Logique-Ensembles-Applications-Relations binaires

Exercice 1 (Cours) Démontrer les équivalences suivantes :
- $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$,
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$,
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$,
- $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$,
- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$,
- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
- $p \implies q \Leftrightarrow \overline{q} \implies \overline{p}$.

Exercice 2 Soient P, Q et R trois propositions.

1. Montrer à l'aide de tables de vérité que la conjonction et la disjonction sont associatives, i.e :

$$(P \text{ et } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ et } R)$$
$$(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)$$

2. Montrer que la conjonction et la disjonction sont distributives l'une par rapport à l'autre, i.e. :

$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$$
$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$$

Exercice 3 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \cdots x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}, z = \overline{z} \cdots z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}, x = \pi \cdots \exp(2ix) = 1$.

Exercice 4 oient les quatre assertions suivantes :
1 $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
2 $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
3 $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
4 $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

a Les propositions $1, 2, 3, 4$ sont-elles vraies ou fausses ?

b Donner leur négation.

Exercice 5 Nier les propositions suivantes :

1. Tout triangle possède un angle droit,
2. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

3. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x+1$.
4. $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, (|x-7/5| < \alpha \Rightarrow |5x-7| < \varepsilon)$.

Exercice 6 On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f.g = 0$. peut-on affirmer que l'on a $f = 0$ ou $g = 0$?

Exercice 7 Vérifier que, pour tout entier naturel n, si 10^n+1 est divisible par 9 alors $10^{n+1}+1$ est divisible par 9.

Exercice 8 Montrer que

1. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$$
   .
2. $$(n+1)! \geqslant \sum_{k=0}^{n} k!.$$

Exercice 9 Montrer que :

1. $\{z \in \mathbb{C}/\ \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{2\pi i/3}$;
2. $\{n \in \mathbb{N}/\ 3 \text{ divise } n^2\} = 3\mathbb{N}$.

Exercice 10 Déterminer l'intersection des ensembles suivants dans chaque cas :

$A = \{k/2^n/(k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ et $B = \mathbb{Z}$.

$A = \{r+\alpha/(r,\alpha) \in \mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\}$ et $B = \mathbb{Q}$.

Exercice 11 Soient A et B deux parties de E. Montrer que :

1. $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ et $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.
3. $\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cap C\ et\ A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

Exercice 12 Soient $A = \{1,2\}$ et $B = \{x,y,z\}$. Déterminer $A \times B$, B^2, $A^2 \times B$, $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Exercice 13 (Cours) Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

1. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
5. $\forall\ A \in \mathcal{P}(F)\ f^{-1}(F-A) = E - f^{-1}(A)$.

Exercice 14 Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 15 Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longrightarrow n+1$,
2. $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longrightarrow n+1$,
3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x+y, x-y)$,
4. $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 16 [**Cours**] Soit l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longrightarrow x^2$, et $A = \{1\}$, $B = \{-1\}$.

1. Calculer $f(A \cap B), f(A), f(B)$ puis $f(f^{-1}(A))$ et $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 17 Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.
2. Soit $A = \{-1, 2, 3\}, B = [0, 1[$ et $C = [-1, 0]$. Déterminer $f(A), f^{-1}(A), f^{-1}(B), f^{-1}(C)$.
3. Donner un ensemble de départ pour que f soit injective et un ensemble d'arrivée pour que f soit surjective.
4. Dans quel cas f est bijective ? Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice 18 On définit sur l'ensemble des nombres réels une relation $\mathcal{R}$ en posant pour tous réels x, y :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le graphe de $\mathcal{R}$.
3. Déterminer les classes d'équivalence des réels $0, 1$ et $\frac{1}{2}$.

Exercice 19 Soit E un ensemble non vide. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ une relation $\mathcal{R}$ en posant pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow (A = B \text{ ou } A = E - B).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 20 On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation $\mathcal{R}$ en posant pour tous réels x, y, x', y',

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $(0, 0)$ puis toutes les classes d'équivalence.
3. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \overline{(x, y)} \rightarrow x + y.$$

   Vérifier que f est bien définie et que f est bijective.

Exercice 21 On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation $<<$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$x << y \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n.$$

Montrer que $<<$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Exercice 22 On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation $<<$ en posant pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$m << n \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km.$$

Montrer que $<<$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Exercice 23 Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \Leftrightarrow [\ (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre est-il total ?

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 24 Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée.
2. f est bornée.
3. f est impaire.
4. f est l'identité de $\mathbb{R}$.
5. Le graphe de f coupe la droite $y = x$.
6. L'équation $sinx = x$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.
7. Pour tout point M du plan P, M est sur le cercle C de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

Exercice 25 Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2. f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
3. f est une homothétie (où f est une transformation du plan (P)).
4. f n'est pas une homothétie.
5. Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette proposition est-elle vraie ?)
6. Il y a un entier plus grand que tous les entiers. (cette proposition est-elle vraie ?)

Exercice 26 On note 1_A la fonction indicatrice de A définie de E dans $\{0, 1\}$ par

$$\forall x \in A, 1_A(x) = 1 \ et\ \forall x \in A^c, 1_A(x) = 0.$$

Montrer que :

$$1_{A\cap B} = 1_A 1_B, 1_{A^c} = 1 - 1_A,$$
$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B, siA \subset B 1_{B-A} = 1_B - 1_A.$$

En utilisant la fonction indicatrice, montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ où A, B, C sont des parties d'un ensemble E.