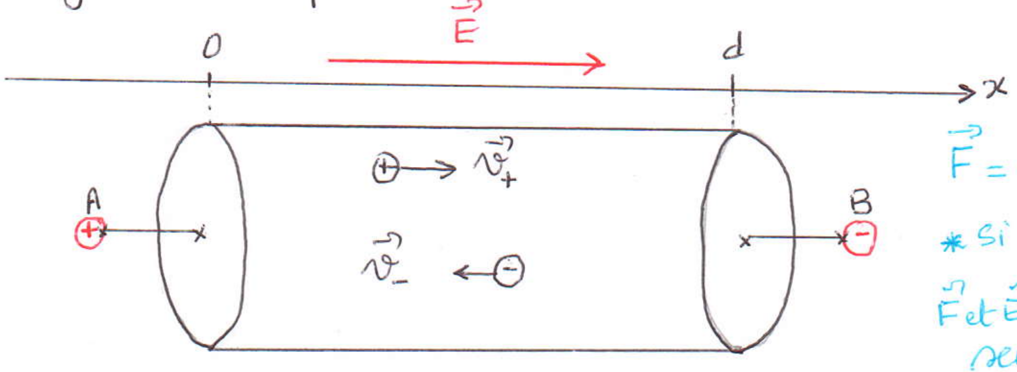
Réseaux électriques

I) Définitions :

1.1) Déplacement de charges dans un conducteur

Si on applique un champ électrique $\vec{E}$ à un conducteur en équilibre, il en résulte un déplacement de charges.
Les charges ⊕ se déplacent dans le même sens que $\vec{E}$, alors que les charges ⊖ se déplacent en sens inverse.



$\vec{F} = q\vec{E}$

* si $q > 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même sens
* si $q < 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont opposés

$V_A > V_B$

* Différence de potentiel (ddp) : $V = V_A - V_B > 0$
* $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$
* Dans le cas d'un $\vec{E}$ uniforme (constant) : $\|\vec{E}\| = \frac{|\Delta V|}{|\Delta x|} = \frac{V_A - V_B}{d}$

1.2) Intensité du courant

Soit un conducteur métallique de section S. L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité de charge dq qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt :

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

* L'intensité du courant I est exprimée en ampères (A) :

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

* Le sens conventionnel positif du courant électrique est du potentiel plus élevé (V_+) au potentiel plus bas(V_-).

1.3) Loi d'Ohm macroscopique :

Par définition, la résistance d'un conducteur métallique soumis à une ddp V et parcouru par un courant I est donnée par :

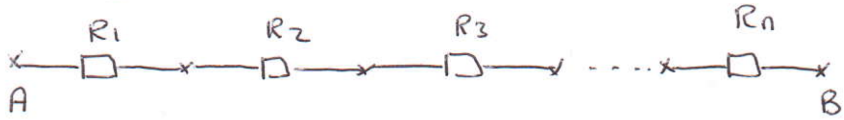
$$R = \frac{V}{I}$$

* La résistance R est exprimée en ohms (Ω)

$$1\,\Omega = \frac{1\,V}{1\,A}$$

1.4) Groupement de résistences :

En série :

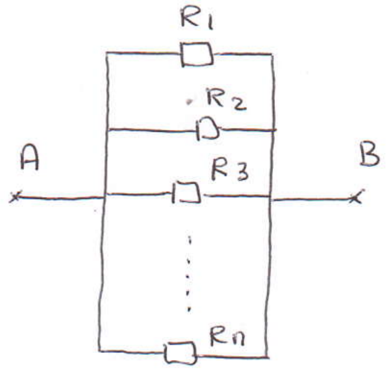


$$R_{AB} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

En parallèle :

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$



1.5) Effet Joule

La circulation d'un courant I à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement.

Soit dq la quantité de charge passant d'un point A au point B d'un conducteur. Le travail des forces électrostatiques est donné par :

$$dW = -dE_p = -(V_B - V_A)\,dq = (V_A - V_B)\,dq$$

$$* \; V_A - V_B = V = RI$$

$$* \; I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I\,dt$$

$$dW = RI.I\,dt = RI^2\,dt$$

L'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant un intervalle de temps dt est donnée par :

$$dW = RI^2\,dt$$

Cette énergie dissipée correspond à une puissance donnée par :

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2 = VI$$

* La puissance est exprimée en watts (W) :

$$1\,W = \frac{1\,J}{1\,s}$$

II) Eléments d'un circuit électrique

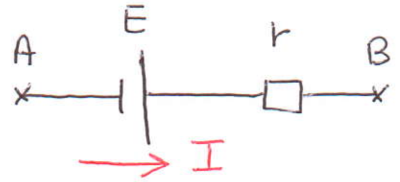
2.1) Générateur :

Un générateur électrique est un dispositif qui permet la transformation d'une forme d'énergie (mécanique, chimique, lumineuse, ...) en une énergie électrique.

