[a, b]$ définie par $s(\sigma") = s(\sigma) \cup s(\sigma')$. On note $\sigma" = \sigma \cup \sigma'$.

1.1.2.1. Exemple

Soit $\sigma = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ et $\sigma' = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right)$ deux subdivisions de $[0, 1]$; $\sigma \cup \sigma' = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

1.1.3. Définition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

σ est dite plus fine que σ' si, et seulement si, $s(\sigma') \subset s(\sigma)$.

1.1.3.1. Exemple

$\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et plus fine que σ'.

Revenons à l'exemple 1.1.1.1 σ' est plus fine que σ et σ''' est plus fine que σ''.

1.1.4. Définition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur $[a, b]$.

φ est dite une fonction escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de

$[a, b]$ telle que pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, la restriction de φ à $]a_{i-1}, a_i[$ est constante.

On dit que la subdivision σ est adaptée à la fonction φ.

Si φ est une fonction en escalier et σ est une subdivision adaptée à φ alors toute subdivision plus fine que σ est aussi une subdivision adaptée à φ.

1.1.4.1. Exemple

1. Les fonctions constantes sur $[a, b]$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

2. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 3 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$ est une fonction en escalier

3. $g(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [-1, 2]$ est une fonction en escalier

4. $h : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & si\ x \neq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$ n'est pas une fonction en escalier

1.1.5. Propriétés des fonctions en escalier

Soit $[a, b]$, $a < b$,un segment de $\mathbb{R}$. f et g deux fonctions en escalier sur un $[a, b]$.

- La somme $f + g$ est une fonction en escalier sur un $[a, b]$
- Le produit fg, est des fonctions en escalier sur $[a, b]$
- Si $g \neq 0$ alors f/g est une fonction en escalier sur $[a, b]$
- La valeur absolue $|f|$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$
- Si g ne s'annule pas sur $[a, b]$ alors le quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction en escalier

1.2. Intégrale au sens de Riemann d'une fonction en escalier

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction en escalier et σ une subdivisions de $[a, b]$, adaptée à φ.

Posons $\mathcal{A}(\varphi, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) c_i$, où pour $i = 0, \ldots, n-1$, c_i est la valeur de φ sur $]a_i, a_{i+1}[$.

Remarquer

Par définition, $\mathcal{A}(\varphi, \sigma)$ ne dépend pas des valeurs prises par φ sur $s(\sigma)$.

1.2.1. Exemple

On considère les deux fonctions suivantes,

$$\varphi : [0,2] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 3 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad ,\ \psi : [0,2] \to \mathbb{R},\ \psi(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ -1 & si\ x = 1 \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Comparons sans faire de calculs les sommes $\mathcal{A}\big(\varphi,(0\ ,1\ ,2)\big)$ et $\mathcal{A}\big(\psi,(0\ ,1\ ,2)\big)$.

Par définition, on a $\mathcal{A}\big(\varphi,(0\ ,1\ ,2)\big) = \mathcal{A}\big(\psi,(0\ ,1\ ,2)\big)$ puisque $\varphi = \psi$ sur $[0,2] \setminus \{1\}$

$\int_0^2 \varphi(x)dx = \mathcal{A}(\varphi,\sigma(0,1,2)) = \sum_{i=0}^{2}(a_{i+1} - a_i)c_i = (1-0)1 + (2-1)(-2) = -1$ d'où

$$\int_0^2 \psi(x)dx = -1 \text{ puisque } \varphi = \psi \text{ sur }]0.1[\cup]1,2[$$

1.2.2. Exercice

Soit $\varphi :\ [0,2] \ \to\ \mathbb{R}$ une fonction en escalier définie par $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$.

Calculer $\mathcal{A}\left(\varphi,\left(0\ ,\frac{1}{3}\ ,\frac{2}{3}\ ,1,2\right)\right)$ et $\mathcal{A}\left(\varphi,\left(0\ ,\frac{1}{4},1,\frac{5}{4},2\right)\right)$ puis comparer leurs valeurs.

Le théorème suivant montre que $\mathcal{A}(\varphi,\sigma)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ.

1.2.3. Théorème

Soit $[a,b], a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi :\ [a,b] \to\ \mathbb{R}$, une fonction en escalier.

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, adaptées à φ alors $\mathcal{A}(\varphi,\sigma) = \mathcal{A}(\varphi,\sigma')$.

Preuve

Soit $\sigma = (a_0\ ,a_1\ ,\ldots,\ a_n)$ et $\sigma' = (b_0\ ,b_1\ ,\ldots,\ b_n)$ deux subdivisions de $[a,b]$, adaptées à φ.

Supposons que σ est plus fine que σ'. Soit $k \in \{0,\ldots, m-1\}$.

Il existe $i_k \in \{0,\ldots,n-1\}$ tel que, $b_k = a_{i_k} < a_{i_k+1} < \cdots < a_{i_{k+1}} = b_{k+1}$

Ainsi, si $\varphi = d_k$ sur $]\ b_k\ ,b_{k+1}[$ alors $\varphi = d_k$ i.e. $c_i = d_k$ sur $]a_i, a_{i+1}[,\ i_k \leq i < i_{k+1}$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi,\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - b_i)\ c_i \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1}(a_{i+1} - a_i)\ c_i \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1}(a_{i+1} - a_i)\ d_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\ d_k \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1}(a_{i+1} - a_i) \text{ (Une somme télescopique)} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}(b_{k+1} - b_k)\ d_k = \mathcal{A}(\varphi,\sigma')\end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'aucune des deux subdivisions σ et σ' n'est plus fine que l'autre. La subdivision $\sigma" = \sigma \cup \sigma'$, alors $\mathcal{A}(\varphi,\sigma'') = \mathcal{A}(\varphi,\sigma')$ et $\mathcal{A}(\varphi,\sigma'') = \mathcal{A}(\varphi,\sigma')$ puisque $\sigma"$ est plus fine que σ' et $\sigma"$, donc $\mathcal{A}(\varphi,\sigma') = \mathcal{A}(\varphi,\sigma)$. La proposition est prouvée.

1.2.4. Définition (Intégrale au sens de Riemann d'une fonction en escalier)

Soit $[a, b], a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et σ une subdivision adaptée à φ. On appelle intégrale au sens de Riemann de φ le nombre réel noté $\int_a^b \varphi(x)dx$ et défini par

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \mathcal{A}(\varphi, \sigma)$$

On lit l'intégrale de a à b de $\varphi(x)dx$. On convient que

$$\int_b^a \varphi(x)dx = -\int_a^b \varphi(x)dx$$

et

$$\int_a^a \varphi(x)dx = 0$$

1.2.4.1. Remarque

$\int_a^b \varphi(x)dx$ ne dépend que de a, b et φ. En effet, par définition, $\int_a^b \varphi(x)dx$ ne dépend pas des valeurs prises par φ aux points de $s(\sigma)$ et d'après le théorème 1.2.3. l'intégrale ne dépend pas du choix de la subdivision.

1.2.4.2. Exemple

Calculer l'intégrale la fonction φ définie sur $[0, 2]$ par $\varphi(x) = \lfloor x \rfloor$

puis en déduire la valeur de l'intégrale de la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ telle que $\psi(x) = \varphi(x)\ si\ x \neq \frac{1}{2}$.

$\int_0^2 \varphi(x)\, dx = \mathcal{A}\left(\varphi, \sigma(0, \frac{1}{2}, 1,2)\right) = 1.$

Comme $\psi = \varphi$ en tout point de $[0, 2]$ sauf en un point du support: $x = \frac{1}{2}$, alors

$\int_0^2 \psi(x)\, dx = \int_0^2 \varphi(x)\, dx = 1$

1.2.4.3. Interprétation géométrique

$\int_a^b \varphi(x)dx$ est la somme des aires des rectangles délimités par l'axe des abscisses et la courbe de la fonction φ.

1.2.4.4. Remarque

Les aires des rectangles au-dessus de l'axe sont comptées positivement et ceux en dessous sont comptés négativement.

1.2.4.5. Exemple

$\int_{-1}^3 \lfloor x \rfloor\, dx = \left(0 - (-1)\right) \times (-1) + (1 - 0) \times 0 + (2 - 1) \times 1 + (3 - 2) \times 2 = 2$

1.2.5. Proposition (Propriétés des intégrales des fonctions en escalier)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, φ et ψ deux fonctions en escalier sur$[a, b]$.

Alors

(1) (Linéarité)

Si λ un réel, alors

$$\int_a^b \lambda\varphi(x) + \psi(x)x = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

(2) (Positivité)

Si $\varphi \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$

(3) (Relation de Chasles)

Pour tout $c \in [a, b]$, φ est en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx$$

Preuve

La preuve est laissée en exercice.

