Corrigé de l'examen final d'algèbre.

Exercice 1 :

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \quad f(x) = \frac{2+x}{3-x}.$$

1/ On a :

$$f(\{-1,1\}) = \{f(-1), f(1)\} = \{\tfrac{1}{4}, 4\}.$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \ / \ f(x) = -1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \ / \ \frac{2+x}{3-x} = -1\}$$

Or

$$\frac{2+x}{3-x} = -1 \iff 2+x = -3+x,$$
$$\iff 2 = -3.$$

Ce qui est faux.

On déduit que $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

2/ Soit $y \in \mathbb{R}$ (y connu).

Résolution de l'équation

$$y = \frac{2+x}{3-x} \quad \dots \quad (E)$$

d'inconnue x.

On a :

$$(E) \iff 3y - yx = 2 + x$$
$$\iff 3y - 2 = x(y+1).$$

- Si $y = -1$ alors, d'après la question (1), il n'y a pas de solution.
- Si $y \neq -1$ alors (E) équivaut à $x = \dfrac{3y-2}{y+1}$.

Notons bien que $\dfrac{3y-2}{y+1} \neq 3$ (car sinon nous aurons $-2 = 6$)

3) Puisque tout élément y de l'ensemble d'arrivée de f admet au plus un antécédent (pour $y=-1$, pas d'antécédent et pour $y \neq -1$, un seul antécédent $\frac{3y-2}{y+2} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$) alors on déduit que f est injective.

Comme $y=-1$ n'admet pas d'antécédent alors f n'est pas surjective, Donc non bijective

4/ D'après la question (2), f est surjective si et seulement si l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc il faut prendre $a=-1$. L'application

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

est alors bijective. La bijection réciproque est

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$
$$x \longmapsto \frac{3x-2}{x+1}.$$

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y \iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2.$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Réflexivité :

Soit $x \in \mathbb{R}$, puisque $x^4 - x^2 = x^4 - x^2$ alors $x \mathcal{R} x$.

Symétrie :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \mathcal{R} y$ alors $x^4 - x^2 = y^4 - y^2$. D'où $y^4 - y^2 = x^4 - x^2$. Par suite $y \mathcal{R} x$.

Transitivité :

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

Par suite $x^4 - x^2 = y^4 - y^2$ et $y^4 - y^2 = z^4 - z^2$.

Donc $x^4 - x^2 = z^4 - z^2$. On déduit que $x \mathcal{R} z$.

2. Par définition, la classe d'équivalence de 0 est

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \mathcal{R} 0\}, \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^4 - x^2 = 0\}, \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2(x^2 - 1) = 0\}, \\
&= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2(x-1)(x+1) = 0\}, \\
&= \{0, -1, 1\}.
\end{aligned}$$

Comme $1 \in \bar{0}$ alors $\bar{1} = \bar{0}$.

On a aussi $\overline{-1} = \bar{0} = \bar{1}$.

3/ Soit $a \in \mathbb{R}$.

i/ On veut trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que les polynômes

$X^4 - X^2 - (a^2 - a^2)$ et $(X^2 - a^2)(X + \alpha X + \beta)$

soient égaux.

On a

$$(X^2 - a^2)(X^2 + \alpha X + \beta) = X^4 + \alpha X^3 + X^2(\beta - a^2) + X(-\alpha a^2 - \beta a^2)$$

Pour avoir l'égalité demandée il faut et il suffit, par identification, que :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta - a^2 = -1 \\ -\alpha a^2 = 0 \\ -\beta a^2 = -(a^4 - a^2). \end{cases}$$

Ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = a^2 - 1$.

Donc $X^4 - X^2 - (a^4 - a^2) = (X^2 - a^2)(X^2 - (1 - a^2))$.

