Chapitre 3

Analyse Combinatoire

Dans ce chapitre, on développe quelques techniques permettant de déterminer(de compter) sans dénombrement direct le nombre de résultats possibles d'une expérience particulière, ou encore le nombre d'éléments d'un ensemble particulier. De telles techniques reçoivent le nom d'analyse combinatoire. L'analyse combinatoire est souvent utilisée dans le calcul des probabilités.

1) Principe Fondamental de l'Analyse Combinatoire : (PFAC)

1.1. Version restreinte :

Quand on réalise deux expériences en même temps, si la première expérience peut produire n résultats possibles, et la seconde peut produire m résultats, alors il existe $n \times m$ résultats pour les deux expériences réalisées dans cet ordre.

1.2. Version généralisée :

Si on veut réaliser k expériences telles que :

La **1**$^{\text{ère}}$ expérience (**E1**) peut produire n_1 résultats possibles.

La **2**$^{\text{ème}}$ expérience (**E2**) peut produire n_2 résultats possibles.

$\vdots$

La $\boldsymbol{k}$ ème expérience (**Ek**) peut produire $\boldsymbol{n_k}$ résultats possibles.

On aura : $\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} \times \ldots \times \boldsymbol{n_k}$ résultats possibles pour les $\boldsymbol{k}$ expériences réalisées ensembles dans cet ordre.

Exemple :

E1 : Jeter une pièce $\longrightarrow$ Résultats $\{P, F\}$ alors $\boldsymbol{n_1 = 2}$

E2 : Jeter un dé $\longrightarrow$ Résultats $\{1,2,3,4,5,6\}$ alors $\boldsymbol{n_2 = 6}$

Le nombre de résultats possibles est : $\boldsymbol{n_1 \times n_2 = 2 \times 6 = 12}$

Les résultats des deux expériences sont :

$$\{P, F\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$= \{(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6), (F, 1), (F, 2), (F, 3), (F, 4), (F, 5), (F, 6)\}$$

2) Permutations :

2.1. Permutations sans répétition :

Une permutation sans répétition est une disposition ordonnée de $\boldsymbol{n}$ objets distincts.

Exemple illustratif

Considérons l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Il existe 6 manières d'ordonner ces trois chiffres : $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$.

En général:

Si on dispose de n objets distincts (différents), chacun des n objets peut être placé à la première place, il reste ensuite $(n-1)$ objets qui peuvent être placés à la deuxième place, puis $(n-2)$ objets pour la troisième place, et ainsi de suite. Le nombre de permutations possibles de $\boldsymbol{n}$ objets distincts vaut donc :

$$\boldsymbol{P_n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = \boldsymbol{n}!$$

Exemple :

Le nombre de façons de placer 8 personnes sur un banc est :

$P_8 \;=\; 8! \;=\; 40\,320$ permutations.

2.2. Permutations avec répétition :

On peut également se poser la question sur le nombre de permutations qu'il y a lorsque on a des objets dont certains sont semblables (qui ne sont pas tous distincts).

Exemple illustratif:

Supposons que l'on veuille former tous les mots (avec ou sans signification) de 5 lettres à partir du mots <<LILLE>>

IL y a $5! = 120$ permutations possibles des objets L_1, I, L_2, L_3, E si on suppose que les 3 L sont distincts.

Si on choisit par exemple les permutations où on a les 3 L en premier ensuite la lettre I ensuite E , on a, dans ce cas, six permutations possibles :

$L_1 L_2 L_3IE$, $L_1 L_3 L_2IE$, $L_2 L_1 L_3IE$, $L_2 L_3 L_1IE$, $L_3 L_1 L_2IE$, $L_3 L_2 L_1IE$

On remarque que les six permutations forment le même mot quand on supprime les indices (c-à -d on revient à la réalité). IL y a donc dans ce cas $3! = 3.2.1 = 6$ permutations identiques et cela est vrai pour chacun des autres emplacements de la lettre L. Par conséquent chaque disposition est répétée 3! fois, il faut alors diviser par ce nombre, ainsi on aura $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ mots différents qui peuvent être formés des lettres du mots << LILLE >>

En général: Soit un ensemble de n objets repartis en k groupes discernables(différents).

Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont semblables , n_2 sont semblables ,…,n_k sont semblables est:

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Exemple1 :

Considérons le mot « CELLULE ». Quel est le nombre de mots différents possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres.

Réponse

En considérant deux groupes différents, chacun a des lettres identiques : L (3 fois) et E (2 fois), on aura:

$$\tilde{\mathrm{P}}_7 = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{7!}{2!3!} = 420 \text{ mots possibles}$$

Pour les autres lettres(c et u), on n' a pas la répétition mais on peut écrire comme même $\tilde{\mathrm{P}}_7 = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} = \frac{7!}{2!3!\ 1!1!} = 420$ mots possibles.

Exemple2 :

Combien de mots différents (n'ayant pas forcément un sens) peut-on former avec les lettres du mot ELECTRICITE ?

Réponse

On cherche le nombre d'arrangement possibles de 11 lettres parmi les 11, il s'agit donc de permutations. Comme il y a des lettres qui se répètent (la lettre E se répète 3 fois, la lettre C 2 fois, la lettre T 2 fois et la lettre I 2 fois), ce sont des permutations avec répétition.

Il y a donc $\tilde{\mathrm{P}}_{11} = \frac{11!}{3!2!2!2!} = 831600$ mots différents.

3) ***Arrangements :***

Étant donné un ensemble $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{n}$ objets, on appelle **arrangements** de $\boldsymbol{p}$ objets **toute suite ordonnée** de $\boldsymbol{p}$ objets pris parmi les $\boldsymbol{n}$ objets, avec $\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n}$.

3.1. Arrangements sans répétition :

Soit n objets distincts (différents). On appelle arrangement sans répétition de p objets parmi les n objets toute suite ordonnée de ces p objets,donc c'est un p-uplet tq:

La 1° coordonnée a n choix

La 2° coordonnée a (n-1) choix (car le 1° choisi ne peut pas se répéter)

:

:

La p° coordonnée a n-(P-1) = (n-p+1) choix(car les (P-1) choisis ne peuvent pas se répéter)

Le nombre d'arrangements sans répétition possibles est :

$$\boldsymbol{A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple1 :

Les arrangements de deux éléments différents pris dans {1,2,3,4}sont:

(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2) et (4,3)donc on a 12 arrangements qui peuvent être dénombrés ,sans les énumérer , par:

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4x3 = 12$ arrangements différents possibles

Exemple2 :

Combien de nombres de 3 chiffres différents peut on former à l'aide des chiffres {1,2,3,4,5,6}.

L'ordre est important et les 3 chiffres doivent être différents , alors on a des arrangements sans répétition de 3 chiffres parmi 6:

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$=6x5x4=120 nombres différents possibles

Exemple 3: 15 candidats se présentent à un concours.

De combien de façons différentes seront classées les trois premiers ?

Il s'agit d'ordonner 3 candidats parmi 15, l'ordre est important et la répétition n'est pas possible, alors il s'agit d'arrangements sans répétition :

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15\times14\times13\times12!}{12!} = 2730$$

15 × 14 × 13

Remarque: Relation entre permutation sans répétition et arrangement sans répétition

Une permutation sans répétition est une disposition ordonnée de n objets distincts. Ce qui correspond à un arrangement sans répétition de n objets pris parmi les n (p=n):

$$\boldsymbol{P_n} = A_n^n = \frac{\boldsymbol{n!}}{(\boldsymbol{n-n})!} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{0!}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{1}} = n!$$

3.2. Arrangements avec répétition :

On appelle arrangement avec répétition de p objets (non nécessairement distincts) parmi n objets toute suite ordonnée de ces p objets, où un objet peut apparaître plus d'une fois. C'est donc un p-uplet tq:

La 1° coordonnée a n choix

La 2° coordonnée a n choix (car le 1° choisi peut se répéter)

:

:

La p° coordonnée a n choix(car les (P-1)choisis peuvent se répéter)

Ainsi pour les p objets, il y aura $\boldsymbol{n \times n \times \ldots \times n}$ $(\boldsymbol{p\,fois})$ arrangements avec répétition possibles, soit :

$$\tilde{A}_n^p = n \times n \times \ldots \times n = n^p$$

Exemple :

Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés à partir d'un alphabet de 26 lettres ?

