

CAPITULO VI

VI.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Una Ecuación Diferencial es una ecuación que relaciona dos o más variables en términos de derivadas o diferenciales de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

y puede ser usada como modelo matemático de una variedad de fenómenos físicos y no físicos, en cualquier número de disciplinas científicas y no científicas. Ejemplos de tales fenómenos incluyen lo siguiente: problemas de presión de flujos (Termodinámica), circuitos eléctricos simples (Ingeniería Eléctrica), problemas de fuerzas (Mecánica), tasas de crecimiento bacteriológico (Ciencias Biológicas), tasa de descomposición de material radiactivo (Física Atómica), tasas de cristalización de un compuesto químico (Química) y tasa de crecimiento poblacional (Estadística).

En un curso introductorio de Ecuaciones Diferenciales, se le enseña al estudiante a utilizar el método general que parece mejor para la solución de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden. La solución general de una ecuación de este tipo consiste en una familia de curvas llamadas Curvas Integrales.

Se puede determinar una solución particular de la ecuación si se especifica una condición de la curva solución. Por ejemplo, si se requiere que la solución particular (curva) pase a través del punto $P(x_n, y_n)$, entonces se obtiene una solución particular, esto es conocido como un problema de Valor de Inicial.

En el presente capítulo se estudiarán los métodos alternos para la solución de Ecuaciones Diferenciales en problemas de Valor Inicial.

VI.2. Método de Euler.

El método de Euler es el más simple de los algoritmos para resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria. Sin embargo, esta simplicidad permite explicar algunas propiedades y características de este y otros métodos de solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

En general, una ecuación diferencial tiene la forma:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

la cual se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dada una Ecuación Diferencial de la forma anterior y el valor inicial $f(x_0) = y_0$ se pueden calcular valores de soluciones aproximadas si se aplican integrales a ambos lados de la ecuación, de la siguiente manera:

$$\int dy = \int f(x, y) dx$$

Esto implica que el problema se reduce a calcular el área bajo la curva $f(x,y)$, la cual se puede aproximar formando pequeños rectángulos de base Δx , según se muestra en la Figura VI.1.

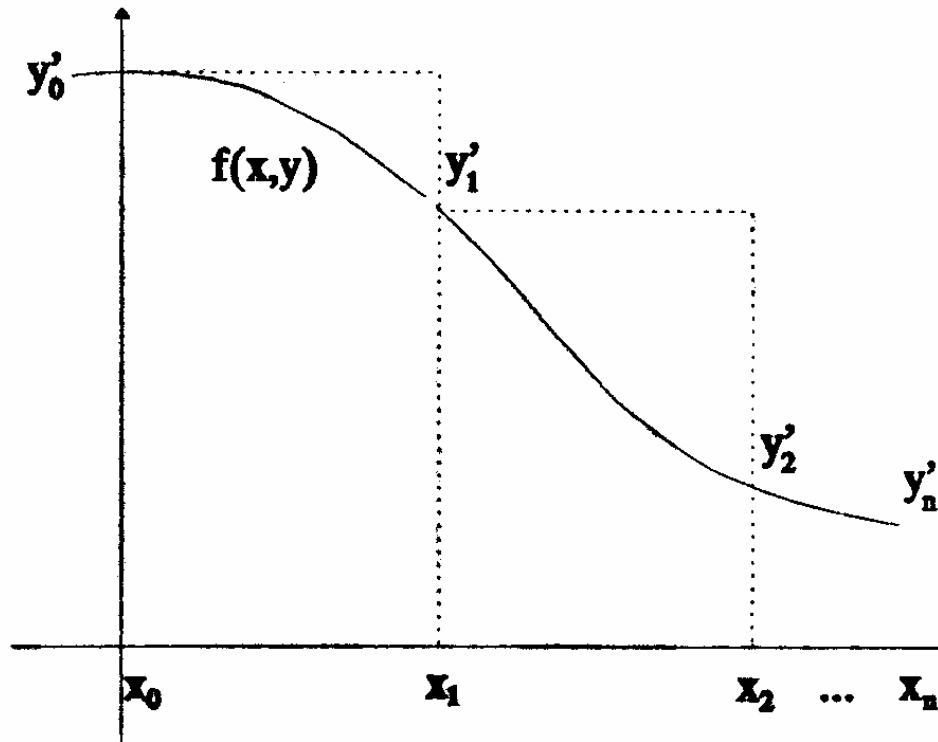


Figura VI.1. Método de Euler.

