Faculté de Physique – USTHB   Date :

L1, ST_1 à ST_{15}, Semestre 2

Epreuve Finale (1h30mn)

Rappel : Tout résultat doit être justifié

Exercice 1 (6.5 points)

Dans le plan xOy, trois charges identiques positives $q_A = q_B = q_C = q$ sont placées aux points A(0,-a), B(0,0) et C(0,a). Le potentiel à l'infini étant supposé nul, établir :

1- L'expression du potentiel produit par ces trois charges au point M(x,0) de l'axe x'Ox (x>0) en fonction de q, a et x. (Voir Figure 1)

2- L'expression, en fonction de q, a et x, du champ électrique au point M(x,0) de l'axe x'Ox (x>0) à l'aide du calcul direct. Déduire son expression pour x très grand devant a. Représenter qualitativement $\vec{E}_M$

3- L'expression de l'énergie interne du système constitué des charges q_A, q_B , et q_C.

4- L'expression de l'énergie potentielle E_{pD} d'une charge $q' = q$ placée en un point D(a,0).

5- L'expression de l'énergie cinétique $E_{c\infty}$ acquise à l'infini par q', lâchée sans vitesse initiale en D.

6- L'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$ placé au point D et faisant un angle α avec l'axe x'Ox. Le champ électrique est supposé uniforme au voisinage de $\vec{p}$, et q' n'est plus en interaction avec tout le système. (Voir Figure 2)

7- Représenter le dipôle dans ses positions d'équilibre instable et stable. Justifier.

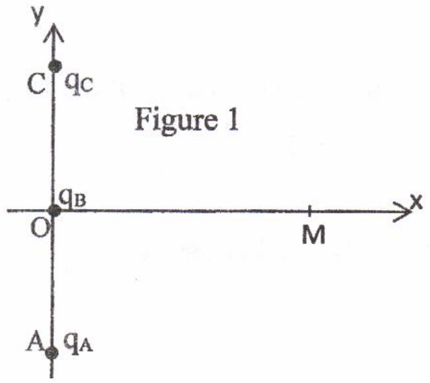


Figure 1

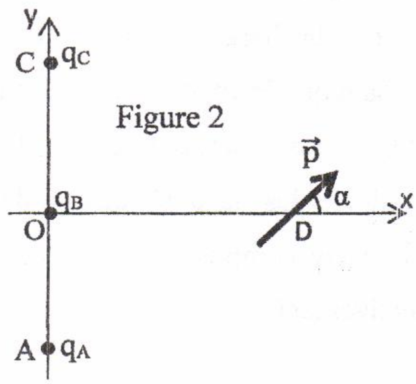
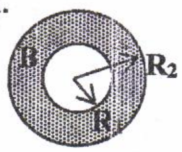


Figure 2

Exercice 2 (5.5 points)

Une sphère conductrice B, creuse et isolée, de rayons interne R_1 et externe R_2, porte une charge Q_B=10μC. On donne : R_1=8cm ; R_2=9cm ; R_3=11cm ; R_4=12cm ; $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$SI.

1) La sphère B étant en équilibre électrostatique, représenter qualitativement la répartition de la charge Q_B (Voir Figure 3 ci-contre)



2) Calculer le champ électrique E (r) en tout point M de l'espace ($r > R_2$; $R_1 < r < R_2$; $r < R_1$)

On entoure maintenant la sphère B par une deuxième sphère A, creuse, initialement neutre, de rayons intérieur R_3 et extérieur R_4 (Voir figure 4). Les sphères B et A sont concentriques et en équilibre électrostatique. On prendra le potentiel nul à l' infini.

3) Déterminer les valeurs des charges qui apparaissent sur les surfaces interne et externe de la sphère A.

4) Déterminer l'expression du champ électrique E(r) en un point M situé entre les deux sphères B et A. ($R_2 < r < R_3$).

5) Par circulation du champ électrique E(r) dans la région comprise entre R_2 et R_3, donner la différence de potentielle ($V_B - V_A$).

6) Calculer la capacité du condensateur formé par les sphères B et A.

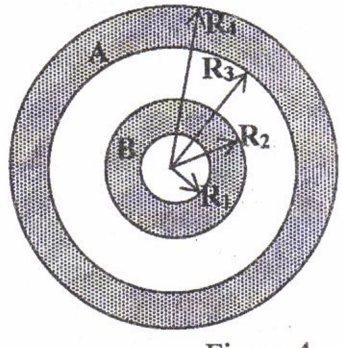


Figure 4

Exercice 3 (8 points)

Le montage électrique de la Figure 5 contient un générateur de fem E, de résistance interne r, deux condensateurs C et C_1 et deux résistances R_1 et R_2. L'interrupteur K permet de basculer entre les positions 1 et 2. Les processus de charge et de décharge se produisent en régime transitoire.