Remarque

1.2.5.1. Corollaire (croissance de l'intégrale)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq \psi$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

Preuve

En effet, $\psi - \varphi$ est une fonction en escalier supérieure à zéro d'où d'après la propriété de positivité des intégrales des fonctions en escalier, on a $\int_a^b \psi(x) - \varphi(x)dx \geq 0$.

Comme $\int_a^b \psi(x) - \varphi(x)\ dx = \int_a^b \psi(x)\ dx - \int_a^b \varphi(x)dx$, alors le corollaire est prouvé.

1.2.6. Proposition (intégrale et valeur absolue)

Si φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ alors $\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx$

Preuve (en exercice)

Remarquer que $|\varphi|$ est une fonction en escalier puis utiliser l'inégalité triangulaire.

1.3. Fonctions intégrables au sens de Riemann

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Considérons l'ensemble des intégrales de toutes les fonctions en escalier φ définies sur $[a, b]$ et inférieures à f sur $[a, b]$, qu'on note $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$:

$$\mathcal{E}^-(f, [a, b]) = \left\{\int_a^b \varphi(x)dx \, , \varphi \text{ } en \text{ } escalier \text{ } telle \text{ } que \text{ } \varphi \leq f \text{ } sur \text{ } [a, b]\right\}$$

et l'ensemble des intégrales de toutes les fonctions en escalier ψ définies sur $[a, b]$ et supérieures à f sur $[a, b]$, qu'on note $\mathcal{E}^+(f, [a, b])$:

$$\mathcal{E}^+(f, [a, b]) = \left\{\int_a^b \psi(x)dx \, , \psi \text{ } en \text{ } escalier \text{ } telle \text{ } que \text{ } \psi \geq f \text{ } sur \text{ } [a, b]\right\}$$

1.3.1. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$. Alors les ensembles $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$ et $\mathcal{E}^+(f, [a, b])$ sont non vides et sont respectivement majoré et minoré.

Preuve

f est bornée sur $[a, b]$ alors il existe deux réels M et m tels que $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$ donc $\mathcal{E}^-(f, [a, b]) \neq \emptyset$ et $\mathcal{E}^+(f[a, b]) \neq \emptyset$; en effet,

la fonction $\varphi_0(x) = m$ sur $[a, b]$ est une fonctions en escaliers inférieure à f et

la fonction $\psi_0 = M$ sur $[a, b]$ est une fonctions en escaliers supérieure à f

donc $\int_a^b \varphi_0(x)dx \in \mathcal{E}^-(f, [a, b])$ et $\int_a^b \psi_0(x)dx \in \mathcal{E}^+(f, [a, b])$

D'autre part, pour toute fonction en escalier φ inférieure à f et toute fonction en escalier ψ supérieure à f on a

$\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[a, b]$ d'où $\varphi \leq \psi_0$ et $\psi \geq \varphi_0$ sur $[a, b]$ Alors d'après la propriété des intégrales des fonctions en escaliers, on a
$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi_0(x)dx$ et $\int_a^b \psi(x)dx \geq \int_a^b \varphi_0(x)dx$, c'est-à-dire,

$\int_a^b \varphi(x)dx \leq M(b - a)$ et $\int_a^b \psi(x)dx \geq m(b - a)$. Donc $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$ est majoré et $\mathcal{E}^+(f, [a, b])$ est minoré. La proposition est prouvée.

La propriété de la borne supérieure implique que l'ensemble $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$ admet une borne supérieure $Sup \, \mathcal{E}^-(f, [a, b])$ et l'ensemble $\mathcal{E}^+(f, [a, b])$ admet une borne inférieure qu'on note $Inf \, \mathcal{E}^+(f, [a, b])$.

On définit alors deux nombres réels qu'on note $I^-(f, [a, b])$ et $I^+(f, [a, b])$ par

$$I^-(f, [a, b]) = sup \, \mathcal{E}^-(f, [a, b])$$

$$I^+(f, [a, b]) = inf \, \mathcal{E}^+(f, [a, b])$$

1.3.2. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est bornée sur $[a, b]$ alors $I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b])$.

Preuve

Par définition de $I^-(f, [a, b])$ et $I^+(f, [a, b])$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier φ inférieure à f et une fonction en escalier ψ supérieure à f telles que

$$I^-(f, [a, b]) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(x)dx \leq I^-(f, [a, b]) \text{ et}$$

$$I^+(f, [a, b]) \leq \int_a^b \psi(x)dx < I^+(f, [a, b]) + \varepsilon, \text{ d'où}$$

$$I^-(f, [a, b]) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx < I^+(f, [a, b]) + \varepsilon \text{ puisque } \varphi \leq f \leq \psi$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$ on $I^-(f, [a, b]) < I^+(f, [a, b]) + 2\varepsilon$ en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini on obtient $I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b])$.

La proposition est prouvée.

1.3.3. Définition (Fonction intégrable au sens de Riemann)

et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann ou Riemann-intégrable si $I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$.

On appelle alors ce nombre l'intégrale au sens de Riemann de f sur $[a, b]$, on note encore (comme pour les fonctions en escalier) $\int_a^b f(x)dx$ et on lit l'intégrale de a à b de $f(x)dx$.

1.3.3.1. Un contre-exemple

On veut montrer qu'une fonction bornée sur un intervalle fermé borné peut être non Riemann-intégrable à l'aide d'un contre-exemple.

En effet, considérons la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ est\ rationnel \\ 1 & si\ x\ est\ irrationnel \end{cases}$$

Déterminons $I^-(f, [0, 1])$ et $I^+(f, [0, 1])$. Si u est une fonction en escalier sur $[0, 1]$ inférieure à f sur $[0, 1]$ alors $u \leq 0$ sur $[0, 1]$ donc $u_0 = 0$ majore toutes les fonctions en escaliers inférieures à f d'où d'après la propriété de positivité des intégrales des fonctions en escalier $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$ est majoré par $\int_0^1 u_0(x)dx$ qui appartient à $\mathcal{E}^-(f, [a, b])$ puisque u_0 est une fonction en escalier inférieure à f alors

$I^-(f, [0, 1]) = \int_0^1 u_0(x)dx$ i.e. $I^-(f, [0, 1]) = 0$.

De la même manière, on montre que $I^+(f, [0, 1]) = \int_0^1 w_0(x)dx$ où w_0 est la fonction constante définie sur $[0, 1]$ par $w_0 = 1$ i.e. $I^+(f, [0, 1]) = 1$.

$I^-(f, [0, 1]) \neq I^+(f, [0, 1])$. Donc f n'est pas intégrable sur $[0, 1]$.

1.4. Sommes de Darboux

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et σ_n une subdivision de $[a, b]$. Posons pour $i = 1, \dots, n$,

$$m_i = \underset{x \in [a_{i-1}, a_i[}{inf} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \underset{x \in [a_{i-1}, a_i[}{sup} f(x)$$

On définit sur $[a, b]$ deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n par

$\varphi_n(x) = m_i$ si $x \in [a_{i-1}, a_i[$ et $\psi_n(x) = M_i$, $x \in [a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$.

Considérons maintenant les intégrales au sens de Riemann de ces deux fonctions φ_n et ψ_n qu'on note respectivement $\mathcal{S}^-(f, \sigma_n)$ et $\mathcal{S}^+(f, \sigma_n)$:

$\mathcal{S}^-(f, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\, m_i$ et $\mathcal{S}^+(f, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\, M_i$

1.4.1. Définition (Sommes de Darboux)

$\mathcal{S}^-(f, \sigma_n)$ est appelée somme de Darboux inférieure de f relative à la subdivision σ_n.

$\mathcal{S}^+(f, \sigma_n)$ est appelée somme de Darboux supérieure de f relative à la subdivision σ_n.

1.4.2. Proposition

Soit $[a, b], a < b$, un segment de $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction bornée alors

$$I^-(f, [a, b]) = \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{sup} \{\mathcal{S}^-(f, \sigma)\} \text{ et}$$

$$I^+(f, [a, b]) = \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{inf} \{\mathcal{S}^+(f, \sigma)\}$$

Preuve

Soit σ subdivision de $[a, b]$. $\mathcal{S}^-(f, \sigma) \in \mathcal{E}^-(f, [a, b])$ et $\mathcal{S}^+(f, \sigma) \in \mathcal{E}^+(f, [a, b])$ d'où

$$I^-(f, [a, b]) \geq \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{sup} \mathcal{S}^-(f, \sigma) \text{ et } I^+(f, [a, b]) \leq \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{inf} \mathcal{S}^+(f, \sigma)$$

D'autre part, il existe une fonction en escalier φ_n supérieure à toute fonction en escalier sur $[a, b]$ inférieure à f , définie par $\varphi_n(x) = \underset{[a_{i-1}, a_i[}{inf} f(x)$, si $x \in [a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$, et une fonction en escalier ψ_n inférieure à toute fonction en escalier sur $[a, b]$ supérieure à f, définie par $\psi_n(x) = \underset{[a_{i-1}, a_i[}{sup} f(x)$, si $x \in [a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$. Alors

$$I^-(f, [a, b]) \leq \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{sup} \mathcal{S}^-(f, \sigma) \text{ et}$$

$$I^+(f, [a, b]) \geq \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{inf} \mathcal{S}^+(f, \sigma), \text{ d'où les égalités,}$$

$$I^-(f, [a, b]) = \underset{\sigma\text{subdivision de } [a,b]}{sup} \mathcal{S}^-(f, \sigma) \text{ et } I^+(f, [a, b]) = \underset{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}{sup} \mathcal{S}^+(f, \sigma)$$

La proposition est prouvée.

