USTHB
Faculté de Mathématiques
1LIC-MI

Corrigé de la série 1 d'exercices d'algèbre 1

Exercice 7:

Par définition $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$.

1) On a $A =]-\infty, 5[$ et $B = \{9\} \cup]-1, 5]$.

$$a) \quad A - B =]-\infty, -1]\,,\ B - A = \{9\} \cup \{5\} = \{5, 9\}\,,$$

donc

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) =]-\infty, -1] \cup \{5, , 9\}\,.$$

$$b) \quad A \cup B =]-\infty, 5] \cup \{9\}\,,\ A \cap B =]-1, 5[\,,$$

d'où

$$A \triangle B = A \cup B - A \cap B =]-\infty, -1] \cup \{5, 9\}\,.$$

2) $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{b, c, e\}$

$$a)\ .A - B = \{a, d\}\,,\ B - A = \{e\}\,,$$

alors

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, d, e\}\,.$$

$$b) \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e\}\,,\ A \cap B = \{b, c\}\,,$$

donc

$$A \triangle B = A \cup B - A \cap B = \{a, b, c, d, e\} - \{b, c\} = \{a, d, e\}\,.$$

Exercice 8: 1) Soit $x \in E$.

On montre que $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

$$\begin{aligned} x &\in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow \ (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ et } \ x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

D'où

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

2)Soit $x \in E$. On montre que $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

$$\begin{aligned} x &\in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \text{ non } (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \text{ non } (x \in A \text{ et } x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

D'où

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

3) On suppose que $A \cap B = A \cup B$ et on montre que $A = B$.

Pour cela, on montre que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Première méthode :

i) Soit $x \in A$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Comme $A \cup B = A \cap B$ alors $x \in A \cap B$.

D'où

$$x \in B.$$

On en déduit que

$$A \subset B$$

ii) Soit $x \in B$.

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Comme $A \cup B = A \cap B$ alors $x \in A \cap B$.

D'où

$$x \in A.$$

On en déduit que

$$B \subset A$$

Conclusion :

$$A = B.$$

Deuxième méthode :

On a:

$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B = A \cap B \subset B \text{ donc } A \subset B \\ B &\subset A \cup B = A \cap B \subset A \text{ donc } B \subset A \end{aligned}$$

On en déduit que $A = B$

4) On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ et on montre que $B = C$.

De la même manière que (3), on montre que $C \subset B$ et $B \subset C$.

i) Soit $x \in C$.

$$x \in C \Rightarrow x \in A \cup C.$$

Comme $A \cup C = A \cup B$ alors $x \in A \cup B$.

D'où

$$x \in B \text{ ou } x \in A.$$

Si $x \in B$ alors $C \subset B$.

Si $x \in A$.

Comme $x \in C$ et $x \in A$ alors $x \in A \cap C$.

Mais $A \cap C = A \cap B$ donc $x \in A \cap B$

D'où

$$x \in B.$$

On conclut que

$$C \subset B.$$

En raisonnant de la même façon que précédemment, on montre que

$$B \subset C.$$

On en déduit que

$$B = C.$$

Exercice 9 :

Rappel : Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f \circ g\,(x) = g \circ f\,(x)\,.$$

$$f \circ g \neq g \circ f \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f \circ g\,(x) \neq g \circ f\,(x)\,.$$

On a $f\,(x) = 3x + 1$ et $g\,(x) = x^2 - 1$

$$f \circ g\,(x) = 3\left(x^2 - 1\right) + 1 = 3x^2 - 2$$

$$g \circ f\,(x) = (3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x.$$

On a d'une part $f \circ g\,(0) = -2$, d'autre part $g \circ f\,(0) = 0.$

On constate que $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$

Donc

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

<u>Exercice 10</u> : On a : $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

i) On remarque que $f(-1) = f(1)$ avec $-1 \neq 1$

Deux éléments de $\mathbb{R}$ distincts ont même image par f

donc f n'est pas injective.

ii) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -1$

Il existe un élément $y = -1$ de $\mathbb{R}$ qui n'a pas d'antécédent

donc f n'est pas surjective.

2)

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{f(-1), f(2), f(3)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right\}.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 \text{ ou } f(x) = 2 \text{ ou } f(x) = 3\} = \emptyset \end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) \leq 1$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in B\} = \left\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2} < 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, 1 < 1 + x^2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 > 0\right\} = \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$$f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in C\} = \left\{x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 0\right\} = \emptyset.$$

<u>Exercice 11</u> :

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \to n+1$

i) Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$. Alors

$$n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

Donc f est injective.

ii) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq 0$

$0 \in \mathbb{N}$ n'admet pas d'antécédent par f

Donc f n'est pas surjective.

iii) f est injective mais n'est pas surjective donc f n'est pas bijective .

2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \to n+1$

De la même manière que pour 1) i), on montre que g est injective.

De plus

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z} \text{ avec } n = m-1 \text{ tel que } m = g(n).$$

Donc g est surjective.

g est injective et surjective donc elle est bijective .

L'application réciproque est :

$$g^{-1} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}, n \to n-1$$

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$

i) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$.

