Module: Algèbre 2 **Année scolaire: 2019/2020**

Exercices Corrigés

Exercice 1 *Soit le système linéaire suivant:*

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (I_\lambda): \begin{cases} x+2y-z+t=\lambda-1 \\ 2x+y-z=\lambda \\ 5x+4y-2z+t=2\lambda \\ \lambda x+(\lambda-1)\,y-z=-\lambda \end{cases} \quad \textit{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

I. *Discuter suivant les valeurs de λ le rang de la matrice A_λ.*

II. *Trouver les valeurs de λ pour que le système:*

1. *n'ait pas de solutions;*

2. *ait une unique solution (déterminer cette solution).*

3. *ait une infinité de solutions;*

Solution 1

1. Soit le système linéaire suivant:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ \lambda & \lambda-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (I_\lambda): \begin{cases} x+2y-z+t=\lambda-1 \\ 2x+y-z=\lambda \\ 5x+4y-2z+t=2\lambda \\ \lambda x+(\lambda-1)\,y-z=-\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3L4-(-m-1)L2

1 2 -1 1
0 -3 1 -2
0 0 1 0
0 0 2m-2 -m-2

1 2 -1 1
0 -3 1 -2
0 -6 3 -4
0 -m-1 m-1 -m

I. Discuter suivant les valeurs de λ le rang de la matrice A_λ.

La matrice échelonnée est donné par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix}$

En déduire que $rang\,(A_\lambda) = 4$ si $\lambda \neq 2$ et $rang\,(A_\lambda) = 3$ sinon.

II. Trouver les valeurs de λ pour que le système:

1. n'ait pas de solutions;

On sait que si le déterminant de la matrice A_λ assoiciée au système, est nul alors le sytsème n'a pas de solution ou bien admet une solution unique.
Si $\lambda = 2$ le système s'écrit sous la forme,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

après échelonnement, on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

On déduit que le système n'a pas de solution.
2. ait une unique solution (déterminer cette solution).
Le système admet une solution unique si est seulement si $\det(A_\lambda) = \lambda - 2 \neq 0$ ou encore $\lambda \neq 2$, dans ce cas**,**

$$x = \frac{3\lambda - 2}{\lambda - 2}, \quad y = -\frac{5\lambda - 2}{\lambda - 2}, \qquad z = -\lambda + 1, \qquad t = \frac{7\lambda - 2}{\lambda - 2}$$

3. ait une infinité de solutions;
Dans la question 1, on a montré que si le déterminant est une nul, le système n'a pas de solution donc il n'existe aucune valuer de λ pour laquelle le système admet une infinité de solution.

Exercice 2
Soit M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre par échelonnement le système suivant

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -2x + 3y + 4z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

2. En déduire le rang de M
3. Calculer la matrice inverse de M.

4. Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé

$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ -x + y + z = m \end{cases}$$

Solution 2

Soit M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre par échelonnement le système suivant

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -2x + 3y + 4z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

1 0 -1 0
-2 3 4 -1
-1 1 1 5

La matrice associée au système après échelonnement est donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

x-z=0 x=z=-8
3y-16=-1 y=5
-2/3z=16/3 z=-8

En déduit que $[x = -8, y = 5, z = -8]$

2. En déduire le rang de M

rang$(M) = 3$.

3. Calculer la matrice inverse de M.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé

$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ -x + y + z = m \end{cases}$$

MX=B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$\left[x = \frac{1}{2} - m, y = 2m, z = \frac{1}{2} - 2m\right]$

Exercice 3 *Soit le système linéaire suivant:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{pmatrix} \qquad (I_m) \begin{cases} 2x + 3y - z = 4; \\ -x + my + 2z = 5; \\ 7x + 3y + (m-5)\, z = 7. \end{cases} \qquad \textit{avec } m \in \mathbb{R}.$$

I. Discuter suivant les valeurs de m le rang de la matrice A

II. Trouver les valeurs de m pour que le système:

1. n'ait pas de solutions;

2. ait une unique solution.

3. ait une infinité de solutions;

a. Déterminer dans ce cas, l'ensemble des solutions de (I_m)

b. L'ensemble des solutions de (I_m) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution 3

I. Le rang de la matrice A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & m & 2 & 5 \\ 7 & 3 & m-5 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 - \frac{7}{2} L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & m + \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 7 \\ 0 & -\frac{15}{2} & m - \frac{17}{2} & -7 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{15}{2} & m - \frac{17}{2} & -7 \\ 0 & m + \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + \frac{2}{15}\left(m + \frac{3}{2}\right) L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{15}{2} & m - \frac{17}{2} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}(m-1)(m-6) & -\frac{14}{15}(m-6) \end{array}\right)$$

· Si $m = 1$ ou $m = 6$ alors $Rang\,(A) = 2$,

· Si $m \in \mathbb{R} \backslash \{1, 6\}$, alors $Rang\,(A) = 3$.