En la figura se tiene:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta_x$$

Así, el área del primer rectángulo es:

$$A_0 = \Delta_x y'_0$$

En general se cumple:

$$A_1 = \Delta_x y'_1$$

Por otra parte:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Lo cual puede ser escrito como:

$$\Delta_y = y' \Delta_x$$

Pero:

$$\Delta_y = y_{i+1} - y_i$$

Por lo tanto:

$$y_{i+1} - y_i = y' \Delta_x$$

Despejando:

$$y_{i+1} = y_i + y' \Delta_x$$

O también:

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y) \Delta_x$$

Esto constituye el Método de Euler y es la forma más sencilla, aunque también la más inexacta, de evaluar una Ecuación Diferencial Ordinaria. Para este método se tiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo Euler

```

Definir  $f(x,y)$ 
Leer  $x_1, y_1, \Delta x, n$ 
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
     $y' = f(x_1, y_1)$ 
     $y_2 = y_1 + y' \Delta x$ 
    Imprimir  $y_2$ 
     $x_1 = x_1 + \Delta x$ 
     $y_1 = y_2$ 
fin_para
Terminar

```

Ejemplo: Calcular tres términos para la siguiente ecuación:

$$y' = \frac{x}{x+y} \quad \text{con } f(1) = 1.0 \quad y \quad \Delta x = 0.1$$

Para la solución de este problema se construye una tabla de la siguiente manera:

i	x_i	y_i	y'_i	y_{i+1}
0	1.0	1.0000	0.5000	1.0500
1	1.1	1.0500	0.5116	1.1012
2	1.2	1.1012	0.5215	1.1533
3	1.3	1.1533		

Para la construcción de la tabla, téngase en cuenta lo siguiente:

- (a) La primera columna determina el número de iteraciones a trabajar.
- (b) Las segunda columna empieza con el valor inicial de x , incrementándose Δx cada iteración.
- (c) La tercera columna empieza con el valor inicial de y y los demás valores se calculan en las siguientes columnas.
- (d) La cuarta columna es la evaluación de la fórmula trabajada con los valores de x_i y y_i de la misma fila.
- (e) Finalmente, se evalúa la fórmula de Euler con los valores obtenidos con anterioridad.

VI.3. Método Predictor – Corrector de Euler.

Si se hiciera una comparación entre los resultados obtenidos por el método de Euler y algún método tradicional, se observaría un aumento en el error conforme se trabaje con más iteraciones. Para averiguar el porqué de este comportamiento, obsérvese la Figura VI.2; en esta figura se observa que el error obtenido de la primera iteración se suma al error

obtenido en la segunda y así sucesivamente (en la figura, la línea delgada representa a los valores obtenidos por el método de Euler).

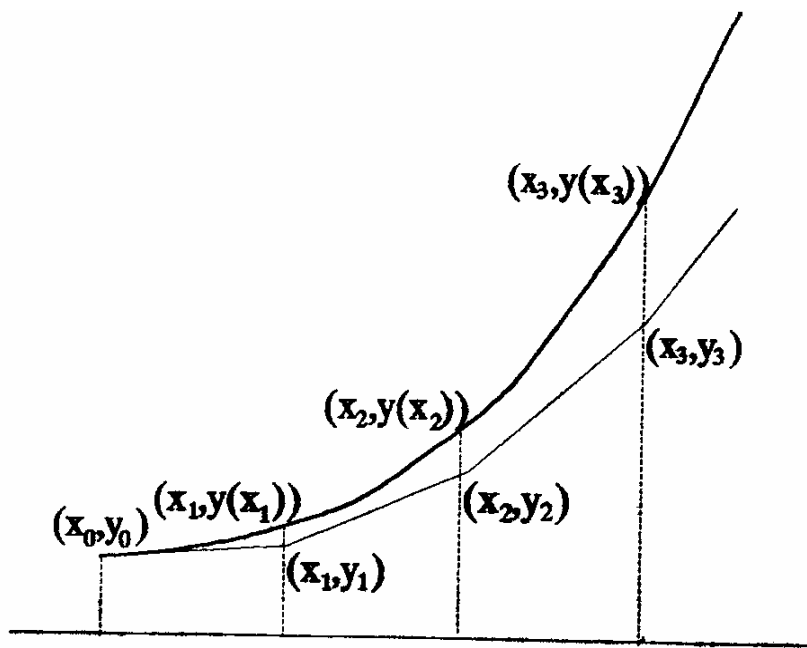


Figura VI.2. Error en el método de Euler.

