

CAPITULO II

II.1. Solución de Ecuaciones Trascendentes y Polinomiales.

Antes del advenimiento de las computadoras digitales, había una serie de métodos para encontrar las raíces de una ecuación algebraica o trascendente. Aunque algunas fórmulas permitían la solución de las ecuaciones de manera directa, habían ecuaciones cuya única alternativa de solución era una técnica de aproximaciones sucesivas.

II.2. Ecuaciones Trascendentes.

Las ecuaciones trascendentes son aquellas que contienen funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas o de otro tipo no algebraico, por ejemplo:

$$f(x) = \cos(x + 2) + \frac{x + 5}{x^2} + \ln(2x)$$

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + \exp(\cos(x + 6))$$

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{\cos(x)}$$

II.2.1. Método de Bisecciones Sucesivas.

El método más simple e intuitivo de los métodos de aproximaciones sucesivas para encontrar una raíz de alguna ecuación se conoce como Bisecciones Sucesivas. Para utilizarlo es necesario conocer un intervalo $[x_1, x_2]$ tal que $f(x_1)f(x_2) < 0$.

El método consiste en ir biseccionando sucesivamente el intervalo dado y desechando el extremo derecho o izquierdo según se continúe cumpliendo con la condición dada $f(x_1)f(x_2) < 0$. Esto genera una sucesión $\{x_i\}$ la cual tiene como límite de convergencia a la raíz de la función. El método, por lo tanto, es iterativo y se puede aproximar a la raíz tanto como se requiera, según el valor de ε predeterminado (el cual representa el número de decimales de aproximación). Lo anterior se muestra gráficamente en la Figura II.1.

A continuación se presenta el algoritmo estructurado para este método.

Algoritmo Bisecciones:

Definir $f(x)$

Leer x_1, x_2, ε

Repetir

$$x_{\text{med}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Si $f(x_1)f(x_{\text{med}}) < 0$ entonces

$$x_2 = x_{\text{med}}$$

Si_no

$$x_1 = x_{\text{med}}$$

Fin_si

Hasta $|x_2 - x_1| < \varepsilon$

$$\text{raiz} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Imprimir raiz

Terminar

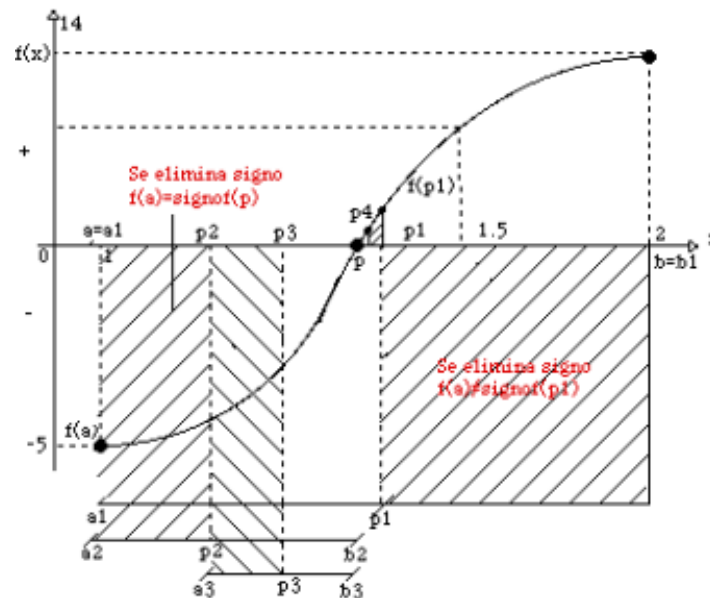


Figura II.1. Método de bisecciones sucesivas.

Ejemplo: Calcular $\sqrt{2}$ con $\varepsilon = 0.001$ (dos decimales de exactitud).

Sabiendo que el valor de $\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2, tómesse $[x_1, x_2] = [1, 2]$ como el intervalo a trabajar y tómesse $f(x) = x^2 - 2$ como la función a trabajar.

Para facilitar de cálculo de $\sqrt{2}$, se llena una tabla similar a la siguiente:

i	x_1	x_2	$ x_1 - x_2 $	x_{med}	$f(x_1)$	$f(x_{med})$
1	1.0000	2.0000	1.0000	1.5000	- 1.0000	0.2500
2	1.0000	1.5000	0.5000	1.2500	- 1.0000	- 0.4375
3	1.2500	1.5000	0.2500	1.3750	- 0.4375	- 1.1094
4	1.3750	1.5000	0.1250	1.4375	- 0.1094	0.0664
5	1.3750	1.4375	0.0625	1.4063	- 0.1094	- 0.0223
6	1.4063	1.4375	0.0312	1.4219	- 0.0223	0.0218
7	1.4063	1.4219	0.0156	1.4149	- 0.0223	- 0.0003
8	1.4141	1.4219	0.0078	1.4180	- 0.0003	0.0107
9	1.4141	1.4180	0.0040	1.4161	- 0.0003	0.0053
10	1.4141	1.4161	0.0020	1.4151	- 0.0003	0.0025
11	1.4141	1.4151	0.0010	1.4146	- 0.0003	0.0010
12	1.4141	1.4146	0.0005	1.4183	- 0.0003	0.0002

