Corrigé de la Série N° 3: Analyse Combinatoire

Exercice n°1.

1. Les plaques d'immatriculation d'un certain pays, sont constituées de trois lettres suivies de trois chiffres. Combien de plaques différentes peut-on avoir ?
2. Même question si les répétitions ne sont pas permises.

Réponse :

L'ordre est important→Arrangements.

suivies→dans cet ordre.

1. $\widetilde{A}_{26}^{3}.\ \widetilde{A}_{10}^{3} = 26^3.10^3$ (arrangements avec répétitions).
2. $A_{26}^{3}.\ A_{10}^{3} = 26.25.24.10.9.8$ (arrangements sans répétitions).

Exercice n°2.

Un numéro de téléphone commence par un 0 suivi de 8 chiffres.

1. Combien de numéros de téléphone peut-on avoir?
2. Parmi ce nombre, combien de numéros de téléphones ne comportant pas le chiffre 1 **?**
3. Combien de numéros de téléphone qui commencent par 023 ?

Réponse :

Numéro de téléphone→L'ordre est important→Arrangements

et la répétition est possible

1. $\widetilde{A}_{10}^{8} = 10^8$
2. $\widetilde{A}_{9}^{8} = 9^8$
3. $\widetilde{A}_{10}^{6} = 10^6$

Exercice n° 3.

1. Combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former à l'aide des chiffres $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
2. Combien de ces nombres sont inférieurs à 700 ?
3. Combien de ces nombres sont multiples de 5 ?

Réponse :

L'ordre est important→Arrangements

Différents→ la répétition n'est pas permise

1. $A_7^3 = 7.6.5$
2. La condition exige que le chiffre des cents doit être différent de 7,donc il a 6 choix et les deux autres chiffres doivent être choisis parmi les 5 chiffres restants + le chiffre 7, on aura alors: $A_6^1 A_6^2 = 6.6.5$
3. La condition exige que le chiffre à droite est égal à 5, donc il a un seul choix et les deux autres chiffres doivent être choisis parmi les 6 chiffres restants: $A_6^2 = 6.5$

Exercice n° 4.
A l'occasion d'une compétition sportive groupant 20 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles.

Réponse :
L'ordre est important→Arrangements.
Mais la répétition n'est pas possible.

$$A_{20}^{3}=20.19.18$$

Exercice n° 5
Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 5 Français, 3 Italiens et 2 algériens.

1. Combien de classements peut-on avoir ?
2. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leurs identités. Combien de classements peu-t-on avoir ?

Réponse :

On arrange 10 participants parmi 10, alors on les permute:

1. 10 ! classements possibles.
2. Ici, les joueurs de même nationalité ne sont plus discernables(ils sont identiques dans ce cas), donc c'est des permutations avec répétition:

$$\frac{10!}{5!.3!.2!}$$ classements possibles

Exercice n° 6
Une étagère contient 15 livres, dont 3 sont des livres de statistique, 4 de probabilité, 6 d'algèbre et 2 d'analyse. Les livres du même domaine sont différents entre eux ,par exemple des tomes .

1. Donner le nombre de dispositions possibles pour ranger les 15 ouvrages.
2. Si l'on garde les ouvrages de la même matière ensemble, quel est le nombre de façons de faire le rangement ?

Réponse :

1. 15 ! dispositions possibles
2. On a 4 groupes de livres→ Il y a alors $4!$ permutations possibles entre ces groupes. Et dans chaque groupe on a $n_i!$ permutations possibles , i=1,…,4

Donc, on aura au total:

$$(3!.4!.6!.2!).4!$$ permutations possibles dans ce cas.

Exercice n° 7
On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

1. De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
2. De combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :

a- Uniquement des hommes . b- Des personnes de même sexe. C- Au moins une femme et au moins un homme

Réponse :

L'ordre n'a pas de sens ici →Combinaisons.
La répétition n'est pas possible.

1. $C_{57}^{6} = \frac{57\,!}{6!\,51!}$
2. **a)** $C_{32}^{6} = \frac{32\,!}{6!\,26!}$

   b) $C_{32}^{6} + C_{25}^{6} = \frac{25\,!}{6!\,19!} + \frac{32\,!}{6!\,26!}$

   C) $C_{57}^{6} - (C_{32}^{6} + C_{25}^{6})$

   Ou bien

   $$C_{25}^{1}C_{32}^{5} + C_{25}^{2}C_{32}^{4} + C_{25}^{3}C_{32}^{3} + C_{25}^{4}C_{32}^{2} + C_{25}^{5}C_{32}^{1}$$

Exercice n°8:
Une urne contient 8 boules blanches numérotées de 1 à 8 et 12 boules noires numérotées de 1 à 12. On tire simultanément 6 boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
b) Déterminer le nombre de tirages possibles d'obtenir 2 boules noires.
c) Déterminer le nombre de tirages possibles d'obtenir 3 boules blanches et 3 boules noires.

Réponse :

Tirage simultané→Combinaisons
Boules discernables (numérotées)→ sans répétitions

a) C_{20}^{6}
b) $C_{12}^{2}.C_{8}^{4}$
c) $C_{12}^{3}.C_{8}^{3}$

Exercice n° 10(Devoir de maison)
Monter les formules suivantes :

1. $n \geq p$, $C_{n}^{p} = C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1}$. (formule du triangle de Pascal).

2. Déduire que pour $1 \leq p \leq n$

- $C_{n}^{p} = C_{n-2}^{p} + 2\, C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$
- $C_{n}^{p} = C_{n-3}^{p} + 3\, C_{n-3}^{p-1} + 3\, C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}$

3. Développer : $(a+b)^{6}$

4. Montrer que pour $n \geq 0$: $\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} = 2^{n}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} = 0$ et $\sum_{k=0}^{n} 2^{k} C_{n}^{k} = 3^{n}$