1.4.2.1. Corollaire

Soit $[a,b]$, $a<b$,un segment de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a,b]$. Alors

f est Riemann-intégrable si, et seulement si la borne supérieure de ses sommes de Darboux inférieures et la borne inférieure de ses sommes de Darboux supérieures coïncident i.e.

$$\sup_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} \{\mathcal{S}^-(f,\sigma)\} = \inf_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} \{\mathcal{S}^+(f,\sigma)\} \text{ et}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} \{\mathcal{S}^-(f,\sigma)\} = \inf_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} \{\mathcal{S}^+(f,\sigma)\}$$

1.4.3. Proposition

Soit $[a,b]$, $a<b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée.

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$ telles que σ est plus fine que σ' alors

$\mathcal{S}^-(f,\sigma)\geq\mathcal{S}^-(f,\sigma')$ et $\mathcal{S}^+(f,\sigma')\leq\mathcal{S}^+(f,\sigma)$.

1.4.3.1. Corollaire

Soit $[a,b]$, $a<b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée.

Alors f est Riemann-intégrable si, et seulement si, $\lim\limits_{\delta(\sigma)\to 0}\mathcal{S}^-(f,\sigma)=\lim\limits_{\delta(\sigma)\to 0}\mathcal{S}^+(f,\sigma)$ où σ est une subdivision de $[a,b]$ et $\delta(\sigma)$ le pas de cette subdivision, et

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(\sigma)\to 0}\mathcal{S}^-(f,\sigma) = \lim_{\delta(\sigma)\to 0}\mathcal{S}^+(f,\sigma)$$

1.4.4. Théorème (Critère d'intégrabilité)

Soit $[a,b]$, $a<b$, un segment de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier φ inférieure à f et une fonction en escalier ψ supérieure à f telles que,

$$\int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))dx<\varepsilon$$

Preuve

Supposons que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction en escalier φ inférieure à f et une fonction en escalier ψ supérieure à f telles que $\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))dx<\varepsilon$ et montrons que f est Riemann-intégrable. Par définition des nombres $I^-(f,[a,b])$ et $I^+(f,[a,b])$ on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b]) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$$

et d'après la proposition 1.3.2. on a $I^+(f,[a,b])-I^-(f,[a,b])\geq 0$; alors on en déduit les inégalités suivantes, $0\leq I^+(f,[a,b])-I^-(f,[a,b])\leq \int_a^b \psi(x)-\varphi(x)dx$; d'autre part on a par hypothèse $\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))dx<\varepsilon$. Finalement, pour tout $\varepsilon>0$ on a

$0\leq I^+(f,[a,b])-I^-(f,[a,b])<\varepsilon$. Donc $I^+(f,[a,b])=I^-(f,[a,b])$. D'où le théorème.

Un critère d'intégrabilité équivalent est donné par le théorème suivant.

1.4.5. Théorème

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f relatives à cette subdivision σ sont telles que,

$$\mathcal{S}^+(f, \sigma) - \mathcal{S}^-(f, \sigma) < \varepsilon$$

1.4.6. Théorème (Fonction monotone sur un segment)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$.

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone sur $[a, b]$ alors f est Riemann-intégrable.

Preuve

Supposons que f est croissante dans $[a, b]$.

Pour toute subdivision σ_n de $[a, b]$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout x dans $[a_{i-1}, a_{i-1}[$, on a

$$f(a_{i-1}) \le f(x) \le f(a_i)$$

Alors

$$\mathcal{S}^+(f, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_i)$$

et

$$\mathcal{S}^-(f, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1})$$

où $\mathcal{S}^+(f, \sigma_n)$ et $\mathcal{S}^-(f, \sigma_n)$ sont respectivement les sommes de Darboux supérieure et inférieure à f relatives à σ_n.

D'où
$$\mathcal{S}^+(f, \sigma_n) - \mathcal{S}^-(f, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et essayons une subdivision σ_{n_ε} à pas égal de pas $\delta(\sigma_{n_\varepsilon}) = \frac{b-a}{n_\varepsilon}$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^+(f, \sigma_{n_\varepsilon}) - \mathcal{S}^-(f, \sigma_{n_\varepsilon}) &= \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \frac{b-a}{n_\varepsilon} \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big) \\ &= \frac{b-a}{n_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big) \\ &= \frac{b-a}{n_\varepsilon} \big(f(b) - f(a)\big) < \varepsilon\end{aligned}$$

On choisit $n_\varepsilon > \frac{b-a}{\varepsilon} \big(f(b) - f(a)\big)$.

Alors f est Riemann-intégrable.

La démonstration est analogue lorsque f est décroissante. Le théorème est prouvé.

1.4.7. Théorème (Fonction continue sur un segment)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ alors f est Riemann-intégrable.

Preuve

f est continue sur $[a, b]$ donc bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes

Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe deux points x_i et x'_i appartenant à $[a_{i-1}, a_i]$, telles que

$$f(x_i) = \operatorname*{Max}_{[a_{i-1}, a_i]} f(x) = M_i \text{ et } f(x'_i) = \min_{[a_{i-1}, a_i]} f(x) = m_i$$

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe une subdivision σ_{n_ε} de $[a, b]$, telle que

$$\mathcal{S}^+(f, \sigma_{n_\varepsilon}) - \mathcal{S}^-(f, \sigma_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$$

f est uniformément continue dans $[a, b]$ car continue sur un segment

Alors pour tout x et x' dans $[a, b]$, il existe $h > 0$ (ne dépendant ni de x ni de x') telle que dès que $|x - x'| < h$ on a

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Choisissons une subdivision σ_{n_ε} de $[a, b]$ telle que son pas $\delta(\sigma_{n_\varepsilon}) < h$, alors, par définition du pas d'une subdivision, pour tout $i = 1, .., n$, on a $|a_i - a_{i-1}| < h$, d'où

pour tout $i = 1, .., n$, on a $|x_i - x'_i| < h$.

Alors pour tout $i = 1, .., n$, on a $|f(x_i) - f(x'_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, c'est à dire

$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ où pour tout $i = 1, .., n$, $M_i = \operatorname*{Max}_{[a_{i-1}, a_i]} f(x)$ et $m_i = \min_{[a_{i-1}, a_i]} f(x)$

D'où $\mathcal{S}^+(f, \sigma_{n_\varepsilon}) - \mathcal{S}^-(f, \sigma_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Le théorème est prouvé.

1.5. Sommes de Riemann

1.5.1. Définition (Somme de Riemann)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$, σ_n une subdivision de $[a, b]$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des nombres réels tels que pour $i = 1, \ldots, n$, $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

On appelle somme de Riemann de f relative à la subdivision σ_n et aux points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ la somme notée $\mathcal{R}_n(f, \sigma_n, \xi_k)$ et définie par,

$$\mathcal{R}_n(f, \sigma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(\xi_k)$$

1.5.2. Proposition (Comparaison entre sommes de Riemann et sommes de Darboux)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur $[a, b]$. Pour toute subdivision σ_n de $[a, b]$, $\mathcal{S}^-(f, \sigma_n) \leq \mathcal{R}_n(f, \sigma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leq \mathcal{S}^+(f, \sigma_n)$.

Preuve

Soit σ_n une subdivision de $[a, b]$ alors on peut définir les sommes de Darboux car f est bornée comme on peut définir la somme de Riemann puisque f est définie sur $[a, b]$.

Pour tout $i = 1, \dots, n$, et tout $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$, on a

$$\underset{[a_{i-1},a_i]}{inf} f(x) \leq f(\xi_i) \leq \underset{[a_{i-1},a_i]}{sup} Sup\, f(x)$$

La proposition découle alors de la propriété des intégrales des fonctions en escaliers.

1.5.3. Théorème (Intégrale d'une fonction continue)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ alors

$$\underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{R}_n(f, \sigma, \xi_1, \dots, \xi_n) = \int_a^b f(x)dx$$

Où pour tout entier non nul n, σ est une subdivision du segment $[a, b]$.

