1- Généralités

Définition (suite de nombres réels)

Une suite de nombres réels est une application u de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à l'entier naturel n associe le réel $u(n)$:

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

$u(n)$ est noté aussi u_n et qu'on appelle terme général ou terme de rang n de la suite.
On dit aussi, abusivement, suite numérique ou suite tout court si on ne considère que des suites de nombres réels.
L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque

Une suite est définie à partir d'un certain rang n_0 : la suite $\left(\frac{1}{n-5}\right)$ est définie pour $n \geq 6$.
On note $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou simplement (u_n).
$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ sont appelés les termes de la suite (u_n)
et l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est appelé ensemble des termes de la suite (u_n).

Exemple

(u_n) la suite de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{1}{n!}$; où $0! = 1$ (par convention) et pour tout $n \geq 1, n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$

Dont les quatre premiers termes: $u_0 = \frac{1}{0!} = 1$; $u_1 = \frac{1}{1!} = 1$, $u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$:

les 3 premiers termes : $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$; $u_1 = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$, $u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} = \frac{11}{6}$

3. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}, \forall n \geq 0$

Les 2 premiers termes : $u_0 = 3$; $u_1 = \frac{4u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{5}{2}$.

5. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

les 2 premiers termes : $u_1 = (-1)^{1+1} = 1$; $u_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2} = -\frac{1}{2}$

6. $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$:

Les 3 premiers termes : $u_1 = \frac{1}{1^2+1}$; $u_2 = \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{2^2+2}$; $u_3 = \frac{3}{3^2+1} + \frac{3}{3^2+2} + \frac{3}{3^2+3}$ (à finir)

Calculer u_4.

7. $u_n = \frac{2\times4\times\ldots\times2k\times\ldots\times2n}{1\times3\times\ldots\times(2k+1)\times\ldots\times(2n+1)}$.

Les 3 premiers termes $u_1 = \frac{2\times1}{1\times(2\times1+1)} = \frac{2}{3}$; $u_2 = \frac{2\times(2\times2)}{1\times(2\times1+1)\times(2\times2+1)} = \frac{8}{15}$. Calculer u_3.

Opérations sur les suites

Comparaison de deux suites

1. Deux suites (u_n) et(v_n) sont dites égales si, et seulement si, $\forall n, u_n = v_n$.

On écrit $(u_n) = (v_n)$.

2. On écrit $(u_n) \leq (v_n)$ si, et seulement si, $\forall n, u_n \leq v_n$.

On dit que (u_n) est une suite minorante de (v_n) et (v_n) est une suite majorante de (u_n).

Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est une suite majorante de $\left(\frac{cosn}{n}\right)$ et $\left(-\frac{1}{n}\right)$ est une suite minorante de $\left(\frac{cosn}{n}\right)$.

Somme de deux suites

La suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$ est appelée somme des suites (u_n) et(v_n)

On écrit $(s_n) = (u_n) + (v_n)$.

Produit de deux suites

La suite (p_n) définie par $p_n = u_n v_n$ est appelée produit des suites (u_n) et(v_n)

On écrit $(s_n) = (u_n)(v_n)$.

En particulier pour tout réel λ, on définit le produit de λ par (u_n) par la suite (λu_n).

Définition (croissante, décroissante, monotone)

Une suite numérique (u_n) est dite :

1. croissante (strictement croissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \ (u_{n+1} > u_n)$$

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots$$

$$(u_0 < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \cdots)$$

2. décroissante (strictement décroissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \ (u_{n+1} < u_n).$$

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_0 \geq u_1 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$$

$$(u_0 > u_1 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots)$$

3. monotone (strictement monotone) si (u_n) est croissante (strictement croissante) ou décroissante (strictement décroissante)
C'est-à-dire, une suite qui n'est ni croissante ni décroissante est une suite qui n'est pas monotone.

Remarque

1. Une suite (u_n) est dite suite positive (strictement positive) si ses termes sont strictement positifs (strictement positifs) à partir d'un certain rang.

2. Une suite (u_n) est dite suite négative (strictement négatifs) si ses termes sont négative (strictement négatifs) à partir d'un certain rang.

Remarque

Si (u_n) est strictement positive alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

et

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

La suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \frac{1}{n!}$

$\forall n \geq 0,\ \frac{1}{n!} > 0.\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1} \leq 1$ donc (u_n) est décroissante

2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$

$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} > 0$

Donc (u_n) est croissante

3. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

Supposons que (u_n) est monotone. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ ou bien $u_n \geq u_{n+1} \geq u_{n+2}$

Pour n pair c'est à dire $n = 2p, p \in \mathbb{N}^*$ on a

$u_n = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} = \frac{-1}{2p} < 0$; $u_{n+1} = \frac{(-1)^{2p+1+1}}{2p+1} = \frac{1}{2p+1} > 0$; $u_{n+2} = \frac{(-1)^{2p+2+1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+1} < 0$

D'où $u_n < u_{n+1}$ et $u_{n+1} > u_{n+2}$ absurde donc la suite n'est pas monotone.

