# CAPITULO V

**Diferenciación e Integración.**

## V.1. Introducción.

En los cursos de Cálculo se estudian métodos exactos para calcular derivadas e integrales. En algunas ocasiones estos métodos resultan muy complicados, en otros casos no se tiene la función a derivar e integrar, sino una tabla de valores; para casos como estos, y en los que se requiere una gran exactitud, un método de los que se estudiarán aquí resulta apropiado. Estos métodos calculan las derivadas e integrales de manera aproximada por medio de procedimientos numéricos alternos.

## V.2. Diferenciación.

Se abordará, primero, el tema relacionado con la diferenciación y se estudiarán dos métodos para derivar funciones.

### V.2.1. Derivación por medio de límites.

Los métodos de derivación estudiados en cursos tradicionales de Cálculo son, generalmente, apropiados para el cálculo de los mismos; sin embargo, estos métodos pueden resultar complicados en algunos casos de funciones muy especiales. Para tales casos, se tienen a la mano los siguientes Métodos Numéricos:

Por los cursos de Cálculo se sabe que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siendo éste un límite en el que se manejan números muy pequeños, se puede trabajar de la siguiente manera:

$$f'(x) = [f(x+h) - f(x)]\,k \qquad \text{donde } k = h^{-1}$$

Se puede tomar $h = 0.1^n$ con n = 1, 2, 3, . . ., ya que $h \to 0$si $n \to \infty$. Se toma, además, el criterio de Cauchy como criterio de paro en el cálculo de la integral. Para este método se da a continuación el algoritmo estructurado:

**Algoritmo Derivada:**

**Definir f(x)**
**Leer x, ε**
**n = 1**
**da = 1 x $10^{10}$**
**Repetir**
 $k = \dfrac{1}{0.1^n}$
 **d = [f(x + $0.1^n$) – f(x)] * k**
 **delta = |da – d|**
 **da = d**
 **n = n + 1**
**Hasta delta < ε**
**Imprimir d**
**Terminar**

Ejemplo: Calcular f'(2.5) para f(x) = 3 x2 – 5 x + 6, con ε = 0.001

$$f(2.5) = 12.25$$

| n | h | k | x + h | f'(x) | ε |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 10 | 2.6000 | 10.3000 | - - - |
| 2 | $0.1^2$ | 100 | 2.5100 | 10.0300 | 0.2700 |
| 3 | $0.1^3$ | 1000 | 2.5010 | 10.0030 | 0.0270 |
| 4 | $0.1^4$ | 10000 | 2.5001 | 10.0003 | 0.0027 |
| 5 | $0.1^5$ | 100000 | 2.5000 | 10.0000 | 0.0003 |

Como un segundo ejemplo, se presenta una derivada que no existe; así, se estudia el comportamiento del método en casos como estos, los cuales no son poco comunes.

Ejemplo: Calcular f'(1) para f(x) = $\sqrt[3]{x-1}$ con ε = 0.001.

$$f(1) = 0$$

| n | h | k | x + h | f'(x) | ε |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 10 | 1.1000 | 4.6416 | - - - |
| 2 | $0.1^2$ | 100 | 1.0100 | 21.5443 | 16.9027 |
| 3 | $0.1^3$ | 1000 | 1.0010 | 100.0000 | 78.4557 |
| 4 | $0.1^4$ | 10000 | 1.0001 | 464.1588 | - - - |

El método no converge; por lo tanto, la derivada pedida no existe.

### V.2.2. Derivación por medio de diferencias finitas.

Dada la función f(x) definida por:

| x | y |
|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| . . . | . . . |
| $x_n$ | $y_n$ |

de la interpolación de Newton se sabe que:

$$f(x) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

es un polinomio de grano n+1 que pasa por todos los puntos. Así, hallando la derivada de la fórmula anterior, se halla la derivada para cualquier punto tabulado.

