CAPITULO I

I.1. Fundamentos de los Métodos Numéricos.

En algunas ocasiones se presentan secuencias de números, los cuales podrían decirse que siguen un comportamiento constante; por ejemplo, los números 5, 7, 9, 11, 13 y 15, definen una sucesión o secuencia. Estos representan una sucesión finita, puesto que el 5 representa el primero de los números y el 15 representa el último de la sucesión. Si por ejemplo se manejara la siguiente sucesión: 1/3, 2/5, 3/7, 4/9, . . ., esta es una sucesión infinita porque los puntos suspensivos indican que no existe un último número.

Las series finitas son útiles en temas de matemáticas, física e ingeniería, puesto que se pueden emplear para representar algunas sucesiones nuevas. Este capítulo pretende ilustrar los conceptos fundamentales de series y sucesiones, siendo estos conceptos importantes en matemáticas.

I.1.1. Sucesiones y Series.

Una sucesión es una función cuyo dominio de definición lo constituye el conjunto de los números enteros positivos y cuya representación es la siguiente:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Ejemplo: Dada la función

$$\{a_n\} = \frac{2n+1}{2n}, \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

se generaría la siguiente sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, ...$$

Nótese que para que una sucesión exista, es requisito que exista una *ley* o *fórmula generadora* con la cual sea posible obtener cualquier elemento de la sucesión; esto implica que la fórmula generadora debe estar en términos de *n*. Así, por ejemplo, para la sucesión anterior, el décimo término sería:

$$a_{10} = \frac{2x10+1}{2x10} = \frac{21}{20}$$

Cuando la fórmula o ley de la sucesión está en función del término o términos precedentes y alguna constante, se dice que la fórmula es *recursiva*; así, por ejemplo, para:

$$t_k = 2, 4, 13, 35, 97, \ldots$$

se requiere una fórmula recursiva, la cual es:

$$t_k = 2\, t_{k-1} + 2\, t_{k-2} + 1, \qquad \text{con } k = 3, 4, 5, \ldots$$

teniendo en cuenta que los *valores de inicio* son: $t_1 = 2$ y $t_2 = 4$.

En Métodos Numéricos se manejan dos tipos de fórmulas recursivas, a saber:

Simple:- Cuando en una sucesión, la fórmula generadora está en términos del elemento anterior al cual se va a calcular, más una constante, se dice que la fórmula es recursiva simple. Ejemplo:

$$a_n = 1, 4, 10, 22, 46, \ldots$$

proviene de una fórmula recursiva simple, porque:

$$a_n = 2\, a_{n-1} + 2, \qquad \text{con } n = 2, 3, 4, \ldots \quad \text{y} \quad a_1 = 1.$$

Múltiple:- Si la fórmula generadora de una sucesión está en términos de dos o más elementos anteriores al que se va a calcular, más una constante, se dice que la fórmula es recursiva múltiple. Las fórmulas recursivas múltiples pueden ser con dos términos de inicio, de tres términos de inicio, etc.

Así, la secuencia de Fibonacci, dada por 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . ., puede generarse por la siguiente fórmula recursiva múltiple:

$$t_k = t_{k-1} + t_{k-2}, \text{ con } k = 3, 4, 5, \ldots \quad \text{y} \quad t_1 = 1;\ t_2 = 1.$$

Ejemplos:- Calcular las fórmulas recursivas para las sucesiones dadas:

(a) 1, 3, 5, 9, 15, 25, . . .

Averiguar, primero, si es recursiva simple:

$t_k = A\, t_{k-1} + B$	fórmula genérica
$t_1 = 1$	término de inicio
$t_2 = A\, t_1 + B$	fórmula para el segundo término
$3 = A + B$	sustituyendo valores
$t_3 = A\, t_2 + B$	fórmula para el tercer término
$5 = 3\,A + B$	sustituyendo valores

Así, queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$3 = A + B$$
$$5 = 3\,A + B$$

Del sistema anterior:

$A = 1$	
$B = 2$	
$t_k = t_{k-1} + 2$	fórmula generada

Verificar si es correcta:

$t_5 = 15$	tomando un elemento cualquiera
$15 = 9 + 2$	sustituyendo valores
$15 = 11$ ¡¿?!	¡La fórmula no es correcta!