4. $u_n = \frac{Lnn}{n}$;

Posons pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \frac{Lnx}{x}$. Alors $f(n) = u_n$

f est décroissante (étudier les variations de f) donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) < f(n)$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Définition (majorée, minorée, bornée)

Une suite numérique (u_n) est dite

1. majorée (minorée) si, $\exists M(m) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M\ (u_n \geq m)$

2. bornée si (u_n) est majorée et minorée

Proposition

Une suite est bornée si, $\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq a$

Preuve (voir chapitre 1)

Exemple

1. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$\forall n \geq 0, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} > 0$ et

$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = (n+1)\frac{1}{n} = 1$

Donc (u_n) est minorée et majorée donc bornée.

2. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; $|u_n| \leq 1$ donc (u_n) est bornée

3. $u_n = n(1 + (-1)^n)$

1) Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée alors il existe un réel M tel que $\forall n \geq 0$

$$n(1 + (-1)^n) \leq M$$

En particulier pour $n = 2p, p \in \mathbb{N}$ on a,

$\forall p \geq 0, 4p \leq M$ c'est-à-dire $p \leq \frac{M}{4}$ d'où $M \geq 0$ ($\frac{M}{4} \geq p \geq 0$ alors $M \geq 0$)

D'autre part, $\frac{M}{4} \leq \left[\frac{M}{4}\right] \in \mathbb{N}$ contradiction donc (u_n) n'est pas majorée.

2) $(-1)^n \geq -1$ d'où $1 + (-1)^n \geq 0$ alors $n(1 + (-1)^n) \geq 0$. Donc (u_n) est minorée.

Définition (suite constante, stationnaire)

Une suite (u_n) est dite

1. constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

2. stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$,

Définition (suite extraite)

Une suite (v_n) est appelée suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemple

$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \ldots, u_n, \ldots, u_{2n}, \ldots$

(u_{2n}) est une sous-suite de (u_n)

$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_6 \ldots, u_n, \ldots, \ldots, u_{n^2}, \ldots$

(u_{n^2}) est une sous-suite de (u_n)

...

$(u_{2n+1}), (u_{3n}), (u_{5n+3})$ sont des suites extraites de (u_n).

2. Si on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$:

La suites (u_{2n}) est définie par $u_{2n} = \frac{1}{2n}$ et (u_{2n+1}) est définie par $u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$ sont des sous-suites de la suite (u_n).

3. Si on considère la suite (u_n) définie par $u_n = n(1+(-1)^n)$:

(u_{2n}) est définie par $u_{2n} = 4n$ et (u_{2n+1}) est définie par $u_{2n+1} = 0$

2. Convergence, divergence, nature d'une suite

Définition (limite finie)

Soit (u_n) une suite numérique réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite ℓ ou tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

On dit que (u_n) tend vers ℓ . On écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

Or $|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ \ell + \varepsilon[$. Alors de manière équivalente, (u_n) tend vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \in]\ell - \varepsilon, \ \ell + \varepsilon[$$

c'est-à-dire

Pour tout intervalle I centré en ℓ, il y a une infinité de termes u_n dans I et seulement un nombre fini de termes sont en dehors de l'intervalle I.

c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que,

au plus n_0 termes : $u_0, \ldots, u_{n_0-1}$ sont en dehors de l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Exemple

1. Montrer en utilisant la définition de la limite, que la suite réelle $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $\ell = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (\ n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\ )$

Soit $\varepsilon > 0$, $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. On prend $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$
$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Longrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers $zéro$.

2. Montrons que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{cosn + 2n\,!}$ tend vers zéro.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{cosn+2n\,!} - 0\right| < \varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{cosn+2n\,!} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{cosn+2n\,!} < \varepsilon$$

Or pour $n > 1$, on a $cosn \geq -1$ et $2n! > n > 0$ d'où $cosn + 2n\,! > n - 1 > 0$. Alors

$$\frac{1}{cosn + 2n!} < \frac{1}{n\ - 1}$$

Donc si $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$ alors $\frac{1}{cosn+2n\,!} < \varepsilon$.

$$\frac{1}{n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{1}{\varepsilon} > 1.$$

On prend $n_0 = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2 > 1.$

3. Déterminer le nombre de termes de la suite $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$ n'appartenant pas à $]1{,}90\ ,\ \ 2{,}1[$.

L'intervalle $]1{,}90\ ,\ \ 2{,}1[$ est centré en 2. En effet, $2 = \frac{1{,}90+2{,}1}{2}$:

$$]1{,}90\ ,\ \ 2{,}1[=]2 - 0{,}1\ , 2 + 0{,}1[$$

Montrons que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ tend vers 2. Soit $\varepsilon > 0$.

$|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$ (ε est très petit devant 1 : on écrit $\varepsilon \ll 1$)

On prend $n_0 = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Alors $\forall\ \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a $u_n \in\ ]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$.

Pour $\varepsilon = 0{,}1$, $n_0 = \left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right] = 10.$
Alors il y a 10 termes en dehors de $]2 - 0{,}1,\ 2 + 0{,}1[\ =\ ]1{,}90,\ 2{,}1[$: $u_0, \dots, u_9$.

Remarque (à montrer en exercice)
De la définition de la limite d'une suite on déduit les équivalences suivantes.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Une suite constante (égale c) ou staionnaire (égale c à partir d'un certain rang) est convergente et a pour limite sa valeur constante.