Preuve

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ alors d'après le théorème 1.4.8. f est intégrable

et d'après le corollaire 1.4.4. on a,

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{S}^-(f, \sigma) = \underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{S}^+(f, \sigma).$$

D'autre part, d'après la proposition 1.5.2. pour toute subdivision σ_n de $[a, b]$ on a

$$\mathcal{S}^-(f, \sigma) \leq \mathcal{R}_n(f, \sigma, \xi_1, \dots, \xi_n) \leq \mathcal{S}^+(f, \sigma),$$

En particulier par passage à la limite lorsque $\delta(\sigma_n) \to 0$, il vient

$$\underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{S}^-(f, \sigma) \leq \underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{R}_n(f, \sigma, \xi_1, \dots, \xi_n) \leq \underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{S}^+(f, \sigma)$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)dx \leq \underset{\delta(\sigma)\to 0}{lim} \mathcal{R}_n(f, \sigma, \xi_1, \dots, \xi_n) \leq \int_a^b f(x)dx$$

D'où le théorème .

1.5.3.1. Corollaire

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$, Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

1.5.3.2. Exemple

Vérifions que la fonction carrée $f(x) = x^2$ est intégrable sur $[0, 1]$ puis déterminer son intégrale à l'aide de la somme de Riemann.

$f(x) = x^2$ est intégrable car continue et son intégrale est donnée par

$\int_0^1 x^2dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ (où $a = 0;\ b = 1$) donc

$\int_0^1 x^2dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$ (car n ne dépend pas de l'indice k de sommation)

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (à vérifier par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

D'où $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$.

1.5.3.3. Exemple

Vérifier que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ est intégrable puis déterminons son intégrale à l'aide des sommes de Riemann.

f est continue sur $[0, 1]$ alors f est Riemann-intégrable et

$\int_0^1 e^x dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$ $\quad\quad$ ($\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$ est la somme d'une suite géométrique)

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ $\quad\quad$ ($\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{1}{n}n} = e$)

D'où $\int_0^1 e^x dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e - 1$ $\ (\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{s}{1-e^s} = -1)$

1.6. Propriétés des intégrales

1.6.1. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est Riemann-intégrable alors f est bornée.

1.6.2. Exemple

La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \ si\ x > 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$

n'est pas Riemann intégrable car n'est pas bornée sur $[0, 1]$ puisqu'elle n'a pas de limite finie en zéro. En effet, $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

1.6.3. Proposition (Linéarité)

Soit $[a,b]$, $a<b$, un segment de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\ \mathbb{R}$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et λ est un réel, alors λf et $f+g$ sont intégrables et

$$\int_a^b\ \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx\ \text{ et }\ \int_a^b\ f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\ g(x)dx$$

Preuve

Supposons $\lambda>0$.

Pour tout $\varepsilon>0$ il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi\le f\le\psi$ et $\int_a^b f(x)dx-\frac{\varepsilon}{\lambda}<\int_a^b\varphi(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\psi(x)dx<\int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{\lambda}$.

D'où $\int_a^b\psi(x)dx-\frac{\varepsilon}{\lambda}<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b\varphi(x)dx+\frac{\varepsilon}{\lambda}$.

D'autre part, $\lambda\varphi\le\lambda f\le\lambda\psi$ implique $\int_a^b\lambda\varphi(x)dx\le I^-(\lambda f)\le I^+(\lambda f)\le\int_a^b\lambda\psi(x)dx$

d'où $\lambda\int_a^b\varphi(x)dx\le I^-(\lambda f)\le I^+(\lambda f)\le\lambda\int_a^b\psi(x)dx$

On en déduit, $\lambda\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<I^-(\lambda f)\le I^+(\lambda f)<\lambda\int_a^b f(x)dx+\varepsilon$, alors

$\lambda\int_a^b f(x)dx\le I^-(\lambda f)\le I^+(\lambda f)\le\lambda\int_a^b f(x)dx$ d'où $\int_a^b\lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$

Le résultat reste vrai dans le cas $\lambda=0$. Dans le cas $\lambda<0$ la preuve est la même.

Montrons que $f+g$ est intégrable et $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

Soit $\varepsilon>0$. On peut trouver deux fonctions en escalier φ_1, ψ_1 et deux fonctions en escalier ψ_2 telles que $\varphi_1\le f\le\psi_1$ et $\varphi_2\le g\le\psi_2$ et vérifiant

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<\int_a^b\varphi_1(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\psi_1(x)dx<\int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\int_a^b g(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<\int_a^b\varphi_2(x)dx\le\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b\psi_2(x)dx<\int_a^b g(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part,

$$\int_a^b\varphi_1(x)dx+\int_a^b\varphi_2(x)dx\le I^-(f+g)\le I^+(f+g)\le\int_a^b\psi_1(x)dx+\int_a^b\psi_2(x)dx.$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<I^-(f+g)\le I^+(f+g)<\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+\varepsilon.$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\le I^-(f+g)\le I^+(f+g)\le\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx,$$

alors $f+g$ est intégrable et $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$. D'où la proposition.

1.6.4. Proposition (Positivité)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Preuve

La fonction constante $\varphi_0 = 0$ sur $[a, b]$ est une fonction en escalier inférieure à f sur $[a, b]$ donc $I^-(f) \geq 0$ d'où $I^+(f) \geq 0$ puisque $I^-(f) \leq I^+(f)$. D'où la proposition.

1.6.4.1. Corollaire

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

1.6.5. Proposition (Produit de deux fonctions intégrables)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Alors leur produit fg est intégrable.

Preuve

La preuve est laissée en exercices.

1.6.6. Proposition (Relation de Chasles)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors pour tout $\in [a, b]$, f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[b, c]$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Preuve

Soit $\sigma_n = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$ et posons

$\sigma_1 = \sigma_n \cap [a, c] \cup \{c\}$, $\sigma_2 = \sigma_n \cap [c, b] \cup \{c\}$ et $\sigma'_n = \sigma_n \cup \{c\}$

On peut vérifier que σ_1 et σ_2 sont respectivement des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ et

$\mathcal{S}^-(f, \sigma'_n) = \mathcal{S}^-(f, \sigma_1) + \mathcal{S}^-(f, \sigma_2)$ et $\mathcal{S}^+(f, \sigma'_n) = \mathcal{S}^+(f, \sigma_1) + \mathcal{S}^+(f, \sigma_2)$, d'où

$I^-(f, [a, b]) \leq I^-(f, [a, c]) + I^-(f, [c, b]) \leq I^+(f, [a, c]) + I^+(f, [c, b]) \leq I^+(f, [a, b])$

Comme f est intégrable sur $[a, b]$ alors $I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b]) = \int_a^b f(x)dx$ d'où
$I^-(f, [a, c]) + I^-(f, [c, b]) = I^+(f, [a, c]) + I^+(f, [c, b]) = \int_a^b f(x)dx$ alors

$I^+(f, [a, c]) - I^-(f, [a, c]) + \left(I^+(f, [c, b]) - I^-(f, [c, b])\right) = 0$ (Somme de deux carrés)

D'où $I^+(f, [a, c]) - I^-(f, [a, c]) = \left(I^+(f, [c, b]) - I^-(f, [c, b])\right) = 0$

Donc f est intégrable sur $[a, c]$ et f est intégrable sur $[c, b]$ et on a
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. La relation de Chasles est prouvée.

1.6.7. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann-intégrables alors $sup(f, g)$ et $inf(f, g)$ sont Riemann-intégrables.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver deux fonctions en escalier φ_1, ψ_1 et deux fonctions en escalier φ_2 et ψ_2 telles que $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ et $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ (1) vérifiant

$\int_a^b \psi_1(x) - \varphi_1(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\int_a^b \psi_2(x) - \varphi_2(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

(1) implique $\psi_1 - \varphi_1 \geq 0$ et $\psi_2 - \varphi_2$ et $sup(\varphi_1, \varphi_2) \leq f \leq sup(\psi_1, \psi_2)$

(à vérifier en distinguant les cas $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1 \leq \psi_2$ puis $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1 \geq \psi_2$, etc.)

d'où $sup(\varphi_1, \varphi_2) - sup(\psi_1, \psi_2) \leq (\psi_1 - \varphi_1) + (\psi_2 - \varphi_2)$ donc

$\int_a^b sup(\varphi_1, \varphi_2) - sup(\psi_1, \psi_2)dx \leq \int_a^b \psi_1(x) - \varphi_1(x)dx + \int_a^b \psi_2(x) - \varphi_2(x)dx$ (3)

De (2) et (3) il vient, $\int_a^b sup(\varphi_1, \varphi_2) - sup(\psi_1, \psi_2)dx < \varepsilon$.