Así, de los últimos valores de x , $\sqrt{2} = 1.41445$

Para la elaboración de la tabla, se procede de la siguiente manera:

- (a) En la primera fila, el elemento x_1 es el límite inferior del intervalo dado y el elemento $f(x_1)$ es la evaluación de este punto en la función dada
- (b) Similarmente, el elemento siguiente (x_2) es el límite superior del intervalo. No se requiere la evaluación en la función.
- (c) El elemento x_{med} se evalúa por medio de $\frac{x_1 + x_2}{2}$ y $f(x_{med})$ es la evaluación de este punto en la función dada.
- (d) La columna $|x_1 - x_2|$ representa una sucesión que debe tender a cero, lo cual representa el criterio de Cauchy para la convergencia.
- (e) En las siguientes filas se toma en cuenta que:
 - si $f(x_1) f(x_{med}) > 0$, x_1 toma el valor de x_{med} y $f(x_1)$ el de $f(x_{med})$.
 - si $f(x_1) f(x_{med}) < 0$, x_2 toma el valor de x_{med} y $f(x_2)$ el de $f(x_{med})$.

Para la búsqueda del intervalo a trabajar, cuando no se sabe por donde hay una posible raíz, evalúe la función para valores de x hasta dar con dos valores consecutivos cuyas funciones cambien de signo. Esto determina un corte de la función en el eje de las x y por lo tanto una raíz.

Con este método es posible encontrar una raíz a una función cualquiera; pero es de notar que el proceso es tardado debido a que el intervalo se reduce a la mitad en cada paso (esto es, el intervalo se reduce siempre una cantidad constante). Los siguientes métodos a estudiar pretenden hacer más rápida la convergencia hacia la raíz con procesos más sofisticados.

Finalmente, se debe hacer notar que este método no es exclusivo para la búsqueda de raíces, sino para la búsqueda de información en general; esto se lleva a cabo de la siguiente manera:

Dada una lista ordenada de datos, se puede bisectar la lista y averiguar en cuál mitad se encuentra el valor buscado, se desecha una mitad y se procede de manera similar en la otra mitad hasta dar con el dato buscado o determinar que el dato buscado no se encuentra en la lista. A este método se le conoce como *búsqueda binaria* y forma parte esencial en la mayoría de los paquetes de software de negocios.

Para este proceso de búsqueda, este método resulta apropiado aún cuando para la búsqueda de raíces no lo sea.

II.2.2. Método de Interpolación Inversa o Falsa Posición.

Este es un método alternativo en la búsqueda de raíces para una función. Este método consiste en trazar una secante entre dos puntos dados, los cuales deben formar un intervalo que contenga una raíz; el punto $[x_1, f(x_1)]$ es llamado pivote (se conserva constante) y x_1 es el término de inicio de una sucesión $\{x_i\}$, la cual tiene como límite de convergencia a la raíz de la función. Obsérvese esto de manera gráfica en la Figura II.2.

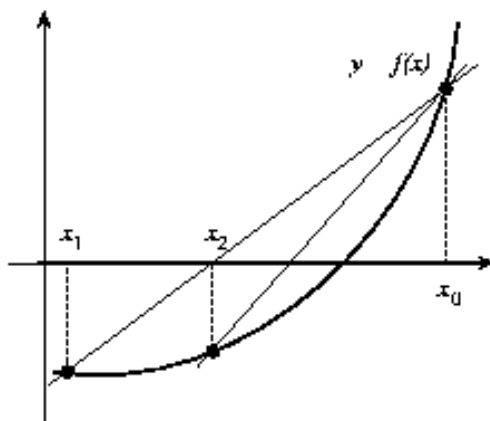


Figura II.2. Método de falsa posición.

No es una regla establecida pero, en general, este método converge más rápido que el de bisecciones sucesivas; sin embargo, requiere que se conozcan más datos acerca de la función con la cual se va a trabajar.

Para encontrar la fórmula generadora de la sucesión se usa la ecuación entre dos puntos y se obtiene:

$$\frac{y - f(x_2)}{x - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Llámesese x_i a x_2 , un punto cambiante, y x_{i+1} a x , el nuevo punto buscado, cuya función tiene valor cero, debido a que es el punto en que la secante corta al eje de las x .

$$\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f(x_i) - f(x_1)}{x_i - x_1}$$

Despejando se obtiene una fórmula recursiva simple, generadora de una sucesión convergente hacia la raíz de la función dada:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_1)}{f(x_i) - f(x_1)}$$

Para que esta sucesión converja, es suficiente que se cumpla con las siguientes condiciones:

- (i) $f(x_1) f(x_2) < 0$
- (ii) $f(x_1) f''(x_1) > 0$
- (iii) $f''(x_i) \neq 0 \quad \forall x_i \in [x_1, x_2]$

Recuérdese que si $f''(x) > 0$, la concavidad es hacia arriba; si $f''(x) < 0$, la concavidad es hacia abajo. Por lo tanto, las condiciones tienen el siguiente significado:

- (i). Significa que hay una raíz en el intervalo. Al menos una; ya que pueden haber raíces múltiples, pero en una cantidad impar. La posibilidad de raíces múltiples se anula si la función $y = f(x)$ es monótona en un intervalo trabajado.
- (ii). Asegura que se tome el punto x_1 (el pivote) de manera adecuada. Tomar de manera inadecuada el pivote podría provocar una divergencia en la sucesión generada.
- (iii). Asegura que no se dé un caso extremo de divergencia. Este caso provocaría una divergencia en la sucesión y se debe al hecho de encontrarse más de una raíz en el intervalo o un cambio de concavidad.

