

CAPITULO IV

Interpolación Lineal y Ajuste Polinomial.

IV.1. Introducción.

En algunas ocasiones, encontrar el valor de y asociado a una x determinada no significa problema alguno, si se conoce la función de la cual provienen los datos; pero en las aplicaciones es frecuente encontrarse con funciones que no son de tipo elemental o con tablas de valores obtenidos experimentalmente. En casos como este, los métodos de interpolación lineal y ajuste polinomial resultan de gran interés. Para el problema de interpolación se tiene una tabla de valores, así:

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
\dots	\dots
x_n	y_n

El problema consiste en encontrar el valor de y asociado a una x contenida entre dos valores x_i y x_{i+1} de la tabla.

IV.2. Tabla de Diferencias Finitas.

Dada una tabla de valores, las diferencias entre dos valores consecutivos de y , se conocen como primeras diferencias hacia delante; se denotan por:

$$\Delta y_i = a_i$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 - y_0 \\ a_1 &= y_2 - y_1 \\ a_2 &= y_3 - y_2 \\ \dots &\dots \dots \\ a_{n-1} &= y_n - y_{n-1} \end{aligned}$$

Las segundas diferencias hacia adelante, se calculan a partir de las primeras diferencias:

$$\Delta^2 y_i = b_i$$

Donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_1 - a_0 \\ b_1 &= a_2 - a_1 \\ b_2 &= a_3 - a_2 \\ \dots &\dots \dots \\ b_{n-2} &= a_{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

Continuando con las terceras diferencias, las cuartas, etc., y tabulando estos valores, se construye la **Tabla de Diferencias Finitas Hacia Adelante**, así:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	\dots	$\Delta^{n-2} y_i$	$\Delta^{n-1} y_i$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0	a_0	b_0	\dots	k_0	w_0	z_0
x_1	y_1	a_1	b_1	\dots	k_1	w_1	
x_2	y_2	a_2	b_2	\dots	k_2		
\dots	\dots	\dots	\dots				
x_{n-2}	y_{n-2}	a_{n-2}	b_{n-2}				
x_{n-1}	y_{n-1}	a_{n-1}					
x_n	y_n						

Así, la tabla incluye hasta la n – ésima diferencia o hasta la i – ésima diferencia, si ésta es constante. Se puede demostrar (aunque esto no se hará aquí) que para valores provenientes de un polinomio de grado k , las k – ésimas diferencias son constantes. Obsérvese el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Dada la siguiente tabla de valores, determina el polinomio del cual provienen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	2	3	6	35	138	387

La tabla de diferencias finitas es:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	3	-1	2	0	24
-1	2	1	2	24	24
0	3	3	26	48	24
1	6	29	74	72	
2	35	103	146		
3	138	249			
4	387				

El polinomio es: $P(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$

$$\begin{aligned} 3 &= 16a - 8b + 4c - 2d + e \\ 2 &= a - b + c - d + e \\ 3 &= e \\ 6 &= a + b + c + d + e \\ 35 &= 16a + 8b + 4c + 2d + e \end{aligned}$$

del sistema anterior: $a = 1; b = 2; c = 0; d = 0; e = 3$

Así: $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3$

IV.3. Los Métodos de Interpolación.

Se presenta a continuación el método de Newton para la interpolación en tablas de valores dadas. También se presenta el método de Lagrange como un camino alternativo en la interpolación, el cual también es un camino para la interpolación inversa.

IV.3.1. Método de Newton.

Este método es aplicable sólo cuando el incremento $h = x_{i+1} - x_i$ es constante para todos los valores de i . Para poder derivar el método, despéjese de las diferencias lo siguiente:

Δy_i	$\Delta^2 y_i$	\dots	$\Delta^{n-2} y_i$	$\Delta^{n-1} y_i$	$\Delta^n y_i$
$y_1 = y_0 + a_0$	$a_1 = a_0 + b_0$	\dots	$j_1 = j_0 + k_0$	$k_1 = k_0 + w_0$	$w_1 = w_0 + z_0$
$y_2 = y_1 + a_1$	$a_2 = a_1 + b_1$	\dots	$j_2 = j_1 + k_1$	$k_2 = k_1 + w_1$	
$y_3 = y_2 + a_2$	$a_3 = a_2 + b_2$	\dots	$j_3 = j_2 + k_2$		
\dots	\dots	\dots			
$y_{n-2} = y_{n-3} + a_{n-3}$	$a_{n-2} = a_{n-3} + b_{n-3}$				
$y_{n-1} = y_{n-2} + a_{n-2}$	$a_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2}$				
$y_n = y_{n-1} + a_{n-1}$					

Para cada valor de y_i se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0 + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + a_1 = (y_0 + a_0) + (b_0 + a_0) = y_0 + 2 a_0 + b_0 \\
y_3 &= y_2 + a_2 = (y_0 + 2 a_0 + b_0) + b_1 + a_1 = y_0 + 2 a_0 + b_0 + (c_0 + b_0) + (b_0 + a_0) = \\
&\quad y_0 + 3 a_0 + 3 b_0 + c_0 \\
y_4 &= y_3 + a_3 = (y_0 + 3 a_0 + 3 b_0 + c_0) + b_2 + a_2 = (y_0 + 3 a_0 + 3 b_0 + c_0) + (a_0 + 2 \\
&\quad b_0 + c_0) + (b_0 + 2 c_0 + d_0) = y_0 + 4 a_0 + 6 b_0 + 4 c_0 + d_0 \\
y_5 &= \dots = y_0 + 5 a_0 + 10 b_0 + 10 c_0 + 5 d_0 + e_0 \\
&\dots = \dots
\end{aligned}$$

Extrayendo los coeficientes se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & & 1 & \\
& & & 1 & & 2 & 1 \\
& & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1 \\
& 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

De aquí, los coeficientes de las fórmulas anteriores provienen del binomio de Newton; por lo tanto, el término k – ésimo sería:

$$y_k = y_0 + k a_0 + \frac{k(k-1)}{2!} b_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} c_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} d_0 + \dots$$

pero $a_0 = \Delta y_0$; $b_0 = \Delta^2 y_0$; $c_0 = \Delta^3 y_0$; . . .
y por lo tanto:

$$y_k = y_0 + k \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots$$

Esta es conocida como la fórmula de Interpolación de Newton y su algoritmo estructurado es el siguiente:

Algoritmo Newton:

```

Leer n
Para i = 1 hasta n
    Leer  $x_i, \Delta_{i,0}$ 
fin_para
Para j = 1 hasta n-1
    Para i = 1 hasta n - j
         $\Delta_{ij} = \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i,j-1}$ 
    fin_para
fin_para

```

```

Leer x
k = (x - x1)/(x2 - x1)
y = 0
Para i = 1 hasta n
    num = 1
    j = 0
    Mientras j ≤ i - 2 hacer
        num = num * (k - j)
        j = j + 1
    fin_mientras
    y = y + num/(i - 1)! * Δ1,i-1
fin_para
Imprimir y
Terminar

```

Ejemplo: Calcular el valor de y para x = 3.2, según la tabla siguiente:

x	1	2	3	4	5	6
y	- 4	- 3	10	41	96	181

La tabla de diferencias finitas es:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	- 4	1	12	6
2	- 3	13	18	6
3	10	31	24	6
4	41	55	30	
5	96	85		
6	181			

$$\begin{aligned}
 x_k &= x_0 + k h \\
 3.2 &= 1 + k (1) \\
 k &= 2.2
 \end{aligned}$$

$$y_{2.2} = -4 + 2.2 * 1 + \frac{2.2(2.2-1)}{2!}(12) + \frac{2.2(2.2-1)(2.2-2)}{3!}(6)$$

$$y_{2.2} = 14.568$$

IV.3.2. Método de Lagrange.

Este método de interpolación tiene como base la idea de que el incremento $h = x_{i+1} - x_i$, es variable, como la muestra la Figura IV.1.