On donne : E = 10 V, $C_1 = 3\ \mu F$, $C = \frac{C_1}{3}$, $R_1 = 2R_2 = 9\Omega$ et $r = 0.5\Omega$

I. Les condensateurs étant initialement déchargés, on met l'interrupteur K sur la position 1.

1. Donner l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge traversant le circuit.

2. Etablir l'expression de la charge $q_1(t)$ dans le circuit. Calculer les valeurs de la constante de temps τ et la charge finale Q_{1f} à l'équilibre.

3. Sachant que le condensateur C_1 inséré entre M et N est une association de trois condensateurs C_2, C_3 et C_4 disposés tels que représentés sur la Figure 6, ($C_2 = C_3 = C_4 = C_n$)

3.a. Calculer les capacités des condensateurs C_2, C_3 et C_4.

3.b. C_1 étant complètement chargé, calculer les potentiels V_2, V_3 et V_4 aux bornes de C_2, C_3 et C_4 respectivement.

II. L'interrupteur K est placé en 2. Le condensateur C_1 se décharge dans C. A L'équilibre:

1. Calculer les charges Q et Q_1 des condensateurs C et C_1 respectivement.

2. Déterminer la capacité $C_{éq}$ du condensateur équivalent aux deux condensateurs C et C_1.

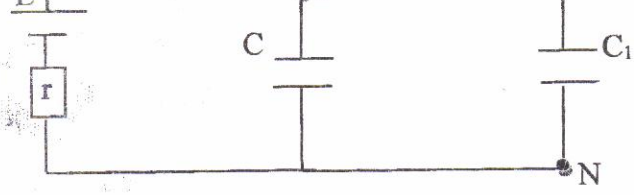


Figure 5

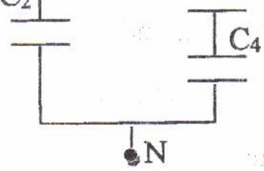


Figure 6

CORRIGE de l'Epreuve Finale, Semestre 2, 2019 (ST1 à ST15)

Exercice 1 (6.5 points)

1-Expression du potentiel produit par les trois charges q_A, q_B , et q_C au point M(x,0) de l'axe x'Ox (x>0) en fonction de q, a et x.

$$V_M = (V_A + V_B + V_C) = \frac{Kq_A}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{Kq_B}{x} + \frac{Kq_C}{\sqrt{x^2+a^2}} = 2\frac{Kq}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{Kq}{x} = Kq\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{x}\right)$$ 3x0.25

2- Le champ électrique $\vec{E}_M$ au point M(x,0) de l'axe x'Ox (x > 0) est :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = K\frac{q_A}{r_A^2}\vec{u}_A + K\frac{q_B}{r_B^2}\vec{u}_B + K\frac{q_C}{r_C^2}\vec{u}_C$$ 0.25

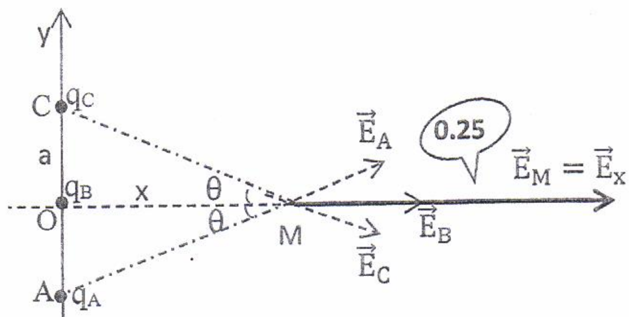
Le champ électrique $\vec{E}_M$ est porté par cet axe a pour composantes: E_x et E_y

$$E_{Ax} = E_{Cx} = \frac{Kq}{(x^2+a^2)}\cos\theta = \frac{Kqx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \; ; E_{Bx} = \frac{Kq}{x^2} \; ; E_{Ay} = -E_{Cy} = \frac{Kq}{(x^2+a^2)}\sin\theta \quad \text{et } E_{By} = 0$$

$$E_x = E_{Ax} + E_{Bx} + E_{Cx} = \left(2\frac{Kqx}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{Kq}{x^2}\right)$$ 2x0.25

$$E_y = E_{Ay} + E_{By} + E_{Cy} = 0$$ 2x0.25

Alors : $\vec{E}_M = (2\frac{Kqx}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{Kq}{x^2})\vec{i}$ 0.25