NOTA: El hecho de que la primera condición no se cumpla no significa, necesariamente, que no hay raíz en el intervalo. La función puede cortar el eje de las x en dos o un

número par de puntos, lo cual indica que hay un número par de raíces. Esto es similar a lo anteriormente dicho de un número impar de raíces en un intervalo dado. Por otro lado, graficar la función podría ayudar a la búsqueda del intervalo.

Al igual que en el método anterior, se presenta a continuación el algoritmo estructurado para el método de la Falsa Posición:

Algoritmo Falsa_Posicion

Definir $f(x)$

Leer x_1, x_2, ε

Repetir

$$x_i = x_2 - (x_2 - x_1) \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$\text{delta} = |x_2 - x_i|$$

$$x_2 = x_i$$

Hasta $\text{delta} < \varepsilon$

raiz = x_i

Imprimir raiz

Terminar

Ejemplo: Calcular $\sqrt{2}$ con $\varepsilon = 0.0001$.

Este ejemplo es el mismo utilizado anteriormente con el método de bisecciones sucesivas y se repite con la finalidad de comparar las convergencias de los dos métodos (nótese la variación del valor de ε). Los datos para trabajar con este método son los mismos:

$f(x) = x^2 - 2$	función
$[x_1, x_2] = [1, 2]$	intervalo
$\varepsilon = 0.0001$	aproximación

Verificando las condiciones:

$$(i) f(x_1) f(x_2) = f(1) f(2) = (-1)(2) = -2 < 0 \quad \text{Cumple.}$$

$$(ii) f(x) = 2$$

$$f(x_1) f'(x_1) = f(1) f'(1) = (-1)(2) = -2 < 0 \quad \text{No cumple.}$$

Como la segunda condición no se cumple, se debe probar un nuevo intervalo. Una buena idea es intentar con el mismo intervalo, pero dándolo de manera invertida; esto es:

$$[x_1, x_2] = [2, 1]$$

Este intervalo no es matemáticamente válido, puesto que un intervalo $[a, b]$ debe cumplir con $a < b$; sin embargo, para el cálculo de las raíces, esto no tiene importancia.

Es importante verificar las tres condiciones para el nuevo intervalo, ya que si este tampoco cumple, se debe buscar tantos intervalos como se requiera hasta dar con uno que cumpla con las tres condiciones dadas.

Verificando las condiciones:

(i) Obviamente cumple.

(ii) $f(x_1) f'(x_1) = f(2) f'(2) = 4 > 0$ Cumple.

(iii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall \quad x_i \in [2, 1]$ Cumple.

Una vez hallado el intervalo, se procede a llenar una tabla similar a la siguiente:

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - x_1$	$f(x_i) - f(x_1)$	x_{i+1}	ε
1	2.0000	2.0000	-	-	-	-
2	1.0000	- 1.0000	- 1.0000	- 3.0000	1.3333	0.3333
3	1.3333	- 0.2222	- 0.6667	- 2.2222	1.3999	0.0666
4	1.3999	- 0.0403	- 0.6001	- 2.0403	1.4117	0.0118
5	1.4117	- 0.0071	- 0.5886	- 2.0071	1.4137	0.0020
6	1.4137	- 0.00015	- 0.5863	- 2.0015	1.4141	0.0004
7	1.4141	- 0.0003	- 0.5859	- 2.0003	1.4141	-

Así, la raíz resulta ser: 1.4141

Para la elaboración de la tabla, se procede de la siguiente manera:

- (a) En la primera fila, el elemento x_i es el límite inferior del intervalo dado y el elemento $f(x_i)$ es la evaluación de este punto en la función dada. Los elementos restantes de la fila no pueden calcularse.
- (b) En la segunda fila, el elemento siguiente (x_i) es el límite superior del intervalo y $f(x_i)$ su valor evaluado en la función dada.
- (c) Los elementos " $x_i - x_1$ " y " $f(x_i) - f(x_1)$ " se evalúan como parte de la fórmula. Es importante recordar que el pivote es siempre constante; esto es, siempre el punto $[x_1, f(x_1)]$.
- (d) La columna x_{i+1} evalúa el término siguiente de la sucesión, el cual se ubica después de la siguiente fila en la columna x_i .
- (e) La columna final representa a la diferencia, en valor absoluto, de las columnas x_i y x_{i+1} . Este término es el utilizado como criterio de paro; esto es, el criterio de Cauchy para la convergencia se determina aquí.
- (f) Las siguientes filas se evalúan de manera similar hasta que el último elemento de la última fila sea menor a la ε establecida.

Aunque en apariencia el método de Falsa Posición es más rápido en convergencia que el de Bisecciones Sucesivas, esto depende de la función misma. Se pueden encontrar funciones en las cuales el método de Bisecciones Sucesivas es más rápido que el de Falsa Posición.