Alors d'après le critère d'intégrabilité $sup(f, g)$ est intégrable.

On en déduit que $inf(f, g)$ est aussi intégrable puisque $inf(f, g) = -sup(-f, -g)$

(à vérifier en distinguant les cas $f \leq g$ et puis $f \geq g$). La proposition est prouvée.

1.6.8. Proposition (intégrale et valeur absolue)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable alors $|f|$ est Riemann-intégrable et

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve

D'après la proposition précédente $|f|$ est intégrable puisque $|f| = max(f, 0) - \min(f, 0)$ (à vérifier en exercice)

Montrons maintenant l'inégalité.

On a $-|f| \leq f \leq |f|$ (à vérifier en exercice) d'où $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

C'est-à-dire $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. La proposition est prouvée

1.6.9. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est nulle sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points alors f est Riemann-intégrable d'intégrale nulle.

Preuve

Soit $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ le sous-ensemble de $[a, b]$ de tous les points où f est non nulle i.e.

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 & si\ x \in A \\ f(x) = 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

D'où $f(x) = 0\ si\ x \in]a_i, a_{i+1}[,\ i = 1, .., n$. f est donc une fonction en escalier.

Alors f intégrable et d'après le théorème 1.2.3 son intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie. Alors $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m}(a_{i+1} - a_i)\ 0 = 0$. D'où la proposition.

1.6.9.1. Corollaire

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, A un sous-ensemble fini de points du segment $[a, b]$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f = g$ sur $[a, b] \setminus A$.

Alors g est Riemann-intégrable et $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Preuve

Posons $h = g - f$. h est nulle sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points alors h est intégrable et d'intégrale nulle. D'autre part, on peut écrire $g = f + h$ donc g est intégrable comme somme de fonctions intégrables et $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + h(x))dx$ alors $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. D'où le corollaire.

1.7. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1.7.1. Définition (Discontinuité de première espèce)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage de x_0.

On dit que f présente une discontinuité de première espèce en x_0 si f possède en x_0 une limite à gauche et une limite à droite finies et différentes.

1.7.2. Définition (fonction continue par morceaux sur un segment)

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si, et seulement si, il existe une subdivision σ_n de $[a, b]$ telle que pour tout $i = 0, \dots, n$, f présente une discontinuité de première espèce en en a_i et en f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$.

1.7.2.1. Exemple

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ sur $[0, 3]$ continue par morceaux sur $[0, 3]$

$g: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x\ si\ x < 1 \\ 0\ sinon \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[-1, 2]$

$h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ si\ x < 0 \\ 1\ \ sinon \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$

1.7.2. Proposition

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors f est Riemann-intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Remarquer que l'on peut écrire,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$$

où pour $i = 1, \dots, n$, a_i est un point où f n'est pas continue.

1.7.2.1. Exemple

Reprenons à l'exemple 1.7.2.1.

$\int_0^3 f(x)dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$ où $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3.$

$$= \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx + \int_2^3 \lfloor x \rfloor dx$$

$$= \int_0^1 0dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 2dx = 2$$

(intégrale d'une fonction constante c sur $[a, b]$: $\int_a^b dx = (b - a)c$)

$\int_{-1}^2 g(x)dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$ où $a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 2,$

$$= \int_{-1}^1 xdx + \int_1^2 dx = 1$$

1.8. Applications

1.8.1. Proposition (Inégalité de la moyenne)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

où M et m sont respectivement un majorant et un minorant de f.

Preuve

La preuve est laissée en exercice. (indication : utiliser la propriété de positivité de l'intégrale)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

1.8.1.1. Exemple

1. $f(x) = (x+1)e^x$ est croissante sur $[0,5]$ donc intégrable et $1 \leq f(x) \leq 6e^5$.

Alors

$$5 \leq \int_0^5 (x+1)e^x dx \leq 30e^5$$

2. $f(x) = x + sinx$ est continue sur $[0,\ 2\pi]$ donc intégrable et $-1 \leq f(x) \leq 2\pi + 1$.

Alors

$$-2\pi \leq \int_0^5 x + sinx\ dx \leq 2\pi(2\pi + 1)$$

1.8.2. Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soit $[a,b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$. f et g deux fonctions de $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues sur $[a,b]$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Partie 2 : Calcul de primitives

2.1 Fonction primitive

2.2 Théorème fondamental de l'analyse

2.3 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

2.4 Formule de transformation

2.5 Formule d'intégration par parties

2.6 Intégrale d'une fonction rationnelle

2.7 Intégrales se ramenant à une intégrale de fonction rationnelle

Partie 2 : Calcul de primitives

2.1. Fonction primitive

2.1.1. Définition

Soit $(a,b), a < b$ un intervalle quelconque et $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur (a,b).

On dit qu'une fonction $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur (a,b) est une primitive de f, ou que f admet une primitive si F est dérivable sur $]a,b[$, pour tout $x \in]a,b[$, et $F'(x) = f(x)$ et F admet une dérivée à droite en a, $F'_d(a) = f(a)$, dans le cas où $a \in (a,b)$, et une dérivée à gauche en b, $F'_g(b) = f(b)$ dans le cas où $b \in (a,b)$. On écrit $F(x) = \int f(x)dx$

2.1.1.1. Exemple

1. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = x$ est une primitive de $f(x) = 1$ car $F'(x) = 1$

2. Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = x + k$ est une primitive de $f(x) = 1$ car $F'(x) = 1$

3. Sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$, $F(x) = Ln|x|$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ car $F'(x) = \frac{1}{x}$

4. Sur l'intervalle $]-1,\ 1[$, $F(x) = Arcsinx$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.1.2. Proposition

Soit $(a,b), a < b$ un intervalle quelconque et $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Si $F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive f alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $G = F + k$, où k est une constante arbitraire dans $\mathbb{R}$.

2.1.2.1. Exemple

1. Sur $\mathbb{R}$, $\{x + k, k \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des primitives de la fonction $f(x) = 1$, on écrit

2. Sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$, $\{Ln|x| + k, k \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des primitives de $\frac{1}{x}$

3. Sur l'intervalle $]-1,\ 1[$, $\{Arcsinx + k, k \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des primitives de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.1.3. Proposition

Si F et G sont deux primitives de f un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors $F - G = k, k \in \mathbb{R}$

Preuve

Par définition $F' = f$ et $G' = f$ d'où $F' - G' = (F - G)' = 0$ ou $F - G = k, k \in \mathbb{R}$

2.1.4. Primitives des fonctions élémentaires (en cours)

Voir table des primitives des fonctions élémentaires.

2.1.5. Remarque

Remarquons qu'une fonction peut ne pas admettre de primitive.

2.1.6. Exemple

La fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \neq 1 \\ 1 \ si \ x = 1 \end{cases}$$

n'admet pas de primitive.

En effet, supposons par l'absurde que f admette une primitive qu'on note F.

Alors F est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée $F'(x) = f(x)$.

D'où $F'(x) = 0$ sur $[0,1[$ donc $F(x)$ est constante dans $[0,1[$.

F est dérivable dans $[0,1]$ donc continue et comme sa dérivée est nulle sur l'intervalle $[0,1[$ donc constante dans $[0,1[$

Alors $F(x)$ est constante dans $[0,1]$ donc sa dérivée F' est nulle dans $[0,1]$.

Absurde car $F' = f$ qui n'est pas nulle dans $[0,1]$.

2.2. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

2.2.1. Théorème (théorème fondamental de l'analyse)

Soit $(a,b), a < b$ un intervalle et $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur (a,b).

La fonction $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ définie sur (a,b) par

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt,$$

où c est nombre quelconque fixé dans (a,b) est une primitive de f.

C'est-à-dire F est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(x) = f(x)$ c'est à dire

$$\left(\int_c^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

et F admet une dérivée à droite en a, $F'_d(a) = f(a)$, dans le cas où $a \in (a,b)$, et une dérivée à gauche en b, $F'_g(b) = f(b)$ dans le cas où $b \in (a,b)$.

Preuve

Soit c un point quelconque de l'intervalle (a,b). Posons $F(x)=\int_c^x f(t)dt$, F est définie en tout point x de l'intervalle (a,b). car f est continue donc f est continue dans (a,b).

Montrons que F est dérivable sur (a,b) et $F'(x)=f(x)$, dérivable en a à droite si $a \in (a,b)$ et $F'_d(a)=f(a)$ dérivable en b à gauche si $b \in (a,b)$ et $F'_g(b)=f(b)$

Soit $x_0 \in]a,b[$. Montrons que est dérivable en x_0 de et $F'(x_0)=f(x_0)$

$F(x)-F(x_0)=\int_c^x f(t)dt-\int_c^{x_0} f(t)dt=\int_c^x f(t)dt+\int_{x_0}^c f(t)dt$

$=\int_{x_0}^x f(t)dt$ (Relation de Chasles)

Appliquons maintenant, l'inégalité de la moyenne (Proposition 1.8.1.)