Définition (limite infinie)
On dit que la suite (u_n) tend vers $(+\infty)$ si

$$\forall A > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > A)$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On dit que la suite (u_n) tend vers $(-\infty)$ si

$$\forall A > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n < -A)$$

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exemple

1. Montrons que $n!$ tend vers $+\infty$.

Soit $A > 0$,on cherche un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_0 \Longrightarrow n! > A)$

Comme , $\forall n \in \mathbb{N}, n! \geq n$ alors $n \geq A \Longrightarrow n! > A$. On prend $n_0 = [A]$.

2. Montrons que $-n^2 + n + 1$ tend vers $(-\infty)$.

Soit $A > 0$,on cherche un entier naturel $n_0$tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow -n^2 + n + 1 < -A)$

$$-n^2 + n + 1 < -A \Leftrightarrow -n^2 + n + 1 + A < 0$$

Le discriminant $\Delta = 4A + 5 > 0$. Le trinôme est négatif en dehors de ses racines.

On prend $n_0 = \left[\frac{-1+\sqrt{4A+5}}{2}\right]$. Donc la suite $(-n^2 + n + 1)$ tend vers $-\infty$.

Proposition (unicité de la limite)

La limite d'une suite lorsqu'elle exite est unique.

Preuve

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite qui tend vers ℓ. On veut montrer que ℓ est unique.

Supposons par l'absurde que (u_n) admette deux limites distinctes ℓ et ℓ'. Alors $\forall\, \varepsilon > 0$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon/2)$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_2 \Longrightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon/2)$

Prenons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$ et $|u_n - \ell'| < \varepsilon/2$

D'autre part,

$|\ell - \ell'| = |u_n - \ell' - (u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell|$ (inégalité triangulaire)

et $|u_n - \ell'| + |u_n - \ell| < \varepsilon$. D'où $\forall\, \varepsilon > 0,\ |\ell - \ell'| < \varepsilon$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2} > 0$ ($|\ell - \ell'| \neq 0$), il vient

$|\ell - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$ ou encore $1 < \frac{1}{2}$: absurde donc $\ell = \ell'$.

Définition (suite convergente)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers ℓ si (u_n) tend vers ℓ.

Définition (suite divergente)
On dit qu'une suite (u_n) est divergente si (u_n) n'est pas convergente.

C'est-à-dire que (u_n) a une limite infinie ou n'admet pas de limite.

Définition (nature d'une suite)
Donner la nature d'une suite c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Proposition
Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$

$|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$,

d'où $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$
D'autre part, l'ensemble $\{u_0, \dots, u_{n_0}\}$ est fini donc borné.
Posons $a = \max(|u_0|, \dots, |u_{n_0}|, |\ell - \varepsilon|, |\ell + \varepsilon|)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq a$. D'où la proposition.

Proposition
Si (u_n) est une suite convergente et admet une limite ℓ non nulle alors
1. Si $\ell > 0$ alors il existe $a > 0$ tel que $u_n > a > 0$ à partir d'un certain rang.
2. Si $\ell < 0$ alors il existe $b > 0$ tel que $u_n < b < 0$ à partir d'un certain rang.

Preuve
Soit ℓ un nombre réel non nul et (u_n) une suite convergente et admettant pour limite le ℓ ou alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$

Supposons que $\ell > 0$
Choisissons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} >$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow 0 < \frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3\ell}{2})$.
On prend $a = \frac{\ell}{2}$ alors $u_n < \frac{\ell}{2}$
Donc pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_n > a > 0$

Supposons que $\ell < 0$
Choisissons $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow 3\frac{\ell}{2} < u_n < \frac{\ell}{2} < 0)$.
On prend $b = \frac{\ell}{2} < 0$ alors $u_n < \frac{\ell}{2}$
Donc pour tout entier $n \geq n_0$ on a $u_n < b < 0$

Corollaire
Si une suite convergente possède une limite non nulle alors il existe un nombre $\alpha > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang que $|u_n| > \alpha$.

Preuve
Découle de la proposition précédente, du fait que
$u_n > a > 0 \Leftrightarrow |u_n| > a > 0$ et $u_n < b < 0 \Leftrightarrow -u_n > -b > 0 \Leftrightarrow |u_n| > -b > 0$
Opérations sur les suites convergentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers les réels ℓ et ℓ' respectivement. Alors les suites (u_n+v_n) et (u_nv_n) sontconvergentes et on a

1. $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = \ell + \ell'$

On dit que la limite de la somme est la somme des limites.

2. $\lim_{n\to\infty}(u_nv_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = \ell\ell'$

On dit que la limite du produit est le produit des limites.

En particulier, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \lim_{n\to\infty}(\alpha u_n) = \alpha\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right)$

3. Si $\ell \neq 0$ alorsla suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente et on a, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$

Preuve

Montrons 2.

On peut écrire: $|u_nv_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n-\ell') + \ell'(u_n-\ell)|$

(u_n) et (v_n) sont convergentes donc bornées.

Alors il exite $a>0$ et $b>0$ tels que $|u_n|<a$ et $|v_n|<b$

D'autre part, $\forall\, \varepsilon>0$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, (\, n\geq n_1 \Longrightarrow |u_n-\ell| < \varepsilon/2a$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, (\, n\geq n_2 \Longrightarrow |v_n-\ell'| < \varepsilon/2b$

On prend $n_0 = \max(n_1,n_2)$. D'où

$$\begin{aligned}|u_nv_n - \ell\ell'| &= |u_n(v_n-\ell') + v_n(u_n-\ell)| \\ &\leq |u_n(v_n-\ell'| + |v_n(u_n-\ell)| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &= |u_n||(v_n-\ell'| + |v_n||(u_n-\ell)| \leq a\frac{\varepsilon}{2a} + b\,\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon\end{aligned}$$

Finalement, $\forall\,\varepsilon>0, \exists n_0 \in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, (\, n\geq n_0 \Longrightarrow |u_nv_n-\ell\ell'|<\varepsilon$. D'où 2.

