Module: Algèbre 2 **Année scolaire: 2020/2021**

Série des Exercices N° 2

Espaces Vectoriels

Exercice 1 *L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations définies ci-dessous est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :*

1. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ *et* $\lambda\cdot(x,y)=(\lambda\times x,y)$.

2. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ *et* $\lambda\cdot(x,y)=(\lambda\times x,0)$.

Exercice 2 *Pour x et y alors $\mathbb{R}_+^*$ et λ réel, on pose*

$$x\oplus y=x\times y \quad et \quad \lambda\cdot x=x^\lambda$$

Montrer que $\left(\mathbb{R}_+^*,\oplus,\cdot\right)$ est un espace vectoriel sur $(\mathbb{R},+,\times)$.

Exercice 3 *Soit $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On munit l'ensemble E des opérations:*

$$\forall\,(a,b),(a',b')\in E,\forall\alpha\in\mathbb{R}:\left\{\begin{array}{c}(a,b)\oplus(a',b')=(aa',b+b').\\ \alpha\circ(a,b)=(a^\alpha,\alpha b)\end{array}\right.$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4 *Etudier l'indépendance linéaire des familles de vecteurs suivantes :*

1. $E=\mathbb{R}^3$; $v_1=(2,-1,3)\,,v_2=(4,3,1)\,,v_3=(-1,3,-4)$.
2. $E=\mathbb{R}^4$; $v_1=(-1,2,1,-2)\,,v_2=(0,1,3,-2)\,,v_3=(-1,3,-2,1)\,,v_4=(-2,1,0,3)$.
3. $E=\mathbb{C}^4$; $v_1=(1,-i,1-i,i)$, $v_2=(i,0,2+i,1-i)$, $v_3=(1+2i,-i,5+i,2-i)$, $v_4=(0,-2i,5,1-i)$.
4. $E=\mathbb{R}_3[X]$; $P_1=1+X+2X^2+5X^3, P_2=X-X^3, P_3=1+X+X^2+X^3, P_4=-6-5X-4X^2+2X^3$.
5. $E=\mathbb{R}_4[X]$; $P_i=X^i(X-1)^{4-i}$, $i\in\{0,1,2,3,4\}$.

Exercice 5

1. *Dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}[X]$ étudier l'indépendance linéaire des familles :*

$$\left\{P_1 = 1 - 2X + X^3; P_2 = 1 + X; P_3 = -1 + 3X - X^2\right\},$$
$$\left\{Q_1 = 1 - X + 3X^3; Q_2 = -1 + 3X + X^3; Q_3 = -2 + 4X^2 - X^3\right\}$$

2. *Montrer qu'une famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre.*

Exercice 6

1. *Etudier dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'indépendance linéaire des familles de fonctions suivantes :*

$$F_1 = \{\sin x; \cos x; x\cos x\}; \qquad F_2 = \{\sin x, \sin(x+1), \sin(x+2)\},$$
$$F_3 = \left\{\ln(x^2+1); \cos\tfrac{\pi}{2}x; \sin\tfrac{\pi}{2}x; e^x\right\}$$

2. *Même question pour :*

$$F_1 = \{f_k(x) = |x-k|; 1 \leq k \leq n\}; \qquad F_2 = \left\{f_k(x) = e^{kx}; 1 \leq k \leq n\right\};$$
$$F_3 = \{f_k(x) = \cos kx; 1 \leq k \leq n\}.$$

Exercice 7 *Soient f_1 et f_2 deux fonctions définie par*

$$\begin{aligned} f_1 :]-1,1[\;&\to\; \mathbb{R};\; x \mapsto \frac{1}{x-1} \\ f_2 :]-1,1[\;&\to\; \mathbb{R};\; x \mapsto \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

1. *Montrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.*

2. *Montrer que $h :]-1,1[\to \mathbb{R};\; x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$ appartient à l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.*

Exercice 8 *Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b le rang des familles suivantes :*

1. $\{(a+1, 1, 0),\ (a+1, a, a-1),\ (2, 1, 1-a)\}$.

2. $\{(1, 1, 0, a),\ (a+2, a-3, -4, a+1),\ (-2, 3, 4, -a)\}$.

3. $\{(1, a^2, 1, 2a),\ (a^2, 1, 1, a+b),\ (1, 1, a, 3a-1)\}$.

Exercice 9 *Dans chacun des cas suivants dire si les parties F_i sont des sous-espaces de E :*

1. $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}; \quad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y - 2z = 0\};$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}; \qquad F_4 = \{(\alpha, 2\beta, -\gamma),\quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

2. $E=\mathbb{R}^4$,

$$F_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y-t=y+2x=0\}\,;\quad F_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : xy=z\}\,.$$

3. $E=\mathbb{R}[X]$ *et* $n\in\mathbb{N}$. $F_1=\{P\in E:\deg P\leq n\}\,;\, F_2=\{P\in E: P(j)=0\}\,.$

Exercice 10 *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de* E

1. $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{array}{ll} F_1=\{f\in E: f(1)=0\}\,; & F_2=\{f\in E: f(0)=1\}\,;\\ F_3=\{f\in E:\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leq 0\}\,; & F_4=\{f\in E: f\ \textit{paire}\}\,;\\ F_5=\{f\in E: f\ \textit{est}\ T\textit{-périodique}\}\,; & F_6=\{f\in E:\ f\ \textit{est monotone}\}\,. \end{array}$$

$F_7=\{f\in E:\ f$ *est solution de l'équation différentielle* $f'+a(x)f=0\}$.