Pour x très grand devant a, on a :

$$E_M \approx Kq(\frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^2}) \approx \frac{3Kq}{x^2}$$ 0.25

3- L'énergie interne du système constitué des charges q_A, q_B , et q_C est :

$$U = \frac{Kq_Aq_B}{a} + \frac{Kq_Aq_C}{2a} + \frac{Kq_Bq_C}{a} = 2K\frac{q^2}{a} + K\frac{q^2}{2a} = \frac{Kq^2}{a}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 2.5\frac{Kq^2}{a}$$ 4x 0.25

4- Donner l'expression de l'énergie potentielle d'une charge $q_D = q$ placée en un point D(a,0).

$$E_{pD} = q_D V_D = q_D(V_A + V_B + V_C) = q\left(\frac{2Kq}{a\sqrt{2}} + \frac{Kq}{a}\right) = \frac{Kq^2}{a}(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1)$$ 3x 0.25

5- Le $W|_D^\infty$ effectué lors du déplacement de q_D en allant de D vers l'infini est :

$$W|_D^\infty = \Delta E_C|_D^\infty = -\Delta E_p\Big|_D^\infty \quad \Rightarrow \quad (E_{C\infty} - E_{CD}) = (E_{pD} - E_{p\infty})$$ 2x0.25

Sachant que : $E_{p\infty} = 0$ et $E_{CD} = 0$, alors : $E_{C\infty} = E_{pD}$ 2x 0.25

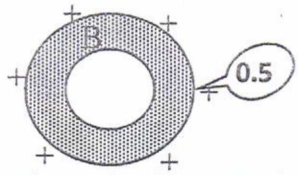
6- Le champ électrique en D est $\vec{E}_D$, alors l'énergie potentielle E_p de $\vec{p}$ en ce point est :

$$E_p = -\vec{p}.\vec{E}_D = -pE_D\cos(\widehat{\vec{p},\vec{E}_D}) = -pE_D\cos(\alpha)$$ 2x 0.25

7- Equilibre stable, $E_{pmin} = -pE_D$, l'énergie potentielle est minimale : α = 0 0.25

Equilibre instable, $E_{pmax} = +pE_D$, l'énergie potentielle est maximale : α = π 0.25

Exercice 2 (5.5 points)



1) En équilibre électrostatique, la charge positive Q_B portée par B est uniformément répartie sur la surface externe. 0.25

2) L'expression du champ électrique E(r) en tout point M de l'espace est donnée par le théorème de Gauss : $\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$ 0.5

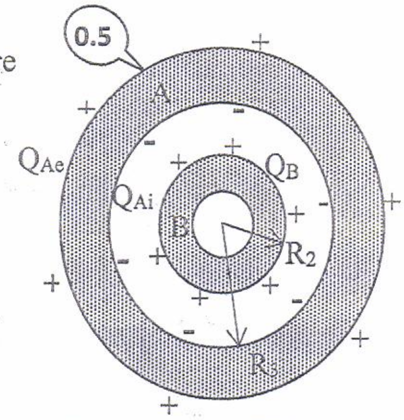
En raison de la symétrie sphérique, la surface de Gauss dans toutes les régions est:

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sum Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$ 0.75

$r > R_2$, $E(r) = \frac{\sum Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 0.25

$r < R_2$, $E(r) = 0$ Champ est nul en tout point d'un conducteur creux en équilibre électrostatique 0.25

3)



La charge sur la face interne de A est : $Q_{Ai} = - Q_B$ (par influence totale entre B et la face interne de A) 0.25

La charge Q_{Ae} sur la face externe de A est: $Q_{Ae} = - Q_{Ai} = Q_B$

car A était initialement neutre : $Q_A = Q_{Ai} + Q_{Ae} = 0$ 0.25

4) Par application du théorème de Gauss dans la région $R_2 < r < R_3$,

$E.4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 2x0.25

5) Sachant que la circulation du champ $\vec{E}(r)$ est $dV = -\vec{E}(r).\vec{dl} = -E(r)dr$ 0.5

0.25

Dans la région : $R_2 < r < R_3$, on a $E(r) = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow \Delta V(r)\Big|_{V(R_2)}^{V(R_3)} = -\int_{R_2}^{R_3} E(r)dr = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right]$

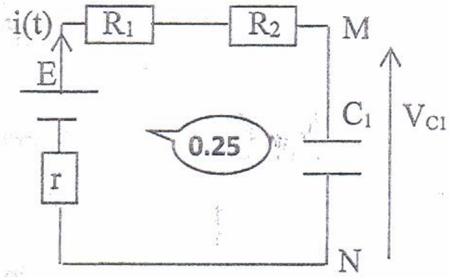
Sachant que : $V(R_2) = V_B$ et $V(R_3) = V_A \Rightarrow V_B - V_A = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 R_2}\right)$ 0.25