Un polinomio $P_n(x)$ que pase por todos los puntos, cumple con:

$$\begin{aligned}
 y = & A_1 (x - x_2) (x - x_3) (x - x_4) \dots (x - x_n) + \\
 & A_2 (x - x_1) (x - x_3) (x - x_4) \dots (x - x_n) + \\
 & A_3 (x - x_1) (x - x_2) (x - x_4) \dots (x - x_n) + \\
 & \dots + \\
 & A_n (x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Por la naturaleza del polinomio, todos los puntos (x, y) lo satisfacen; por lo tanto, sustituyéndolos y despejando las incógnitas A_i :

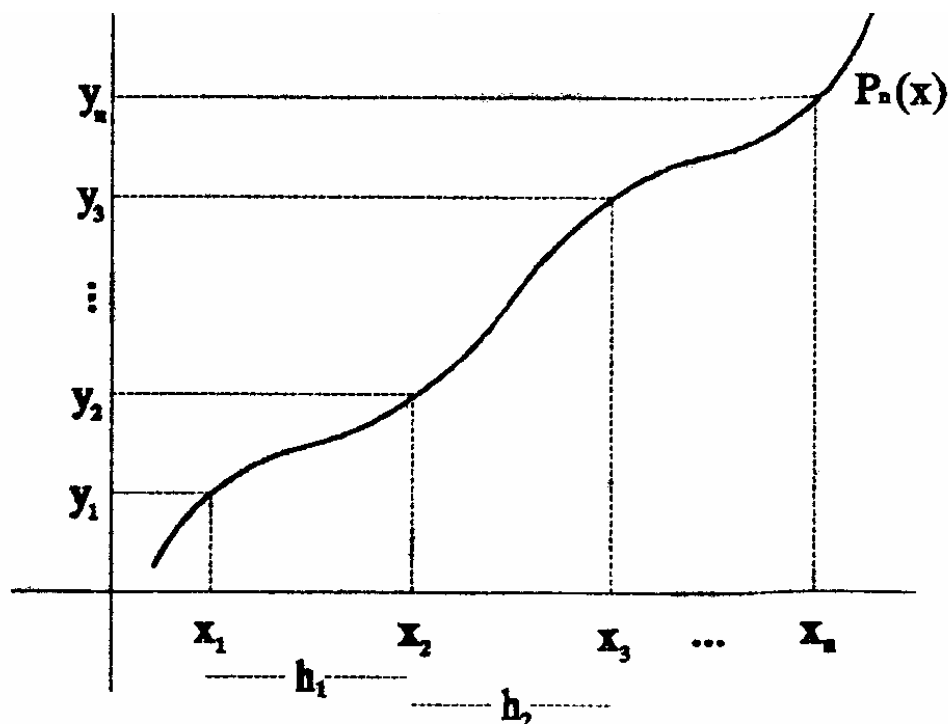


Figura IV.1. Método de Lagrange.

$$y_1 = A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n); \quad A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$y_2 = A_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n); \quad A_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)}$$

$$y_3 = A_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n); \quad A_3 = \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)}$$

...

$$y_n = A_n(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\dots(x_n - x_{n-1}); \quad A_n = \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

Sustituyendo las incógnitas despejadas en el polinomio, se obtiene la siguiente fórmula:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\dots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\dots(x_2 - x_n)} y_2 +$$

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\dots(x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\dots(x_3 - x_n)} y_3 + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n$$

Esta es conocida como **Fórmula de Lagrange para Interpolación**, cuya forma abreviada sería:

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j)} y_i \quad \text{con } i \neq j$$

donde \prod representa una serie de productos, así como \sum representa una serie de sumas.

Finalmente, de igual manera que en los métodos anteriores, se da a continuación el algoritmo estructurado para trabajar con este método:

Algoritmo Lagrange:

```

Leer n
Para i = 1 hasta n
    Leer xi, yi
fin_para
Leer x
y = 0
Para i = 1 hasta n
    num = 1
    den = 1
    Para j = 1 hasta n
        Si i ≠ j entonces
            num = num * (x - xj)
            den = den * (xi - xj)
        fin_si
    fin_para
    y = y + num/den * yi
fin_para
Imprimir x, y
Terminar

```

Ejemplo: Considerar a I como la intensidad de la corriente y a V como el voltaje, calcular V, cuando I = 5, para:

I	1	2	4	8
V	120	94	75	62

la fórmula queda:

$$V_5 = \frac{(5-2)(5-4)(5-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)}(120) + \frac{(5-1)(5-4)(5-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)}(94) +$$

$$\frac{(5-1)(5-2)(5-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)}(75) + \frac{(5-1)(5-2)(5-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)}(62) = 74.36$$

IV.4. Ajuste Polinomial.