Tomando en cuenta que: $x = x_0 + k\,h$

y por lo tanto: $k\,h = x - x_0$

se tiene: $k = \dfrac{(x - x_0)}{h}$

y también. $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x - x_0}{h}\right) = \dfrac{1}{h}$

Ahora, derivando ambos miembros de la igualdad de la función de Newton con respecto a x, se tiene:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dk}\left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k^2 - k}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k^3 - 3k^2 + 2k}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]\frac{dk}{dx}$$

Finalmente, se obtiene:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

La anterior es la fórmula de derivación de primer orden. Una forma alterna de calcular la derivada es calcular la función siguiendo el método de Newton y derivando ésta; así, sustituyendo se obtiene:

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)\Delta y_0}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0}{h^2 2!} + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\Delta^n y_0}{h^n n!}$$

la cual es una función derivable.

Ejemplo: Calcular f'(x) para la tabla de valores dada:

| $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ | $\Delta^5 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.7937 | 1.0901 | 0.6232 | 0.0563 | 0.0254 | - 0.1212 |
| 1.5 | 1.8838 | 1.7133 | 0.6795 | 0.0817 | - 0.0958 | |
| 2.0 | 3.5971 | 2.3928 | 0.7912 | - 0.0141 | | |
| 2.5 | 5.9899 | 3.1540 | 0.7471 | | | |
| 3.0 | 9.1139 | 3.9011 | | | | |
| 3.5 | 13.0150 | | | | | |

Sustituyendo en la fórmula:

$$f(x) = 0.7937 + \frac{(x-1)}{0.5}(1.0901) + \frac{(x-1)(x-1.5)}{0.5^2 2!}(0.6232) + \frac{(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5^3 3!}(0.0563)$$
$$+ \frac{(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5)}{0.5^4 4!}(-0.1212)$$

$$f(x) = 0.0751\, x^3 + 0.9085\, x^2 - 0.4476\, x + 0.2578$$

Por lo tanto, la derivada es:

$$f'(x) = 0.2253\, x^2 + 1.817\, x - 0.4476$$

Solo para efectos comparativos, se da una tabla con los valores calculados por medio de la función y los valores reales de la derivada:

| x | $y'_{calculada}$ | $y'_{real}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.5947 | 1.5874 |
| 1.5 | 2.7848 | 2.7848 |
| 2 | 4.0876 | 4.0876 |
| 2.5 | 5.5030 | 5.5006 |
| 3 | 7.0311 | 7.0107 |
| 3.5 | 8.6718 | 8.6073 |

Esta forma alterna de trabajar las derivadas es muy apropiado si se pretenden encontrar derivadas de varios puntos; pero si se necesita un sólo punto o dos, el proceso es muy complicado y resulta más apropiado utilizar la fórmula de derivación de primer orden en lugar de esta forma alterna.

Como nota final, obsérvese que la fórmula tiene unos pocos sumandos; para tener una mejor aproximación pueden calcularse algunos otros e incluso se puede derivar de nuevo esta fórmula, tantas veces como sea necesario, para obtener derivadas de segundo orden y de orden superior en general.

## V.3. Integración.

La presente sección presenta los métodos utilizados para calcular las integrales por medio de los Métodos Numéricos. Se presentan tres de los métodos más utilizados.

### V.3.1. Integración por el Método del Trapecio.

En los cursos de Cálculo se define la integral de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x \to 0\|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

esta definición tiene un significado geométrico según se muestra en la Figura V.1: la integral es el área debajo de la curva f(x) y es una sumatoria infinita si se toma en cuenta que $\Delta x \to 0$. Ahora, al trabajar la integral numéricamente, para evitar tomar valores de $\xi_i$ desconocidos, cuando se desean un número finito de sumandos y tratando de evitar lo más posible el error, se pueden considerar trapecios en lugar de rectángulos, según se muestra en la Figura V.2.