Alors :

$$(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{array} \right.$$

En additionnant membre à membre ces deux équations, on obtient

$$x_1 = x_2,$$

En remplaçant x_1 par x_2 dans la première équation on obtient

$$y_1 = y_2.$$

D'où

$$h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2),$$

h est donc injective.

ii) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

On cherche s'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(x,y) = (u,v)$.

$$(u,v) = (x+y, x-y) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array} \right. .$$

On en déduit que

$$x=\frac{u+v}{2} \text{ et } y=\frac{u-v}{2}.$$

Donc

$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$, il existe $(x,y)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\in\mathbb{R}^2$ tel que $h(x,y)=(u,v)$.

On conclut que h est surjective.

iii) h est injective et surjective donc h est bijective .

L'application réciproque est :

$$h^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\to\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$$

4) $k:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R},x\to\dfrac{x+1}{x-1}$

i) Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $k(x_1)=k(x_2)$ .On a :

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow x_1x_2-x_1+x_2-1=x_1x_2-x_2+x_1-1.$$

D'où

$$x_1=x_2,$$

l'application k est donc injective .

<u>Etude de la surjectivité</u> :

ii) **Première méthode :**

On remarque que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\},\ \dfrac{x+1}{x-1}\neq 1.$

L'élément 1 de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ n'a donc pas d'antécédent

dans $\mathbb{R}-\{1\}$, ce qui veut dire que k n'est pas surjective.

Deuxième méthode :

Soit $y\in\mathbb{R}$, on cherche $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ tel que $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

$y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow xy-y=x+1\Rightarrow x(y-1)=y+1.$

On remarque que pour $y=1$ la dernière équation (à l'inconnue x) n'a

pas de solution donc k n'est pas surjective.

Remarque :

L'application $\begin{aligned} S:\mathbb{R}-\{1\}&\mapsto\mathbb{R}-\{1\}\\ x&\mapsto\frac{x+1}{x-1}\end{aligned}$ est surjective.

En effet , si $y \neq 1$:

$$x\,(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \text{ et } x \in \mathbb{R} - \{1\}\,.$$

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ il existe } x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ tel que } y = S\,(x)\,.$$

iii) k n'est pas surjective donc elle n'est pas bijective.

<u>Exercice 12</u> : Soient A et B deux parties de E

1) On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f\,(A) \subset f\,(B)$.

Soit $y \in f\,(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f\,(x)$.

Comme $x \in A$ et $A \subset B$ donc $x \in B$ et $y = f\,(x) \in f\,(B)$.

D'où

$$f\,(A) \subset f\,(B)\,.$$

2) Soit $y \in f\,(A \cap B)$ alors il exise $x \in A \cap B$ tel que $y = f\,(x)$.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

D'où

$$y = f\,(x) \in f\,(A) \quad \text{et } y = f\,(x) \in f\,(B)\,.$$

On conclut que $y \in f\,(A) \cap f\,(B)$.

D'où

$$f\,(A \cap B) \subset f\,(A) \cap f\,(B)\,.$$

3)
i) Soit $y \in f\,(A \cup B)$ alors il exise $x \in A \cup B$ tel que $y = f\,(x)$.

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

D'où

$$y = f\,(x) \in f\,(A) \text{ ou } y = f\,(x) \in f\,(B)\,.$$

On conclut que

$$y \in f\,(A) \cup f\,(B)\,.$$

D'où

$$f\,(A \cup B) \subset f\,(A) \cup f\,(B) \ldots\ldots (1)$$

ii) Soit $y \in f\,(A) \cup f\,(B)$ alors $y \in f\,(A)$ ou $y \in f\,(B)$

Si $y \in f\,(A)$ alors il exise $x \in A$ tel que $y = f\,(x)$

Comme $A \subset A \cup B$ alors $x \in A \cup B$ et $f(x) \in f(A \cup B)$

D'où $y \in f(A \cup B)$

Si $y \in f(B)$ alors il exise $x \in B$ tel que $y = f(x)$

Comme $B \subset A \cup B$ alors $x \in A \cup B$ et $f(x) \in f(A \cup B)$

D'où : $.y \in f(A \cup B)$

Dans les deux cas $.y \in f(A \cup B)$.

On conclut que

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \ldots\ldots. (2)$$

Pour montrer cette inclusion, on peut procéder autrement:

On a:

$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B) \qquad \text{d'après 1)} \\ B &\subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B) \end{aligned}$$

Donc

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

On déduit de (1) et (2) que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

4) Soient A et B deux parties de F

On montre que

$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5) Soit A une partie de F

Soit $x \in E$. On montre que

$x \in f^{-1}(F - A) \Leftrightarrow x \in E - f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(F - A) \Leftrightarrow f(x) \in F - A \Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in E - f^{-1}(A). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 13 :

1) On suppose que $g \circ f$ est injective .

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Comme g est une application alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

D'où

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2).$$

Or $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$.

Par conséquent f est injective.

2) On suppose que $g \circ f$ est surjective .

Soit $z \in G$.

Comme $g \circ f$ est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$

D'où

$$z = g(f(x)).$$

On pose $y = f(x)$.

Comme f est une application de E dans F alors $y \in F$.

Donc $z = g(y)$ avec $y \in F$.

On conclut que

$$\forall z \in G, \exists y \in F / z = g(y).$$

Par conséquent g est surjective.