CHAPITRE N°4 Calcul de Probabilités

1) Espaces probabilisés :

1.1. Expérience aléatoire, espace fondamental et événements :

- Une **expérience** ou épreuve (**E**) est dite **aléatoire** si on ne peut pas prédire a priori son résultat.
- L'**espace fondamental** est l'ensemble de tous les résultats possibles qu'on peut avoir lors d'une expérience aléatoire, on le note Ω. Un élément (ou singleton) ω de Ω est dit résultat ***élémentaire***. Le nombre d'éléments (ou cardinal) de l'ensemble Ω est noté $|\Omega|$ (ou bien *card* (Ω)).
- On appelle événement toute assertion logique sur une expérience aléatoire (tout sous-ensemble de Ω).

Exemples :

E1 : Lancer une pièce de monnaie, alors $\Omega = \{F, P\}$ et $|\Omega| = 2$.

E2 : Jeter un dé, alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $|\Omega| = 6$.

Remarques :

- Un événement qui contient un unique élément ω est un **événement élémentaire**. Il est noté$\{\omega\}$.
- L'espace fondamental Ω est l'événement certain.
- L'ensemble vide ϕ est l'événement impossible.

Exemple : Pour l'expérience aléatoire **(E2)**, soient les événements :

A : « obtenir un nombre pair », alors $A = \{2,4,6\}$.

B : « obtenir un nombre impair », alors $B = \{1,3,5\}$.

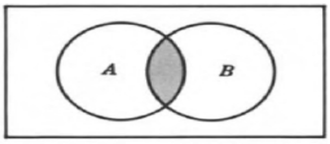
C : « obtenir un multiple de 3 », alors $C = \{3,6\}$.

D : l'événement élémentaire « le plus petit nombre », alors $D = \{1\}$

1.2. Opérations et relations entre les événements

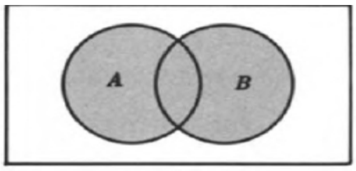
Soit Ω l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire, et soient A, B, C trois événements sur lesquels on peut appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles.

L'intersection :
L'événement $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ est réalisé si **les deux** événements $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ sont réalisés au même temps.



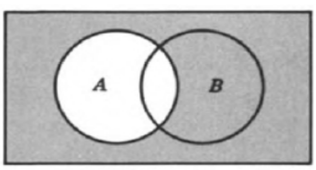
$A \cap B$

L'union :
L'événement $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ est réalisé si **au moins un** des deux événements $\boldsymbol{A}$ **ou** $\boldsymbol{B}$ se réalise.



$A \cup B$

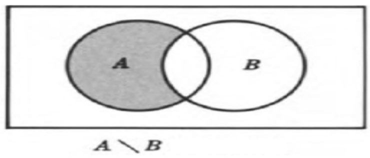
Le complémentaire :
Pour chaque événement A, on définit l'événement complémentaire $\overline{\boldsymbol{A}}$ (ou $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{c}}$) qui contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



A^c

Différence de deux événements :
On appelle différence de deux événements A et B notée $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ (ou $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$), l'événement qui se réalise quand A est réalisé et B ne l'est pas.

$A \setminus B = \{\omega \in \Omega / \ \omega \in A \ et \ \omega \notin B\} = A \cap \overline{B}$.



Différence symétrique :

On appelle différence symétrique de deux événements A et B notée $\boldsymbol{A} \, \Delta \, \boldsymbol{B}$, l'événement qui est réalisé si **un et un seul des deux** événements est réalisé.

$A \, \Delta \, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Événements incompatibles ou exclusifs :
On dit que les événements A et B sont incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps, alors $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$. ($A$ et B n'ont pas d'éléments communs).

Inclusion :
Si A est inclus dans B, on écrit $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. On dit que A **implique** B.

Exemple : Pour l'expérience aléatoire

(E2): Jet d'un dé, alors $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et les événements suivants:

A : « obtenir un nombre pair », alors $A = \{2,4,6\}$.

B : « obtenir un nombre impair », alors $B = \{1,3,5\}$.

C : « obtenir un multiple de 3 », alors $C = \{3,6\}$.

Donner les événements $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A} \setminus$**B ;** $\boldsymbol{A} \triangle$**B;** $\boldsymbol{B} \cap C$; $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{C}$;
$\boldsymbol{B} \cup C$; $\overline{\boldsymbol{A}}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$.

1/ $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$=$\emptyset$ A et B sont alors incompatibles.

2/ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \Omega$

3/ $\boldsymbol{A} \setminus$**B = A car** $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$**=**$\emptyset$ **.**

4/ $\boldsymbol{A} \triangle$**B =**$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$= AUB car A et B sont alors incompatibles.

5/ $B \cap C = \{3\}$.

6/ $B \setminus C = B \cap \overline{C} = \{1,5\}$.

7/ $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) = \{2,4\} \cup \{3\} = \{2,4,3\}$

8/ $B \cup C = \{1,3,5\} \cup \{3,6\} = \{1,3,5,6\}$.