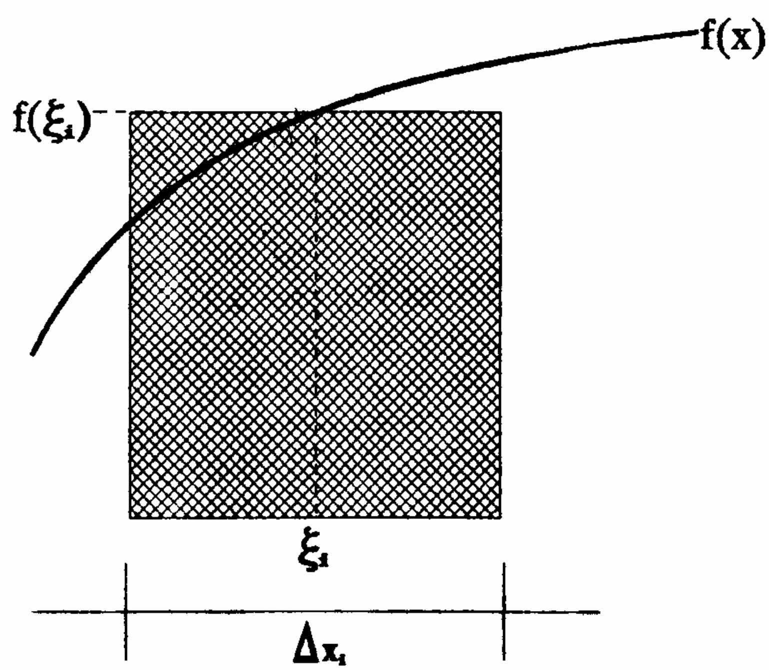


Figura V.1. Definición de Integral.

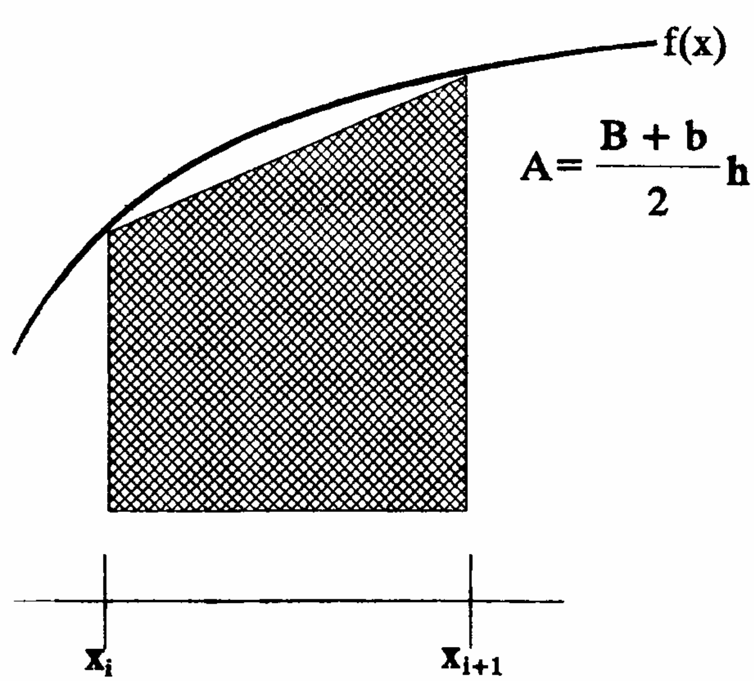


Figura V.2. El método del trapecio.

En la Figura V.2 se tiene:

$$B = f(x_{i+1})$$
$$b = f(x_i)$$
$$h = x_{i+1} - x_i$$

Así, se tiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$$

Para cubrir un intervalo [a, b], se divide éste en n subintervalos, los cuales deben cumplir con $h = x_{i+1} - x_i$ y también con $a = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$. Así:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

En la ecuación anterior cada integral cumple con:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$$

Por lo tanto se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \frac{h}{2}(y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

De manera resumida:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left( y_1 + y_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)$$

Este método es conocido como el **Método del Trapecio** y es una forma de aproximarse al valor de la integral. El valor calculado de la integral será cercano al valor real como se requiera, dependiendo del número de subintervalos con el que se divida el intervalo dado; esto es, a mayor número de subintervalos, mayor aproximación. De manera similar a los métodos anteriores, se presentan a continuación dos algoritmos estructurados para éste método; el primero asume el conocimiento dela función a integrar y el segundo trabaja con una tabla de valores.