Averiguar si es recursiva múltiple, con dos términos de inicio:

$t_1 = 1$	primer término de inicio
$t_2 = 3$	segundo término de inicio
$t_3 = A\, t_2 + B\, t_1 + C$	fórmula para el tercer término
$5 = 3\,A + B + C$	sustituyendo valores
$t_4 = A\, t_3 + B\, t_2 + C$	fórmula para el cuarto término
$9 = 5\,A + 3\,B + C$	sustituyendo valores
$t_5 = A\, t_4 + B\, t_3 + C$	fórmula para el quinto término
$15 = 9\,A + 5\,B + C$	sustituyendo valores

Así, queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$5 = 3\,A + B + C$$
$$9 = 5\,A + 3\,B + C$$
$$15 = 9\,A + 5\,B + C$$

Del sistema anterior:

$A = 1$
$B = 1$
$C = 1$
$t_k = t_{k-1} + t_{k-2} + 1$ fórmula generada

Verificar si es correcta:

$t_5 = 15$ tomando un elemento cualquiera
$15 = 9 + 5 + 1$ sustituyendo valores
$15 = 15$ ¡La fórmula es correcta!

Así: $t_k = t_{k-1} + t_{k-2} + 1$, con $k = 3, 4, 5, \ldots$, y $t_1 = 1, t_2 = 3$

(b) 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, . . .

Averiguar, primero, si es recursiva simple:

$t_k = A\, t_{k-1} + B$ fórmula genérica
$t_1 = 1$ término de inicio
$t_2 = A\, t_1 + B$ fórmula para el segundo término
$2 = A + B$ sustituyendo valores
$t_3 = A\, t_2 + B$ fórmula para el tercer término
$2 = 2\, A + B$ sustituyendo valores

Así, queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$2 = A + B$
$2 = 2\, A + B$

Del sistema anterior:

$A = 0$
$B = 2$
$t_k = 2$ fórmula generada

Verificar si es correcta:

$t_5 = 4$ tomando un elemento cualquiera
$4 = 2$ sustituyendo valores
$4 = 2$ ¡¿?! ¡La fórmula no es correcta!

Averiguar si es recursiva múltiple, con dos términos de inicio:

$t_1 = 1$ primer término de inicio
$t_2 = 2$ segundo término de inicio

$t_3 = A\,t_2 + B\,t_1 + C$	fórmula para el tercer término
$2 = 2A + B + C$	sustituyendo valores
$t_4 = A\,t_3 + B\,t_2 + C$	fórmula para el cuarto término
$4 = 2A + 2B + C$	sustituyendo valores
$t_5 = A\,t_4 + B\,t_3 + C$	fórmula para el quinto término
$4 = 4A + 2B + C$	sustituyendo valores

Así, queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$2 = 2A + B + C$$
$$4 = 2A + 2B + C$$
$$4 = 4A + 2B + C$$

Del sistema anterior:

$A = 0$
$B = 2$
$C = 0$
$t_k = 2\,t_{k-2}$ fórmula generada

Verificar si es correcta:

$t_6 = 8$	tomando un elemento cualquiera
$8 = 2 \times 4$	sustituyendo valores
$8 = 8$	¡La fórmula es correcta!

Así: $t_k = 2\,t_{k-2}$, con $k = 3, 4, 5, \ldots,$ y $t_1 = 1, t_2 = 2$

NOTAS:

(a) Las fórmulas NO están completas si no se especifican los valores de k y los valores de los términos de inicio para los cuales la fórmula es válida, ya que estos determinan la serie. Valores de términos de inicio distintos generarán sucesiones distintas, aún con la misma fórmula recursiva.

(b) Los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por cualquier técnica conocida; más adelante se estudiarán otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

I.1.2. Convergencia en sucesiones

Se dice que una sucesión es *convergente* si existe un número L, de tal suerte que si $n \to \infty$, entonces $a_n \to L$. Así, por ejemplo, para la sucesión siguiente:

$$\{a_n\} = 1 - \frac{1}{n} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

por cálculo se puede demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Lo anterior significa que la sucesión es convergente, puesto que los elementos se van acercando a un valor específico; particularmente para esta sucesión, el valor de convergencia es 1.

