USTHB, Faculté de Mathématiques (2021/2022) **L1, MI, Coordination**
Département d'algèbre **Durée : 1h 30 minutes**

Examen d'algèbre 1

Instructions : Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits durant l'examen. Rédiger et justifiez clairement vos réponses.

Exercice 01 :(4 points)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.

1. Calculer $f(\{-1, 2\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$. 05 + 0,5

2. Soit y un réel fixé. Résoudre l'équation $y = \frac{2+x}{3-x}$. 1

3. En déduire que f est injective, mais qu'elle n'est pas bijective. 0,5 + 0,5

4. Montrer qu' il existe un réel a tel que f soit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, et expliciter la bijection réciproque. 0,5 + 0,5

Exercice 02 :(5 points) +0,5 = 5,5

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 1,5

2. Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1 . 1 + 0,5

3. Soit $a \in \mathbb{R}$.

i) Trouver α et β dans $\mathbb{R}$ pour que $X^4 - X^2 - (a^4 - a^2) = (X^2 - a^2)(X^2 + \alpha X + \beta)$. 1

ii) Déterminer la classe d'équivalence de a. 1,5

Exercice 03 :(7 points) + 0,5 = 7,5

Soit $G = \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}$. On définit sur G la loi $*$ par :

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

1) Vérifier l'identité :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad 0,5$$

En déduire que $*$ est une loi interne. 1

3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif. 0,5 + 1 + 1 + 1 = 3,5

4) Soit l'application $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par : $f(a, b) = a + ib$ (où $i^2 = -1$)

a) Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. 1

b) Déterminer $\text{Ker}(f)$. L'homomorphisme f est-il injectif ? Est-ce un isomorphisme ? 0,5 + 0,5 + 0,5

Exercice 04 :(4 points)

On note A l'ensemble de réels suivant :

$$A = \{m + n\sqrt{5}, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5

2. On considère l'application φ de A dans lui-même définie, pour tout, $m + n\sqrt{5} \in A$ par :

$$\varphi(m + n\sqrt{5}) = m - n\sqrt{5}$$

Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$. 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1,