**Algoritmo Trapecio:**

```
Definir f(x)
Leer a, b, n
h = (b – a)/(n – 1)
x = a
i = 1
Repetir
        yi = f(x)
        i = i + 1
        x = x + h
Hasta x > b
área = y1 + yn
Para i = 2 hasta n – 1
        área = área + 2 * yi
fin_para
área = área * h/2
Imprimir área
Terminar
```

**Algoritmo Trapecio:**

```
Leer n, h
Para i = 1 hasta n
        Leer yi
fin_para
área = y1 + yn
Para i = 2 hasta n – 1
        área = área + 2 * yi
fin_para
área = área * h/2
Imprimir área
Terminar
```

Ejemplo: Calcular la integral pedida, trabajando con seis intervalos:

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2}$$

Para trabajar con seis subintervalos se tiene:

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(3-0)}{6} = 0.5$$

Así, se genera una tabla de la siguiente manera:

| x | y | m | y * m |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0625 | 1 | 0.0625 |
| 0.5 | 0.0615 | 2 | 0.1230 |
| 1.0 | 0.0588 | 2 | 0.1176 |
| 1.5 | 0.0548 | 2 | 0.1096 |
| 2.0 | 0.0500 | 2 | 0.1006 |
| 2.5 | 0.0449 | 2 | 0.0898 |
| 3.0 | 0.0400 | 1 | 0.0400 |
| | | Σ = | **0.6425** |

La integral, por lo tanto, es:

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} = \frac{0.5}{2}(0.6425) = 0.160625$$

Para facilitar el cálculo de la integral, se genera la tabla de la siguiente manera:

( a ) Las dos primeras columnas son los valores de x y f(x), respectivamente.
( b ) La tercera columna es un factor que multiplica a f(x); en este método en particular, el factor es 1 para el primero y último valores y 2 para los intermedios.
( c ) La cuarta columna es el resultado de las multiplicaciones. Esta columna requiere ser sumada.
( d ) La integral se calcula multiplicando la suma obtenida de la tabla por el valor de h y dividiendo entre 2.

### V.3.2. Integración por el Método de Simpson.

Una forma más exacta de calcular la integral es haciendo pasar una parábola, en lugar de una recta, pero entre tres puntos consecutivos de la función. Esto se muestra en la Figura V.3. La función f(x) tiene la forma a $x^2$ + b x + c y por lo tanto se tiene:

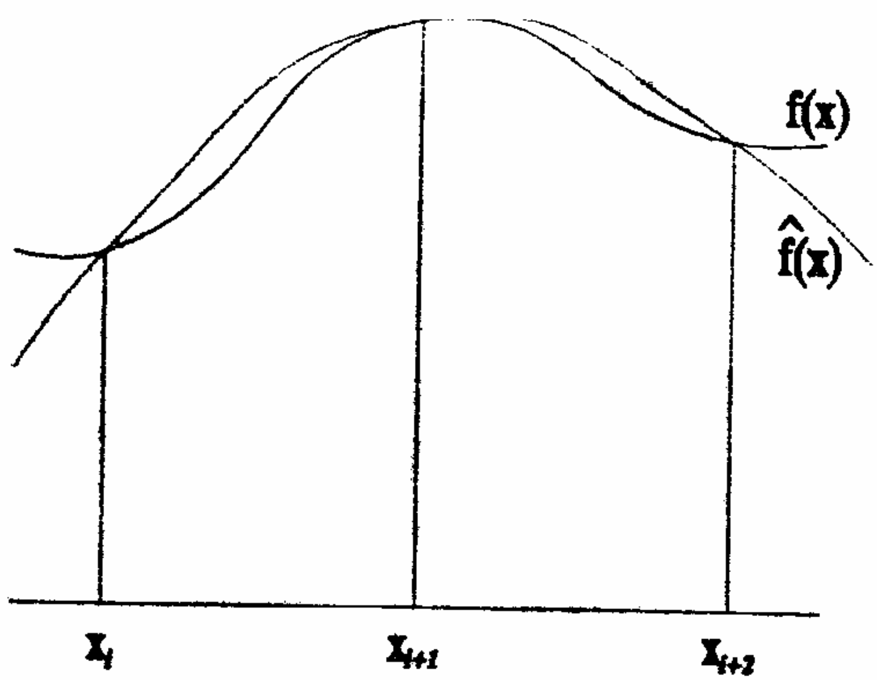


Figura V.3. Método de Simpson 1/3

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \hat{f}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (ax^2 + bx + c)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d\right]_{x_i}^{x_{i+2}}$$