Esta aproximación tan pobre puede mejorarse si se toman trapecios en lugar de rectángulos en el cálculo del área bajo la curva. En el método de Euler se utiliza la fórmula siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i$$

donde por facilidad se han modificado los nombres de Δx por h y de $f(x,y)$ por y' . Si se considera h como la altura del rectángulo y y' como la base, al tomar trapecios, se cambiaría el segundo sumando por: $h (y'_i + y'_{i+1})/2$ el cual representa el área del trapecio. Así, la fórmula queda como:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2}$$

devolviendo a y' su nombre de función se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]}{2}$$

Esta fórmula es conocida como **Método de Gauss**; sin embargo, surge un problema con el método. Para calcular el valor de y_{i+1} se requiere conocer el valor de y_{i+1} . Para solucionar este problema se utilizan los dos métodos en conjunto prediciendo un valor de y_{i+1} con el método de Euler y corrigiendo después con el método de Gauss (de aquí los nombres de

Método Predictor – Corrector y Método de Euler – Gauss con los que se conoce este método). Además, el método de Gauss permite corregir el valor calculado de y_{i+1} tanto como se quiera de acuerdo a una ε predefinida, de la siguiente manera:

- (a) Si $|y_{i+1}^c - y_{i+1}^p| < \varepsilon$, entonces y_{i+1}^c es la aproximación buscada.
 (b) Si $|y_{i+1}^c - y_{i+1}^p| > \varepsilon$, entonces se calcula de nuevo y_{i+1}^c , utilizando y_{i+1}^c como y_{i+1}^p .

donde y^p representa la y predicha por el método de Euler y y^c representa la y corregida por el método de Gauss.

Para este método se tiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo Euler_Gauss

```

Definir  $f(x,y)$ 
Leer  $x_1, y_1, \Delta x, n, \varepsilon$ 
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
     $y' = f(x_1, y_1)$ 
     $y^p = y_1 + y' \Delta x$ 
     $x_1 = x_1 + \Delta x$ 
    Repetir
         $y'_2 = f(x_i, y^p)$ 
         $y^c = y_1 + (y' + y'_2) \Delta x / 2$ 
         $d = |y^c - y^p|$ 
         $y^p = y^c$ 
    hasta  $d < \varepsilon$ 
    Imprimir  $y^c$ 
     $y_1 = y^c$ 
fin_para
Terminar
  
```

Ejemplo: Calcular por el método Predictor – Corrector de Euler tres iteraciones para:

$$y' = x + y \quad \text{con} \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1 \text{ y } \varepsilon = 0.001$$

Para la solución de este problema se construye una tabla de la siguiente manera:

i	x_i	y_i	y'_i	y^p_{i+1}	x_{i+1}	y'_{i+1}	y^c_{i+1}	ε
0	0.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.1	1.2000	1.1100	0.1100
				1.1100		1.2100	1.1105	0.0005
1	0.1	1.1105	1.2105	1.2316	0.2	1.4316	1.2426	0.0110
				1.2426		1.4426	1.2431	0.0005
2	0.2	1.2431	1.4431	1.3874	0.3	1.6874	1.3996	0.0122
				1.3996		1.6996	1.4002	0.0006
3	0.3	1.4002						

Para la construcción de la tabla, téngase en cuenta lo siguiente:

- (a) La primera columna determina el número de iteraciones a trabajar.
- (b) La segunda columna empieza con el valor inicial de x , incrementándose Δ_x cada iteración.
- (c) La tercera columna empieza con el valor inicial de y y los demás valores se calculan en las siguientes columnas.
- (d) La cuarta columna es la evaluación de la fórmula trabajada con los valores de x_i y y_i de la misma fila.
- (e) La quinta columna es la evaluación del valor predicho (método de Euler).
- (f) La sexta columna es el valor de la segunda fila incrementado en Δ_x .
- (g) La séptima columna es la evaluación de la fórmula trabajada con los valores de x_{i+1} y y_{i+1}^p de la misma fila.
- (h) La octava columna es la evaluación del valor corregido (método de Gauss).
- (i) La novena columna es la diferencia (en valor absoluto) de y^p con y^c . Si este valor es menor a la ε se procede a realizar una iteración interna, pasando la y^c a y^p .
- (j) ¡ Cuidado !. En las iteraciones internas sólo se llenan las columnas de la cinco en adelante, teniendo en cuenta que la x_{i+1} es la misma que la anterior.
- (k) Finalmente, al llegar al valor de ε se concluye la iteración interna, descendiendo el valor de y^c a y_i y se determina la siguiente iteración, si la hay, según el método antes descrito (a partir del inciso a).

VI.4. Método de Runge – Kutta.