Montrons 3.

Comme $\ell\neq 0$ alors il existe $\alpha>0$ tel qu'à partir d'un rang n_1, $|u_n|>\alpha$.

et $\forall\,\varepsilon>0, \exists n_0 \in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, (\, n\geq n_0 \Longrightarrow |u_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{\alpha|\ell|}$

On peut écrire $\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell-u_n}{\ell u_n}\right|$. Posons $n_2 = \max(n_0,n_1)$. Alors

$\forall\,\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2$ on a $|u_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{\alpha|\ell|}$ et $|u_n|>\alpha$

D'où, $\forall\,\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_2$, $\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell-u_n}{\ell u_n}\right| = \left|\frac{1}{\ell u_n}\right||u_n-\ell| < \frac{1}{\alpha|\ell|}|u_n-\ell| < \varepsilon$

D'où 3., 1. est laissé en exercice.

Opérations sur les suites convergentes et divergentes

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si (u_n) est borné et (v_n) diverge vers $(+\infty)$ $((-\infty))$. Alors

a) $(u_n + v_n)$ diverge vers $(+\infty)$ $((-\infty))$

b) $(u_n v_n)$ diverge vers $(+\infty)$ $((-\infty))$ si (u_n) est strictement positive

c) $(u_n v_n)$ diverge vers $(-\infty)$ $((+\infty))$si (u_n) est strictement négative

2. Si (u_n) est convergente et a pour limite $\ell = 0$. Alors

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ si (u_n) est strictement positive

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$ si (u_n) est strictement négative

3. Si (u_n) est divergente vers $(-\infty)$ ou $(+\infty)$ alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente et a pour limite 0.

On écrit,

a) $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{1}{u_n} = 0^-$ si (u_n) est divergente vers $(-\infty)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0^+$ si (u_n) est divergente vers $(+\infty)$

Dans tous les autres cas on ne peut rien dire. On les appelle les formes indéterminées :

Formes indéterminées :

$+\infty - \infty\ ;\ 0 \times (\infty)\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ \frac{0}{0}$

Exemple

1. $+\infty - \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - n = +\infty$;

$\lim\limits_{n\to\infty} n - n^2 = -\infty$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) - n = 0$

4. $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$;

Proposition

Le produit d'une suite bornée par une suite convergente vers zéro est une suite convergente vers zéro.

Preuve

Soit (u_n) une suite bornée :
$\exists a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < a$
et (v_n) une suite convergente vers 0 :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |v_n| < \frac{\varepsilon}{a}$
D'où, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n v_n| = |u_n||v_n| < a\frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon$.
D'où la proposition.

Proposition

Une suite (u_n) est convergente et a pour limite ℓ si, et seulement si, toutes ses sous-suites sont convergentes et ont pour limite la même limite ℓ.

Cette proposition est utile. En effet, on en déduit que

Si (u_n) possède une sous-suite qui tend vers l'infini ou deux sous-suites ayant deux limites différentes alors (u_n) est divergente.

Exemple

Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Considérons Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) définies par
$u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.
Alors
(u_{2n}) est constante donc convergente et a pour limite 1
(u_{2n+1}) est constnte donc convergente et a pour limites respectives -1
(u_n) possède deux sous-suites convergentes vers deux limites différentes donc la suite (u_n) est divergente.

Théorème (théorème de la limite monotone)

Soit (u_n) une suite monotone alors si

1. Si (u_n) est croissante (décroissante) et majorée (minorée) alors (u_n) admet une borne supérieure (inférieure) et converge vers sa bonne supérieure (inférieure).

2. Si (u_n) est croissante (décroissante) et non majorée (non minorée) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ $(-\infty)$

Preuve
Par hypothèse l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré, donc possède une borne supérieure qu'on note $sup(u_n)$
D'après la caractérisation de la borne supérieure
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $sup(u_n) \geq u_{n_0} > sup(u_n) - \varepsilon.$

Comme (u_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0}$

Alors

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0,\ sup(u_n) \geq u_n \geq u_{n_0} > sup(u_n) - \varepsilon.$

Comme $sup(u_n) + \varepsilon > \ sup(u_n)$, alors

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\ n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - sup(u_n)| < \varepsilon$

D'où (u_n) est convergente et a pour limite $sup(u_n)$.

On montre de la même manière que si est décroisssante et minoré alors admet une borne inférieure et converge vers sa boren inférieure.

2. est laissé en exercice.
D'où le théorème.

Comparaisons des suites et convergence

Proposition
Soit (u_n) une suite convergente. Alors
1. Si (u_n) est strictement négative alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$:

2. Si (u_n) est strictement positive alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$: $\frac{1}{n} > 0$

Preuve
Montrons 1.
Soit ℓ la limite de (u_n).
Supposons par l'absurde que (u_n) est strictement négative et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$
Alors $\forall\ \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\ n \geq n_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$

En particulier pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$ on a $\frac{\ell}{2} < u_n < \frac{\ell}{2}$. Contradiction.
On montre de 2. De la même manière. D'où la proposition.