II. Résolution du système en fonction de m:

1. Si $m=1$, le système devient
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-15}{2} & -\frac{15}{2} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ce qui est équivalent à $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ \frac{-15}{2}y-\frac{5}{2}z=-7 \\ 0z=\frac{14}{3} \end{cases}$
On constate que la troisième équation du système n'a pas de solution, et par suite le système I_1 n'a pas de solution.

2. Si $m\in\mathbb{R}\backslash\{1,6\}$, alors $Rang\,(A)=3$. Dans ce cas le système admet une solution unique.

Si $m=6$, le système devient
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{-15}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, ce qui est équivalent à $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ \frac{-15}{2}y-\frac{5}{2}z=-7 \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 3y+z=\frac{14}{5} \end{cases}$

a) Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système (I_m) est donné par

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=\frac{3}{5}\text{ et }3y+z=\frac{14}{5}\right\}$$

b) L'ensemble des solutions de (I_m) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0_{\mathbb{R}^3}\notin S$.

Exercice 4 *Soit la matrice :*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2.*

2. *Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que $A^2=aA+bI_3$ et donner l'expression de A^3 en fonction de a et b.*

3. *Déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.*

4.*Résoudre les systèmes*

$$(\mathbf{I})\begin{cases} x-3y+6z=0 \\ 6x-8y+12z=1 \\ 5x-5y+6z=0 \end{cases}\quad et\quad (\mathbf{II})\begin{cases} x-3y+6z=3 \\ 6x-8y+12z=0 \\ 5x-5y+6z=-3 \\ x+y-4z=-7 \end{cases}.$$

5. *Résoudre suivant les valeurs de α le système suivant:*

$$
(\mathbf{II})\begin{cases} x-3y+\alpha z=3; \\ \alpha x-8y+12z=1; \\ 3x-3y+4z=2. \end{cases}
$$

Solution 4

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1 -3 6
6 -8 12
3 -3 4

<u>1. Calcule de A^2</u>

$$
A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}
$$

= a -3a 6a   b 0 0   a+b -3a 6a
6a -8a 12a +0 b 0 = 6a -8a+b 12a
3a -3a 4a   0 0 b   3a -3a 4a+b

<u>2. Ecriture de A^2 sous la forme $A^2=aA+bI_3$</u>

$$
A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}+(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

<u>L'expression de A^3 en fonction de a et b.</u>

$$
A^3=AA^2=A\left(-A+2I\right)=-A^2+2AI=2A-A^2
$$

<u>3. Calcule A^{-1}</u>

On a $A^2=-A+2I$ entriane, $A^2+A=2I$ et donc, $A\left(A+I\right)=2I$ ou encore $A\left(\frac{1}{2}\left(A+I\right)\right)=I$
En endéuire que A est inversible d'inverse

$$
A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A+I\right)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}
$$

4. Résolution des systèmes (I) et (II)

$$(\mathbf{I})\left\{\begin{array}{r} x-3y+6z=0 \\ 6x-8y+12z=1 \\ 5x-5y+6z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On procède par échelenomment,

$$\left(\begin{array}{lll|l} \boxed{1} & -3 & 6 & 0 \\ 6 & -8 & 12 & 1 \\ 5 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-6L_1 \\ L_3-5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{lll|l} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & -24 & 1 \\ 0 & 10 & -24 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{lll|l} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ce qui donne un système de la forme

$$(\mathbf{I}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-3y+6z=0 \\ 10y-24z=1 \\ 0z=1 \end{array}\right.$$

On en déduit que le système n'a pas de solution.

Pour le système (**II**), on procède de la même façon

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 6 & 3 \\ 6 & -8 & 12 & 0 \\ 5 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-6L_1 \\ L_3-5L_1 \\ L_4-L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & \boxed{10} & -24 & -18 \\ 0 & 10 & -24 & -18 \\ 0 & 4 & -10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \\ L_4-\frac{2}{5}L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & -24 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-14}{5} \end{pmatrix}$$

On obtient le système

$$(\mathbf{II}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-3y+6z=3 \\ 10y-24z=-18 \\ \frac{-2}{5}z=\frac{-14}{5} \end{array}\right.$$

Qui donne $x=6$, $y=15$ et $z=7$.

5. Résolution de système (III)

$$(\mathbf{III})\left\{\begin{array}{l} x-3y+\alpha z=3 \\ \alpha x-8y+12z=1 \\ 3x-3y+4z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3y+\alpha z=3 \\ 3x-3y+4z=2 \\ \alpha x-8y+12z=1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & \alpha & 3 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \\ \alpha & -8 & 12 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - \alpha L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & \alpha & 3 \\ 0 & 6 & 4-3\alpha & -7 \\ 0 & -8+3\alpha & 12-\alpha^2 & 1-3\alpha \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \frac{-8+3\alpha}{6} L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & \alpha & 3 \\ 0 & 6 & 4-3\alpha & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha^2 - 6\alpha + \frac{52}{3} & \frac{1}{2}\alpha - \frac{25}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \frac{6}{-8+3\alpha} L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha & 3 \\ 0 & -8+3\alpha & 12-\alpha^2 & 1-3\alpha \\ 0 & 0 & \frac{3\alpha^2-36\alpha+104}{3\alpha-8} & -\frac{(3\alpha-50)}{3\alpha-8} \end{pmatrix}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{3}+6, \frac{2}{3}\sqrt{3}+6\right\}$, alors

$$x = -\frac{13\alpha - 48}{3\alpha^2 - 36\alpha + 104}, \quad y = -\frac{2\alpha^2 - 15\alpha + 88}{3\alpha^2 - 36\alpha + 104}, \quad z = \frac{3\alpha - 50}{3\alpha^2 - 36\alpha + 104}$$

Si $\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{3}+6$ ou $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{3}+6$, le système n'aura pas de solution.