$$= \left(\frac{ax_{i+2}^3}{3} + \frac{bx_{i+2}^2}{2} + cx_{i+2} + d\right) - \left(\frac{ax_i^3}{3} + \frac{bx_i^2}{2} + cx_i + d\right)$$

$$= \frac{a}{3}\left(x_{1+2}^3 - x_i^3\right) + \frac{b}{2}\left(x_{i+2}^2 - x_i^2\right) + c\left(x_{i+2} - x_i\right)$$

$$= \frac{a}{3}\left(x_{i+2} - x_i\right)\left(x_{i+2}^2 + x_{i+2}x_i + x_i^2\right) + \frac{b}{2}\left(x_{i+2} - x_i\right)\left(x_{i+2} + x_i\right) + c\left(x_{i+2} - x_i\right)$$

$$= \frac{\left(x_{i+2} - x_i\right)}{6}\left(2a\left(x_{i+2}^2 + x_{i+2}x_i + x_i^2\right) + 3b\left(x_{i+2} + x_i\right) + 6c\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$y_i = a\,x_i^2 + b\,x_i + c$$
$$y_{i+1} = a\,x_{i+1}^2 + b\,x_{i+1} + c$$
$$y_{i+2} = a\,x_{i+2}^2 + b\,x_{i+2} + c$$
$$x_{i+1} - x_i = h$$
$$x_{i+2} - x_i = 2h$$

Se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = \frac{2h}{6}\left(2ax_{i+2}^2 + 2ax_{i+2}x_i + 2ax_i^2 + 3bx_{i+2} + 3bx_i + 6c\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\left[ax_i^2 + bx_i + c\right] + \left[ax_{i+2}^2 + bx_{i+2} + c\right] + ax_{i+2}^2 + 2ax_{i+2}x_i + ax_i^2 + 2bx_{i+2} + 2bx_i + 4c\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_i + y_{i+2} + a\left(x_{i+2}^2 + x_i^2 + 2x_{i+2}x_i\right) + 2b\left(x_{i+2} + x_i\right) + 4c\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_i + y_{i+2} + a\left(x_{i+2} + x_i\right)^2 + 2b\left(x_{i+2} + x_i\right) + 4c\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_i + y_{i+2} + 4\left[\frac{a}{4}\left(x_{i+2} + x_i\right)^2 + \frac{b}{2}\left(x_{i+2} + x_i\right) + c\right]\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left( y_i + y_{i+2} + 4\left[ a\left(\frac{x_{i+2}+x_i}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_{i+2}+x_i}{2}\right) + c \right]\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left( y_i + y_{i+2} + 4\left( ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c\right)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left( y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right)$$

Para el área desde $x_0$ hasta $x_n$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Así:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left( y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{n-1,2} y_i + 2\sum_{i=2}^{n-2,2} y_i \right)$$

Este método es conocido como **Método de Simpson de 1/3** y es aplicable sólo cuando n es par (número par de áreas). De manera similar al método anterior, se presentan a continuación sus dos algoritmos estructurados.