On en déduit la propostion suivante

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles $(u_n) < (v_n)$. Alors

Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n+\to\infty} v_n$

La preuve

Considérons la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - v_n$ et appliqouns la proposition précédente.

D'où le théorème suivante

Théorème de l'encadrement (ou des gendarmes)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles $(v_n) < (w_n) < (u_n)$. Alors
Si (u_n) et (v_n) sont covergentes et ont même limite ℓ alors (w_n) est convergente et a pour limite la même limite ℓ.

Preuve

On a $(v_n) < (w_n) < (u_n)$ c'est-à-dire à partir d'un certain rang on a $v_n < w_n < u_n$

On a l'équivalence

$$v_n < w_n < u_n \Leftrightarrow 0 < w_n - v_n < u_n - v_n$$

Posons (s_n) et (t_n) les deux suites définies par

$$s_n = w_n - v_n \text{ et } t_n = u_n - v_n$$

Alors $0 < s_n < t_n$ et $w_n = s_n + v_n$

$$0 < s_n < t_n \Leftrightarrow |s_n| \leq |t_n|$$

Il suffit de montrer que si (t_n) est convergente vers 0 alors (s_n) est convergente vers 0.

Cela découle de l'inégalité $|s_n| \leq |t_n|$. En effet, écrivons que (t_n) converge vers zéro :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_0 \Longrightarrow |t_n| < \varepsilon.$

Comme $|s_n| \leq |t_n|$ alors

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (\, n \geq n_0 \Longrightarrow |s_n| < \varepsilon.$

Donc (s_n) converge vers zéro c'est-à-dire (w_n) est convergente et a pour limite la limite de (v_n) (la même que la limite de (u_n).

Le théorème est prouvé.

Exemple

$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$

$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$

Pour tout entier $n \geq 1$, et pour $k = n, \ldots, 2n$,

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{(2n^2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

En sommant membre à membre ces "$(n+1)$" inégalités on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{n+1}{4n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2}$$

La suite de terme général $\frac{n+1}{4n^2}$ et la suite de terme général $\frac{n+1}{n^2}$ sont convergentes et ont même limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0$

D'après le théorème de l'encadrement la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles $(u_n) < (v_n)$. Alors

2. Si (u_n) divege vers $+\infty$ alors (v_n) diverge aussi vers $+\infty$

3. Si (v_n) divege vers $-\infty$ alors (u_n) diverge aussi vers $-\infty$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n! > n$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ alors (u_n) est divergente vers $(+\infty)$.

Proposition

Soit (u_n) une suite de réels non nuls.
S'il existe un réel strictement positif α tel que $\alpha < 1$ et à partir d'un certain rang n_0 on ait

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$$

Alors (u_n) est convergente vers zéro.
En particulier si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente vers zéro alors (u_n) est convergente vers zéro.

Preuve
Pour tout entier $n \geq n_0$

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \frac{u_n}{u_{n_0}} \times \frac{u_{n-1} \times u_{n-2} \times \ldots \times u_{n_0+1}}{u_{n-1} \times u_{n-2} \times \ldots \times u_{n_0+1}}$$
$$= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}$$

D'où

$$\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \ldots \left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| < \alpha^{n-n_0} = \alpha^n \alpha^{-n_0} \text{ Alors } 0 < |u_n| < |u_{n_0}| \alpha^{-n_0} \alpha^n$$

D'après le théorème de l'encadrement la suite (u_n) est convergente vers zéro.

Pour montrer la deuxième partie du théorème on écrit que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers zéro.

Exemple

Soit $a > 0$ et $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$ a pour limite zéro donc la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ est convergente vers zéro.

Suites téléscopiques (en cours)

Soit (a_n) une suite de nombres réels, la suite (u_n) définie

$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k - a_{k+1}$ est appelée suite téléscopique.

Proposition

$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1}$

Corollaire

(u_n) est convergente si, et seulement si, (a_n) est convergente.

Exemple

$u_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ est une suite téléscopique.

(u_n) est convergente puisque $\left(\frac{1}{k}\right)$ est convergente.

$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc (u_n) converge vers $zéro$.

Suites et séries géométriques

Définition (suite géométrique)

Soit a un nombre réel fixé. Une suite de nombres réels, (u_n) définie par $u_n = a^n$ est appelée suite géométrique. a est dite raison de la suite (u_n).

Lemme

Une suite géométrique (a^n) est convergente si, et seulement si, $1 \leq a < -1$.

Preuve

1. Cas $|a| = 1$

Si $a = 1$ alors la suite est constante égale à 1 donc converge vers 1.

Si $a = -1$ alors $(-1)^n$ est divergente.

2. Cas $a > 1$

On peut écrire $a = 1 + b$ avec $b > 0$.

$a^n = (1+b)^n > nb$ et (nb) diverge vers $+\infty$ donc a^n diverge vers $+\infty$

3. Cas $|a| < 1$

Si $a = 0$, la suite est constante égale à 0 donc converge vers 0.

Sinon, posons $= \frac{1}{|a|}$, $b > 1$ alors b^n diverge vers $+\infty$

Comme $|a^n| = \frac{1}{b^n}$ on en déduit que $|a^n|$ converge vers zéro et donc a^n converge vers zéro.