9/ $\overline{A} = \{1,3,5\} = B$.

10/ $\overline{B} = \{2,4,6\} = A$.

11/ $\overline{C} = \{1,2,4,5\}$.

<u>Tableau de correspondance entre le langage de la théorie des ensembles et celui des probabilités</u>

Les opérations logiques sur les événements : « et », « ou », « négation » se traduisent par des opérations ensemblistes : intersection, réunion, passage au complémentaire. Voici un tableau de correspondance entre les deux langages.

Notation	Vocabulaire Ensembliste	Vocabulaire Probabiliste
Ω	Ensemble plein	**Ensemble fondamental**
ω	Singleton ou élément	**Événement élémentaire**
A	Sous-ensemble	**Événement**
$\emptyset$	Ensemble vide	**Événement impossible**
$\omega \in A$	ω appartient à A	**ω est une réalisation possible de A**
$A \subset B$	A inclus dans B	**La réalisation de A implique la réalisation de B**
$A \cup B$	Réunion de A et de B	**Au moins un des deux événements se réalise.**
$A \cap B$	Intersection de A et B	**Les deux événements se réalisent en même temps**

$\bar{A} = A^c$	Complémentaire de A dans Ω	**Événement contraire de A**
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	**A et B sont incompatibles**
Card(Ω)	Nombre d'éléments de Ω	**Nombre de cas possibles**
Card(A)	**Nombre d'éléments de A**	**Nombre de cas favorables**

1-Espace probabilisable:

Ensemble des parties d'un ensemble :

On va associer à Ω l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties (ou tous les sous-ensembles) de Ω.

Exemple : Si on jette une pièce de monnaie alors $\Omega = \{P, F\}$ et

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.

Définition d'une tribu (σ-algèbre) :

Soit Ω un ensemble fondamental associé à une expérience aléatoire et soit $\mathcal{B}$ un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω). On dit que $\mathcal{B}$ est une tribu (ou une σ-algèbre) si $\mathcal{B}$ satisfait aux axiomes suivants :

1. $\Omega \in \mathcal{B}$
2. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ $((A_i)_{i=1}^{\infty})$ alors la réunion $\bigcup_{i\geq 1} A_i$ appartient à $\mathcal{B}$
3. $A \in \mathcal{B} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{B}$

   Le couple$(\Omega, \mathcal{B})$ s'appelle **espace probabilisable**

1. Espace probabilisé (probabilités):

Définition d'une Probabilité:

Soit Ω un ensemble fondamental associé à une expérience aléatoire et soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω. Soit P une application de $\mathcal{B}$ dans [0, 1] telle que :

$$P : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$$

1. $\forall A \in \mathcal{B}, 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$, tel que $A_I \cap A_j = \emptyset$, (pour toute famille $(A_i)_{i\geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles)

On a pour $i \neq j$ $P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$

On dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est **un espace probabilisé ou espace de probabilité**.

Propriétés d'une probabilité :

1. $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$
2. **Probabilité de l'événement contraire :**

   Soit *A un événement* alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. **Une probabilité est une fonction croissante**

   Soient A *et* B $\in \mathcal{B}$ si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4. **Probabilité de la différence de deux événements :**

   Soient A *et* B des événements:

   $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) .$$

5. **Probabilité de la différence symétrique :**

   $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. **Car** $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

6. **Probabilité de l'union de deux événements :**

   Soient A *et* B $\in \mathcal{B}$

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Cas équiprobables (La probabilité uniforme) :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité fini. Comme Ω est fini alors on peut écrire Ω sous la forme :

$\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}}$ **avec** *card* $(\Omega) = n$ *et les* $\{\omega_i\}$ *sont tous des événements élémentaires sur* Ω.

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

De la même manière, soit $A \subset \Omega$ tel que $\mathbf{A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}} = (\bigcup_{i=1}^{k}\{\omega_i\})$

$$\textbf{donc } P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k}(P\{\omega_i\})$$

On suppose que tous les événements $\{\omega_i\}$ sont équiprobables ou uniforme, c'est-à-dire que les événements élémentaires ont la même probabilité:

$\boldsymbol{P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p}$ alors on a:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P\{\omega_i\} = np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n} = \frac{1}{card(\Omega)}$$

Et $$P(A) = \sum_{i=1}^{k}(P\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Définition :

Si les résultats possibles d'une expérience, sont en nombre fini et équiprobables, la probabilité de réalisation d'un événement A associé à cette expérience est:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}.$$

Remarque :

Dans la pratique (les exercices), les mots « **au hasard** », « **non truqué** », « **bien équilibré** », … assurent **l'équiprobabilité** de l'espace fondamental Ω .