**Algoritmo Simpson 1/3:**

```
Definir f(x)
Leer a, b, n
h = (b – a)/(n – 1)
x = a
i = 1
Repetir
        yi  = f(x)
        i = i + 1
        x = x + h
Hasta x > b
área = y1 + yn
```

**Algoritmo Simpson 1/3:**

```
Leer n, h
Para i = 1 hasta n
        Leer yi
fin_para
área = y1 + yn
Para i = 2 hasta n – 1
    Si i mod 2 = 0
        entonces área = área + 4 * yi
        si_no área = área + 2 * yi
    fin_si
fin_para
```

**Para i = 2 hasta n – 1**
    **Si i mod 2 = 0**
        **entonces área = área + 4 * $y_i$**
        **si_no área = área + 2 * $y_i$**
    **fin_si**
**fin_para**
**área = área * h/3**
**Imprimir área**
**Terminar**

**área = área * h/3**
**Imprimir área**
**Terminar**

Ejemplo: Calcular por Simpson 1/3, la integral para los valores dados:

| i | x | y | m | y * m |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000 | 1.0000 | 1 | 1.0000 |
| 1 | 0.125 | 1.0156 | 4 | 4.0624 |
| 2 | 0.250 | 1.0625 | 2 | 2.1250 |
| 3 | 0.375 | 1.1406 | 4 | 4.5624 |
| 4 | 0.500 | 1.2500 | 2 | 2.5000 |
| 5 | 0.625 | 1.3906 | 4 | 5.5624 |
| 6 | 0.750 | 1.5625 | 2 | 3.1250 |
| 7 | 0.875 | 1.7656 | 4 | 7.0624 |
| 8 | 1.000 | 2.0000 | 1 | 2.0000 |
| | | | Σ = | **31.9996** |

NOTA: Observe la tabla de valores y la ausencia de la función. Si se tiene la tabla, la función es irrelevante.

La integral por lo tanto, es:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{0.125}{3}(31.9996) = 1.3333$$

Para facilitar el cálculo de la integral, se genera la tabla de la siguiente manera:

( a ) La primera columna es la de los subíndices de x para determinar el factor que le corresponde.
( b ) Las dos siguientes columnas son los valores de x y f(x), respectivamente.
( c ) La cuarta columna es un factor que multiplica a f(x); en este método en particular, el factor es 1 para el primero y último valores, 4 para los subíndices impares y 2 para los pares.
( d ) La quinta columna es el resultado de las multiplicaciones. Esta columna requiere ser sumada.
( e ) La integral se calcula multiplicando la suma obtenida de la tabla por el valor de h y dividiendo entre 3.

Para hacer aún más exacta la integral, tómense ahora, cuatro puntos y pásese una cúbica a través de ellos, según la Figura V.4.