6) La capacité C est : $C = \frac{Q_B}{(V_B - V_A)} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_3 R_2}{R_3 - R_2}\right) = 55\ pF$ 2x0.25

Exercice 3 (8 points)

I. Les condensateurs initialement déchargés, l'interrupteur K en position 1.

1. L'équation différentielle régissant l'évolution de la charge de C_1.



La loi des mailles donne : $E = (r + R_1 + R_2)i(t) + V_{C1}$ (1) 0.5

Sachant que le courant de charge $i(t) = dq_1/dt$ et $V_{C1} = q_1(t)/C_1$ 2x0.25

Alors l'équation (1) devient : $\frac{E}{R} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1(t)}{RC_1}$ (2) 0.5

Avec: $R = r + R_1 + R_2 = 14\ \Omega$ 0.25

2. La résolution de l'équation (2) permet de calculer la charge $q_1(t)$:

Solution $q_h(t)$ de l'équation homogène : $q_h(t) = Cte\ e^{-(t/RC_1)}$

Solution $q_p(t)$= cte, de l'équation particulière : $q_p(t) = EC_1$

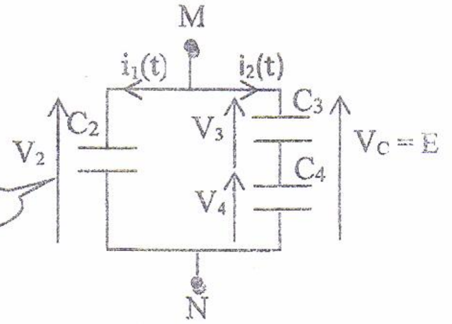
La solution générale $q_1(t)$ de l'équation (2) est : $q_1(t) = Cte\ e^{-(t/R\,C_1)} + EC_1$ 3x0.25

A t=0s, C_1 était déchargé ⇒ $q_1(0) = Cte\ e^{-0} + EC_1 = 0 \Rightarrow Cte = -EC_1 \Rightarrow q_1(t) = EC_1\,(1 - e^{-(t/R\,C_1)})$ 2x0.25

Avec, A $t \to \infty$, $q_1(\infty) = EC_1 = Q_f = 30\ \mu C$ et $\tau = RC_1 = 14x3x10^{-6} = 42\mu s$ 2 x0.25

3. Le courant de charge i(t) se divise en deux courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$

3.a. Sachant que : $C_2 = C_3 = C_4 = C_n$, alors :



$C_1 = C_2 + (C_3C_4)/(C_3+C_4) = C_n + C_n/2 = 3C_n/2 \rightarrow C_n = 2C_1/3 = 2\ \mu F$ 4x0.25

3.b. C_1 étant complètement chargé le potentiel $V_{C1} = E$, 0.25

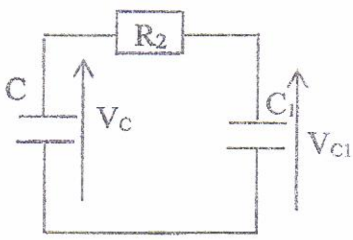
3x0.25 C_3 , C_4 (en série) ⇒ $Q_3 = Q_4$, et aussi C3 = C4 ⇒ $V_3 = V_4$

Donc: $V_2 = Q_2/C_2 = E = 10V$

et $V_{C1} = V_3 + V_4 = 2V_3 = 2V_4 = E$, alors: $V_3 = V_4 = E/2 = 5V$

II. L'interrupteur K est placé en 2. Le condensateur C_1 se décharge dans C

1. A l'équilibre, les charges Q et Q_1 des condensateurs C et C_1 respectivement sont :



$V_{C_1} = V_C \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C}$ 2x0.25

Or: $Q_f = EC_1 = Q + Q_1 \Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q_f - Q}{C_1} \Rightarrow Q = Q_f \frac{C_{éq}}{C_1} = 30 \frac{3/4}{1} = 22.5\mu C$

4x0.25 $Q_1 = Q_f - Q = 7.5\ \mu C$ 0.25

2. La capacité $C_{éq}$ du condensateur équivalent aux deux condensateurs C et C_1 en série est :

2x0.25 $C_{éq} = \frac{CC_1}{C+C_1} = \frac{3x^3/_3}{3+^3/_3} = {}^3/_4 = 0.75\mu F$