II.2.3. Método de Newton – Raphson.

Quizá el método más utilizado en la búsqueda de raíces sea el de Newton – Raphson, el cual consiste en trazar una tangente desde un punto dado y buscar el punto de corte con el eje de las x e ir convergiendo hasta la raíz. Gráficamente, se ilustra en la Figura II.3.

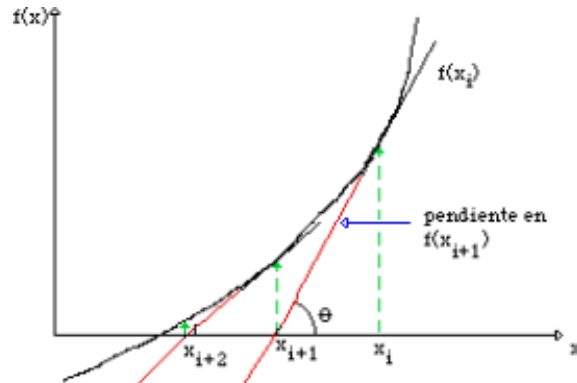


Figura II.3. Método de Newton – Raphson.

Este proceso genera una sucesión $\{x_i\} = x_1, x_2, x_3, \dots$, cuya fórmula recursiva se puede hallar por medio de la fórmula de punto pendiente:

$$y - y_i = m (x - x_i)$$

pero la pendiente en el punto x_i es: $m = f'(x_i)$

y el nuevo punto: $[x, y] = [x_{i+1}, 0]$

Así, sustituyendo: $-f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

Despejando, se obtiene la fórmula recursiva del método de Newton - Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

De la fórmula anterior se deduce que el método es aplicable solamente cuando la función $f(x)$ es derivable en el intervalo dado. Por otro lado, es importante recalcar que el método sólo requiere de un punto para generar la sucesión; sin embargo, encontrando un intervalo se asegura estar cerca de la raíz para una rápida convergencia.

Al igual que en los métodos anteriores, se presenta a continuación el algoritmo estructurado para el método de Newton – Raphson:

Algoritmo Newton-Raphson

Definir $f(x)$

Leer x, ε

Repetir

$$x_i = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\text{delta} = |x - x_i|$$

$$x = x_i$$

Hasta $\text{delta} < \varepsilon$

raiz = x_i

Imprimir raiz

Terminar

Ejemplo: Calcular $\sqrt{2}$ con $\varepsilon = 0.0001$ (de nuevo el mismo ejemplo).

$f(x) = x^2 - 2$	función
$f'(x) = 2x$	primera derivada
$[x_1, x_2] = [1, 2]$	intervalo
$\varepsilon = 0.0001$	aproximación

De aquí, de manera similar a los métodos anteriores, se procede a generar una tabla como la siguiente:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε
1	1.0000	- 1.0000	2.0000	1.5000	-
2	1.5000	0.2500	3.0000	1.4166	0.0834
3	1.4166	0.0067	2.8332	1.4142	0.0024
4	1.4142	- 0.00004	1.9999	1.4142	-

Para la elaboración de la tabla, se procede de la siguiente manera:

- (a) En la primera fila, el elemento x_i es un límite del intervalo dado y los elementos $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ son la evaluación de este punto en la función y la derivada dadas.
- (b) La columna x_{i+1} se calcula dividiendo la columna $f(x_i)$ entre $f'(x_i)$ y restando a la columna x_i .
- (c) El elemento x_i de las filas siguientes, son los elementos x_i de la fila inmediata anterior en cada caso.
- (d) La columna final representa a la diferencia, en valor absoluto, de las columnas x_i y x_{i+1} . Este término es el utilizado como criterio de paro; esto es, el criterio de Cauchy para la convergencia se determina aquí.

Se ejemplificaron los tres métodos anteriores con la misma función con el objeto de mostrar la rapidez de convergencia en cada uno de ellos. Como una conclusión, se puede establecer que el más lento es el método de Bisecciones Sucesivas, después el de Falsa Posición y el más rápido es el de Newton – Raphson; sin embargo, la rapidez de convergencia depende, en gran parte, de la función misma. Para mostrar lo anterior, se dan dos ejemplos, los cuales se trabajarán por los tres métodos. Las conclusiones al respecto se dejan al lector.

Ejemplos:

1. Calcúlese una raíz de $f(x) = x^{10} - 1$, sabiendo que esta se encuentra en el intervalo $[0.3, 1.3]$. Tómesse $\varepsilon = 0.001$.