Exemple 1 : La pile transforme l'energie chimique en une énergie électrique

Exemple 2 : Le dynamo transforme l'energie mécanique en une énergie électrique.

* Un générateur est caractérisé par :
  - Une force électromotrice (f.e.m) E
  - Une résistance interne r



* Le sens du courant électrique dans un générateur est dirigé de la borne ⊖ vers la borne ⊕ .

* La ddp aux bornes d'un générateur à vide ($I = 0$) est :

$$V_A - V_B = E$$

La ddp aux bornes d'un générateur en charge est :

$$V_A - V_B = E - rI$$

Energie fournie par le générateur : $E_g = EIt$

Energie perdue par effet Joule : $E_j = rI^2t$

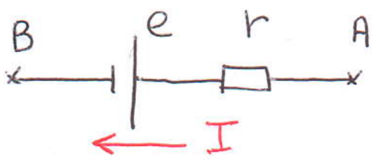
Energie restée ou utile : $E_u = (E - rI)It$

* Pour les puissances, il faut diviser par le temps t.

Rendement d'un générateur : $\eta_g = \dfrac{E_u}{E_g} = \dfrac{E - rI}{E}$

2.2) Récepteur :

Un récepteur est un appareil qui ne transforme pas intégralement l'energie en chaleur. Il est caractérisé par une force contre électromotrice (f.cem) e et une resistance interne r.



* Le sens du courant électrique dans un récepteur est dirigé de la borne (+) vers la borne (−).

* La ddp aux bornes d'un récepteur est donnée par :

$$V_A - V_B = e + rI$$

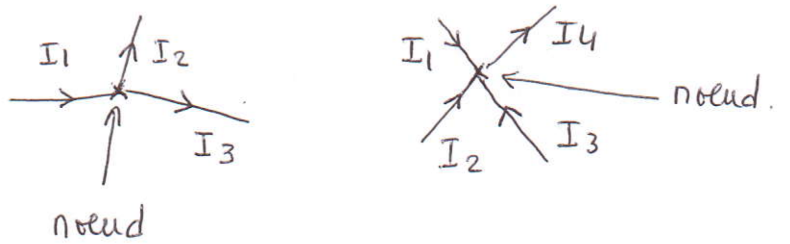
* Rendement d'un récepteur est :

$$\eta_r = \frac{e}{e + rI}$$

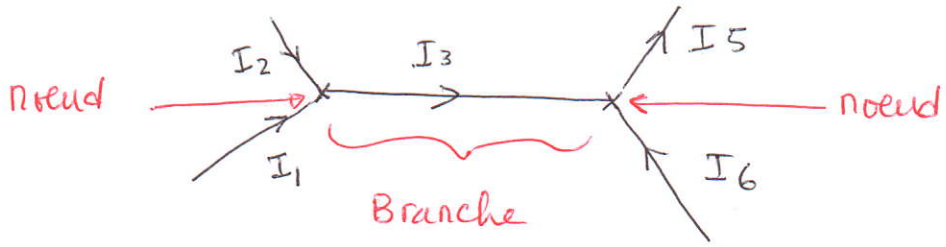
III) Les lois régissant les circuits électriques : Lois de Kirchhoff

3.1) Définitions

* **Noeud** : c'est un point du circuit où arrivent trois fil ou plus.



* **Branche** : c'est une portion du circuit qui s'intercale entre deux noeuds



* **Maille** : c'est un ensemble de branches qui constituent une boucle fermée.

3.2) Lois de Kirchhoff :

Loi des noeuds (Conservation du courant) :

La somme des intensités des courants qui arrivent à un noeud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

$$\sum I_{rentrant} = \sum I_{sortant}$$

Loi des mailles (conservation de l'énergie).

Dans une maille, la somme algébrique des ddp égale à zéro.

