

CAPITULO III

III.1. Los Sistemas de Ecuaciones.

La necesidad de tener métodos eficientes para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, es más importante aún, que la solución de ecuaciones no lineales. Esto es debido a que en muchos casos los problemas de matemáticas aplicadas se reducen a un conjunto de ecuaciones que constituyen un sistema lineal. Por este motivo puede decirse con razón que la principal tarea del análisis numérico es la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Se ha desarrollado una extraordinaria colección de algoritmos para llevar a cabo la solución de los sistemas lineales, lo que indica que es engañoso el aparente carácter elemental del problema. En forma semejante a las ecuaciones no lineales, cuyos métodos de solución se estudiaron en el capítulo anterior, los sistemas lineales pueden resolverse por medio de métodos exactos y de aproximaciones sucesivas. Antes de establecer estos métodos, se recordarán algunos conceptos fundamentales sobre las matrices y los sistemas lineales.

III.2. Antecedentes.

MATRICES. Una matriz es un arreglo de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para toda matriz cuadrada A ($m = n$) cuyo determinante es distinto de cero, existe una matriz (denotada A^{-1}) que satisface la relación que siguiente:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

donde I es una matriz identidad.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FILAS. Toda matriz puede ser transformada en otra aplicando las llamadas transformaciones elementales de filas:

1. Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
2. Sumar a una fila un múltiplo de otra fila.
3. Intercambiar dos filas.

Se puede demostrar (lo cual se estudiará aquí) que aplicar una transformación elemental de filas a una matriz A es igual a aplicar esa transformación a una matriz I y multiplicarla por A . Así, comprobando con un ejemplo, se tiene la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

aplicándole la segunda transformación se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

lo anterior equivale a:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transformada en:

$$E_{1+k3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NOTA: La matriz E es una matriz I a la cual se le ha practicado una transformación. El subíndice indica el tipo de transformación; así, $1 + k3$ significa que a la primera fila se le suma la tercera multiplicada por k.

y multiplicando:

$$E_{1+k3} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se obtiene B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dada una matriz A no singular ($|A| \neq 0$) de orden n, siempre es posible encontrar tantas matrices de la forma, E tales que al aplicarlas a A la conviertan en matriz identidad. Así:

$$E_1 E_2 E_3 \dots E_r A = I$$

Si en la igualdad anterior se multiplican ambos miembros por A^{-1} :

$$E_1 E_2 E_3 \dots E_r A A^{-1} = I A^{-1}$$

efectuando los productos se obtiene:

$$E_1 E_2 E_3 \dots E_r I = I A^{-1}$$

Lo anterior indica que si se parte de una matriz identidad, se puede llegar a la inversa de una matriz, efectuando los mismos pasos que se efectuaron para llegar a la matriz I a partir de la matriz original. Para lograr lo anterior, trabájese con la matriz ampliada (A, I), transformando la parte izquierda de esta en I:

Ejemplo: Calcular A^{-1} de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si el determinante es distinto de cero, la matriz tiene inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (12 + 16 + 36) - (48 + 4 + 36) = 64 - 88 = -24 \neq 0$$

Trabajando la matriz ampliada:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 \div 2 \\ f2 + 3f1 \\ f3 - 4f1 \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1/4 & 3/2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 + 2f2 \\ f2 \div (-4) \\ f3 - 6f2 \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/24 & 3/4 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/2 & 1/3 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 + f3 \\ f2 + 2f3 \\ f3 \div 3 \end{array}$$

Para la obtención de la matriz identidad, se siguieron las transformaciones de filas en el siguiente orden:

1. Elección de un PIVOTE como un elemento sobre la diagonal principal.
2. División de la fila del PIVOTE entre el PIVOTE.
3. Elección de un ANULADOR como un elemento sobre la columna del PIVOTE.
4. Resta, a la fila del ANULADOR, la fila del PIVOTE multiplicada por el ANULADOR.
5. Repetición de los pasos 3 y 4 hasta que la columna del pivote se anule.
6. Repetición de los pasos 1, 2, 3 y 4, hasta que la matriz se hace unitaria.

ECUACIÓN ALGEBRAICA LINEAL. Una ecuación algebraica lineal es una ecuación en donde en cada término de esta aparece únicamente una variable o incógnita elevada a la primera potencia, por ejemplo:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

es una ecuación algebraica lineal en las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Se admite que los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n y el término independiente b , de la ecuación, son constantes reales.