Pour $x>x_0$

$$(x-x_0)\inf_{x_0\le t\le x} f(t) \le \int_{x_0}^x f(t)dt \le (x-x_0)\sup_{x_0\le t\le x} f(t)$$

D'où

$$\inf_{x_0\le t\le x} f(t) \le \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \le \sup_{x_0\le t\le x} f(t)$$

De même pour $x<x_0$

$$(x-x_0)\inf_{x\le t\le x_0} f(t) \le F(x)-F(x_0) \le (x-x_0)\sup_{x\le t\le x_0} f(t)$$

D'où $$\inf_{x\le t\le x_0} f(t) \le \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \le \sup_{x\le t\le x_0} f(t)$$

Comme f est continue en x_0 alors $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 d'où

$$f(x_0) \le \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \le f(x_0)$$

Donc F est dérivable en tout point x_0 de $]a,b[$ et a pour dérivée $F'(x_0)=f(x_0)$

Si a est un point de l'intervalle (a,b), pour $x_0=a$, comme f est continue en a à droite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f(a) = F'_d(a)$$

Si b est un point de l'intervalle (a,b), pour $x_0=b$, comme f est continue en b à gauche

$$\lim_{x\to b^-} \frac{F(x)-F(b)}{x-b} = f(b) = F'_g(b).$$

Le théorème est prouvé.

2.3. Formules de changement de variable

On peut transformer une intégrale en une autre intégrale grâce à deux formules :

Une formule de changement de variable et une formule d'intégration par parties.

2.3.1 Théorème (Formule de changement de variable)

Si f une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi: J \longrightarrow I$ une fonction bijective de classe C^1. alors pour tout $a, b \in J$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

On l'appelle formule de changement de variable.

Preuve

f est continue sur l'intervalle I donc admet une primitive qu'on note F .

Posons $x = \varphi(t)$ ou $t = \varphi^{-1}(x)$ et montrons que $(Fo\varphi)$ est une primitive de $(fo\varphi)\varphi'$

En effet $(Fo\varphi)'(t) = \big(F'o\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \big(fo\varphi(t)\big)\varphi'(y)$ d'où

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_a^b (Fo\varphi)'(t)dt \\ &= Fo\varphi(a) - Fo\varphi(b) \\ &= F\big(\varphi(a)\big) - F\big(\varphi(b)\big) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx\end{aligned}$$

Le théorème est prouvé.

2.3.1.2. Exemple

Calculer $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$. On pose $t = \sqrt{x}$; $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ alors $dx = 2tdt$. D'où

$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int_0^2 \frac{t}{1+t}dt = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{1}{1+t}dt = 4 - 2\int_0^2 \frac{1}{1+t}dt$

Utilisons un changement de variable pour calculer $\int_0^2 \frac{1}{1+t}dt$

On pose $s = 1 + t$ d'où $ds = dt$ et $\int_0^2 \frac{1}{1+t}dt = \int_1^3 \frac{ds}{s} = ln3$ d'où $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 4 - ln3$.

2.3.2. Théorème (Formule d'intégration par parties)

Soit I un intervalle réel, f et g deux fonctions dans $C^1(I, \mathbb{R})$. Pour tout α, β dans I on a

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

ou

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

On l'appelle formule d'intégration par parties.

Preuve de la proposition :

$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x)$+$(f'x)g(x)$

Comme f et g deux fonctions dans $C^1(I,\mathbb{R})$ alors $(f(x)g(x))'$, $f(x)g'(x)$ et $f'x)g(x)$ sont intégrables et on a $\int_\alpha^\beta (f(x)g(x))'dx = \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$

i.e. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$

2.3.2.1. Exemple

Calculer l'intégrale suivante $\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx, t > 0$

On pose $f = x$ et $g' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ d'où $f' = 1$ et $g = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ et

$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x+1}|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{x+1}dx = \frac{t}{2}\sqrt{t+1} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{x+1}dx;$

$\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$ d'où

$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{t}{2}\sqrt{t+1} - \frac{t}{2}\sqrt{t} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}|_0^t = \frac{t}{2}\left(\sqrt{t+1} - 1\right) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{(t+1)^3}\right)$

2.4. Intégrale d'une fonction rationnelle

Soit $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et F une fonction rationnelle définie sur $[a, b]$.

Alors F a pour valeur $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux fonctions polynômiales réelles et que $Q(x)$ ne s'annule pas dans $[a, b]$. La fonction F est continue sur $[a, b]$ donc Riemann intégrable.

2.4.1. Décomposition d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ peut se décomposer en sommes d'un polynôme à coefficients réels noté $E(x)$ et appelée partie entière de $F(x)$ et de fonctions de la forme

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \text{ ou } \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ où } b^2 - 4ac < 0, n \in \mathbb{N}$$

appelés respectivement éléments de première espèce d'ordre n et élément de deuxième espèce d'ordre n.

2.4.1.1. Comment déterminer la partie entière $E(x)$ de $F(x)$

On distingue deux cas :

Cas : $d°P(x) \geq d°Q(x)$

Dans ce cas $E(x)$ est de degré: $d°E(x) = d°P(x) - d°Q(x)$ et peut être déterminée, par exemple, en effectuant la division Euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$. Alors on peut écrire : $F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ où $R(x)$ est le reste de la division Euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ $(d°R(x) < d°Q(x))$

On peut également la déterminer par identification (voir exemples plus loin).

Cas : $d°P(x) < d°Q(x)$

Dans ce cas $E(x) = 0$

2.4.1.1.1. Exemple

$F(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$; $E(x)$ est de degré 1.

On peut déterminer $E(x)$ en utilisant une des méthodes suivantes.

1ère méthode : division Euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 \qquad + 1 & \; x + 2 \\
\hline
x^2 + 2x \qquad & \; x - 2 \\
-2x + 1 & \\
-2x - 4 & \\
5 &
\end{array}
$$

D'où $(x) = x - 2$. Donc $\frac{x^2+1}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2}$; En effet, $x^2 + 1 =(x - 2)(x + 2) + 5$ donc

$\frac{x^2+1}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+5}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2}$

2ème méthode

$\frac{x^2+1}{x+2} = E(x) + \frac{R(x)}{x+2}$, $d°E(x) = d°P(x) - d°Q(x) = 2 - 1 = 1$ d'où $E(x) = Ax + B$ où A, B sont des constantes réelles. $d°R(x) < 1$ i.e. $R(x) = a$, a une constante réelle. Alors on peut écrire

$\frac{x^2+1}{x+2} = Ax + B + \frac{a}{x+2}$.

On peut déterminer les constantes réelles $A, B\ et\ a$ par identification.

$\frac{x^2+1}{x+2} = Ax + b + \frac{a}{x+2} = \frac{(Ax+b)(x+2)+a}{x+2} = \frac{Ax^2+(2A+b)x+a+2b}{x+2}$

En identifiant $x^2 + 1 = Ax^2 + (2A + b)x + a + 2b$ on obtient

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2 + b = 0 \\ a - 4 = 1 \end{cases}$$

D'où $A = 1, b = -2$ et $a = 5$ et

$\frac{x^2+1}{x+2} = x - 2 + \frac{5}{x+2}$

3ème méthode

$\frac{2x+1}{x-3} = 2\frac{x+\frac{1}{2}-3+3}{x-3} = 2\frac{x-3+3+\frac{1}{2}}{x-3} = 2\frac{x-3}{x-3} + 2\frac{3+\frac{1}{2}}{x-3} = 2 + \frac{4}{x-3}$

2.4.2. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

2.4.2.1. cas : $d°P(x) < d°Q(x)$

Dans les cas où le degré de $P(x)$ est strictement inférieur à degré de $Q(x)$ la partie entière de la fraction rationnelle est nulle. Donc $F(x)$ se décompose uniquement en éléments simples.

Pour obtenir sa décomposition en éléments simples on commence par mettre $Q(x)$ sous forme irréductibles.

Pour chaque facteur de première espèce d'ordre n, $(ax+b)^n$ dans la factorisation de $Q(x)$, $F(x)$ possède dans sa décomposition la somme de n éléments simples

$$\frac{a_1}{ax+b}+\frac{a_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(ax+b)^n}\ ,n\in\mathbb{N}^*$$

Pour chaque facteur de deuxième espèce d'ordre n, $(ax^2+bx+c)^n, b^2-4ac<0$ dans la factorisation de $Q(x)$, $F(x)$ possède dans sa décomposition la somme de n éléments simples :

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}\ ,n\in\mathbb{N}^*$$

Où $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ sont des constantes réelles à déterminer.