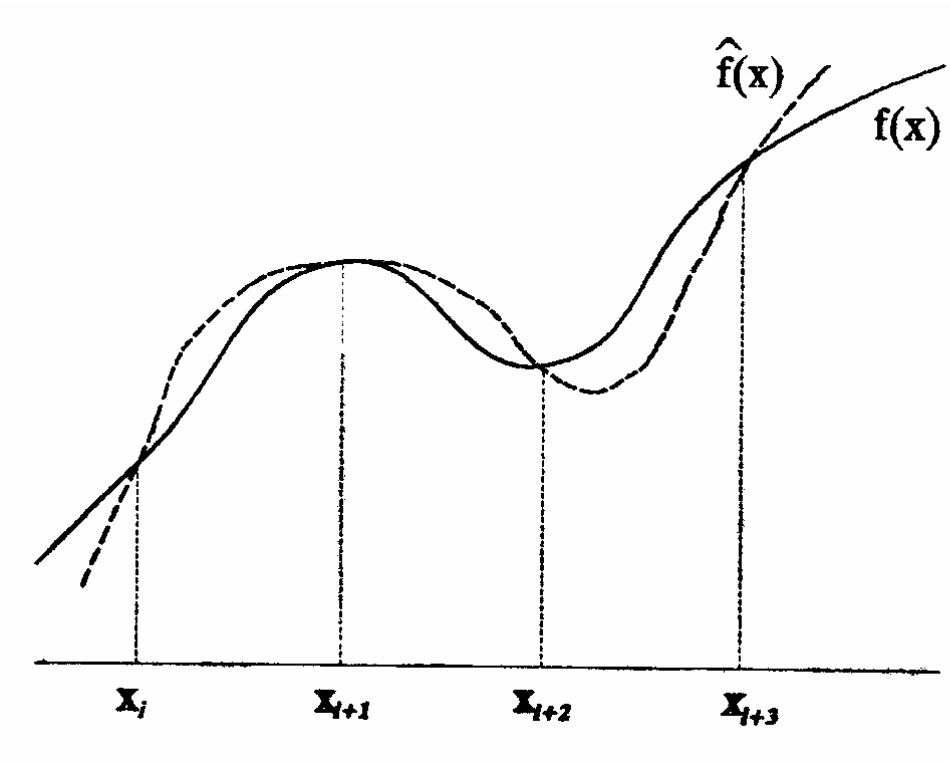


Figura V.4. Método de Simpson 3/8.

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+3}} \hat{f}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+3}} (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left[ \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + e \right]_{x_i}^{x_{i+3}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$y_i = a x_i^3 + b x_i^2 + c x_i + d$$
$$y_{i+1} = a x_{i+1}^3 + b x_{i+1}^2 + c x_{i+1} + d$$
$$y_{i+2} = a x_{i+2}^3 + b x_{i+2}^2 + c x_{i+2} + d$$
$$y_{i+3} = a x_{i+3}^3 + b x_{i+3}^2 + c x_{i+3} + d$$
$$x_{i+1} - x_i = h$$
$$x_{i+2} - x_i = 2h$$
$$x_{i+3} - x_i = 3h$$

De manera similar al Método de Simpson de 1/3 obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3}\right)$$

En el área desde $x_0$ hasta $x_n$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{x_9} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \frac{3h}{8}(y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9) + ...$$
$$+ \frac{3h}{8}(y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + ... + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$$

Así:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + y_n + 2\sum y_i + 3\sum y_j\right)$$ con i = múltiplos de 3; j = resto de ordenadas.

Este método es conocido como **Método de Simpson de 3/8** y es aplicable sólo cuando n es múltiplo de 3, lo cual asegura que se tiene un múltiplo de 3 como número de áreas. De manera similar a los métodos anteriores, se presentan a continuación sus dos algoritmos estructurados.

**Algoritmo Simpson 3/8:**

```
Definir f(x)
Leer a, b, n
h = (b – a)/(n – 1)
x = a
i = 1
Repetir
        yi  = f(x)
        i = i + 1
        x = x + h
Hasta x > b
área = y1 + yn
Para i = 2 hasta n – 1
    Si (i – 1) mod 3 = 0
        entonces área = área + 2 * yi
        si_no área = área + 3 * yi
    fin_si
```

**Algoritmo Simpson 3/8:**

```
Leer n, h
Para i = 1 hasta n
        Leer yi
fin_para
área = y1 + yn
Para i = 2 hasta n – 1
    Si (I – 1) mod 3 = 0
        entonces área = área + 2 * yi
        si_no área = área + 3 * yi
    fin_si
fin_para
área = 3 * área * h/8
        Imprimir área
Terminar
```

**fin_para**
**área = 3 * área * h/8**
**Imprimir área**
**Terminar**

Ejemplo: Calcular por Simpson 3/8, la integral para los valores dados:

| i | X | y | m | y * m |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 6 | 1 | 6 |
| 1 | 4 | 4 | 3 | 12 |
| 2 | 6 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 8 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 10 | 2 | 3 | 6 |
| 5 | 12 | 6 | 3 | 18 |
| 6 | 14 | 14 | 1 | 14 |
| | | | Σ = | **64** |

La integral por lo tanto, es:

$$\int_2^{14} f(x)dx = \frac{3(2)}{8}(64) = 48$$

Para facilitar el cálculo de la integral, se genera la tabla de la siguiente manera:

( a ) La primera columna es la de los subíndices de x para determinar el factor que le corresponde.
( b ) Las dos siguientes columnas son los valores de x y f(x), respectivamente.
( c ) La cuarta columna es un factor que multiplica a f(x); en este método en particular, el factor es 1 para el primero y último valores, 2 para los subíndices múltiplos de 3 y 3 para el resto de las ordenadas.
( d ) La quinta columna es el resultado de las multiplicaciones. Esta columna requiere ser sumada.
( e ) La integral se calcula multiplicando la suma obtenida de la tabla por el valor de h y por 3 y dividiendo entre 8.