SISTEMAS DE ECUACIONES. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que deben resolverse de manera simultánea. En lo sucesivo se considerarán únicamente sistemas de ecuaciones algebraicas lineales; o sea, conjuntos de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n &= b_3 \\ \dots &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Aplicando la definición de producto entre matrices, este sistema de ecuaciones puede escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse simbólicamente como $A X = B$, en donde A se llama *matriz del sistema*. La matriz formada por A , a la que se le ha agregado el vector de términos independientes (B) como última columna, se le llama la *matriz ampliada del sistema* y se representa con (A, B) .

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES. La solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

De acuerdo con su solución, un sistema puede ser: compatible, si admite solución, ó incompatible, si no lo admite.

Un sistema compatible puede ser: determinado, si la solución es única, ó indeterminado, si tiene soluciones infinitas.

TEOREMAS SOBRE RANGOS. El rango de una matriz es el orden del determinante no nulo de mayor orden que se puede obtener de esa matriz. El rango de la matriz A se representa con la notación $r(A)$ y el de la matriz ampliada, por $r(A, B)$.

En álgebra se demuestra que:

- (a) Para cualquier sistema $r(A) \leq r(A, B)$.
- (b) si $r(A) < r(A, B)$ el sistema es incompatible.
- (c) si $r(A) = r(A, B)$ el sistema de ecuaciones es compatible.
 - (c.1.) si $r(A) = n$, el sistema es determinado.
 - (c.2.) si $r(A) < n$, el sistema es indeterminado (siendo n el número de variables en el sistema).

Por ejemplo, para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

los valores $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, en las incógnitas, lo satisfacen completamente; luego es una solución de él, y puede afirmarse que el sistema es compatible. Para este problema puede demostrarse que $r(A) = r(A, B) = 2$, por lo que el sistema es compatible, como se indicó, y además determinado; o sea, que la solución mencionada es la única admisible.

En el caso de:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 10 \end{aligned}$$

no existe ningún par de valores para x_1 y x_2 que hagan que 5 sea igual a 10, por lo que el sistema es incompatible. Para este sistema puede demostrarse que $r(A) = 1$ y que $r(A, B) = 2$.

Para el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

se puede observar que $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ es solución del sistema, por lo que es compatible. También, $x_1 = 0$, $x_2 = 5/2$ es solución del sistema, por lo que es indeterminado.

Fácilmente puede verse que cualquier par de valores x_1 y x_2 que cumplan que $x_2 = \frac{5-3x_1}{2}$ es solución del sistema. Para este sistema se demuestra que $r(A) = r(A, B) = 1 < 2$; es decir, el sistema es compatible indeterminado como se indicó. La solución numérica de un sistema de ecuaciones siempre debe sustituirse en las ecuaciones originales, para garantizar la validez de la solución obtenida.

III.3. Los Métodos.

Se presentan a continuación cuatro métodos para solucionar Sistemas de Ecuaciones Lineales. Dos de ellos son iterativos y utilizan el criterio de Cauchy para la convergencia.

III.3.1. Método de Gauss – Jordan.

Este método es aplicable a sistemas de ecuaciones compatibles y permiten la extracción de la solución por medio de las transformaciones elementales de filas. Las transformaciones de filas convierten al sistema en otro equivalente; esto es, un sistema distinto con la misma solución.

Recordando que: dada la matriz del sistema A , no singular ($|A| \neq 0$), siempre es posible encontrar tantas matrices de la forma E , tales que al aplicarlas a A la conviertan en identidad. Así:

$$E_1 E_2 E_3 \dots E_r A = I$$

y partiendo de la igualdad $A X = B$, multiplíquense ambos miembros de la igualdad por $E_1 E_2 E_3 \dots E_r$:

$$E_1 E_2 E_3 \dots E_r A X = E_1 E_2 E_3 \dots E_r B$$

efectuando los productos, se obtiene:

$$\begin{aligned} (E_1 E_2 E_3 \dots E_r A) X &= E_1 E_2 E_3 \dots E_r B \\ I X &= E_1 E_2 E_3 \dots E_r B \\ X &= E_1 E_2 E_3 \dots E_r B \end{aligned}$$

Esto es, para hallar la matriz X de soluciones, se debe aplicar a B las mismas transformaciones que se le aplicaron a la matriz A para convertirla en identidad.