3.3) Application de la loi des noeuds et la loi des mailles :

Pour appliquer la loi des noeuds et la loi des mailles à un circuit électrique, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Pour chaque branche, choisir un sens arbitraire du courant.
2. Pour chaque maille, choisir un sens arbitraire du parcours.
3. Compter le nombre des noeuds N.
   Ecrire la loi des noeuds pour $(N-1) \Rightarrow (N-1)$ équations
4. Compter le nombre des branches B égal au nombre d'inconnus
   Le nombre des mailles indépendantes est : $M = B - N + 1$
   Ecrire la loi des mailles pour M mailles $\Rightarrow$ M équations
   en suivant la règle suivante :

* Pour les générateurs et les récepteurs : On écrit $(+E)$ si on rentre par la borne ⊕ et $(-E)$ si on rentre par la borne ⊖.
* Pour les résistances : On écrit $(+RI)$ si on circule dans le même sens du courant et $(-RI)$ si on circule dans le sens inverse du courant.

IV) Charge et décharge d'un condensateur

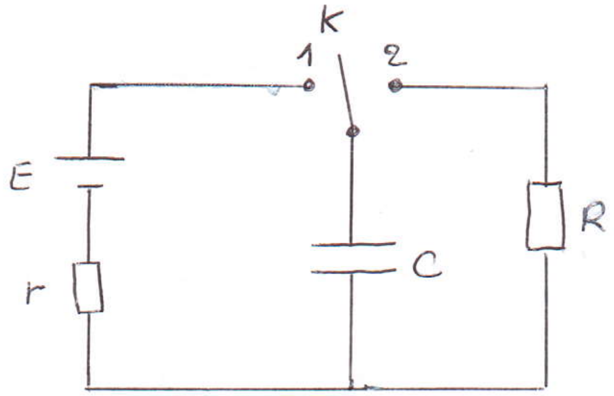
Rappel mathématique :

Equation différentielle : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = S$

Solution : $q(t) = \tau S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + q(t=0)\, e^{-t/\tau}$

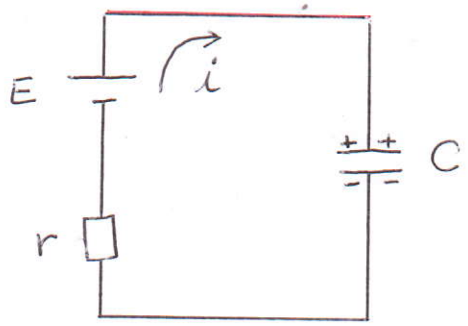
Charge et décharge d'un condensateur

* Générateur (E, r)
* Condensateur C
* Resistance R
* Commutateur K



4.1) Charge du condensateur : Commutateur en position 1

* $v_C = \frac{q}{C}$
* charge : $i = \frac{dq}{dt}$
* Loi des mailles : $ri - E + v_C = 0$



$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = S \quad \text{avec} \begin{cases} \tau = rC \\ S = \frac{E}{r} \end{cases}$$

Solution : $q(t) = \tau S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \underbrace{\cancel{q(t=0)}}_{=0}\, e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow q(t) = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

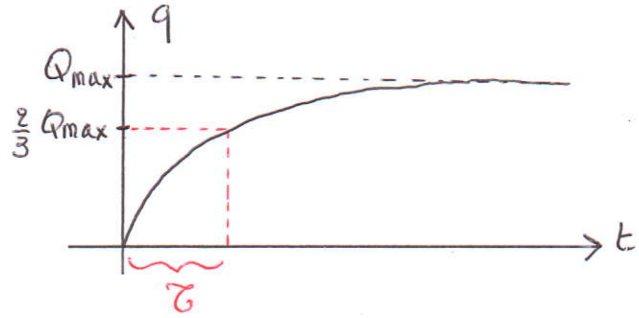
$$q(t \to \infty) = Q_{max} = CE$$

$$\ast \quad q(t) = Q_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\ast \; q(t=\tau) \simeq \frac{2}{3} Q_{max} \qquad (e \simeq 3)$$

$$\ast \; q(t=5\tau) \simeq 0{,}99\, Q_{max}$$

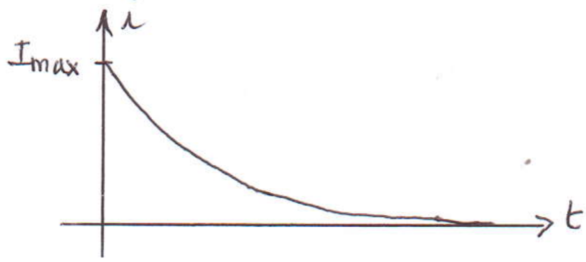
Pour $t = 5\tau$, le condensateur est pratiquement chargé.