### V.3.3. Integración por el Método de los Coeficientes Indeterminados.

Haciendo una inspección en los métodos anteriores, se puede determinar que el cálculo de la integral de una función se resume a evaluar una ecuación como la siguiente:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

en donde los coeficientes $A_i$ varían según el método utilizado.

El método conocido como **Coeficientes Indeterminados** intenta calcular la integral a partir de la fórmula anterior asumiendo que cada función a integrar tienen sus particulares valores de $A_i$. Para derivar este método, sea E el error de cálculo dado de la siguiente manera:

$$E = \int_a^b f(x)dx - I$$

Se puede demostrar que E = 0 para funciones polinomiales de grado n; por lo tanto, dicho error también será cero para polinomios de grado menor a n. Esto significa que E es igual a cero para:

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$$

Para cada una de las funciones anteriores se tienen las siguientes relaciones:

Para f(x) = 1:

$$\int_a^b dx = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

Para f(x) = x:

$$\int_a^b xdx = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n$$

Para f(x) = $x^2$:

$$\int_a^b x^2 dx = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2$$

Para f(x) = $x^3$:

$$\int_a^b x^3 dx = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 + \ldots + A_n x_n^3$$

. . .     . . .     . . .     . . .     . . .     . . .     . . .

Para f(x) = $x^n$:

$$\int_a^b x^n dx = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_n x_n^n$$

Por otro lado, los términos independientes de estas fórmulas están dados por:

$$\int_a^b x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

De lo anterior, para calcular los valores de los coeficientes, se requiere solucionar el siguiente sistema:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = b - a$$

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_n x_n^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Este método es conocido como **Método de Coeficientes Indeterminados** y es exacto cuando la integral a calcular es un polinomio. De manera similar a los métodos anteriores, se presentan a continuación sus dos algoritmos estructurados.

**Algoritmo Coeficientes:**

```
Definir f(x)
Leer a, b, n
h = (b – a)/(n – 1)
x = a
i = 1
Repetir
        yi = f(x)
        i = i + 1
        x = x + h
Hasta x > b
Para i = 1 hasta n
        Para j = 1 hasta n
                aij = xj^(i-1)
        fin_para
        ai,n+1 = (xn^i – x0^i)/i
fin_para
Gauss (aij)
```

**Algoritmo Coeficientes:**

```
Leer n
Para i = 1 hasta n
        Leer xi, yi
fin_para
Para i = 1 hasta n
        Para j = 1 hasta n
                aij = xj^(i-1)
        fin_para
        ai,n+1 = (xn^i – x0^i)/i
fin_para
Gauss (aij)
suma = 0
Para i = 1 hasta n
        suma = suma + ai,n+1 * yi
fin_para
Imprimir suma
Terminar
```

```
suma = 0
Para i = 1 hasta n
        suma = suma + a_{i,n+1} * y_i
fin_para
Imprimir suma
Terminar
```

Ejemplo: Calcular por Coeficientes Indeterminados la integral pedida, tomando cuatro puntos intermedios:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x + 1}}$$

La tabla de valores es:

| i | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.0000 |
| 2 | 1 | 1.0000 |
| 3 | 2 | 0.5228 |
| 4 | 3 | 0.3420 |

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 &= 3.00 \\ 0 + A_1 + 2\,A_2 + 3\,A_3 &= 4.50 \\ 0 + A_1 + 4\,A_2 + 9\,A_3 &= 9.00 \\ 0 + A_1 + 8\,A_2 + 27\,A_3 &= 20.25 \end{aligned}$$

La solución del sistema por algún método conocido.

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.375 \\ A_1 &= 1.125 \\ A_2 &= 1.125 \\ A_3 &= 0.375 \end{aligned}$$

La integral, por lo tanto es:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x + 1}} = (0.375)(1) + (1.125)(1) + (1.125)(0.5228) + (0.375)(0.342) = 2.2164$$