Este método, conocido como método de **Gauss – Jordan**, trabaja la matriz ampliada (A, B) y obtiene la matriz (I, X) .

A continuación se presenta el algoritmo para las transformaciones de las filas en un sistema:

Algoritmo Gauss-Jordan

```

Leer n
m = n + 1
Para i = 1 hasta n
    Para j = 1 hasta m
        Leer aij
    fin_para
fin_para
Para i = 1 hasta n
    Pivote = aii
    Para j = 1 hasta m
        aij = aij/pivote
    fin_para

```

```

Para k = 1 hasta n
  Si k ≠ i entonces
    cero = aki
    Para j = 1 hasta m
      akj = akj - cero * aij
    fin_para
  fin_si
fin_para
fin_para
Para i = 1 hasta n
  Imprimir aim
fin_para
Terminar

```

Ejemplo 1. Resolver por Gauss – Jordan el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\
 -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 2 \\
 3x_1 - 2x_2 + 23x_3 &= 4
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 23 & 4 \end{array} \right]$$

pivote = 2; anuladores = -1, 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 11/2 & -9/2 & 1/2 \\ 0 & -7/2 & 49/2 & 17/2 \end{array} \right] \begin{array}{l} f2 + f1 \\ f3 - 3f1 \end{array}$$

pivote = 11/2; anuladores = 1/2, -7/2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/11 & -17/11 \\ 0 & 1 & -9/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 238/11 & 97/11 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 + 1/2 f2 \\ f3 + 7/2 f2 \end{array}$$

pivote = 238/11; anuladores = -9/11, -1/11.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -359/238 \\ 0 & 1 & 0 & 101/238 \\ 0 & 0 & 1 & 97/238 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 + 1/11 f3 \\ f2 + 9/11 f3 \end{array}$$

Así:

$$x_1 = -359/238 = -1.5084034$$

$$x_2 = 101/238 = 0.4243697$$

$$x_3 = 97/238 = 0.4075630$$

(Sistema Compatible Determinado)

Ejemplo 2. Resolver por Gauss – Jordan el siguiente sistema:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 = 4$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

pivote = 2; anuladores = 1, 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ f2 - f1 \\ f3 - 3f1 \end{array}$$

Como $f2 = f3$, hágase $f3 = f2 - f3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De aquí $r(A) = r(A, B) < n$, el sistema tiene infinitas soluciones. Para obtener las soluciones, se extrae el sistema de la última matriz:

$$\begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2 \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -3 \end{array}$$

Iguálase alguna incógnita a un valor de a (con $a \in \mathbb{R}$); por ejemplo, $x_2 = a$ y despéjese las otras incógnitas para dejarlas en términos de a .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 - a/3 \\
 x_2 &= a \\
 x_3 &= 2 + 5/3 a
 \end{aligned}
 \quad (\text{Sistema Compatible Indeterminado})$$

Ejemplo 3. Resolver por Gauss – Jordan el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_3 - x_4 &= -1 \\
 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\
 -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\
 x_1 + x_2 - x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

pivote = 1, anulador = 2, -1, 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ f2 - 2f1 \\ f3 + f1 \\ f4 - f1 \end{array}$$

pivote = -3, anulador = -1, -1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 \\ \\ f3 - f2 \\ f4 - f2 \end{array}$$

pivote = -4/3, anulador = 1, 1/3, -4/3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} f1 - f3 \\ f2 - 1/3 f3 \\ \\ f4 - 4/3 f3 \end{array}$$

Así, $r(A) < r(A, B)$; no hay solución (Sistema Incompatible)

III.3.2. Método de Jacobi.