Cuando no se requiere de gran exactitud, o cuando los valores a interpolar son muchos, un camino alternativo resulta ser el Ajuste Polinomial.

IV.4.1. Método de Mínimos Cuadrados.

Los métodos de interpolación anteriormente estudiados se basan en que dada una serie de puntos (x, y), se encuentra una curva que pasa por todos y cada uno de los puntos dados. El método de los **Mínimos Cuadrados** intenta encontrar una “curva suave” que se aproxime a los puntos dados. Observe la Figura IV.2.

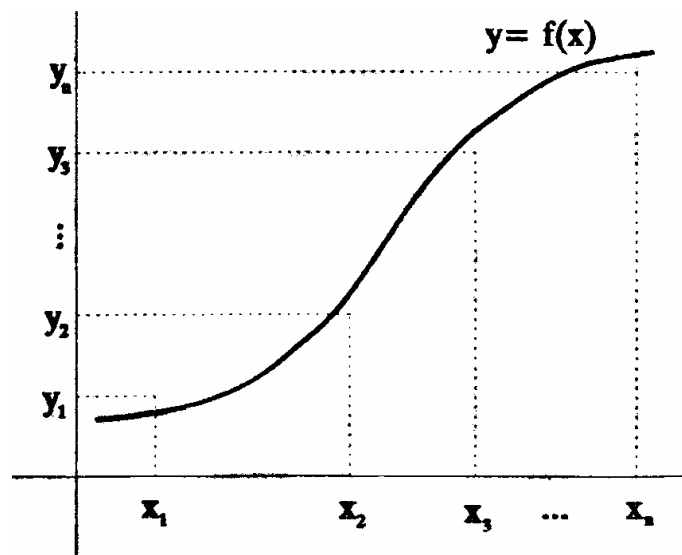


Figura IV.2. Método de los Mínimos Cuadrados.

La curva suave $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$ representa una ecuación que se aproxima a todos los puntos dados. El problema consiste en hallar los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ que satisfagan la ecuación.

La diferencia de ordenadas de la curva para un punto $x = x_i$ y la del punto $(x_i, f(x_i))$, es conocida como residuo; esto se muestra en la Figura IV.3.