4. Cas $a < -1$

Posons $= -a$, $b > 1$ alors b^n diverge vers $+\infty$

$a^n = (-1)^n b^n$ alors

$a^{2n} = b^{2n}$ diverge vers $+\infty$ et $a^{2n+1} = -b^{2n+1}$ diverge vers $-\infty$.

Donc la suite (a^n) est divergente.

Exemple

2^n diverge vers $+\infty$; e^n diverge vers $+\infty$; $\frac{1}{3^n}$ converge vers zéro.

Série géométrique

Soit a un nombre réel et (a^n) une suite géométrique.

La suite de nombres réels (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} a^k$ est appelée série géométrique.

Proposition

Une série géométrique est convergente si $|a| < 1$.

et $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{1}{1-a}$

$\sum_{k=0}^{k=n} a^k$ est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$ et apour limite $\frac{1}{1-a}$.

Preuve

Supposons $a \neq 1$ et téléscopons la somme $\sum_{k=0}^{k=n} a^k$

$$\sum_{k=0}^{k=n} a^k - a\sum_{k=0}^{k=n} a^k = 1 + a + \cdots + a^k + \cdots + a^n - a(1 + a + \cdots + a^k + \cdots + a^n)$$

$$= 1 + a + \cdots + a^k + \cdots + a^n - a + a^2 + \cdots + a^{k+1} + \cdots + a^{n+1}$$

$$= 1 + a + \cdots + a^k + \cdots + a^n - a - a^2 - \cdots - a^{k+1} - \cdots - a^{n+1}$$

$$= (1 - a) + (a - a^2) + \cdots + (a^k - a^{k+1}) + \cdots + (a^n - a^{n+1})$$

Alors

$$(1 - a)\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \sum_{k=0}^{k=n}(a^k - a^{k+1}) = 1 - a^{n+1}$$

D'où, $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$

Si $|a| < 1$ $\sum_{k=0}^{k=n} a^k$ est convergente vers $\frac{1}{1-a}$

si $|a| > 1$ $\sum_{k=0}^{k=n} a^k$ est divergente vers $-\infty$

Si $= -1$, $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{(-1)^{n+1}}{1-a}$ est divergente car n'a pas de limite.

Si $= 1$, $\sum_{k=0}^{k=n} a^k = n$ est divvergente vers $+\infty$

Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si
1. (u_n) est croissante et (v_n) décroissante

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Lemme

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes et si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante alors
Alors on a $(u_n) \leq (v_n)$.

Preuve

Posons (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - u_n$. On veut montrer que $(w_n) \geq 0$.

Par hypothèse (w_n) est minorée et converge vers zéro. Montrons que (w_n) est décroissante.

$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leq (v_n - u_n) - (v_n - u_n) = 0$

(w_n) est décroissante et minorée alors d'après le théorème de la limite monotone (w_n) converge vers sa borne inférieure. Donc $inf(w_n) = 0$ puisque (w_n) converge vers zéro par hypothèse alors $(w_n) \geq 0$ c'est-à-dire $(u_n) \leq (v_n)$.

Le lemme est démontré.

Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors ces deux suites sont convergentes et ont même limite.

Preuve

On a $u_0 \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \ldots \leq v_0$ alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Si l_1 et l_2 leurs limites respectives alors $l_1 = l_2$ puisque par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Le théorème est prouvé.

Exemple

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

sont convergenteset ont même limite.

Il suffit demontrer que ces deux suites sont adajacentes.

1. Montrons que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ donc (v_n) est décroissante.

2. Montrons que $(u_n) \leq (v_n)$

Pour tout entier non nul n on a $v_n - u_n = \frac{1}{n} > 0$ c'est-à-dire $(u_n) \leq (v_n)$

Alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc sont convergentes et ont même limite.

Suites récurrentes

Définition

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I telle que $f(I) \subset I$ (on dit que l'intervalle I est stable par) .

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est appelée suite récurrente.

Remarque

Une suite définie parla donnée de $u_0 \in I$ et larelation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie si I est stable par f.

Proposition

Soit f est une fonction définie de I dans $f(I)$. Si f est continue dans I et si la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l alors l est solution dans l'adhérence de I de l'équation $f(x) = x$.

Une solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée point fixe de f.

Preuve Plus loin.

Nature d'une suite récurrente définie par une fonction croissante

Théorème

Si f est croissante alors la suite récurrente définie par f est monotone et on a

1. (u_n) est croissante si $u_1 - u_0 \geq 0$
2. (u_n) est décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$

Preuve

Supposons que f est croissante et $u_1 - u_0 \geq 0$ et montrons que la suite est croissante.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $u_1 \geq u_0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons par récurrence $u_{n+1} \geq u_n$.

Comme f est croissante alors $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Alors la suite est croissante.

La preuve est la même dans le cas où f est croissante et $u_1 - u_0 \leq 0$.

Corollaire

Si f est croissante et $u_1 - u_0 \geq 0$ ($u_1 - u_0 \leq 0$) alors la suite récurrente (u_n) est convergente si, et seulement si, (u_n) est majorée (minorée).

Preuve

Si $u_1 - u_0 \geq 0$ alors (u_n) est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) est convergente si (u_n) est majorée et divergente si (u_n) n'est pas majorée.

La preuve est la même dans le cas où $u_1 - u_0 \leq 0$.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Supposons que $a \in]-\infty, 2]$.