(a) Método de Bisecciones Sucesivas:

i	x_1	x_2	$ x_1 - x_2 $	x_{med}	$f(x_1)$	$f(x_{med})$
1	0.3000	1.3000	1.0000	0.8000	- 1.0000	- 0.8926
2	0.8000	1.3000	0.5000	1.0500	- 0.8926	0.6289
3	0.8000	1.0500	0.2500	0.9250	- 0.8926	- 0.5414
4	0.9250	1.0500	0.1250	0.9875	- 0.5414	- 0.1182
5	0.9875	1.0500	0.0625	1.0188	- 0.1182	0.2041
6	0.9875	1.0188	0.0312	1.0031	- 0.1182	0.0317
7	0.9875	1.0031	0.0156	0.9993	- 0.1182	- 0.0459
8	0.9953	1.0031	0.0078	0.9992	- 0.0459	- 0.0078
9	0.9992	1.0031	0.0040	1.0012	- 0.0078	0.0118
10	0.9992	1.0021	0.0020	1.0002	- 0.0078	0.0020
11	0.9992	1.0002	0.0010	0.9997	- 0.0078	- 0.0029
12	0.9997	1.0002	0.0005	1.0000	- 0.0029	- 0.0005

(b) Método de Falsa Posición:

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - x_1$	$f(x_i) - f(x_1)$	x_{i+1}	ε
1	1.3000	12.7858	-	-	-	-
2	0.3000	- 1.0000	- 1.0000	- 13.7858	0.3725	0.0725
3	0.3725	- 0.9999	- 0.9275	- 13.7858	0.4398	0.0623
4	0.4398	- 0.9997	- 0.8602	- 13.7856	0.5022	0.0624
5	0.5022	- 0.9998	- 0.7978	- 13.7848	0.5600	0.0578
6	0.5600	- 0.9970	- 0.7400	- 13.7828	0.6135	0.0535
7	0.6135	- 0.9924	- 0.6865	- 13.7783	0.6630	0.0494
8	0.6630	- 0.9836	- 0.6370	- 13.7694	0.7085	0.0455
9	0.7085	- 0.9681	- 0.5915	- 13.7540	0.7501	0.0416
10	0.7501	- 0.9436	- 0.5499	- 13.7294	0.7879	0.0378
11	0.7879	- 0.9078	- 0.5121	- 13.6936	0.8219	0.0339
12	0.8219	- 0.8594	- 0.4781	- 13.6452	0.8520	0.0301
13	0.8520	- 0.7985	- 0.4480	- 13.5844	0.8783	0.0263
14	0.8783	- 0.7268	- 0.4217	- 13.5126	0.9010	0.0227
15	0.9010	- 0.6475	- 0.3990	- 13.4333	0.9202	0.0192
16	0.9202	- 0.5646	- 0.3798	- 13.3504	0.9363	0.0161
17	0.9363	- 0.4823	- 0.3637	- 13.2682	0.9495	0.0132
18	0.9495	- 0.4044	- 0.3505	- 13.1902	0.9602	0.0107
19	0.9602	- 0.3334	- 0.3398	- 13.1193	0.9689	0.0086
20	0.9689	- 0.2710	- 0.3311	- 13.0509	0.9758	0.0069
21	0.9758	- 0.2176	- 0.3242	- 13.0035	0.9812	0.0054
22	0.9812	- 0.1730	- 0.3188	- 12.9589	0.9854	0.0043

23	0.9854	- 0.1364	- 0.3146	- 12.9223	0.9888	0.0033
24	0.9888	- 0.1069	- 0.3112	- 12.8927	0.9913	0.0026
25	0.9913	- 0.0833	- 0.3087	- 12.8691	0.9933	0.0020
26	0.9933	- 0.0647	- 0.3067	- 12.8505	0.9949	0.0015
27	0.9949	- 0.0500	- 0.3051	- 12.8359	0.9961	0.0012
28	0.9961	- 0.0383	- 0.3039	- 12.8245	0.9970	0.0009

(c) Método de Newton – Raphson:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε
1	1.3000	12.7858	106.0450	1.1794	-
2	1.1794	4.2086	44.1621	1.0841	0.0953
3	1.0841	1.2429	20.6888	1.0241	0.0601
4	1.0241	0.2683	12.3853	1.0024	0.0217
5	1.0024	0.0242	10.2171	1.0000	0.0024
6	1.0000	0.0003	10.0023	1.0000	-

¿Cuál es la razón de tan lenta convergencia para el método de Falsa Posición?

2. Calcúlese una raíz de $f(x) = e^{-x} - x$, sabiendo que una raíz se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. Tómesese $\varepsilon = 0.001$.

Se tiene $f'(x) = -e^{-x} - 1$

(a) Método de Bisecciones Sucesivas:

i	x_1	x_2	$ x_1 - x_2 $	x_{med}	$f(x_1)$	$f(x_{med})$
1	0.0000	1.0000	1.0000	0.5000	1.0000	0.1065
2	0.5000	1.0000	0.5000	0.7500	0.1065	- 0.2774
3	0.5000	0.7500	0.2500	0.6250	0.1065	- 0.0897
4	0.5000	0.6250	0.1250	0.5625	0.1065	0.0073
5	0.5625	0.6250	0.0625	0.5938	0.0073	- 0.0415
6	0.5625	0.5938	0.0312	0.5781	0.0073	- 0.0172
7	0.5625	0.5781	0.0156	0.5703	0.0073	- 0.0050
8	0.5625	0.5703	0.0078	0.5664	0.0073	0.0012
9	0.5664	0.5703	0.0040	0.5684	0.0012	- 0.0019
10	0.5664	0.5684	0.0020	0.5674	0.0012	- 0.0004
11	0.5664	0.5674	0.0010	0.5669	0.0012	- 0.0004
12	0.5669	0.5674	0.0005	0.5671	0.0004	0.0000