$\ast$ Courant électrique :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q_{max}}{\tau} e^{-t/\tau} = I_{max}\, e^{-t/\tau}$$

$$I_{max} = \frac{Q_{max}}{\tau} = \frac{E}{r}$$



$\ast$ Bilan d'énergie :

$\ast$ Energie fournie par le générateur :

$$E_g = \int_0^\infty E \underbrace{i\,dt}_{dq} = \int_0^{Q_{max}} E\, dq = E\, Q_{max} = CE^2 \quad (Q_{max} = CE)$$

$\ast$ Energie emmagasinée dans le condensateur :

$$E_e = \int_0^{Q_{max}} v_c\, dq = \int_0^{Q_{max}} \frac{q}{c}\, dq = \frac{Q_{max}^2}{2C} = \frac{1}{2} CE^2$$

* Energie perdue par effet Joule dans r :

$$E_j = \int_0^\infty r i^2 dt = \int_0^\infty r I_{max}^2 e^{-2t/\tau} dt = r I_{max}^2 \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right)_0^\infty$$

$$= r I_{max}^2 \frac{\tau}{2} = r \cdot \frac{C^2E^2}{r^2C^2} \cdot \frac{rC}{2} = \frac{1}{2} CE^2$$

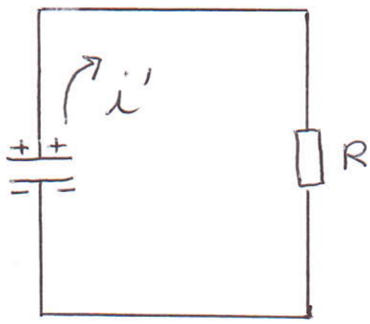
$$E_j = \frac{1}{2} CE^2$$

Conclusion : $\boxed{E_g = E_c + E_j}$

4.2) Décharge du condensateur : Commutateur en position 2

* $v_c' = \frac{q'}{C}$

* Décharge : $i' = -\frac{dq'}{dt'}$



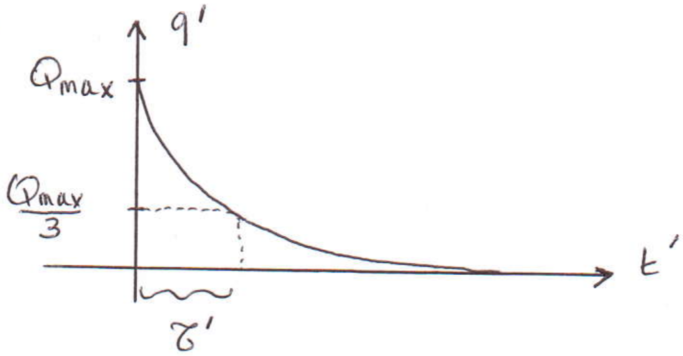
* Loi des mailles : $-v_c' + Ri' = 0$

$$\Rightarrow \frac{dq'}{dt'} + \frac{q'}{\tau'} = S' = 0 \quad \text{avec } \tau' = RC$$

Solution : $q'(t') = \tau' \cancel{S'}^{=0} (1 - e^{-t'/\tau'}) + \underbrace{q'(t'=0)}_{Q_{max}} e^{-t'/\tau'}$

* $q'(t') = Q_{max} e^{-t'/\tau'}$

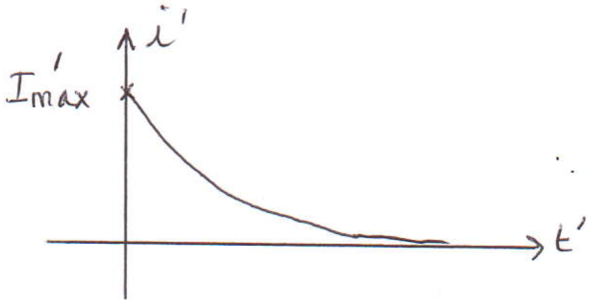
* $q'(t'=\tau') \simeq \frac{Q_{max}}{3}$