Este es un método alternativo e iterativo en la búsqueda de soluciones de sistemas de ecuaciones y utiliza el criterio de Cauchy como criterio de paro. Para derivar la fórmula del método, hágase $A = D + R$; esto es, la matriz del sistema se divide en dos, de las cuales la matriz D es una matriz diagonal y R , por el contrario, es tal que sólo la diagonal principal tiene elementos cero. Así,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Derivando la fórmula:

$$\begin{array}{ll} AX = B & \text{forma matricial del sistema} \\ (D + R)X = B & \text{sustituyendo } A \\ DX + RX = B & \text{quitando los paréntesis} \\ DX = B - RX & \text{despejando} \\ X = B D^{-1} - R X D^{-1} & \text{multiplicando por } D^{-1} \end{array}$$

De lo anterior se observa lo siguiente: para calcular el valor de X se requiere conocer el valor de X . Esto no es una contradicción, sino que de aquí se manifiesta la naturaleza iterativa del método: se requiere dar una primera aproximación a la matriz X para acercarse al valor real según una ε preestablecida. Así, la fórmula general del método es:

$$X_{i+1} = B D^{-1} - R D^{-1} X_i$$

Se puede demostrar que este método converge siempre que cada elemento sobre la diagonal principal sea mayor, en valor absoluto, que la suma de los otros elementos de la fila, en valor absoluto.

De la fórmula iterativa, se tiene:

$$X_{i+1} = D^{-1} (B - R X_i)$$

Esto equivale a despejar del sistema las x_i de la i -ésima ecuación, en forma matemática:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad \text{con } j \neq i$$

Este método requiere de un valor inicial para X (por simplicidad se toma el vector cero) y se detiene el proceso hasta que se cumpla que $|X_{i+1} - X_i| < \varepsilon$ (nótese que X es el vector de soluciones; esto es, TODOS los valores de x deben cumplir con lo anterior).

A continuación se presenta el algoritmo para el método de Jacobi:

Algoritmo Jacobi:

```

Leer  $n, \varepsilon$ 
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
    Para  $j = 1$  hasta  $n+1$ 
        Leer  $a_{ij}$ 
    fin_para
fin_para
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
     $x_i = 0$ 
fin_para
Repetir
    fin = verdadero
    Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
         $y_i = a_{i,n+1}$ 
        Para  $j = 1$  hasta  $n$ 
            Si  $i \neq j$  entonces
                 $y_i = y_i - a_{ij} * x_j$ 
            fin_si
        fin_para
         $y_i = y_i / a_{ii}$ 
         $\text{delta} = |x_i - y_i|$ 
        Si  $\text{delta} > \varepsilon$  entonces
            fin = falso
        fin_si
    fin_para
    Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
         $x_i = y_i$ 
    fin_para
hasta fin
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
    Imprimir  $x_i$ 
fin_para
Terminar

```

Ejemplo: Calcular la solución ($\varepsilon = 0.001$) del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\
 -x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \\
 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

Comprobando si el método es adecuado para el sistema:

$$(a) \quad \begin{array}{l} |4| > |-1| + |1| \\ |4| > |-1| + |1| \\ |5| > |2| + |1| \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Los elementos sobre la diagonal principal, en valor absoluto, fueron mayores que la suma de los demás elementos de la fila, también en valor absoluto. Si esto no se cumpliera, se pueden reordenar las ecuaciones para que esto se dé. Si ningún reordenamiento permite que esto se cumpla, se determinaría que el método no es apropiado para el sistema.

Despejando las x_i de las i – ésimas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3 + x_2 - x_3}{4} \\ x_2 &= \frac{-2 + x_1 - x_3}{4} \\ x_3 &= \frac{3 - 2x_1 - x_2}{5} \end{aligned}$$

Por facilidad se toma $X_1 = \{0, 0, 0\}$ y sustituyendo en las ecuaciones despejadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.7500 \\ x_2 &= -0.5000 \\ x_3 &= 0.6000 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0.4750 & |0.4750 - 0.7500| > \varepsilon \\ x_2 = -0.4625 & |-0.4625 + 0.5000| > \varepsilon \\ x_3 = 0.4000 & |0.4000 - 0.6000| > \varepsilon \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0.5343 & |0.5343 - 0.4750| > \varepsilon \\ x_2 = -0.4812 & |-0.4812 + 0.4625| > \varepsilon \\ x_3 = 0.5025 & |0.5025 - 0.4000| > \varepsilon \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5040 & | 0.5040 - 0.5343 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4920 & | -0.4920 + 0.4812 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4825 & | 0.4825 - 0.5025 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5063 & | 0.5063 - 0.5040 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4946 & | -0.4946 + 0.4920 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4967 & | 0.4967 - 0.4825 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5022 & | 0.5022 - 0.5063 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4976 & | -0.4976 + 0.4946 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4963 & | 0.4963 - 0.4967 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5015 & | 0.5015 - 0.5022 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4985 & | -0.4985 + 0.4976 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4986 & | 0.4986 - 0.4963 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5007 & | 0.5007 - 0.5015 | < \varepsilon \\
 x_2 = -0.4992 & | -0.4992 + 0.4985 | < \varepsilon \\
 x_3 = 0.4991 & | 0.4991 - 0.4986 | < \varepsilon
 \end{array}$$

Finalmente:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0.5007 \\
 x_2 = -0.4992 \\
 x_3 = 0.4991
 \end{array}$$

III.3.3. Método de Gauss – Seidel.