Une autre manière de procéder :

On a

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 - (a^4 - a^2) &= (X^4 - a^4) - (X^2 - a^2). \\ &= (X^2 - a^2)(X^2 + a^2) - (X^2 - a^2) \\ &= (X^2 - a^2)(X^2 + a^2 - 1). \end{aligned}$$

D'où $\alpha = 0$ et $\beta = a^2 - 1$.

ii) Classe d'équivalence de a :

$$\bar{a} = \{ x \in \mathbb{R} / x \mathcal{R} a \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} / x^4 - x^2 = a^4 - a^2 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} / x^4 - x^2 - (a^4 - a^2) = 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} / (x^2 - a^2)(x^2 - (1 - a^2)) = 0 \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} / (x - a)(x + a)(x^2 - (1 - a^2)) = 0 \}.$$

• Si $1 - a^2 \geq 0 \iff a^2 \leq 1 \iff |a| \leq 1 \iff a \in [-1, 1]$

alors
$$\bar{a} = \{ -a, a, -\sqrt{1 - a^2}, \sqrt{1 - a^2} \}.$$

Donc si $a = 0$ ou $a = \pm 1$ alors $\bar{a} = \{0, -1, 1\}$

(c'est ce que nous avons obtenu à la question (i))

• Si $1 - a^2 < 0 \iff a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

alors
$$\bar{a} = \{ -a, a \}.$$

Exercice 3

On définit sur $G = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la loi $*$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in G, \quad (a,b) * (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc).$$

1) Soient $(a,b),(c,d) \in G$. On a :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

et

$$(ac-bd)^2 (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2a\cancel{c}bd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2a\cancel{d}bc$$
$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Sachant que $(a,b),(c,d) \in G$, pour vérifier que la loi est interne il faut montrer que $(a,b)*(c,d) \in G$.

Pour cela, il suffit de montrer que $(ac-bd,\ ad+bc) \neq (0,0)$ car $ac-bd \in \mathbb{Q}$ et $ad+bc \in \mathbb{Q}$.

Supposons par l'absurde que $(ac-bd,\ ad+bc) = (0,0)$
alors $ac-bd=0$ et $ad+bc=0$.
Par suite $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = 0$
Donc $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$.
On déduit que $a^2+b^2=0$ ou $c^2+d^2=0$,
Ce qui entraine $a=b=0$ ou $c=d=0$.
Autrement dit, $(a,b)=(0,0)$ ou $(c,d)=(0,0)$

D'où $(a,b) \notin G$ ou $(c,d) \notin G$.

Contradiction avec $(a,b),(c,d) \in G$.

La loi $*$ est donc une L. C. I dans G.

3) Montrons que $(G,*)$ est un groupe abélien.

Commutativité :

Soient $(a,b),(c,d) \in G$. On a

$$(a,b)*(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$
$$= (ca-db,\ da+cb)$$
$$= (c,d)*(a,b).$$

Associativité :

Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in G$. On a :

- $$[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ac-bd,\ ad+bc)*(e,f)$$
$$= \big((ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e\big)$$

- $$(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(ce-df,\ cf+de).$$
$$= \big(a(ce-df)-b(cf+de),\ a(cf+de)+b(ce-df)\big)$$
$$= \big((ac-bd)e-(ad+bc)f,\ (ac-bd)f+(ad+bc)e\big)$$
$$= [(a,b)*(c,d)]*(e,f).$$

Elément neutre,

$(1,0) \in G$ est l'élément neutre pour la loi $*$. En effet, pour tout $(a,b) \in G$, on a

$$(a,b)*(1,0) = (a.1-b.0,\ a.0+b.1) = (a,b)$$

(Puisque la loi $*$ est commutative, il n'est pas nécessaire de vérifier que $(1,0)*(a,b) = (a,b)$).

Symétrique d'un élément $(a,b) \in G$.

Remarquons d'abord que

$$(a,b) \neq (0,0) \iff a^2+b^2 \neq 0.$$

Le symétrique de $(a,b) \in G$ est

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

En effet, vérifions d'abord que $(a,b)^{-1} \in G$, on a :

$$(a,b)^{-1} = (0,0) \iff \frac{a}{a^2+b^2} = 0 \text{ et } -\frac{b}{a^2+b^2} = 0$$

$$\iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

$$\iff (a,b) = (0,0)$$

$$\iff (a,b) \notin G.$$

Donc si $(a,b) \in G$ alors $(a,b)^{-1} \neq (0,0)$ i.e $(a,b)^{-1} \in G$.

Vérifions ensuite que $(a,b) * (a,b)^{-1} = (1,0)$. On a :

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (a,b) * \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, -\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right)$$

$$= (1, 0).$$

On déduit que $(G, *)$ est un groupe abélien.