L'ordre est important et la répétition est possible donc ce sont des arrangements avec répétition $\tilde{A}_{26}^3 = 26^3 = 17576$

26 ×	26 ×	26

4) Combinaisons :

4.1. Combinaisons sans remise :

Soit n objets distincts. On appelle combinaison sans répétition une disposition non ordonnée de p objets choisis parmi les n .C'est alors un sous-ensemble de taille p dans un ensemble de taille n.

Le nombre de combinaisons sans répétition de p objets parmi n vaut :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple1 :

Reprenons l'exemple 1 des arrangements sans répétition. Cette fois, on ne tient pas compte de l'ordre:

Les combinaisons de deux éléments différents pris dans {1,2,3,4} sont:

(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4), donc on a 6 combinaisons qui peuvent être dénombrés, sans les énumérer, par:

$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{12}{2} = 6$ combinaisons différentes possibles

Remarque: Relation entre combinaison sans répétition et arrangement sans répétition

Puisque toute combinaison engendre $p!$ permutations de ces p objets, on peut conclure qu'en effet, on a:

$A_n^p = \text{p! } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ ou bien $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 2:

Dans un groupe d'étudiants, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

a-Quel est le nombre de choix possibles?

b-Quel est le nombre de choix possibles si l'on impose un garçon et une fille ?

c- Quel est le nombre de choix possibles si l'on impose que les deux délégués soient des garçons ?

<u>Réponse:</u>

Les étudiants sont discernables et la répétition n'a pas de sens ici, on a donc des combinaisons sans répétition:

a- C_{32}^2

b- $C_{19}^1 \; C_{13}^1$

c- C_{19}^2

Propriétés des combinaisons :

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n étant $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, alors

(1) $C_n^0 = C_n^n = 1$ car $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{n!}$

(2) si $n \geq 1$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ avec $C_n^1 = C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{n-1!}$

(3) si $n \geq 2$ $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$$avec\ C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n!}{2!n-2!} = \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2!n-2!}$$

Par récurrence, on déduit des relations précédentes, la propriété de **symétrie** à savoir :

si $0 \leq p \leq n$ $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ainsi $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

(4) $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p b^{n-p}$: **Formule du binôme de Newton.**

(5) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$: **Formule du triangle de Pascal.**

Cette dernière propriété est à la base de la construction du triangle de Pascal qui fournit de proche en proche les valeurs du nombre C_{n+1}^p

Triangle de Pascal :

On appelle triangle de Pascal le tableau de nombres suivant

$\forall n \in N$ tq $n \geq p$, on a :

p / n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

La 1^{ere} colonne ne contient que des 1 car $\forall n \in N$ et p=0 , on a $C_n^0 = 1$.

La diagonale aussi ne contient que des 1 car $\forall n \in N$ et p=n , on a $C_n^n = 1$.

Pour les autres cases, on applique la propriété 5, appelée **Formule du triangle de Pascal:** $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$

Par exemple:

$C_2^1 = C_1^1 + C_1^0 = 1 + 1 = 2$

$C_5^2 = C_4^2 + C_4^1 = 6 + 4 = 10$

Développons à partir du triangle de Pascal,le binôme de Newton pour n=4:

$(a+b)^4$

$(a+b)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p \; a^p \; b^{4-p} = C_n^4 \, a^4 + C_n^4 \, a^3 \, b + C_n^4 \, a^2 \, b^2 + C_n^4 \, a \, b^3 + C_n^4 \, b^4$

$= a^4 + 4a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a \, b^3 + b^4$

<u>Récapitulatif</u>