Remarque 1

Donc lorsqu'on arrive à obtenir la décomposition de $F(x)$ en éléments simples alors ses primitives peuvent être calculées en calculant des primitives,

d'une fonction polynomiale $E(x)$ ou

d'éléments simples de la forme $\frac{a_n}{(ax+b)^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ ou

d'éléments simples de la forme $\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, $b^2-4ac<0, n\in\mathbb{N}^*$

Remarque 2

Avant de passer au calcul des primitives de ces éléments simples on commence par la décomposition de $F(x)$.

On distingue deux cas.

2.4.2.2. cas : $d°P(x) \geq d°Q(x)$

Dans ce cas se décompose comme suit :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Où $E(x)$ est la partie entière de $F(x)$, $d°E(x)=d°P(x)-d°Q(x)$

et $R(x)$ est le reste de la division Euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$, $d°R(x) < d°Q(x)$

On se ramène donc au cas précédent.

2.4.2.2.1. Exemple

1) $\frac{x^3}{x^3+x+2} = 1 - \frac{x+1}{x^3+x+2} = 1 - \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+2)}$ (effectuer la division Euclidienne)

$x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 - x + 2)$ donc

$\frac{x+1}{x^3+x+2} = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{Ax+B}{x^2-x+2}$ où $a, A, et\ B$ sont des constantes réelles à déterminer. Alors

$\frac{x^3}{x^3+x+2} = 1 - \frac{a}{x+1} + \frac{Ax+B}{x^2-x+2}$

2) $\frac{x^5+x+1}{x^3+x+2} = x^2 - 1 + \frac{-2x^2+2x+3}{x^3+x+2} = x^2 - 1 + \frac{-2x^2+2x+3}{(x+1)(x^2-x+2)} = x^2 - 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+2}$

où $a, b, et\ c$ sont des constantes réelles à déterminer.

3) $\frac{x}{x^3+x+2} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+2)}$

$= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+2}$ où $a, b, et\ c$ sont des constantes réelles à déterminer.

4) $\frac{x^2}{x^3+x+2} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2-x+2)}$

$= \frac{a}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$. où $A, B, et\ C$ sont des constantes réelles à déterminer.

5) $\frac{x^5-x^2+1}{(x-2)(x-1)^3(x^3+x+2)^2} = \frac{x^5-x^2+1}{(x-2)(x-1)^3(x+1)^2(x^2-x+2)^2}$

$= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} + \frac{e}{x+1} + \frac{f}{(x+1)^2} + \frac{Ax+B}{x^2-x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+2)^2}$

où $a, b, c, d, e, f, A, B, C, D$ sont des constantes réelles à déterminer.

2.4.3. Primitive de fonctions de la forme $\frac{A}{(ax+b)^n}, n \in \mathbb{N}$

2.4.3.1. Proposition

La fonction rationnelle $\frac{A}{(\alpha x+\beta)^n}$ où $\alpha A \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, admet des primitives sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $\alpha x + \beta$ n'est pas nul, donnée par

$$\int \frac{A}{(\alpha x+\beta)^n} dx = \begin{cases} \frac{A}{\alpha} \ln|\alpha x + \beta| + k, k \in \mathbb{R}\ si\ n = 1 \\ \frac{A}{\alpha} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(\alpha x+\beta)^{n-1}} + k, k \in \mathbb{R}, si\ n > 1 \end{cases}$$

Preuve

Effectuons le changement de variable $t = \alpha x + \beta$ alors $dx = \frac{1}{\alpha} dt$

$\int \frac{A}{(\alpha x+\beta)^n}dx = \frac{A}{\alpha}\int \frac{1}{t^n}dt$ et $\int \frac{1}{t^n}dt = \begin{cases} \ln|t| + k, k \in \mathbb{R} \ si\ n = 1 \\ \frac{1}{1-n}\frac{1}{t^{n-1}} + k, k \in \mathbb{R}, si\ n > 1 \end{cases}$

D'où la proposition.

2.4.3.1.1. Exemple

En appliquant la formule donnée dans la proposition précédente, on a

$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}ln|2x-1|$ d'où $\int_4^5 \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}ln\left|\frac{9}{7}\right|$

Sans retenir la formule donnée dans la proposition on peut calculer l'intégrale en posant : $t = 2x - 1$.

Alors $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{3}{t}dt = \frac{3}{2}ln|t|$ d'où $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}ln|2x-1|$ et $\int_4^5 \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}ln\left|\frac{9}{7}\right|$.

2.4.4. Primitives de $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, où $aA \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0, n \in \mathbb{N}$

Ces primitives se ramènent au cas précédent.

2.4.4.2. Proposition

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dt = \frac{A}{2a}\int \frac{1}{s^n}ds + \frac{2aB-Ac}{2a}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$$

où $s = ax^2 + bx + c$ et $t = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

Preuve

La fonction rationnelle $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ où $b^2 - 4ac < 0, n \in \mathbb{N}$, est continue dans $\mathbb{R}$ est donc intégrable sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Dans le cas $aA \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n} &= A\frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + B\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \\ &= \frac{A}{2a}\frac{2ax+b-b}{(ax^2+bx+c)^n} + B\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \\ &= \frac{A}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \\ &= \frac{A}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{2aB-Ab}{2a}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ d'où}\end{aligned}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

En posant $s = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $ds = 2a + b$ on a

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{1}{s^n}ds$$

$\int \frac{\mathbf{1}}{(ax^2+bx+c)^{\boldsymbol{n}}}dx,$

On met sous forme canonique le trinôme de second degré, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \text{ ou}$$

$$= \frac{4ac-b^2}{4a^2}a\left[\frac{4\alpha^2}{4ac-b^2}\left(x + \frac{\beta}{2\frac{b}{2a}\alpha}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \frac{4ac-b^2}{4a}\left[\left[\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + 1\right]$$

Posons $t = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)$ alors

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac-b^2}{4a}\left[\left[\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 + 1\right]$$

$$= \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}(t^2 + 1)$$

En posant $t = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right) dt = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}dx$ i.e. $dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dt$, d'où

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right)^n \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$$

La proposition est prouvée.

2.4.4.2.1. Exemple

On peut utiliser la formule pour calculer $\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dx$ où

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dt = \frac{A}{2a}\int \frac{1}{s^n}ds + \frac{2aB-Ac}{2a}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$$

où $s = ax^2 + bx + c$ et $t = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

$A = 5, B = 3, a = 1\,, b = 1$ et $c = 3$ et $b^2 - 4ac = -11 < 0.$

D'où

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dt = \frac{5}{2}\int \frac{1}{s^n}ds - \frac{13}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

où $s = x^2 + x + 3$ et $t = \frac{2}{\sqrt{11}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{11}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ Alors

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dt = \frac{A}{2a}lns - \frac{13}{2}arctgt + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dt = \frac{A}{2a}lnx^2 + x + 3\,) - \frac{\sqrt{11}}{2}arctg\left(\frac{2\sqrt{11}}{11}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{x^2+x+3}dx + \frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$$

On peut retrouver le résultat sans utiliser la formule :

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dx = 5\int \frac{1}{x^2+x+3}dx + 3\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+3}dx + 3\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx + \left(3-\frac{5}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$$

Pour calculer $\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dx$ on calcule les deux intégrales $\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+3}dx$ et $\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx = ln(x^2+x+3)$$

Pour calculer $\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$ on met x^2+x+3 sous forme canonique :

$x^2+x+3 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ puis on met $\frac{11}{4}$ en facteur d'où

$x^2+x+3 = \frac{11}{4}\left[\left[\frac{4}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right]$ et

$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \frac{4}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}dx$ puis en posant $t = \frac{4}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ alors $dx = \frac{\sqrt{11}}{\mathbf{4}}dt$

$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \frac{\sqrt{11}}{11}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\sqrt{11}}{11}arctgt$ d'où $\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \frac{\sqrt{11}}{11}arctg\left(\frac{4}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$

Finalement,

$$\int \frac{5x+3}{x^2+x+3}dx = \frac{5}{2}ln(x^2+x+3) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{11}}{11}arctg\left(\frac{4}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + k, k \in \mathbb{R}.$$

2.4.4.2.2. Exemple

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx = \ln(x^2+x+3) + k, k \in \mathbb{R}$ (poser $t = x^2+x+3$) d'où

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx = ln\frac{5}{3}$$

$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3}dx = \int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+3)^2} + k, k \in \mathbb{R}$ (poser $t = x^2+x+3$) d'où

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3}dx = \frac{8}{225}.$$

Calcul de $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx, n \in \mathbb{N}^*$

2.4.4.3. Proposition

$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ admet une primitive sut tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Et on a

$$\begin{cases} I_1 = artgx + k, k \in \mathbb{R} \\ I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\dfrac{x}{(x^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Preuve

$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1} dt = arctgt + k, k \in \mathbb{R}.$

Soit $n \geq 1$. Pour calculer I_n, on établit une formule de récurrence entre I_n et I_{n+1} en intégrant par parties I_n.