Exemples

a. Quelle est la probabilité « d'obtenir un nombre pair » en lançant un dé à six faces ?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $card(\Omega) = 6$

A = « Obtenir un nombre pair » = $\{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

b. Quelle est la probabilité « d'obtenir deux fois le même côté » en lançant 2 fois une pièce de monnaie ?

$$\Omega = \{F, P\} \times \{F, P\} = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\} \;;\; card(\Omega) = 2^2 = 4$$

B = « Avoir deux fois le même côté » = {(P, P), (F, F)}

Card(B)=2

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Probabilités conditionnelles

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité, et soit A un événement de probabilité non nulle $P(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A (ou **probabilité conditionnelle de *B* sachant que *A* s'est réalisé**) la probabilité notée $P_A(B)$ et donnée par:

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Axiomes de probabilités composées

1- Cas de deux événements :

Soit A et B des événement tq $P(A) \neq 0$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A).P(B/A) \\ &= P(B).P(A/B) \end{aligned}$$

Cette équation est appelée ***Formule des Probabilités Composées*** **(FPC).**

2- Cas de trois événements :

Soit A et B et C des événement tq $P(A \cap B) \neq 0$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B).$$

Démonstration :

On pose : $D = A \cap B$.

$$\begin{aligned} P(D \cap C) &= P(D).P(C/D) \\ &= P(A \cap B).P(C/A \cap B) \\ &= P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) \end{aligned}$$

3- Généralisation :

Soit A_i ; i=1,…,n des événements tq $P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap .. A_{n-1}) \neq 0$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap .. A_{n-1})$$

Système complet

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité associé à une expérience aléatoire et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *n* événements sur Ω , vérifiant:

1/ $A_i \neq \emptyset$; $\forall i = 1, \ldots, n$

2/ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

3/ $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (événements incompatibles deux à deux)

On dit alors que la famille $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ forme un **système complet** d'événements sur Ω .

Formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité, et A un événement quelconque.

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une suite d'événements, qui forment un système complet de Ω . Alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A / A_i)$$

Cette dernière formule est appelée ***Formule des Probabilités Totale (*** **FPT).**

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $A = A \cap \Omega$

$$P(A) = P(A \cap \Omega)$$

$$= P(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(A / A_i)$$

Formule de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité, et soit A un événement quelconque.

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une suite d'événements, qui forment un système complet de Ω. Alors :

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i)P(A / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A / A_i)}.$$

Démonstration :

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)}.$$

$$P(A_i \cap A) = P(A_i)P(A / A_i).$$

Et d'après la formule de la probabilité totale, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A / A_i)$$ d'où la formule.

Exemples

Trois machines M1, M2 et M3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Chacune de ces machines fabrique 3%, 4% et 5% de pièces défectueuses, respectivement. On prend une pièce au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ?
2. Si la pièce choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine M1 ?

Solution

On décrit d'abord les événements associés au problème posé ainsi que les probabilités données : Posons

A= « La pièce est fabriquée par la machine M1 »

B= « La pièce est fabriquée par la machine M2 »

C= « La pièce est fabriquée par la machine M3 »

E= « La pièce est défectueuse »

On a alors *P(A)=0,5* *P(B)=0,3* *P(C)=0,2*

P(E/A)=0,03 *P(E/B)=0,04* *P(E/C)=0,05*

1. **On cherche à déterminer *P(E)***

i)On est certain que chaque machine produit des pièces car $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(C) \neq 0$ ce qui signifie que les 3 événements sont non vides: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$

ii)La pièce choisie provient soit de la machine M1, soit de M2 soit de M3 donc:

$A \cup B \cup C = \Omega$.

iii)De plus, lorsqu'on choisit une pièce, elle n'est fabriquée que par une et une seule des machines donc:

$A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$.

Ce qui veut dire que la famille $\{A, B, C\}$ forme bien un système complet d'événements.

D'après la FPT, on a

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) \\ &= (0,5 \times 0,03) + (0,3 \times 0,04) + (0,2 \times 0,05) \\ &= 0,037 \end{aligned}$$

Il y a donc 3,7% de chance que la pièce soit défectueuse.

2. **On cherche *P(A/E)***

On applique le théorème de Bayes :

$$P(A/E) = \frac{P(E/A)P(A)}{P(E)} = \frac{0.03 \times 0.5}{0.037} = 0.405$$

Si la pièce est défectueuse, il y a donc 40,5% de chance que la pièce provienne de la machine M1.

3. Indépendance d'événements :

a- Indépendance de deux événements :

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace de probabilité, et soit A et B deux événements de $\mathcal{B}$, avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On dit que l'événement A est indépendant de l'événement B si

$$P(A/B) = P(A).$$

Conséquence :

Si A est indépendant de $B \Longrightarrow$ alors B est indépendant de A.

$$P(A\cap B)=P(B).P(A/B)=P(A).P(B/A)$$
$$=P(B)P(A)=P(A)P(B/A)$$

Alors : $P(B)=P(B/A)$, d'où la définition suivante :

Définition :

Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A\cap B)=P(A).P(B).$$

b-Indépendance deux à deux :

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une suite d'événements d'une même algèbre. On dit que ces événements sont indépendants deux à deux si :

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)., \ \forall i\neq j.$$

Propriétés

Si A et B sont des événements indépendants alors :

i) A et $\bar{B}$ sont indépendants.
ii) B et $\bar{A}$ sont indépendants.
iii) $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.