Debe ser notorio que los métodos anteriores para solucionar Ecuaciones Diferenciales tienen una misma forma general, la cual es:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i)$$

en donde la función $\Phi(x_i, y_i)$ varía según el método estudiado. Lo anterior se debe a que ambos son métodos pertenecientes a la misma familia de métodos denominados **Métodos de Runge – Kutta**; así, el método de Euler es el **Método de Runge – Kutta de Primer Orden** y el método de Gauss es el **Método de Runge – Kutta de Segundo Orden**. Existen métodos de Runge – Kutta de Tercer Orden, de Cuarto Orden, etc. La diferencia fundamental entre los métodos de la familia estriba en que conforme el error se va haciendo más pequeño, el método se va haciendo más complicado. El método de la familia que resulta más accesible y de menor error es el llamado **Método de Runge – Kutta de Cuarto Orden** (conocido simplemente como **Método de Runge – Kutta**) y está dado, en su forma general, por la fórmula siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i)$$

donde:

$$\Phi(x_i, y_i) = (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) / 6$$

y en la cual:

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x + h, y + h k_3)$$

para este método se tiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo Runge_Kutta

Definir $f(x,y)$

Leer $x_1, y_1, \Delta x, n$

Para $i = 1$ **hasta** n

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f(x + \Delta x/2, y + \Delta x k_1/2)$$

$$k_3 = f(x + \Delta x/2, y + \Delta x k_2/2)$$

$$k_4 = f(x + \Delta x, y + \Delta x k_3)$$

$$\Phi = (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) / 6$$

$$y = y + \Delta x \Phi$$

$$x = x + \Delta x$$

Imprimir x, y

fin_para

Terminar

Ejemplo: Calcular por el método de Runge – Kutta tres iteraciones para:

$$y' = x + y \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad y \quad h = 0.1$$

Para la solución de este problema se construye una tabla de la siguiente manera:

x	y	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	Φ(x, y)	y _{i+1}
0.0	1.0000	1.0000	1.1000	1.1050	1.2105	1.1034	1.1103
0.1	1.1103	1.2103	1.3208	1.3263	1.4429	1.3246	1.2427
0.2	1.2427	1.4427	1.5648	1.5709	1.6998	1.5689	1.3996
0.3	1.3996						

Para el llenado de la tabla se tiene:

- (a) La primera columna son los valores de x según el valor inicial y el incremento dados.
- (b) Las segunda columna empieza con el valor de y dado y los demás elementos se evalúan en las siguientes columnas.
- (c) Las columnas tres, cuatro, cinco y seis se evalúan con los valores x y y de la fila en la correspondiente ecuación.
- (d) La séptima columna es la evaluación de la función Φ según los valores de k_i .
- (e) Finalmente, se evalúa el valor nuevo de y según la fórmula de **Runge - Kutta**.

VI.5. Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

Muchos problemas prácticos de ciencia e ingeniería requieren de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en lugar de una sola ecuación. Tales sistemas se pueden representar como:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \dots \dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

La solución de este sistema requiere que las n condiciones iniciales se conozcan en un valor inicial de x .

Todos los métodos para ecuaciones simples pueden extenderse para el sistema mostrado anteriormente. Las aplicaciones de la ingeniería pueden implicar la solución de varios cientos de ecuaciones simultáneas. En este caso el procedimiento de solución del sistema de ecuaciones simplemente significa aplicar el método de un paso a cada una de las ecuaciones antes de continuar con el siguiente paso. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler, suponiendo que en $x = 0$, $y_1 = 4$ y $y_2 = 6$. Intégrese a $x = 2$ en incrementos de 0.5.

$$\begin{aligned} y_1' &= -0.5 y_1 \\ y_2' &= 4 - 0.3 y_2 - 0.1 y_1 \end{aligned}$$

Solución: El método de Euler se implementa como sigue:

$$\begin{aligned} y_1(0.5) &= 4 + [-0.5(4)](0.5) = 3 \\ y_2(0.5) &= 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)](0.5) = 6.9 \end{aligned}$$

Obsérvese que $y_1(0) = 4$ se usa en la segunda ecuación en vez de $y_1(0.5) = 3$, calculado con la primera ecuación. Procediendo de una manera semejante se obtiene:

x	y_1	y_2
0.0	4.000000	6.0000000
0.5	3.000000	6.9000000
1.0	2.250000	7.7150000
1.5	1.687500	8.4452500
2.0	1.265625	9.0940875

Algoritmo para la computadora para la solución de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

El programa para resolver una sola ecuación diferencial ordinaria con el método de Euler se puede extender fácilmente a un sistema de ecuaciones. Las modificaciones incluyen:

1. Introducir el número de ecuaciones, n .
2. Introducir los valores iniciales para cada una de las n variables dependientes.
3. Modificar la subrutina de tal manera que calcule las pendientes de cada una de las variables.
4. Incluir funciones adicionales para calcular las derivadas de cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias.
5. Incluir las ecuaciones restantes para calcular un nuevo valor de cada una de las variables dependientes.

Obsérvese que cualquiera de los métodos de este capítulo se pueden usar para este algoritmo. La única diferencia sería la formulación de la subrutina que calcula las pendientes. El método clásico de Runge – Kutta de cuarto orden es una buena alternativa para este propósito ya que proporciona una exactitud excelente y es relativamente fácil de programar. Una característica importante de un programa de computadora para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con el método de Runge – Kutta es la secuencia de cálculo de las k .