Este método es en general idéntico al de Jacobi; la diferencia consiste en que una vez calculada la componente x_i , de la k – ésima iteración, se usa inmediatamente en esta misma. Por esta razón el método de Gauss – Seidel también se llama de *iteraciones parciales o desplazamientos sucesivos*.

Por esta razón, este método converge más rápido que el de Jacobi y puede convergir cuando el de Jacobi no lo hace. Se presenta a continuación el algoritmo estructurado para este método, en el cual se puede apreciar la diferencia entre uno y otro:

Algoritmo Gauss - Seidel:

```

Leer n, ε
Para i = 1 hasta n
    Para j = 1 hasta n+1
        Leer aij
    fin_para
fin_para
Para i = 1 hasta n
    xi = 0
fin_para
Repetir
    fin = verdadero
    Para i = 1 hasta n
        y = ai,n+1
        Para j = 1 hasta n
            Si i ≠ j entonces
                y = y - aij*xj
            fin_si
        fin_para
        y = y/aii
        delta = |xi - y|
        Si delta > ε entonces
            fin = falso
        fin_si
        xi = y
    fin_para
hasta fin
Para i = 1 hasta n
    Imprimir xi
fin_para
Terminar

```

Ejemplo: Calcular la solución ($\varepsilon = 0.001$) del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\
 -x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \\
 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

Comprobando si el método es adecuado para el sistema:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & |4| > |-1| + |1| \\
 & |4| > |-1| + |1| \\
 & |5| > |2| + |1|
 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Los elementos sobre la diagonal principal, en valor absoluto, fueron mayores que la suma de los demás elementos de la fila, también en valor absoluto. Si esto no se cumpliera, se pueden reordenar las ecuaciones para que esto se dé. Si ningún reordenamiento permite que esto se cumpla, se determinaría que el método no es apropiado para el sistema.

Despejando las x_i de las i – ésimas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3 + x_2 - x_3}{4} \\ x_2 &= \frac{-2 + x_1 - x_3}{4} \\ x_3 &= \frac{3 - 2x_1 - x_2}{5} \end{aligned}$$

Por facilidad se toma $X_1 = \{0, 0, 0\}$ y sustituyendo en las ecuaciones despejadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.7500 \\ x_2 &= -0.3125 \\ x_3 &= 0.3625 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.58120 & |0.5812 - 0.7500| > \varepsilon \\ x_2 &= -0.4453 & |-0.4453 + 0.3125| > \varepsilon \\ x_3 &= 0.4565 & |0.4565 - 0.3625| > \varepsilon \end{aligned}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5245 & |0.5245 - 0.5812| > \varepsilon \\ x_2 &= -0.4830 & |-0.4830 + 0.4553| > \varepsilon \\ x_3 &= 0.4867 & |0.4867 - 0.4565| > \varepsilon \end{aligned}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5075 & |0.5075 - 0.5245| > \varepsilon \\ x_2 &= -0.4948 & |-0.4948 + 0.4830| > \varepsilon \\ x_3 &= 0.4959 & |0.4959 - 0.4867| > \varepsilon \end{aligned}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5023 & | 0.5023 - 0.5075 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4984 & | -0.4984 + 0.4948 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4987 & | 0.4987 - 0.4959 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5007 & | 0.5007 - 0.5023 | > \varepsilon \\
 x_2 = -0.4995 & | -0.4995 + 0.4984 | > \varepsilon \\
 x_3 = 0.4996 & | 0.4996 - 0.4987 | > \varepsilon
 \end{array}$$

Sustituyendo estos nuevos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = 0.5002 & | 0.5002 - 0.5007 | < \varepsilon \\
 x_2 = -0.4998 & | -0.4998 + 0.4995 | < \varepsilon \\
 x_3 = 0.4998 & | 0.4998 - 0.4996 | < \varepsilon
 \end{array}$$

Finalmente:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0.5002 \\
 x_2 = -0.4998 \\
 x_3 = 0.4998
 \end{array}$$

Si bien es cierto que se produjo el ahorro de una sola iteración con respecto al método de Jacobi, es de notar que la solución se encuentra más cercana a su valor real ($x_1 = 0.5$; $x_2 = -0.5$; $x_3 = 0.5$). Por otro lado, la convergencia está muy relacionada con los valores de inicio para el vector X .