2. $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, F_1 *l'ensemble des suites convergentes*; F_2 *l'ensemble des suites divergentes*; F_3 *l'ensemble des suites arithmétiques.*

Exercice 11 *Soit* $E=\mathbb{R}^4$. *On pose* $e_1=(1,2,3,4)$ *et* $e_2=(1,-2,3,4)$. *Déterminer (si c'est possible) les paramètres* x *et* y *tels que:*

$$1)\quad (x,1,y,1)\in< e_1,e_2>\quad;\quad 2)\quad (1,x,1,y)\in< e_1,e_2>$$

Exercice 12 *Soient* $E=\mathbb{R}^3$, $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,1,2)$ *et* $u_3=(1,2,3)$.

1. Montrer que $\{u_1,u_2,u_3\}$ *est une base de* E.

2. Calculer les coordonnées de $v=(5,7,12)$ *dans cette base.*

Exercice 13 *Donner un système d'équations du sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $v_1=(1,1,1,1)$ *et* $v_2=(1,2,-1,3)$.

Exercice 14 *Soient dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs*

$$u_1=(2,3,-1),\ u_2=(1,-1,-2),\ v_1=(3,7,0)\ \textit{et}\ v_2=(5,0,-7),$$

et soient E *et* F *les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *engendrés respectivement par les vecteurs* $\{u_1,u_2\}$ *et* $\{v_1,v_2\}$.
Montrer que E *et* F *sont égaux.*

Exercice 15 *Soit*

$$E=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix},\quad a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

Montrer que E est sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de E.

Exercice 16 *Dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^3$on considère les sous-espaces vectoriels:*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+y-z=0\ \right\}$$

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-2y=y+3z=0\ \right\}$$

F et G sont -ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 17 *Dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les sous-espaces*

$$F_1=\{P\in\mathbb{R}_3[X]:P(j)=0\},\qquad F_2=\{P\in\mathbb{R}_3[X]:P(i)=0\}$$

Déterminer $F_1\cap F_2$ et F_1+F_2. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 18 *Déterminer une base et préciser la dimension de chacun des espaces suivants :*

1. $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:2x+y-3z+t=0\}$.
2. $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:x-3y+2z=y+z-3t=0\}$.
3. $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]:P(1)=P(2)\}$.
4. $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]:P(i)=0\}$.
5. $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X];\qquad P(1+i)=0\}$
6. $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]:P+P'=P(0)X^2+P(1)X+P(2)\}$.
7. $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]:P+P'=P(0)X^3+P'(0)X^2+P''(0)X+P'''(0)\}$

Exercice 19

1. *Montrer que la famille* $\left\{P_k=(X+1)^{k+1}-(X-1)^{k+1},\ 0\le k\le n\right\}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.
2. *On considère la famille* $F=\left\{P_k=X^k(1-X)^{n-k},\ 0\le k\le n\right\}$
   (a) *Montrer que c'est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) *Calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette base.*

(c) *En déduire pour $n = 3$ les coordonnées du polynôme $P = 2 - X + 3X^2 - X^3$ dans cette base.*

Exercice 20 *On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous espace vectoriel*

$$F = \langle u_1 = (1,1,1,2)\,, u_2 = (a, a-1, 0, 1)\,, u_3 = (a-1, a, 1, 1)\,, u_4 = \left(0, 1, a, 2a^2 - 1\right)\rangle$$

et le sous ensemble $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + 3x = 2t + z = 0\}$

1. .

   (a) *Déterminer selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de F.*

   (b) *Pour quelles valeurs de a on a $F = \mathbb{R}^4$*

   (c) *Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$et préciser sa dimension.*

2. *On pose $a = 1$.*

   (a) *Montrer que:$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow z - y = t - y - x = 0$.*

   (b) *Montrer que $B = \{w_1 = (2, -1, -1, 1)\,, w_{2=} (-3, -6, -6, -9)\}$ est une base de F.*

   (c) *Déterminer les coordonnées de $w = (8, 5, 5, 13)$ dans la base B.*

3. *On pose $a = 0$.*

   (a) *Déterminer une base pour chacun des sous espaces $F + G$ et $F \cap G$.*

   (b) *Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.*

Exercice 21 *On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$, le sous espace vectoriel $F = \langle P_1, P_2,\ P_3\rangle$, avec*

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + (a-1)X + X^3, \qquad P_2 = a + \left(a^2+1\right)X + \left(a^2-1\right)X^2 - X^3 \\ P_3 &= -3 + 6X + \left(4a^2 + 4a\right)X^2 + (-3a-6)X^3 \end{aligned}$$

et le sous-ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,; \quad P(i) = 0\}$

1. .

   (a) *Déterminer selon les valeurs du paramètre a la dimension de F.*

   (b) *Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser sa dimension.**

   (c) *Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_3[X]$.*

2. *On pose $a = -3$*

   (a) *Donner une relation de dépendance liant P_1, P_2, P_3.*

(b) *Montrer que :* $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3 \in F \Longleftrightarrow 16\alpha + 4\beta + \gamma = \beta + 3\alpha + \delta = 0$

(c) *Montre que* $B = \{1 - 3X - 4X^2, 1 - 2X - 8X^2 - X^3\}$ *est une base de* F

(d) *Déterminer les coordonnées de* P_1 *dans cette base.*

3. *On pose* $a = 1$.

(a) *Déterminer la dimension de chacun des sous-espaces* $F + G$ *et* $F \cap G$.

(b) *Montrer que* $P \in F \cap G \Leftrightarrow P(i) = P(-2) = 0$.

(c) *Déterminer alors une base de* $F \cap G$.