(b) Método de Falsa Posición:

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - x_1$	$f(x_i) - f(x_1)$	x_{i+1}	ε
1	0.0000	1.0000	-	-	-	-
2	1.0000	- 0.63221	1.0000	- 1.6321	0.6127	0.3873

3	0.6127	- 0.0708	0.6127	- 1.0708	0.5722	0.0405
4	0.5722	- 0.0079	0.5722	- 1.0079	0.5677	0.0045
5	0.5677	- 0.0009	0.5677	- 1.0009	0.5672	0.0005

(c) Método de Newton – Raphson:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	ε
1	0.0000	1.0000	- 2.0000	0.5000	-
2	0.5000	0.1065	- 1.6065	0.5663	0.0663
3	0.5663	0.0013	- 1.5676	0.5671	0.0008

II.3. Ecuaciones Polinomiales.

Como casos particulares de ecuaciones trascendentes, se tratarán ahora particularmente las raíces de polinomios de la forma:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Donde a_i son números reales y $a_0 \neq 0$

Para extraer las raíces de estos polinomios, se tienen las siguientes reglas:

(a) Si $n = 1$, resulta: $P_1(x) = a_0 x + a_1 = 0$

$$\text{y la única raíz sería: } x = -\frac{a_1}{a_0}$$

(b) Si $n = 2$, resulta: $P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

$$\text{y sus dos raíces serían: } x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \text{ y } x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

(c) La fórmula de Tartaglia – Cardano calcula raíces de algunos polinomios cuando $n = 3$. Sin embargo, esta fórmula no se estudiará en este apartado.

(d) Aún cuando para polinomios con $n = 4$ existe una fórmula, el cálculo de las raíces resulta muy complicado.

(e) Para $n \geq 5$ ha quedado matemáticamente demostrado que no es posible hallar una fórmula para el cálculo de sus raíces y la única posibilidad es aproximar las raíces por los métodos numéricos.

El método de aproximación a las raíces de un polinomio se conoce como **Método de Birge – Vieta** y es el que se estudiará en este capítulo; pero se estudiarán antes algunos antecedentes.

II.3.1. Antecedentes.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.- Dado un polinomio de la forma:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

existe al menos un valor de x para el cual se cumple $P_n(x) = 0$; es decir, el polinomio tiene al menos una raíz.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.- Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, es posible encontrar otros dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$P(x) = Q(x) D(x) + R(x)$$

cumpliendo que el grado de $R(x)$ resulta ser menor que el grado de $D(x)$.

TEOREMA DEL RESTO.- El resto que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$ es igual al valor del polinomio evaluado en el punto $x = a$.

Demostrando:

$P(x) = (x - a) Q(x) + R$	por el algoritmo de la división
R es constante	por el algoritmo de la división
$P(a) = (a - a) Q(a) + R$	evaluando en $x = a$
$P(a) = R$	

Así por ejemplo, dividir $(x^3 + 7x + 5)$ entre $(x + 2)$, daría un resto de:

$$P(-2) = (-2)^3 + 7(-2) + 5 = -17$$

TEOREMA DEL FACTOR.- Un polinomio $P_n(x)$ tiene a lo más n raíces distintas.

Demostrando:

Por el Teorema Fundamental del Álgebra existe al menos una raíz; si α_1 es la raíz, por el TEOREMA DEL RESTO, se tiene: $P_n(x) = (x - \alpha_1) P_{n-1}(x) + P_n(\alpha_1)$

Pero $P_n(\alpha_1) = 0$, por ser una raíz.

Similarmente, para $P_{n-1}(x)$, sea α_2 la raíz, se tiene: $P_{n-1}(x) = (x - \alpha_2) P_{n-2}(x)$

Y el proceso continua hasta $P_1(x) = (x - \alpha_n)$, lo cual da como resultado:

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) \dots (x - \alpha_n)$$

Aquí, las α_i son las raíces y no tienen porque ser distintas.

LA REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES.- Para todo polinomio $P_n(x)$ se cumple que:

(a) el número de raíces positivas de un polinomio $P_n(x)$ es igual al número de cambios de signo en el polinomio o menor en un número par.

(b) el número de raíces negativas de un polinomio $P_n(x)$ es igual al número de cambios de signo de $P_n(-x)$ o menor en un número par.

Así para: $P_8(x) = x^8 - 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3$, tiene 3 o 1 raíces positivas, y
 $P_8(-x) = x^8 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 3$, tiene 5, 3 o 1 raíces negativas.

RAICES NULAS.- Si en el polinomio $P_n(x)$, el término de menor grado es de grado k (con $k \neq 0$) el número de raíces nulas del polinomio es k .

Así, por ejemplo, para $P_5(x) = x^5 - 6x^4$, se tienen 4 raíces nulas;
 esto es, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$.

RAICES COMPLEJAS.- Si el polinomio $P_n(x)$ tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$, su compleja conjugada $a - bi$ también es raíz.

RAICES RACIONALES.- Las raíces racionales de un polinomio $P_n(x)$ son de la forma b/c donde b es un divisor de a_n y c un divisor de a_0 .