III.3.4. Método de Montante.

Este método es relativamente nuevo (apareció al principio de la década de los setentas) y fue diseñado por el Ing. René Mario Montante Pardo en la Universidad Autónoma de Nuevo León. Se utiliza para obtener la inversa de una matriz, resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, encontrar la matriz adjunta y calcular el determinante. Tiene las siguientes ventajas sobre el método de Gauss – Jordan:

El **Método de Montante** trabaja exclusivamente con números enteros. Por consiguiente, evita los errores por truncamiento y redondeo y reduce considerablemente las operaciones y la complejidad de las mismas.

El **Método de Montante** calcula la inversa de una matriz, resuelve un sistema de ecuaciones, encuentra la matriz adjunta y calcula el determinante, al mismo tiempo.

El **Método de Montante** es aplicable en otras áreas en las cuales se manejen sistemas de ecuaciones y es fácilmente adaptable a tales áreas.

PROCEDIMIENTO:

- (1) Elegir un PIVOTE como un elemento sobre la diagonal principal.
- (2) Mantener la fila del PIVOTE sin cambios.
- (3) Convertir a ceros todos los elementos desde la primera columna hasta la columna del PIVOTE, excepto los elementos de la diagonal principal, los cuales serán iguales al PIVOTE.
- (4) Calcular los elementos restantes, según la fórmula:

$$- \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{ij} \\ a_{kk} & a_{kj} \end{vmatrix} \quad \text{si } a_{ij} \text{ está por arriba de la fila del PIVOTE}$$

$$\begin{vmatrix} a_{kk} & a_{kj} \\ a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} \quad \text{si } a_{ij} \text{ está por debajo de la fila del PIVOTE}$$

- (5) Dividir estos entre el PIVOTE anterior. Para la primera iteración, se toma como la unidad.
- (6) El procedimiento se repite hasta obtener por el lado izquierdo de la matriz aumentada, una matriz diagonal.

NOTAS:

- (a) Si se trabaja una matriz aumentada (A, B) se obtiene una matriz (D, Y), donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son iguales al determinante de A y Y/d es la solución del sistema.
- (b) Si se trabaja una matriz aumentada (A, I) se obtiene una matriz (D, A_{dj}), donde A_{dj} es la matriz adjunta de A y A_{dj}/d es la inversa de esta.
- (c) Si no quiere trabajar los determinantes de los signos contrarios, puede utilizar la siguiente fórmula:

$$a_{ij} = a_{ij} * \text{PIVOTE} - a_{kj} * a_{ik}$$

Esta fórmula ya contempla el signo para cuando el elemento buscado esté arriba de la fila del PIVOTE.

Finalmente, el algoritmo para este método:

Algoritmo Montante:

```

Leer n
Para i = 1 hasta n
    Para j = 1 hasta n+1
        Leer aij
    fin_para
fin_para
pivotant = 1
Para k = 1 hasta n
    Para i = 1 hasta n

```

```

    Si  $i \neq k$  entonces
        Para  $j = k+1$  hasta  $n+1$ 
             $a_{ij} = (a_{ij} * a_{kk} - a_{ik} * a_{kj}) / \text{pivotant}$ 
        fin_para
    fin_si
fin_para
pivotant =  $a_{k,k}$ 
fin_para
Para  $i = 1$  hasta  $n$ 
    Imprimir  $a_{i,n+1}/a_{nn}$ 
fin_para
Terminar

```

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema por el Método de Montante.

$$\begin{aligned}
 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\
 -x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2 \\
 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 15 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 18 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 15 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 60 & 30 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 60 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 60 & 30 \end{array} \right]$$

Así:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.5 \\
 x_2 &= -0.5 \\
 x_3 &= 0.5
 \end{aligned}$$