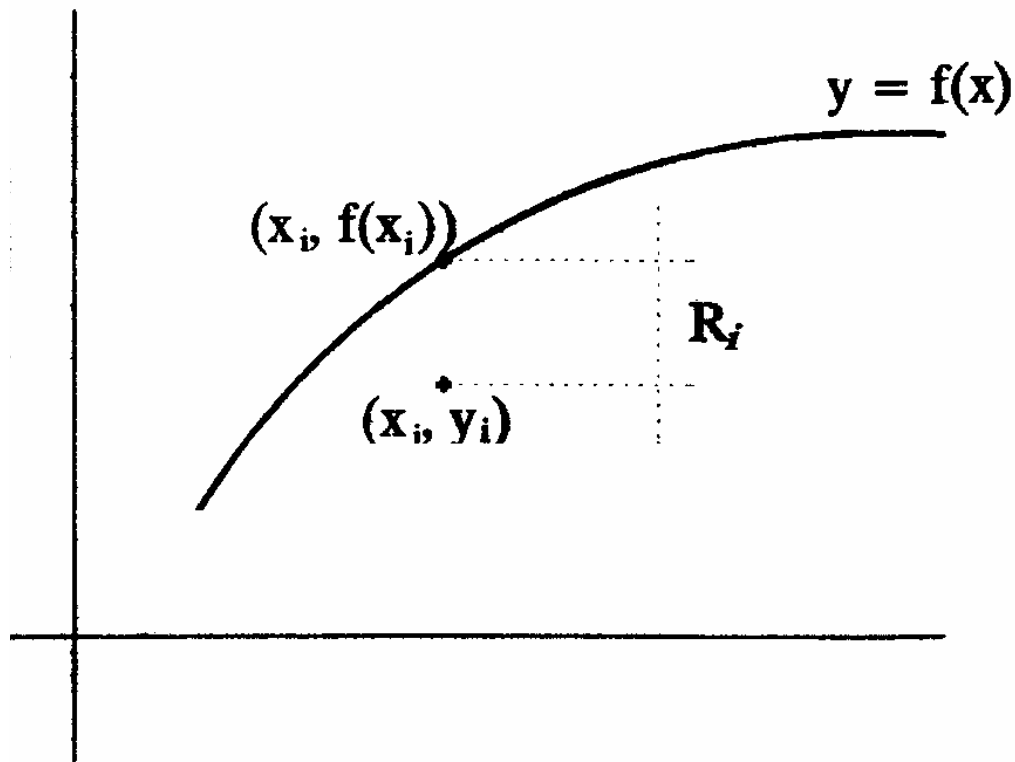


Figura IV.3. Residuo

Así: $R_i = f(x_i) - y_i$
 O también: $R_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i$

El método conocido como **Mínimos Cuadrados** intenta determinar los coeficientes a_i de tal manera que se haga mínima la sumatoria de los cuadrados de los residuos; así:

$$\sum_{i=1}^n R_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2$$

Para lograr lo anterior, se utilizan las primeras derivadas parciales, con respecto a todos los parámetros e igualando a cero. Así, derivando con respecto a a_j :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n R_i^2 = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a_j} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^j
\end{aligned}$$

Igualando con cero, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^n a_0 x_i^j + \sum_{i=1}^n a_1 x_i^{j+1} + \sum_{i=1}^n a_2 x_i^{j+2} + \dots + \sum_{i=1}^n a_m x_i^{j+m} - \sum_{i=1}^n x_i^j y_i \\
\sum_{i=1}^n x_i^j y_i &= a_0 \sum_{i=1}^n x_i^j + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{j+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{j+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{j+m}
\end{aligned}$$

Dando a j los valores de: j = 0, 1, 2, . . . , m, se tienen las siguientes ecuaciones:

Para j = 0:
$$\sum_{i=1}^n y_i = n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m$$

Para j = 1:
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1}$$

Para j = 2:
$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2}$$

... ..

para j = m:
$$\sum_{i=1}^n x_i^m y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+m}$$

Lo anterior resulta ser un sistema de m+1 ecuaciones con m+1 incógnitas, el cual puede solucionarse con cualquier método conocido. Para los **Mínimos Cuadrados**, se tiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo Mínimos_Cuadrados:

Leer n, m

a₀ = n

b₀ = 0

Para i = 1 hasta n

Leer x_i, y_i

b₀ = b₀ + y_i

Para j = 1 hasta m * 2

```

         $a_j = a_j + x_i^j$ 
    fin_para
    Para j = 1 hasta m
         $b_j = b_j + y_i * x_i^j$ 
    fin_para
fin_para
Para i = 1 hasta m+1
    Para j = 1 hasta m+1
         $c_{ij} = a_{i+j-2}$ 
    fin_para
     $c_{i,m+2} = b_{i-1}$ 
fin_para
Llamar Gauss ( $c_{ij}$ )
Para i = 1 hasta m+1
    Imprimir  $c_{i,m+2}$ 
fin_para
Terminar

```

Así, por ejemplo: Calcular la ecuación de la curva que más se aproxime a los puntos siguientes:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	1	1.5	2.5	4	6	9	15

Primero, se debe determinar el grado de la curva. Para esto, grafíquense los puntos y determinese m; de la Figura IV.4, se tiene que $m = 2$.