Por otra parte, una sucesión es *divergente* cuando su límite es infinito o no existe.

I.1.3. Criterio de Cauchy para la convergencia de una sucesión

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es convergente, si dado un número ε (arbitrariamente pequeño), existe un número N > 0 tal que:

$$|a_q - a_p| < \varepsilon \qquad \text{para } p, q > N \text{ y } q = p + 1$$

Por ejemplo, para $\{a_n\}$ = $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, supongamos ε = 0.001 (arbitrariamente pequeña) y N = 9 (> 0).

Probemos con p = 10 y q = 11:

$$|a_{11} - a_{10}| = |0.0004882 - 0.0009765| = 0.0004883 < 0.001$$

Así, la sucesión es convergente porque para una ε arbitrariamente pequeña y una N > 0, se encontraron p y q tales que cumplieron la condición.

Sin embargo, la convergencia en sucesiones no debe basarse en el valor de N, sino en los valores de p y q que llegan a cumplir la condición de convergencia; por ejemplo, en el caso anterior, si se da una ε arbitrariamente pequeña, es posible que el criterio arroje una no convergencia aún cuando se sabe que sí lo es. Para clarificar lo anterior, se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Averiguar si las sucesiones dadas son convergentes o no.

(a) La sucesión es: $\{a_n\} = \frac{2n-1}{5n}$

n	**a_n**	**$\lvert a_q - a_p \rvert$**
1	1/5	
2	3/10	$\lvert 3/10 - 1/5 \rvert = 0.1$
3	5/15	$\lvert 5/15 - 3/10 \rvert = 0.033$
4	7/20	$\lvert 7/20 - 5/15 \rvert = 0.016$
5	9/25	$\lvert 9/25 - 7/20 \rvert = 0.01$
6	11/30	$\lvert 11/30 - 9/25 \rvert = 0.0066$

De aquí se tiene: si $n \to \infty$, entonces $|a_q - a_p| \to 0$; por lo tanto, llegará el momento en que, para alguna *p* y *q*, se cumpla que $|a_q - a_p| < \varepsilon$. Esto es, la sucesión SI converge.

(b) La sucesión es: $\{t_k\} = t_{k-1} + t_{k-2} + 1$, con $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$

k	**t_k**	**$\lvert t_q - t_p \rvert$**
1	1	
2	2	$\lvert 2 - 1 \rvert = 1$
3	4	$\lvert 4 - 2 \rvert = 2$
4	7	$\lvert 7 - 4 \rvert = 3$
5	12	$\lvert 12 - 7 \rvert = 5$

De aquí se tiene: si $k \to \infty$, entonces $|t_q - t_p| \to \infty$; por lo tanto, no llegará el momento en que, para alguna *p* y *q*, se cumpla que $|t_q - t_p| < \varepsilon$. Esto es, la sucesión NO converge.

I.1.4. Series

Series infinitas:- Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces una expresión de la forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

se llama una serie infinita o simplemente una serie. Esta serie es un elemento de la llamada sucesión de sumas parciales, cuyos términos se definen así:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n$$

La cual puede ser representada por: $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

y cuya fórmula recursiva es: $S_n = S_{n-1} + a_n$ con $S_1 = a_1$ y $n = 2, 3, 4, \ldots$

Por otro lado, una serie es la suma de los términos de una sucesión, de aquí que: si la sucesión que origina una serie es convergente, ésta también lo será.

En Métodos Numéricos existen dos series de gran importancia:

(a) Series de potencia de x:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

(b) Series de potencia de x-a:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i (x-a)^i = C_0 + C_1 (x-a) + C_2 (x-a)^2 + \ldots + C_n (x-a)^n + \ldots$$

Para calcular los coeficientes Ci de la serie de potencias de x, iguálese la serie a una función y derívese con respecto a la variable x:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

Las derivadas son:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots + nC_n x^{n-1} + \ldots$$
$$f''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3 x + \ldots + (n-1)(n)C_n x^{n-2} + \ldots$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 3C_3 + \ldots + (n-2)(n-1)(n)C_n x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^n(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 C_n x^{n-n} + \ldots$$

Evaluando la función y estas derivadas en el punto x = 0, se obtiene:

$f(0) = C_0$
$f'(0) = C_1$
$f''(0) = 2!\, C_2$
$f'''(0) = 3!\, C_3$
$f^{IV}(0) = 4!\, C_4$
. . . . . .
$f^{n}(0) = n!\, C_n$

y despejando los C_i y sustituyendo en la fórmula general, se obtiene la llamada Serie de McLaurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \ldots$$

Así, por ejemplo, si f(x) = Sen(x), se tiene:

f(x) = Sen(x)	f(0) = 0
f'(x) = Cos(x)	f'(0) = 1
f''(x) = - Sen(x)	f''(0) = 0
f'''(x) = - Cos(x)	f'''(0) = - 1
f^{IV}(x) = Sen(x)	f^{IV}(0) = 0
f^{V}(x) = Cos(x)	f^{V}(0) = 1
. . . . .	. . . . .

Por lo tanto:

$$Sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

Análogamente, para la serie de potencias de x – a:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i (x-a)^i$$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n + ...$$

Las derivadas son:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} + ...$$
$$f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3(x-a) + ... + (n-1)(n)C_n(x-a)^{n-2} + ...$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3C_3 + ... + (n-2)(n-1)(n)C_n(x-a)^{n-3} + ...$$
$$. . . . .$$
$$f^n(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1C_n(x-a)^{n-n} + ...$$

Evaluando la función y estas derivadas en el punto x = a, se obtiene:

f(a) = C_0
f'(a) = C_1
f''(a) = 2! C_2
f'''(a) = 3! C_3
. . . . . .
f^n(a) = n! C_n

Despejando los C_i y sustituyendo en la fórmula general, se obtiene la llamada Serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Así, por ejemplo, si f(x) = ln(x) y a = 1, se obtiene:

f(x) = ln(x)	f(1) = 0
f'(x) = $\frac{1}{x}$	f'(1) = 1
f''(x) = $-\frac{1}{x^2}$	f''(1) = - 1
f'''(x) = $\frac{2}{x^3}$	f'''(1) = 2
f^{IV}(x) = $-\frac{6}{x^4}$	f^{IV}(1) = - 6
f^{V}(x) = $\frac{24}{x^5}$	f^{V}(1) = 24
. . . . .	. . . . .

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \frac{24(x-1)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

Nótese que la Serie de McLaurin pudo ser calculada por Taylor con a = 0.

Como un ejemplo, calcúlese:

$$\int_0^1 e^x dx$$

Para evaluar la integral pedida, se evalúa primero por McLaurin (o Taylor):

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots\right) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2!} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{3!} dx + \ldots + \int_0^1 \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} dx + \ldots$$

se deja al lector la evaluación numérica de la ecuación anterior y, por lo tanto, la conclusión del ejemplo.

I.2. Teoría de errores.

Uno de los criterios más importantes para seleccionar cuál de los métodos de solución de un problema dado es el óptimo, es la precisión que arrojan los cálculos de éste, ya sea hechos a mano o por computadora. Las computadoras digitales producen resultados altamente precisos, aún en el manejo de números muy grandes o muy pequeños.

Ahora bien, una pregunta obligada es: ¿porqué nos conciernen los errores en el estudio de los métodos numéricos?

Existen muchas razones para estudiarlos: primero, porque en el manejo de datos provenientes de observaciones y mediciones, éstos pueden contener errores llamados INHERENTES, los cuales son debidos a la falta de eficiencia en los cálculos o errores en las mediciones. Otra razón se debe a que el modelo matemático usado para generar los datos es sólo una aproximación al sistema que representa. Una razón más, es que los métodos numéricos son muchas veces utilizados para aproximar una solución a problemas que no pueden ser resueltos por métodos analíticos exactos. Finalmente, se cometen errores durante los cálculos como lo son los errores por redondeo y errores por truncamiento. Todos estos errores deben tomarse en cuenta durante las operaciones.

I.2.1. Tipos de errores.

Existen varios tipos de errores, pero en los cálculos realizados por medio de los Métodos Numéricos, se distinguen cuatro tipos básicos:

(a) por truncamiento
(b) por redondeo
(c) absoluto
(d) relativo

I.2.1.1. Errores por truncamiento.

