Série 2 : Matrices

(Toutes les matrices dont il sera question sont à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.)

Exercice 1 *Soient les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 \\ 1-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \ ; \ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Peut-on faire des additions parmi ces matrices ?
2) Quels sont tous les produits possibles (à deux éléments) entre ces matrices ?
3) Quelles sont parmi ces matrices celles dont on peut calculer la puissance p-ième, quel que soit l'entier $p \geq 2$? Pour chacune de celles-ci, calculer sa puissance 2-ième.
4) Quel est le nombre de lignes et le nombre de colonnes du produit EG ? Calculer EG.

Exercice 2 *Soient les deux matrices carrées d'ordre 2 suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les deux produits de matrices AB et BA. Que peut-on dire alors de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3 *Soient les trois matrices carrées d'ordre 3 suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer les deux produits AB et AC.
2) Est-il possible que la matrice A soit inversible ? Justifier.
3) Déterminer toutes les matrices A' (carrées d'ordre 3) telles que $AA' = 0$.

Exercice 4 *Déterminer les puissances n-ièmes ($n \geq 1$) des deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *1) Déterminer le rang de chacun des deux systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :*

$$\{V_1 = (1,0,2), V_2 = (1,1,2), V_3 = (-1,1,-2)\} \ ;$$
$$\{V_1 = (-1,-1,1), V_2 = (1,3,1), V_3 = (0,2,2), V_4 = (1,-1,-3)\}\,.$$

2) Déterminer le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$\{V_1 = (-1,-1,1,2), V_2 = (2,1,3,1), V_3 = (1,0,2,2), V_4 = (-1,1,-1,-3), V_5 = (0,1,0,1)\}\,.$$

3) Déterminer le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ suivant :

$$\left\{P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = 1 + X + X^2 + X^3, P_3 = -X - 2X^3, P_4 = 2 + 2X^2 - X^3\right\}.$$

Exercice 6 *1) Soient les deux matrices diagonales :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que l'on a AB et BA. Conclusion ?
2) Montrer qu'une matrice diagonale quelconque est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 7 *On sait comment échelonner une matrice suivant les lignes (voir le cours). Il existe une méthode, basée sur l'échelonnement, permettant de savoir si une matrice carrée donnée est inversible ou pas et, si oui, de déterminer son inverse. Elle est connue sous le nom de "méthode du pivot de Gauss" ou tout simplement "méthode du pivot".*
Etant donnée une matrice carrée A, cette méthode consiste à placer côte à côte la matrice A et la matrice identié I. 1-ère étape. On échelonne A tout en faisant sur la matrice I exactement les mêmes opérations que l'on a faites sur A. Au bout de ce processus on obtient alors à partir de A une matrice échelonnée B et à partir de I une certaine matrice J.
Si la matrice B possède au moins une ligne nulle, la matrice A n'est pas inversible et le problème est réglé.
Si la matrice B ne possède aucune ligne nulle, on peut conclure que A est inversible.
Dans ce dernier cas, pour déterminer son inverse A^{-1}, on passe à la deuxième étape, décrite dans ce qui suit.
2-ième étape. Supposons, pour que ce soit un peu plus clair, que la matrice A soit par exemple d'ordre 3. On place les deux matrices B et J côte-à-côte comme précédemment pour les matrices A et I,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(B étant évidemment celle de gauche et J celle de droite.)
Puis, à partir de B, et par des opérations élémentaires sur les lignes, on fait de façon à obtenir la matrice I. (En ajoutant à la première ligne un multiple convenable de la 2-ième ligne (précisèment

$-a$ fois la 2-ième ligne), on annule le deuxième coefficient de la première ligne. Puis en ajoutant à chacune des deux premières lignes un multiple convenable de la 3-ième, on annule les 3-ièmes coefficients des deux premières lignes.). Parallèlement à cela, on fait les mêmes opérations sur la matrice J et l'on obtient une certaine matrice K. Dans ce cas, l'inverse de A est cette matrice K. C'est-à-dire $A^{-1} = K$.
Utiliser cette méthode pour savoir si les matrices suivantes sont inversibles et donner la matrice inverse de chacune de celles qui le sont.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 *Une matrice A est dite nilpotente si A est une matrice carrée et s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $A^n = 0$.*
1) Vérifier que les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes.
2) Vérifier que toute matrice de type $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
(En réalité, c'est plus général que ça. En effet, on peut montrer que toute matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) dont la diagonale est nulle est nilpotente.)
3) Montrer que si A est une matrice carrée telle que $A = I - N$ où I est la matrice identité et N une matrice nilpotente, alors A est inversible. (Si $N^p = 0$, utiliser la formule, vraie pour tout couple (a, b) d'éléments d'un anneau tels que $ab = ba$ donnée par : $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + ... + ab^{p-2} + b^{p-1})$.)
4) S'inspirer de la question précédente pour montrer que la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et déterminer A^{-1}.