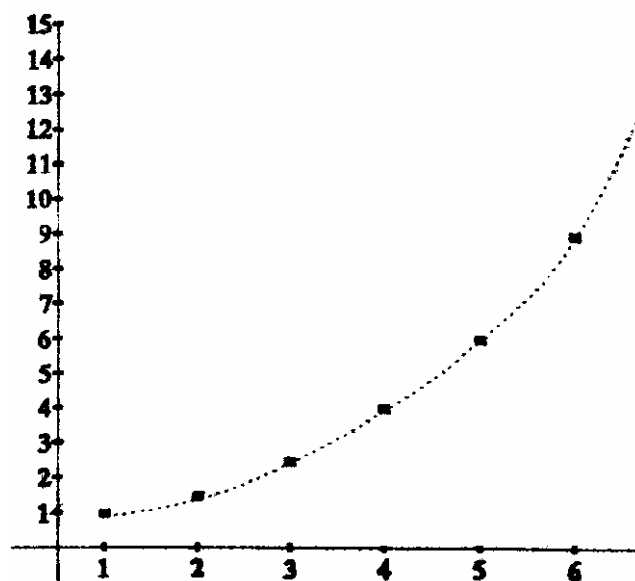


Figura IV.4. Determinación de m.

	x	y	x ²	x ³	x ⁴	x y	x ² y
	1	1	1	1	1	1	1
	2	1.5	4	8	16	3	6
	3	2.5	9	27	81	7.5	22.5
	4	4	16	64	256	16	64
	5	6	25	125	625	30	150
	6	9	36	216	1296	54	324
	7	15	49	343	2401	105	735
Σ	28	39	140	784	4676	216.5	1302.5

El sistema de ecuaciones es:

La solución es:

$$7 a_0 + 28 a_1 + 140 a_2 = 39$$

$$a_0 = 2.42857$$

$$28 a_0 + 140 a_1 + 784 a_2 = 216.5$$

$$a_1 = -1.50595$$

$$140 a_0 + 784 a_1 + 467 a_2 = 1302.5$$

$$a_2 = 0.45833$$

Así: $y = 2.42857 - 1.50595 x + 0.45833 x^2$

IV.4.2. Transformaciones.

En muchas ocasiones, los puntos no se aproximan a una recta; pero si se mapean (esto es, transforman) estos puntos a otro sistema de ejes coordenados, estos pueden aproximarse a una recta. Las transformaciones más comunes son:

X, Log (Y)
 Log (X), Y
 Log (X), Log (Y)

Siendo los logaritmos siempre en base 10.

La función debe transformarse de nuevo a los términos x, y; excepto para el caso (log x, y), de la siguiente manera:

(1) Para el caso (x, log y), se tiene:

$$\begin{aligned} \log y &= a + b x \\ y &= 10^{a+bx} = 10^a (10^b)^x \\ \text{Sea } \alpha &= 10^a \text{ y } \beta = 10^b \\ y &= \alpha \beta^x \end{aligned}$$

(2) Para el caso $(\log x, \log y)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\log y &= a + b \cdot \log x \\ y &= 10^{a+\log x^b} = 10^a (x^b) \\ \text{Sea } \alpha &= 10^a \text{ y } \beta = b \\ y &= \alpha x^\beta\end{aligned}$$

Ejemplo: Determinar la **recta** que más se aproxime a los puntos siguientes:

X	0.5	1	2	4	8	12
Y	160	120	94	75	62	56

Primero, se debe determinar la transformación que aproxima a una recta. Para esto, grafíquense los puntos y las transformaciones y determínese la transformación adecuada; de la Figura IV.5, se tiene que $(\log x, \log y)$.