On pose $f = \frac{1}{(t^2+1)^n}$ et $g' = 1$ donc $f' = -\frac{2nt^2}{(t^2+1)^{n+1}}$ et $g = t$;

$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt$

$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$

$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}} dt - 2n \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$

$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}} dt - 2n \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt$ d'où

$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} I_1 = arctgt \\ I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \end{cases}$$

La proposition est prouvée.

2.4.4.3.1. Exemple

1- Calculons $I_3 = \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$ en utilisant la formule

Utilisons la formule $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, n \geq 1$, donnée dans la proposition précédente où $I_1 = arctgx$.

$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2$

$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1$ et

$I_1 = arctgx + k, k \in \mathbb{R}$ d'où

$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1\right] = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8} arctgx + k, k \in \mathbb{R}$.

2- Calculons maintenant I_3 sans utliser la formule. On intègre par parties I_2 en posant $f = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ et $g' = 1$.

$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2$; $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ Intégrons maintenant I_2 par parties en posant $f = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ et $g' = 1$. D'où

$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1\right] = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}arctgx + k, k \in \mathbb{R}$.

$I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}arctgx + k$

2.5. Intégrales se ramenant à une intégrale de fonction rationnelle

Ce sont toutes des composées de fonctions de la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des fonctions.

Ces fonctions sont intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$ où f et g sont continues et g ne s'annule pas.

On se limitera à quelques cas en commençant par des exemples.

2.5.1. Intégrales de la forme $F(cosx, sinx)$

L'intégrale $\int F(cosx, sinx)dx$ peut se ramener à une intégrale de fonction rationnelle en posant $s = tg\frac{x}{2}$ d'où

$$dx = \frac{2ds}{1+s^2},\ sinx = \frac{2s}{1+s^2} \text{ et } cosx = \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

En effet,

$ds = \left(tg\frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{2}(tg)'(\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)dx$ d'où $dx = \frac{2ds}{1+s^2}$

$sinx = sin2\frac{x}{2} = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}$, en divisant haut et bas par $cos^2\frac{x}{2}$ on obtient

$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ d'où $sinx = \frac{2s}{1+s^2}$

$cosx = cos2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}$, en divisant haut et bas par $cos^2\frac{x}{2}$ on obtient

$sinx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ d'où $cosx = \frac{1-s^2}{1+s^2}$

2.5.1.1. Exemple

$\int \frac{1}{sinx}dx$ on pose $s = tg\frac{x}{2}$

$\int \frac{1}{sinx}dx = \int \frac{1}{\frac{2s}{1+s^2}}\frac{2ds}{1+s^2} = \int \frac{1}{s}ds = \ln|s| + k, k \in \mathbb{R}$

d'où $\int \frac{1}{sinx} dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + k$

Pour calculer une intégrale de la forme $\int F(cosx, sinx)dx$ on peut parfois choisir d'autre changements de variables :

$\int \frac{cosx}{2+sin^2x} dx$,

on pose $s = cosx$ et $\int \frac{cosx}{2+sin^2x} dx = \int \frac{1}{2+s^2} ds$

$\int sin^{2n}cos^{2m+1}xdx$, on pose $s = sinx$

$\int sin^{2n+1}cos^{2m}xdx$, on pose $s = cosx$

2.5.2. Intégrales de la forme $F(chx, shx)$

L'intégrale $\int F(chx, shx)dx$ peut se ramener à une intégrale de fonction rationnelle en posant

$s = e^x$ d'où $ds = sdx;$

$dx = \frac{ds}{s},$

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{s - \frac{1}{s}}{2} = \frac{s^2-1}{2s}$ et

$chx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{s + \frac{1}{s}}{2} = \frac{s^2+1}{2s}$

2.5.2.1 Exemple

$\int \frac{1}{chx} dx$; on pose $s = e^x$ alors $chx = \frac{s^2+1}{2s}$ et $dx = \frac{ds}{s}$

$\int \frac{1}{chx} dx = \int \frac{2}{1+s^2} ds = 2arctgs + k, k \in \mathbb{R}$ d'où

$\int \frac{1}{chx} dx = 2arctge^x + k$

2.5.2.2 Remarque

Pour calculer une intégrale de la forme $\int F(chx)shxdx$ **ou** $\int F(shx)chxdx$ou on peut poser

$s = chx$ ou $s = shx$

2.5.2.3 Exemple

$\int \frac{chx}{shx} dx$, on pose $s = shx$ et $\int \frac{chx}{shx} dx = ln|shx| + k$

$\int (shx)^{2n}(chx^{2m+1})xdx$, on pose $s = shx$

$\int (shx)^{2n+1}(chx^{2m})dx$, on pose $s = chx$

2.5.3. Intégrales de la forme $F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[3]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), ad - bc \neq 0$

L'intégrale $\int F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[3]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ peut se ramener à une intégrale de fonction rationnelle en posant $s = \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ i.e. $s^p = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $p = ppcm(2, \dots, m)$

2.5.3.1 Exemple

1. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x+2} dx$. On pose $s = \sqrt{x+3}$ d'où $s^2 = x+3$ ou $x = s^2 - 3$; $dx = 2sds$. Alors

$\int \frac{\sqrt{x+3}}{x+2} dx = 2\int \frac{s^2}{s^2-3} dx$

2. $\int \frac{2x+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}} dx$ .Posons $s = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x+2}}$ i.e. $s^6 = \frac{x+1}{x+2}$ ou $x = \frac{1-2s^6}{s^6-1}$ d'où $dx = \frac{6s^5}{(s^6-1)^2} ds$

On se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle

$$\int \frac{2\frac{1-2s^6}{s^6-1}+s^6}{s^2} \frac{6s^5}{(s^6-1)^2} ds = \int \frac{2\frac{1-2s^6}{s^6-1}+\frac{s^{12}-1}{s^6-1}}{s^2} \frac{6s^5}{(s^6-1)^2} ds = 6\int \frac{s^3(s^{12}-2s^6+1)}{(s^6-1)^3} ds$$

3. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt[4]{x}} dx$

Posons $x = s^{12}$ d'où $dx = 12s^{11}ds$ et on se ramène à une intégrale de fraction rationnelle

$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt[4]{x}} dx = 12\int \frac{s^6+s^4}{s^{12}+2s^3} s^{11} ds$

2.5.4. Intégrales de la forme $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$,

Cas : a > 0 et $b^2 - 4ac < 0$

L'intégrale $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ peut se ramener à une intégrale de fonction rationnelle en mettant le trinôme ax^2+bx+c sous sa forme canonique :

$ax^2+bx+c = \frac{4ac-b^2}{4a}\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2+1\right]$ puis on pose $\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = sht$ d'où $dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} chtdt$

Alors

$\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}} dx = chtdt$ i.e. $dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} chtdt$ et

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}\sqrt{sh^2t+1} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}|cht| = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}} cht$ car $ch^2t - sh^2t = 1$

Dans les autres cas on fait pareil, c'est-à-dire qu'on met le trinôme sous sa forme canonique puis on effectue un changement de variable en fonction de la forme canonique obtenue.

1- Si $ax^2+bx+c = cst(u^2+1)$ où cst est une constante alors on pose $u = sht$
2- Si $ax^2+bx+c = cst(u^2-1)$ où cst est une constante alors on pose $u = cht$

3- Si $ax^2 + bx + c = cst(1 - u^2)$ où cst est une constante alors on pose $u = cost$

2.5.4.1. Exemple

$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}} dx$

On met $2x^2 + x + 1$ sous sa forme canonique :

$$2x^2 + x + 1 = \frac{7}{8}\left[\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1\right]$$

On pose $\frac{4\sqrt{7}}{7}\left(x + \frac{1}{4}\right) = sht$ alors $\frac{4\sqrt{7}}{7} dx = chtdt$ ou $dx = \frac{\sqrt{7}}{4} chtdt$ et

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{\frac{7}{8}}\sqrt{sh^2t + 1} = \sqrt{\frac{7}{8}}\sqrt{ch^2t} = \sqrt{\frac{7}{8}} cht$. D'où

$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}} dx = \frac{\sqrt{7}}{4} \int \frac{cht}{\sqrt{\frac{7}{8}} cht} dt = \frac{2\sqrt{2}}{2} \int dt = \frac{2\sqrt{2}}{2} t + k, k \in \mathbb{R}$. Alors

$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{2} argsh\left(\frac{4\sqrt{7}}{7} x + \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$