Exo 23 :

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie par :

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \iff \big((x<x') \text{ ou } (x=x' \text{ et } y\leq y')\big).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre :

*) On a :

$$\begin{cases} x=x \\ y=y \end{cases} \Rightarrow [x=x \text{ et } y\leq y] \text{ donc}$$

$$\big[(x<x) \text{ ou } (x=x \text{ et } y\leq y)\big] \iff (x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y)$$

Alors $\mathcal{R}$ est reflexive.

*) $$\begin{cases} (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \\ \text{et} \\ (x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x<x') \text{ ou } (x=x' \text{ et } y\leq y') \\ \text{et} \\ (x'<x) \text{ ou } (x'=x \text{ et } y'\leq y). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<x' \\ \text{et} \\ x'<x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x<x' \\ \text{et} \\ x'=x \text{ et } y'\leq y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=x' \text{ et } y\leq y' \\ \text{et} \\ x'<x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=x' \text{ et } y\leq y' \\ \text{et} \\ x'=x \text{ et } y'\leq y. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x' \text{ et } y\leq y' \\ \text{et} \\ x'=x \text{ et } y'\leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ \text{et} \\ y=y' \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(x',y').$$

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

⊗ Transitive " c'est à vous de la faire.

2) Si $x<x'$ ou si $x'<x$ donc $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y)$.

si $x=x'$ alors soit $y\leq y'$ soit $y'\leq y$ donc $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$.

La relation $\mathcal{R}$ est d'ordre totale.

TD (Applications).

Exo16 :

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$
$$x \longmapsto x^2.$$

$A = \{1\}$, $B = \{-1\}$.

Calculer $f(A \cap B)$, $f(A)$, $f(B)$ puis $f(f^{-1}(A))$

et $f^{-1}(f(A))$.

on a : $A \cap B = \phi \Rightarrow f(A \cap B) = f(\phi) = \phi$.

$f(A) = \{f(1)\} = \{1\}$.

$f(B) = \{f(-1)\} = \{1\}$.

Et $f(f^{-1}(A))$; pour cela on va calculer

$f^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } f(n) \in A\} = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } n^2 = 1\}$

$= \{-1, 1\}$.

et $f(f^{-1}(A)) = f(\{-1, 1\}) = \{f(n) \text{ tq } n \in \{-1, 1\}\}$

et $f(-1) = f(1) = 1$

donc $f(f^{-1}(A)) = \{1\}$.

Exo 17:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

① Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

*) f n'est pas injective car par exemple pour $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ $(x_1 \neq x_2)$ on $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}$.

*) f n'est pas surjective car par exemple pour $y = -2$, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tq

$$-2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

② $f(A) = f(\{-1, 2, 3\})$

$= \{f(-1), f(2), f(3)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right\}$

$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \frac{1}{1+x^2} \in \{-1, 2, 3\}\}$

i.e $\frac{1}{1+x^2} = -1 \Rightarrow 1+x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -2$ impossible.

$\frac{1}{1+x^2} = 2 \Rightarrow 1+x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$. impossible.

$\frac{1}{1+x^2} = 3 \Rightarrow 1+x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$ impossible

Donc $f^{-1}(A) = \emptyset$.

Exo 18 :

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

① Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Reflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} x \iff x^2 - x^2 = 0 = x - \cancel{x}$,

ce qui est vérifié.

Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, vérifions que :

$$x \mathcal{R} y \Longrightarrow y \mathcal{R} x$$

$$x \mathcal{R} y \overset{\text{déf}}{\iff} x^2 - y^2 = x - y \xrightarrow{\times(-1)} y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow y \mathcal{R} x.$$

Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, vérifions que :

$$[x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z] \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

$$\left.\begin{array}{l} x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y \\ y \mathcal{R} z \iff y^2 - z^2 = y - z \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{addition}]{\text{par}} x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

Donc $\mathcal{R}$ est d'équivalence.

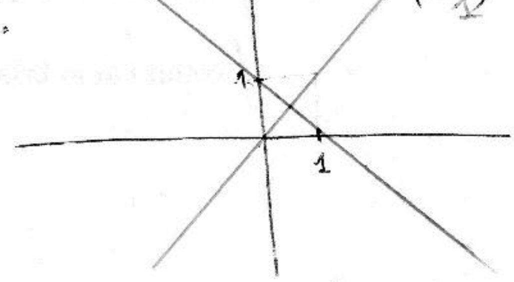
② Déterminer le graphe de $\mathcal{R}$.