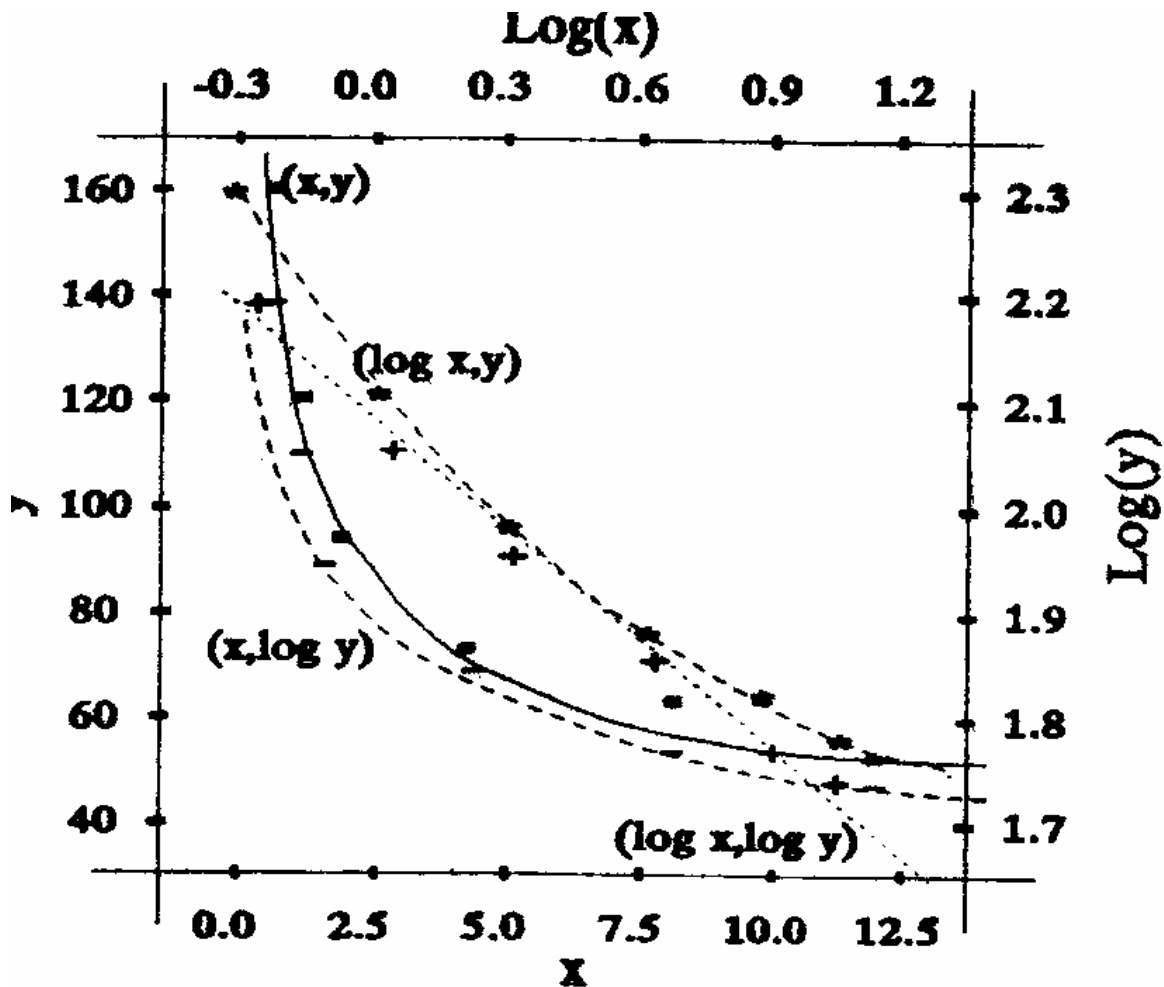


Figura IV.5. Transformaciones.

x	y	X	Y	X^2	XY
0.5	160	- 0.301	2.204	0.0906	- 0.6635
1.0	120	0.000	2.079	0.000	0.000
2.0	94	0.301	1.973	0.0906	0.5939
4.0	75	0.602	1.875	0.3624	0.1289
8.0	62	0.903	1.792	0.8155	1.6186
12.0	56	1.079	1.748	1.1646	1.8866
Σ		2.584	11.672	2.5239	4.5646

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 6 a_0 + 2.5843 a_1 &= 11.6721 \\ 2.5843 a_0 + 2.5239 a_1 &= 4.5646 \end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.0866 \\ a_1 &= - 0.328 \end{aligned}$$

Así: $y = 122.0744 * x^{-0.328}$