1.a) Montrer que La suite (u_n) est bien définie

La suite (u_n) est définie par la fonction affine $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

La suite (u_n) est bien définie si l'intervalle $]-\infty, 2]$ est stable par f, c'est-à-dire que $f(]-\infty, 2]) \subset]-\infty, 2]$

$f(]-\infty, 2]) =]-\infty, 2]$.

1.b) Montrer que (u_n) est croissante.

f est croissante et $u_1 - u_0 = \frac{2-a}{2} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

1.c) Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \leq 2$.

Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 2

Initialisation

pour $n = 0$: $u_0 = a \leq 2$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons par récurrence que $u_n \leq 2$ alors $f(u_n) \leq f(2) = 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$. Alorsc (u_n) est majoréepar 2.

1.d) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

(u_n) est croissante et majorée donc convergente d'après le théorème de la limite monotone ; sa limite $l \in]-\infty, 2]$ et vérifie $f(l) = l$ donc $l = \frac{1}{2}l + 1$ d'où $l = 2$.

2) Supposons maintenant que $a \in [2, +\infty[$. (en exercice)

2.a) Montrer que La suite (u_n) est bien définie

2.b) Montrer que (u_n) est monotone.

2.c) Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \geq 2$.

2.d) En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Nature d'une suite récurrente définie par une fonction décroissante

Lemme

La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante.

Preuve

Soit I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et f et h, $f: I \to J$ et $h: J \to K$ deux fonctions décroissantes.

Soit $x, y \in I$ tel que $x > y$ alors $f(x) < f(y)$ car f est décroissante et on a

$h(f(x)) > h(f(y))$ car h est décroissante, c'est-à-dire $h \circ f(x) > h \circ f(y)$

donc $h \circ f$ est croissante. En particulier si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante.

Dans le cas où la suite récurrente est définie par une fonction décroissante on se ramène au cas d'une suite récurrente définie par une fonction croissante en considérant la fonction g définie sur I par $g = f \circ f$.

Lemme

Si I est un intervalle stable par f alors I est stable par $f \circ f$.

Preuve (en exercice)

Théorème

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I et telle que $f(I) \subset I$.

Si f est décroissante alors la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

est convergente si, et seulement si, les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) défines par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{2n+2} = g(u_{2n}), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_1 \in I \\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1}), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sont convergentes et ont même limite.

Preuve

Si (u_n) converge vers l alors toutes ses sous-suites convergenent et ont même limite l en particulier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite l.
Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l alors $\forall \varepsilon > 0,$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \Longrightarrow |u_{2n} - l| < \varepsilon)$ et
$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - l| < \varepsilon)$

On prend $n_0 = Max\,(n_1, n_2)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

Le théorème est prouvé.

Exemple

Considérons la suite récurrente (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que $[1,3]$ est stable par f. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

L'intervalle $[1,3]$ est stable par f puisque $f([1,3]) = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \subset [1,3]$

Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

$u_0 = 1 \in [1,3]$. Supposons, par récurrence que $u_n \in [1,3]$ alors $f(u_n) \in [1,3] \subset [1,3]$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in [1,3]$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.

2) Montrer que la sous-suite (u_{2n}) est croissante

$u_{2n+2} = g(u_{2n})$ où $g = f \circ f$ est une fonction croissante laissant $[1,3]$ stable.

(u_{2n}) est une suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{2n+2} = g(u_{2n})$

$u_2 - u_0 = \frac{2}{3} > 0$ et g est croissante donc la suite (u_{2n}) est croissante

3) Montrer que la sous-suite (u_{2n+1}) est décroissante

(u_{2n+1}) est une suite récurrente définie par $u_1 = 3$ et $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$

$u_3 - u_1 = -\frac{4}{3} < 0$ et g est croissante donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(u_{2n}) est croissante et majorée donc converge et (u_{2n+1}) est décroissante et minorée donc converge. Leurs limites respectives l_1 et l_2 appartient à $[1,3]$ et solution de l'équation
$g(x) = x \Leftrightarrow f\big(f(x)\big) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ d'où $x = -1$ ou $x = 3$. D'où $l_1 = l_2 = 3$.
Alors la suite suite (u_n) est convergente et a pour limite $l = 3$.

Suites de Cauchy

Définition

Un nombre réel l est dit valeur d'adhérence de (u_n) si l est limite d'une sous-suite de (u_n).

Exemple

$l = 0$ est une valeur d'adhérence de la suite de terme général $u_n = n(1 + (-1)^n)$.

En effet, la sous-suite de terme général $u_{2n+1} = 0$ est convergente vers 0.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass).

Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Exemple

$(-1)^n$ est une suite bornée donc possède deux valeurs d'adhérence $l = 1$ et $l = -1$ La sous-suite $(-1)^{2n} = 1$ converge vers 1 et la sous-suite $(-1)^{2n+1} = -1$ converge vers -1.

Définition (suites de Cauchy)

On dit que la suite (u_n) est de Cauchy si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \text{ et } m \geq n_0 \Longrightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon)$$

ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon)$$

Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée

Preuve

Pour $\varepsilon = 1$ et $m = n_0$ on a, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, |u_n - u_{n_0}| < 1$ d'où

$|u_n| = |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \leq |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$. On prend,

$a = Max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < a$. D'où la proposition.

Théorème1

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve

Supposons que (u_n) est convergente et a pour limite le nombre réel l.