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \mathcal{R} y\}$$

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y \iff x^2 - y^2 - (x - y) = 0.$$

$$\Rightarrow (x - y)[x + y - 1] = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ y = 1 - x \end{cases}$$



Donc $G_{\mathcal{R}} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ où Δ_1 est la droite d'équation $y = x$ et Δ_2 d'équation $y = 1 - x$.

4) $f^{-1}(B) = f^{-1}([0,1[)$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \in [0,1[\}$.

$f(x) \in [0,1[\iff \frac{1}{1+x^2} \in [0,1[\iff 0 \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$.

$\Rightarrow 1+x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > 0$. ce qui est vrai $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Donc $f^{-1}([0,1[) = \mathbb{R}^*$.

③ Donner un ensemble de départ pour que f soit injective, on prend $E = \mathbb{R}_+$ (ou bien $\mathbb{R}_-$).

pour que f soit surjective, on prend $F =]0,1]$

④ $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1]$ est bijective.

et $f^{-1} :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est donnée par:

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \iff y + yx^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1-y}{y}$, $y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$ (la racine est bien définie car $y \in]0,1]$.)

et comme $x \in \mathbb{R}_+$ on prend $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$.

(si on prend $E = \mathbb{R}_-$, on prend $f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1-y}{y}}$.

Exo 20:

① $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y'$.

Ref: $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$ est vérifié car $x+y=x+y$.

Sym: $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y' \Rightarrow x'+y'=x+y$

$\Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$.

Trans $\left.\begin{array}{l}(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y=x'+y' \\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \Leftrightarrow x'+y'=x''+y''\end{array}\right\} \Rightarrow x+y=x''+y''$

$\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'')$ donc $\mathcal{R}$ est d'équivalence.

② classe d'équivalence de $(0,0)$.

$$\overline{(0,0)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)\mathcal{R}(0,0)\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x+y=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=-y\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/$$

$$= \{(x,-x),\ x\in\mathbb{R}\}.$$

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)\mathcal{R}(a,b)\}.$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x+y=a+b\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=(a+b)-x\}.$$

$$= \{(x,(a+b)-x),\ x\in\mathbb{R}\}.$$

(3) on considère l'application.

$$f : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$\overline{(x,y)} \longmapsto (x+y).$$

f est bien défini car $\forall\ \overline{(x,y)} \in E/\mathcal{R}, \overline{(x',y')} \in E/\mathcal{R}$

$f(\overline{(x,y)}) = x+y \in \mathbb{R}$. et si $\overline{(x,y)} = \overline{(x',y')}$

$\Rightarrow x+y = x'+y' \Rightarrow f(\overline{(x,y)}) = f(\overline{(x',y')})$.

f est injective car :

si $f(\overline{(x,y)}) = f(\overline{(x',y')}) \Leftrightarrow x+y = x'+y'$

$\Rightarrow \overline{(x,y)} = \overline{(x',y')}$.

f est surjective car :

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\exists ?\ \bar{a} \in E/\mathcal{R}$ tq. $t = f(\bar{a})$.

$t \in \mathbb{R}$ donc $\exists\ x,y \in \mathbb{R}$ tq $t = x+y$ donc

$\bar{a} = \overline{(x,y)}$ d'où f est surjective.

Alors f est bijective.

Exo 21:

$$x \ll y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq: } y = x^n.$$

$\ll$ reflexive: $x \ll x \Leftrightarrow n = 1,\ x = x^1.$

$\ll$ antisymétrique: si $x \ll y$ et $y \ll x \Rightarrow y = x$?

$x \ll y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $y = x^n$.

$y \ll x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ tq $x = y^m$

Donc $y = (y^n)^m \Rightarrow n.m = 1$ et Comme $n, m \in \mathbb{N}^*$

Alors $n = m = 1$. D'où $y = x$.

$\ll$ transitive: si $x \ll y$ et $y \ll z \Rightarrow x \ll z$?

$x \ll y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $y = x^n$

$y \ll z \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*$ tq $z = y^m$.

Donc $z = y^m = (x^n)^m = x^{n.m}$

Alors $\exists k = n.m \in \mathbb{N}^*$ tq $z = x^k \Rightarrow x \ll z$.

Conclusion: $\ll$ est une relation d'ordre.

Cette relation n'est une relation d'ordre total car si on prend $x = 2$ et $y = 3$ il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^*$ pour les comparer par $\ll$.