Así, para $P_4(x) = 8x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6$, sus posibles raíces racionales son:
 $b/c = \pm 1, \pm 2, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4, \pm 3/8, \pm 6$
 porque: $b = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y $c = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

DIVISIÓN SINTETICA.- Se pretende, ahora, encontrar una forma de dividir un polinomio de la forma $P_n(x)$ entre un binomio de la forma $(x - a)$.

Por el algoritmo de la división: $P_n(x) = (x - a) Q(x) + R$

Se tiene: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

y $Q(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-2} x + A_{n-1}$ (un polinomio degradado)

de lo anterior:

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n &= (x - a)(A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-2} x + A_{n-1}) + R \\ &= (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x) \\ &\quad - (aA_0 x^{n-1} + aA_1 x^{n-2} + aA_2 x^{n-3} + \dots + aA_{n-2} x + aA_{n-1}) + R \\ &= A_0 x^n + (A_1 - aA_0) x^{n-1} + (A_2 - aA_1) x^{n-2} + \dots + \\ &\quad (A_{n-1} - aA_{n-2}) x + (R - aA_{n-1}) \end{aligned}$$

Los dos miembros de la igualdad anterior tienen igual número de sumando, así:

$$\begin{aligned}
 a_0 x^n &= A_0 x^n \\
 a_1 x^{n-1} &= (A_1 - a A_0) x^{n-1} \\
 a_2 x^{n-2} &= (A_2 - a A_1) x^{n-2} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \\
 a_{n-1} x &= (A_{n-1} - a A_{n-2}) x \\
 a_n &= R - a A_{n-1}
 \end{aligned}$$

Despejando las A_i , únicos valores desconocidos:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= a_0 \\
 A_1 &= a_1 + a A_0 \\
 A_2 &= a_2 + a A_1 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \\
 A_{n-1} &= a_{n-1} + a A_{n-2} \\
 R &= a_n + a A_{n-1}
 \end{aligned}$$

Este método es conocido como DIVISION SINTETICA y se da en forma de tabla, así:

a	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n
	$a A_0$	$a A_1$	$a A_2$	\dots	$a A_{n-2}$	$a A_{n-1}$	
	A_0	A_1	A_2	A_3	\dots	A_{n-1}	R

En la tabla anterior, los términos a_i representan los coeficientes del polinomio y a es el segundo término del binomio divisor. Los elementos calculados A_i y R representan la solución a la división (coeficientes y residuo, respectivamente).

Ejemplo: Dividir $2x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5$ entre $x + 3$

-3	2	5	0	10	0	-5
		-6	3	-9	-3	9
	2	-1	3	1	-3	4

Así: $Q(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 3$ y $R = 4$

II.3.2. El Método de Birge – Vieta.

Este método es una combinación del método de Newton – Raphson y la división sintética. La fórmula recursiva sería:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P_n(x_i)}{P'_n(x_i)}$$

Pero se sabe que: $P_n(x) = (x - x_i) Q(x) + R$
Y con $x = x_i$: $P_n(x_i) = (x_i - x_i) Q(x_i) + R$; $P_n(x_i) = R$

Por otro lado, para hallar $P'_n(x_i)$: $P_n(x) = (x-x_i) Q(x) + R$; $P'_n(x) = (x-x_i)Q'(x) + Q(x)$
 Evaluado en $x = x_i$: $P'_n(x_i) = (x_i - x_i) Q'(x_i) + Q(x_i)$ $P'_n(x_i) = Q(x_i)$

Dividiendo $Q(x_i)$ entre $(x - x_i)$, queda: $Q(x) = (x - x_i) S(x) + R'$
 Evaluando en $x = x_i$: $Q(x_i) = (x_i - x_i) S(x_i) + R'$ $Q(x_i) = R'$
 O bien: $P'_n(x_i) = R'$

Así: $x_{i+1} = x_i - \frac{R}{R'}$

Donde:

R = Residuo de dividir $P(x)$ entre $(x - x_i)$;
 R' = Residuo de dividir $Q(x)$ entre $(x - x_i)$; y
 $Q(x)$ = Resultado de la primera división.

De lo anterior, el método de Birge – Vieta se reduce a:

1. Escribir la ecuación en orden descendente de potencias de x .
2. Separar las raíces nulas.
3. Aplicar la regla de los signos de Descartes.
4. Establecer las posibles raíces racionales.
5. Probarlas por división sintética o teorema del resto.
6. Sacar las raíces irracionales.
7. Reducir la ecuación y volver al paso 6, hasta hallar todas las raíces.