On veut montrer qu'elle est de Cauchy.

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$
En particulier,
$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon/2)$ donc

$\forall\, m \in \mathbb{N}, \ (m \geq n_0 \Longrightarrow |u_m - l| < \varepsilon/2)$
D'où $|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| < \varepsilon$

d'où
$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq n_0$ et $m \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon)$ donc la suite est de Cauchy.

D'où le théorème 1.

Théorème 2

Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy est convergente.

Supposons que (u_n) est de Cauchy donc bornée.
Alors d'après le théorème de Bolzano Weirstrass (u_n) possède une valeur d'adhérence, disons l, c'est-à-dire qu'il exite une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente vers l.
Montrons que (u_n) converge vers l.
On a $\forall\varepsilon > 0,$
$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq n_1$ et $m \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon/2)$ et
$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \ \Longrightarrow \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon/2)$
D'autre part,
Comme φ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante alors $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. Alors si $n \geq n_1$ alors $\varphi(n) \geq n_1$
On prend $n_0 = Max(n_1, n_2)$ et on a
$|u_n - l| = \left|u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - l\right| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Le théorème 2 est prouvé.

Exemple

1) Montrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3}$ est de Cauchy puis en déduire sa nature.

Pour tout entier non nul n et tout entiernon nul p on a

$|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{k=1}^{k=n+p} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3}\right| = \sum_{k=n+1}^{k=n+p} \frac{1}{k^3}$

et pour tout enier $k = n+1, \dots, n+p$ on a $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ d'où

$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=n+1}^{k=n+p} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$, d'où $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\frac{1}{n} < \varepsilon$ alors $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$.

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. On prend $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ et on a

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon)$.

Donc la suite (u_n) est de Cauchy.

La suite (u_n) est de Cauchy donc (u_n) est convergente.

2) Montrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy puis en déduire sa nature.

(u_n) n'est pas de Cauchy si

$\exists \varepsilon > 0, \forall\, N \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| \geq \varepsilon)$.

Commentaire
Pour montrer qu'une suite n'est pas de Cauchy, on cherche ε et $\forall\, N \in \mathbb{N}$
on cherche deux eniers n et p plus grands que N qui vérifient $|u_{n+p} - u_n| \geq \varepsilon$

Pour tout entier non nul n et tout entier non nul p on a

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{k=n+p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{k=n+p}\frac{1}{k}$$

et pour tout enier $k = n+1, \dots, n+\ p$ on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{n+p}$ d'où

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \geq \sum_{k=n+1}^{k=n+p}\frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

En particulier pour $p = n$ on a $|u_{2n}-u_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $\forall\ N \in \mathbb{N}$ on prend $p = N$ et $n = N$. Alors

$\forall\ N \in \mathbb{N}$, $|u_{2N}-u_N| \geq \frac{1}{2}$. Donc la suite (u_n) n'est pas de Cauchy.

(u_n) n'est pas de Cauchy donc divergente.

Approximation des réels par des décimaux

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors la suite de terme général $u_n = \frac{E(a10^n)}{10^n}$ est convergente vers a et u_n est une aproximation de a à 10^{-n} près.

Preuve

$E(a10^n) \leq a10^n < E(a10^n)+1$ ou $\frac{E(a10^n)}{10^n} \leq a < \frac{E(a10^n)}{10^n}+\frac{1}{10^n}$

Donc $\frac{E(a10^n)}{10^n}$ est une approximation de a à 10^{-n}

D'autre part on a, $a-\frac{1}{10^n} < \frac{E(a10^n)}{10^n} \leq a$

Par passage à la limite $\frac{E(a10^n)}{10^n}$ converge vers a. La proposition est prouvée

Exemple

Une approximation de π à 10^{-3} est donnée par $\frac{E(\pi 10^3)}{10^3} = \frac{E(10^3 3.1415)}{10^3} = 3{,}141$

Comparaison des suites et notation de Landau. (on laisse pour le chapitre suivant)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$.

1) On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

On écrit $u_n = O(v_n)$, on lit grand O de v_n.

2) On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $zéro$.

On écrit $u_n = o(v_n)$, on lit petit o de v_n.

3) On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.

On écrit $u_n \sim v_n$, on lit (u_n) est équivalente à (v_n).

Exemple

$n^3 + 3n^2 - 1 \sim n^3$

Puisque la suite de terme général, $\frac{n^3+3n^2-1}{n^3} = 1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}$ converge vers 1.

$\frac{1}{n^2+2n+1} \sim \frac{1}{n^2}$

Puisque la suite de terme général, $\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+2n+1}} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ converge vers 1.

Proposition (croissances comparées)

1) $\forall \alpha > 0, Ln\, n = o(n^\alpha)$

2) $\forall \alpha > 0, n^\alpha = o(e^n)$

3) $e^n = o(n!)$

Proposition

Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n) et (v_n) ont même limite.

Opérations sur les suites équivalentes

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim h_n$ alors

1- $u_n w_n \sim u_n h_n$

2- $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{h_n}$

3- $\forall m \in \mathbb{Z}, (u_n)^p \sim (v_n)^p$

On n'a pas en général, $u_n + w_n \sim v_n + h_n$

Exemple

$\frac{3n^2-1}{n^3} \sim \frac{3n^2}{n^3} = \frac{3}{n}$

Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$