4) Soit l'application

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$(a,b) \longmapsto f(a,b) = a + ib.$$

a) Montrons que f est un morphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Soient $(a,b), (c,d) \in G$, on a:

$$f((a,b) * (c,d)) = f(ac - bd, ad + bc)$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc).$$

On a aussi

$$f(a,b) \cdot f(c,d) = (a+ib)(c+id)$$
$$= (ac - bd) + i(ad + b).$$

D'où $f((a,b) * (c,d)) = f(a,b) \cdot f(c,d)$.

b) Noyau de f:

$$\ker f = \{(a,b) \in G \ / \ f(a,b) = e_{\mathbb{C}^*}\}$$
$$= \{(a,b) \in G \ / \ a + ib = 1\}$$
$$= \{(a,b) \in G / \ a = 1 \text{ et } b = 0\}$$
$$= \{(1,0)\}$$
$$= \{e_G\}.$$

On déduit que f est injectif.

Le morphisme f n'est pas surjectif car $\sqrt{2}$, par exemple, appartient à $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas d'antécéde...

En effet, s'il existait $(a,b) \in G$ t-q $\sqrt{2} = f(a,b) = a + ib$ alors $b = 0$ et $\sqrt{2} = a \in \mathbb{Q}$. Ce qui est faux.

Donc f n'est pas un isomorphisme de groupes.

<u>Exercice 4</u> :

Soit $A = \{ m + n\sqrt{5} \ / \ m, n \in \mathbb{Z} \}$.

1) Il est clair que A est une partie de $\mathbb{R}$. Montrons que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

a) $1_{\mathbb{R}} = 1 + 0\sqrt{5}$ donc $1_{\mathbb{R}} \in A$.

b) Soient $x = m + n\sqrt{5}$ et $y = m' + n'\sqrt{5}$ deux éléments de A avec $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$x - y = (m - m') + (n - n')\sqrt{5} \in A$$

car $m - m' \in \mathbb{Z}$ et $n - n' \in \mathbb{Z}$.

De plus

$$x \cdot y = (mm' + 5nn') + (mn' + nm')\sqrt{5} \in A$$

car $mm' + 5nn' \in \mathbb{Z}$ et $mn' + nm' \in \mathbb{Z}$.

2) Soit l'application

$$\varphi : A \longrightarrow A$$
$$m + n\sqrt{5} \longmapsto \varphi(m + n\sqrt{5}) = m - n\sqrt{5}.$$

Vérifions que φ est un automorphisme d'anneau.

φ morphisme d'anneau.

Soient $x = m + n\sqrt{5}$, $y = m' + n'\sqrt{5} \in A$. On a :

- $\varphi(x+y) = \varphi(m+m', (n+n')\sqrt{5})$.

$= (m+m') - (n+n')\sqrt{5}$

$= (m - n\sqrt{5}) + (m' - n'\sqrt{5})$

$= \varphi(x) + \varphi(y)$.

- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(mm' + 5nn' + (mn' + m'n)\sqrt{5})$.

$= (mm' + 5nn') - (mn' + m'n)\sqrt{5}$.

$= (m - n\sqrt{5}) \cdot (m' - n'\sqrt{5})$.

$= \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

- $\varphi(1_{\mathbb{R}}) = \varphi(1 + 0.\sqrt{5}) = 1 - 0.\sqrt{5} = 1$.

Injectivité :

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ m + n\sqrt{5} \in A \,/\, \varphi(m+n\sqrt{5}) = 0 \}$

$= \{ m + n\sqrt{5} \in A \,/\, m - n\sqrt{5} = 0 \}$

Or, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$,

$m - n\sqrt{5} = 0 \iff m = n = 0$.

Preuve :

L'implication « $m = n = 0 \Rightarrow m - n\sqrt{5} = 0$ » est évidente.

Reste à montrer que : $m - n\sqrt{5} = 0 \Rightarrow m = n = 0$.

Supposons que $n \neq 0$. alors $\sqrt{5} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Impossible

Donc $n = 0$ par suite $m = 0$.

On déduit que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{ m + n\sqrt{5} \in A \; / \; m = n = 0 \}$$
$$= \{ 0 \}.$$
$$= \{ e_{(\mathbb{R},+)} \}$$

On déduit que φ est injectif.

<u>Surjéctivité</u> :

Soit $y = m + n\sqrt{5} \in A$ (ensemble d'arriveé de φ).

Alors $y = \varphi(x)$ avec $x = m + (-n)\sqrt{5} \in A$

Donc φ est surjéctif.

On déduit que φ est un automorphisme d'anneau.