I- Limites et continuité

Exercice 1

Montrer que le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire et que le produit de deux fonctions impaires ets une fonction paire.

Exercice 2

Démontrer en utilisant la définition de la limite que

1. $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$; 3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; 4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{2x+3} = 0$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$; 2. $\mathrm{Lim}_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 3. $\mathrm{Lim}_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$; 4. $\mathrm{Lim}_{x\to +\infty} \frac{x+cosx}{x+sinx}$; 5. $\mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{Ln(1+x^2)}{sin^2x}$;

6. $\mathrm{Lim}_{x\to +\infty} \frac{cos^2x+sinx}{x}$; 7. $\mathrm{Lim}_{x\to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$; 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\lfloor Lnx \rfloor}{x}$; 9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; 10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinax}{x}$, $a \in \mathbb{R}$; 12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin(e^{-x})}{x}$; 13. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - e^x$; 14. $\mathrm{Lim}_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$;

Exercice 4

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, montrer que la fonction f ne possède pas de limite en x_0, dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = cosx, x_0 = +\infty$; 2. $f(x) = cos\frac{1}{x}, x_0 = 0$; 3. $f(x) = sinLn|x|, x_0 = 0$.

Exercice 5

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{Ln|x|} & si\ x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & sinon \end{cases}$; 2. $f(x) = \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$; 3. $f(x) = \begin{cases} 1\ si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0\ si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$ et une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

1. $f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & si\ x \leq 1 \\ asin\frac{\pi}{2}x & si\ x > 1 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue ?

Exercice 7

La fonction f est elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = sinxsin\frac{1}{x}$; 2. $f(x) = cos\frac{1}{x}$; 3. $f(x) = sinx\ Ln|x+1|$

Exercice 8

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses.

1. L'image directe par une fonction continue d'un inetrvalle est un intervalle.

2. L'image directe par une fonction continue d'un inetrvalle ouvert est un intervalle ouvert.

3. L'image directe par une fonction continue d'un segment de $\mathbb{R}$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1) Montrer que le polynôme $x^5 + x^2 - 4x + 1$ admet au moins trois racines réelles.

2) Montrer que le polynôme $x^7 + x^5 + 4x - 8$ possède une seule racine réelle.

3) Montrer que l'équation $cos\frac{1}{x} = 0$ possède une infinité de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10

Montrer que la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 11

Montrer que toute fonction Lipshitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I.

Montrer que la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.