Ejemplo: Calcular TODAS las raíces del polinomio: $P_8(x) = x^8 + x^7 - 6x^6 - x^5 + 2x^4 = 0$,
 con $\varepsilon = 0.001$

1. Escribir la ecuación en orden descendente de potencias de x .

$$P_8(x) \equiv x^8 + x^7 - 6x^6 - x^5 + 2x^4 = 0$$

2. Separar las raíces nulas.

$$P_8(x) \equiv x^4(x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2) = 0$$

$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_3 = 0$	$X_4 = 0$
-----------	-----------	-----------	-----------

$$P_4(x) \equiv x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$$

3. Aplicar la regla de los signos de Descartes.

$$\begin{array}{ll} P_4(x) \equiv x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0 & 2 \text{ ó } 0 \text{ raíces positivas} \\ P_4(-x) \equiv x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0 & 2 \text{ ó } 0 \text{ raíces negativas} \end{array}$$

De aquí las siguientes posibilidades:

+	2	2	0	0
-	2	0	2	0
Complejas	0	2	2	4

4. Establecer las posibles raíces racionales.

$$b = \pm 2, \pm 1$$

$$c = \pm 1$$

$$b/c = \pm 2, \pm 1$$

5. Probarlas por división sintética o teorema del resto.

$$P_4(1) = -3$$

$$P_4(-1) = -3$$

$$P_4(2) = 0$$

$$P_4(-2) = -12$$

!!! Raíz !!!

6. Sacar la única raíz irracional:

2	1	1	-6	-1	2
		2	6	0	-2
	1	3	0	-1	0

$$X_5 = 2$$

Degradando: $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

Sacar las raíces irracionales por Newton – Raphson:

Para extraer la primera raíz irracional, es necesario hallar un intervalo en el cual se tenga un cambio de signo, lo cual significa una raíz en el mismo. El intervalo es $[0, 1]$.

Divisiones sintéticas: $x_1 = 1$:

1	1	3	0	-1
		1	4	4
	1	4	4	3
1		1	5	
	1	5	9	

$$X_2 = 1 - 3/9 = 0.6666$$

	1	3	0	- 1
0.6666		0.6666	2.4444	1.6296
	1	3.6666	2.4444	0.6296
0.6666		0.6666	2.8886	
	1	4.3333	5.3333	

$$X_3 = 0.6666 - 0.6296/5.3333 = 0.5485$$

$$|X_3 - X_2| = |0.5486 - 0.6666| = 0.3334 > \varepsilon$$

	1	3	0	- 1
0.5485		0.5485	1.9463	1.0675
	1	3.5485	1.9463	0.0675
0.5485		0.5485	2.2472	
	1	4.0970	4.1935	

$$X_4 = 0.5485 - 0.0675/4.1935 = 0.5324$$

$$|X_4 - X_3| = |0.5324 - 0.5485| = 0.0161 > \varepsilon$$

	1	3	0	- 1
0.5324		0.5324	1.8806	1.0012
	1	3.5324	1.8806	0.0012
0.5324		0.5324	2.1641	
	1	4.0648	4.0446	

$$X_5 = 0.5324 - 0.0012/4.0446 = 0.5321$$

$$|X_5 - X_4| = |0.5321 - 0.53245| = 0.0003 < \varepsilon$$

Así: $X_6 = 0.5321$

7. Reducir la ecuación y volver al paso 6, hasta hallar todas las raíces.

	1	3	0	- 1
0.5321		0.5321	1.8794	1.0000
	1	3.5321	1.8794	0.0000

$$P_2(x) \equiv x^2 + 3.5321 x + 1.8794 = 0$$

Cuando se llega a un polinomio de segundo grado es válido, por facilidad, utilizar la fórmula de solución de una cuadrática para hallar las dos raíces restantes. Si el grado es tres o mayor, es recomendable regresar al paso 6 y continuar con las iteraciones para hallar la siguiente raíz. Por lo tanto:

$$x_{7,8} = \frac{-3.5321 \pm \sqrt{(3.5321)^2 - 4(1.8794)}}{2}$$

Así: $X_7 = -0.6527$ y $X_8 = -2.8794$

Finalmente:

$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_3 = 0$	$X_4 = 0$
$X_5 = 2$	$X_6 = 0.5321$
$X_7 = -0.6527$	$X_8 = -2.8794$

A continuación se presenta el algoritmo estructurado para el Método de Birge – Vieta, para su implantación en cualquier lenguaje de programación:

Algoritmo Birge-Vieta

```

Leer grado,  $\varepsilon$ 
 $m = \text{grado} + 1$ 
Para  $i = 1$  hasta  $m$ 
  Leer  $a_i$ 
fin_para
Para raíces = 1 hasta grado
   $x = 1$ 
  Repetir
     $b_1 = a_1$ 
    Para  $i = 2$  hasta  $m$ 
       $b_i = a_i + x * b_{i-1}$ 
    fin_para
     $c_1 = b_1$ 
    Para  $i = 2$  hasta  $m-1$ 
       $c_i = b_i + x * c_{i-1}$ 
    fin_para
     $x_{\text{raiz}} = x - \frac{b_m}{c_{m-1}}$ 
     $\text{delta} = |x_{\text{raiz}} - x|$ 
     $x = x_{\text{raiz}}$ 
  Hasta  $\text{delta} < \varepsilon$ 
  Imprimir raíces,  $x$ 
  Para  $i = 2$  hasta  $m-1$ 
     $a_i = b_i$ 
  fin_para
   $m = m - 1$ 
fin_para
Terminar

```

Ejercicios:

1. $P_5(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5 = 0$
2. $P_4(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$
3. $P_4(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136 = 0$
4. $P_4(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240 = 0$
5. $P_3(x) = x^3 - x - 1 = 0$