* Courant électrique :

$$i' = -\frac{dq'}{dt'} = \frac{Q_{max}}{\tau'} e^{-t'/\tau'} = I'_{max} e^{-t'/\tau'}$$

$$I'_{max} = \frac{Q_{max}}{\tau'} = \frac{E}{R}$$



* Bilan d'énergie :

* Energie initialement emmagasinée dans le condensateur :

$$E_c = \frac{1}{2} C E^2$$

* Energie perdue par effet Joule dans R :

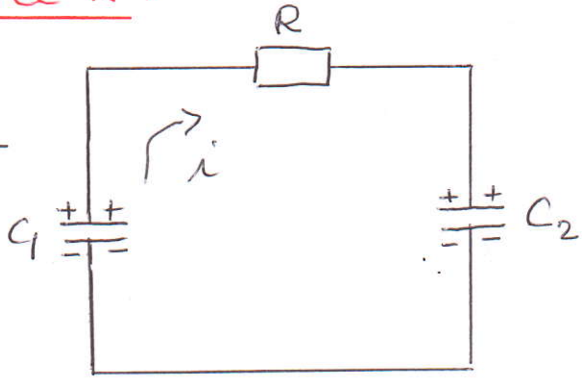
$$E_j' = \int_0^{\infty} R i'^2 dt' = \int_0^{\infty} R I'^2_{max} e^{-2t'/\tau'} dt' = R I'^2_{max} \left(-\frac{\tau'}{2} e^{-\frac{2t'}{\tau}} \right)_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow E_j' = \frac{1}{2} C E^2$$

Conclusion : $\boxed{E_c = E_j'}$

Toute l'énergie, qui était emmagasinée dans le condensateur, a été perdue par effet Joule sous forme de chaleur dans R.

4.3) Décharge d'un condensateur C_1 dans un autre condensateur C_2 à travers une résistance R.



A $t=0$, le condensateur C_1 est entièrement chargé et le condensateur C_2 est entièrement déchargé :

$q_1(t=0) = Q_{max}$,

$q_2(t=0) = 0$.

A) Regime transitoire :

* Conservation de la charge : $q_1(t) + q_2(t) = Q_{max}$

* Pour C_1, c'est une décharge : $i = -\dfrac{dq_1}{dt}$

  Pour C_2, c'est une charge : $i = +\dfrac{dq_2}{dt}$

* $v_{C_1} = \dfrac{q_1}{C_1}$ et $v_{C_2} = \dfrac{q_2}{C_2}$

* Loi des mailles : $-v_{C_1} + Ri + v_{C_2} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{q_1}{C_1} - R\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q_1}{C_1} - R\frac{dq_1}{dt} + \frac{Q_{max} - q_1}{C_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-q_1}{C_1} - R\frac{dq_1}{dt} + \frac{Q_{max}}{C_2} - \frac{q_1}{C_2} = 0$$

$$\Rightarrow R\frac{dq_1}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) q_1 = \frac{Q_{max}}{C_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = S \quad \text{avec} \begin{cases} \tau = \dfrac{RC_1C_2}{C_1 + C_2} \\ S = \dfrac{Q_{max}}{RC_2} \end{cases}$$

Solution : $q_1(t) = \tau S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \underbrace{q_1(t=0)}_{Q_{max}} e^{-t/\tau}$

B) Regime permanent : $i = \frac{dq_1}{dt} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = q_1(t \to \infty) \\ Q_2 = q_2(t \to \infty) \end{array}\right\} \text{charges finales des condensateurs } C_1 \text{ et } C_2.$$

Loi des mailles : $-V_{C_1} + V_{C_2} = 0$

$$\Rightarrow V_{C_1} = V_{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q_{max}}{C_1 + C_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{C_1 Q_{max}}{C_1 + C_2} \\ Q_2 = \dfrac{C_2 Q_{max}}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

Bilan d'énergie : $E_{C_1} = E'_{C_1} + E'_{C_2} + E_j$

$E_{C_1} = \frac{Q_m^2}{2C_1}$: énergie initiale du condensateur C_1

$E'_{C_1} = \frac{Q_1^2}{2C_1}$: énergie restée dans le condensateur C_1

$E'_{C_2} = \frac{Q_2^2}{2C_2}$: énergie reçue par le condensateur C_2

$E_j = \int_0^\infty R i^2 dt = E_{C_1} - E'_{C_1} - E'_{C_2}$: énergie perdue par effet Joule dans la résistance R.