Exercice 5 *On considère le polynôme $P(X) = -2X + X^2 + 2$ et la matrice A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $P(A)$, En déduire que A est inversible, puis déterminer A^{-1}.*

2. *Soit la matrice B définie par*

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cacluler B^{-1} puis $B^{-1}AB$.

II) Résoudre en discutant en fonction de paramètre m le système suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = -1 \\ 2x + y + z + 3t = 1 \\ 3x + y + z + 2t = 0 \\ mx + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

Solution 5 *On considère le polynôme* $P(X) = -2X + X^2 + 2$ *et la matrice* A *définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calcule de* $P(A)$

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(A) &= -2A + A^2 + 2I \\ &= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $P(A) = 0$ *et donc* $A^2 - 2A = -2I$ *ou encore* $A(A-2I) = -2I \Rightarrow A\left(\frac{-1}{2}(A-2I)\right) = I$
On en déduire que A *est inversible d'inverse* $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A-2I) = \frac{-1}{2}A + I$.

Calcule de A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Caclule de B^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{i} & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 + iL_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} i & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{i} & -i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + iL_2 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} i & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 + \frac{1}{2}iL_4 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & i & -i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+\frac{1}{2}iL_3 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} (-i)\,L_1 \\ (-i)\,L_2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)L_3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

<u>Calcule de $B^{-1}AB$</u>

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= \left(B^{-1}A\right)B = \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II) <u>Résoulution du système</u>

$$\begin{cases} x+2y+3z+t=-1 \\ 2x+y+z+3t=1 \\ 3x+y+z+2t=0 \\ mx+3y+2z+t=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 3-2m & 2-3m & 1-m & m \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - \frac{5}{3}L_2 \\ L_4 + \frac{3-2m}{3}L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1/3} & -8/3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m-3 & 2-\frac{5}{3}m & m-15 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 3\left(\frac{1}{3}m-3\right)L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -8/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m-22 & m-15 \end{array}\right)$$

On résoud le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +2y & +3z & +t & =-1 \\ & +3y & +5z & +t & =3 \\ & & (1/3)\,z & -(8/3)\,t & =-2 \\ & & & (m-22)\,t & =m-15 \end{array}\right.$$

On trouve

$$\begin{array}{ll} x=\frac{7}{m-22},\ y=-\frac{4m+3}{m-22},\ z=\frac{2m+12}{m-22},\ t=\frac{m-15}{m-22}, & \text{si} \quad m\neq 22 \\ \emptyset & \text{si} \quad m=22 \end{array}$$

Exercice 6 *Soit le système linéaire suivant:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{pmatrix} \qquad (I_m)\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1; \\ x+2y+mz=2; \\ 2x+my+2z=3. \end{array}\right. \quad \textit{avec } m\in\mathbb{R}.$$

I. Discuter suivant les valeurs de m le rang de la matrice A

II. Trouver les valeurs de m pour que le système:

1. n'ait pas de solutions;

2. ait une unique solution.

3. ait une infinité de solutions;

a) Déterminer dans ce cas, l'ensemble des solutions de (I_m)

b) L'ensemble des solutions de (I_m) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution 6

Soit le système linéaire suivant:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{pmatrix} \qquad (I_m) \begin{cases} x + y - z = 1; \\ x + 2y + mz = 2; \\ 2x + my + 2z = 3. \end{cases} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}.$$

I. Le rang de la matrice A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m & 2 \\ 2 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & m+1 & 1 \\ 0 & m-2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - (m-2)\,L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & (m+2)\,(3-m) & 3-m \end{array}\right)$$

· Si $m = -2$ ou $m = 3$ alors $Rang\,(A) = 2$,

· Si $m \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 3\}$, alors $Rang\,(A) = 3$.

II. Résolution du système en fonction de m:

1. Si $m = -2$, le système devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right), \text{ ce qui est équivalent à } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0z = 5 \end{cases}$$

On constate que la troisième équation du système n'a pas de solution, et par suite le système I_2 n'a pas de solution.

2. Si $m \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 3\}$, alors $Rang\,(A) = 3$. Dans ce cas le système admet une solution unique.

3. Si $m = 3$, le sytème possède une infinité de solutions.

Dans ce cas le le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système (I_m) est donné par

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 1 \text{ et } y + 4z = 1\right\}$$

b) L'ensemble des solutions de (I_m) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0_{\mathbb{R}^3} \notin S$.