Se dan cuando un cálculo de tipo infinito es trabajado como finito. Por ejemplo:

$$Cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

para evaluar Cos(0.75), se tiene:

$$Cos(0.75) = 1 - \frac{(0.75)^2}{2!} + \frac{(0.75)^4}{4!} - \frac{(0.75)^6}{6!} + \frac{(0.75)^8}{8!}$$

Cos(0.75) = 1 – 0.28125 + 0.01318 – 0.0002471 + 0.000002483
Cos(0.75) = 0.73168

Lo cual representa sólo una aproximación al valor real.

I.2.1.2. Errores por redondeo.

Se dan cuando se trabaja con números irracionales o racionales con un número de decimales superior a alguno especificado. Por ejemplo:

$A = 0.3763956 \times 10^{-6}$
$A = 0.376 \times 10^{-6}$ trabajando con tres decimales de aproximación.

I.2.1.3. Errores absolutos.

El error absoluto de dos números, X y Y, se define como:

$\varepsilon_X = X_v - X$
$\varepsilon_Y = Y_v - Y$

donde:

$\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ = errores absolutos
X_v, Y_v = valores verdaderos
X, Y = valores calculados

y para las operaciones aritméticas:

$$\varepsilon_{X \oplus Y} = (X_v \oplus Y_v) - (X \oplus Y)$$

I.2.1.4. Errores relativos.

Este error está definido como: $r_x = \dfrac{\varepsilon_X}{X}$

y para dos números: $r_{x \oplus Y} = \dfrac{\varepsilon_{X \oplus Y}}{X \oplus Y}$

donde $\oplus$ representa cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas.

Ejemplo: Supóngase que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache. Se encuentra que el puente mide 9999 cm y el remache mide 9 cm; si los valores verdaderos deben ser 10000 y 10 cm, respectivamente, calcúlese el error absoluto y el error relativo en cada caso.

Evaluación de los errores absolutos:

(a) puente: $\varepsilon_P = P_v - P = 10000 - 9999 = 1$ cm

(b) remache: $\varepsilon_R = R_v - R = 10 - 9 = 1$ cm

Evaluación de los errores relativos:

(a) puente: $$r_P = \frac{\varepsilon_P}{P} = \frac{1}{9999} = 0.00010001$$

(b) remache: $$r_R = \frac{\varepsilon_R}{R} = \frac{1}{9} = 0.11111$$

Obsérvese la diferencia básica entre los errores absoluto y relativo. El error absoluto es simplemente el valor numérico, mientras que el error relativo es el porcentaje de error entre el valor obtenido y el calculado. En el ejemplo anterior, los dos errores absolutos son iguales lo cual nos da una idea clara de lo que esto significa; sin embargo, los errores relativos explican que el puente tiene un 0.01% de error y el remache un 11.11% de error. Resulta obvio que el puente no se caerá con un error de tal magnitud; pero el remache debe ser desechado ya que puede no soportar las mínimas normas de calidad.

IMPORTANTE

En ocasiones, cuando los cálculos se realizan iterativamente hasta obtener un valor lo más exacto posible, se utiliza para el cálculo del error relativo la fórmula siguiente:

$$r = \frac{X_a - X_P}{X_a}$$

donde:

X_a = aproximación n-ésima
X_P = aproximación anterior a la n-ésima

lo cual no involucra el valor verdadero, que generalmente es desconocido. Lo anterior se presenta en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Utilizando la expansión de la Serie de McLaurin, calcule el valor de $e^{0.5}$ hasta que el error sea menor que el 1%.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

n	término	aproximación	error
1	$\frac{0.5^0}{0!}$	1	
2	$\frac{0.5^1}{1!}$	1.5	$\frac{1.5-1.0}{1.5}=0.333$
3	$\frac{0.5^2}{2!}$	1.625	$\frac{1.625-1.5}{1.625}=0.0769$
4	$\frac{0.5^3}{3!}$	1.64583	$\frac{1.6458-1.625}{1.6458}=0.0126$
5	$\frac{0.5^4}{4!}$	1.648434	$\frac{1.6484-1.6458}{1.6484}=0.0016$

Así, $e^{0.5}$ es igual a 1.648434 con un error de 0.16%.

En la tabla anterior, la tercera columna es el resultado de la aproximación anterior más el término evaluado.