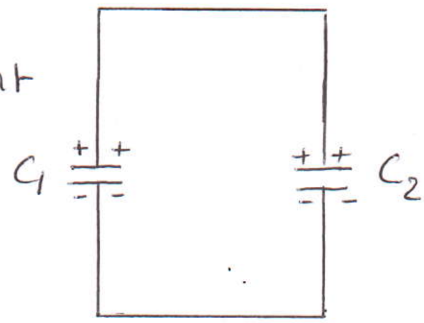
Remarque : la décharge du condensateur C_1 est partielle

4.4) Décharge d'un condensateur C_1 dans un condensateur C_2

A $t=0$, le condensateur C_1 est entièrement chargé et le condensateur C_2 est entièrement déchargé :

$q_1(t=0) = Q_{max}$

$q_2(t=0) = 0$



Le régime permanent est atteint de façon instantannée (pas de régime transitoire).

* Conservation de la charge : $Q_1 + Q_2 = Q_{max}$

* Loi des mailles : $-V_{C_1} + V_{C_2} = 0$

$$\Rightarrow V_{C_1} = V_{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q_{max}}{C_1 + C_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{C_1 Q_{max}}{C_1 + C_2} \\ Q_2 = \dfrac{C_2 Q_{max}}{C_1 + C_2} \end{cases}$$

<u>Bilan d'énergie :</u>

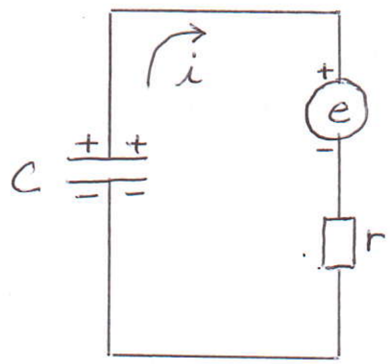
$\Delta E = E_{C_1} - E'_{C_1} - E'_{C_2}$: Energie perdue par effet Joule lors du déplacement des charges de C_1 vers C_2.

$E_{C_1} = \dfrac{Q_m^2}{2C_1}$: énergie initiale du condensateur C_1.

$E'_{C_1} = \dfrac{Q_1^2}{2C_1}$: énergie restée dans le condensateur C_1.

$E'_{C_2} = \dfrac{Q_2^2}{2C_2}$: énergie reçue par le condensateur C_2.

4.5) Décharge d'un condensateur dans un récepteur.



* Un condensateur de capacité C entièrement chargé.

  A $t=0$, $q(t=0) = Q_{max}$.

* Un récepteur (e, r)

* La condition de fonctionnement du récepteur est : $v_e > e \Rightarrow \frac{q(t)}{C} > e \Rightarrow q(t) > Ce$

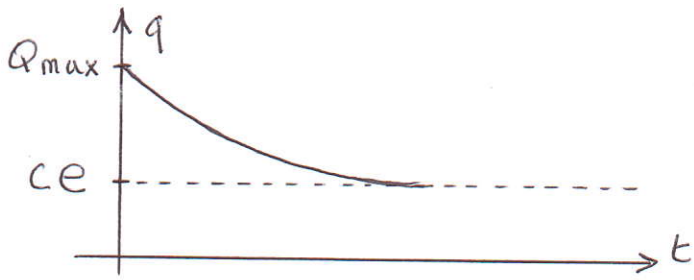
* Loi des mailles : $-v_C + e + ri = 0$
* Décharge du condensateur $\Rightarrow i = -\frac{dq}{dt}$

$$\left.\begin{array}{l} -v_C + e + ri = 0 \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = S \quad \text{avec} \begin{cases} \tau = rC \\ S = \frac{e}{r} \end{cases}$$

Solution : $q(t) = \tau S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + \underbrace{q(t=0)}_{Q_{max}} e^{-t/\tau}$

$$q(t) = Ce\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + Q_{max}\, e^{-t/\tau}$$

$q(t \to \infty) = Ce = Q_\infty$



Bilan d'énergie : $E_C = E_C' + E_e + E_j$

* $E_C = \frac{1}{2C} Q_{max}^2$: Energie initiale du condensateur.
* $E_C' = \frac{1}{2C} Q_\infty^2$: Energie restée dans le condensateur.
* $E_e = \int_0^\infty e\, i\, dt$: Energie utile du récepteur
* $E_j = \int_0^\infty r i^2 dt$: Energie perdue par effet Joule.