УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ (СИСТЕМ)

Электронный курс лекций
для студентов математического факультета
специальности "Прикладная математика"

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2012

Автор:

Мадорский Виладий Меерович – доцент кафедры информатики и прикладной математики, кандидат физико-математических наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1

Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы с гладким оператором (неполный прогноз)

Курс лекций посвящен решению уравнения

$$f(x) = 0; f(D \subset X \to X), \tag{1.1}$$

X - B-пространство с помощью нерегуляризованных, частично регуляризованных и регуляризованных итерационных процессов. Вначале будем полагать, что $f \in C_D^{(2)}$, а оператор $f^{'}(x)$ непрерывно обратим. Здесь предполагается, что $f^{'}(x)$ - производная Фреше оператора $f(x)$ и в D существует x^*-решение уравнения (1.1), затем будем полагать, что непрерывно обратим оператор $(\delta \parallel f(x) \parallel E + f^{'}(x))$, где $\delta \in (10^{-10} \div 10^{-1})$, E– единичный оператор. В дальнейшем мы откажемся от требования гладкости оператора f: будем полагать, что $f \in C_D$, первые разделённые разности оператора f удовлетворяют условию Липшица в D и вторые разделённые разности оператора f равномерно ограничены в D, а также оператор $(\delta \parallel f(x) \parallel E + f(x,y))^{-1}$ равномерно ограничен в D. Здесь $f(x,y)$ - оператор разделённой разности оператора f, оператор $(\delta \parallel f(x) \parallel E + f(x,y))^{-1}$ - обратный оператору $(\delta \parallel f(x) \parallel E + f(x,y))$. Курс завершается рассмотрением полностью регуляризованных алгоритмов с негладкими операторами.

Для решения уравнения (1.1) рассматривается итерационный процесс в предположении, что оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C_D^{(2)}, \| [f^{'}(x)]^{-1} \| \leq B, \| f^{''}(x) \| \leq K, \forall x \in D. \tag{1.2}$$

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n:

$$f^{'}(x)\Delta x_n = -f(x_n), n = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 1, 2, \ldots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{1.4}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.
Шаг 4. Определяется новая шаговая длина:
если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{\| f(x_{n+1}) \| \beta_n}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{\| f(x_{n+1}) \|}, n = 1, 2, \ldots, \gamma_0 = \beta_0^2 \tag{1.5}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 1.1. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям (1.2), в D существует x^* - решение уравнения (1.1), начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что выполняется условие $\varepsilon_0 = 0.5\beta_0 K B^2 \parallel f(x_0) \parallel < 1$. Тогда итерационный процесс (1.3) - (1.5) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к x^*. В нашем случае D – это шар с центром x_0 и радиусом $r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$, $q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$.*

Доказательство. Пусть $\beta_k \neq 1$, тогда для $k > n + 2$ справедливо соотношение, которое следует из (1.5)

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \gamma_{n+1}\beta_n}{\parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_{n+1} \parallel f(x_n) \parallel \gamma_n} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\parallel f(x_{n+2}) \parallel}. \qquad (1.6)$$

Из (1.6) имеем формулу, связывающую шаговые длины с нормами невязок:

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel . \qquad (1.7)$$

Из условий теоремы нетрудно получить оценку, связывающую нормы невязок на соседних шагах

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \left(1 - \beta_n \left(1 - \beta_n \frac{B^2 K}{2} \parallel f(x_n) \parallel\right)\right) \parallel f(x_n) \parallel =$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel, \qquad (1.8)$$

$$\varepsilon_n = \beta_n \frac{B^2 K}{2} \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

При $n = 0$ из условий теоремы и (1.8) имеем:

$$\| f(x_1) \| \leq (1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) \| < \| f(x_0) \| . \quad (1.9)$$

Так, что из (1.5), (1.9) при $n = 0$ следует, что $\gamma_1 > \gamma_0$, $\beta_1 > \beta_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $q_1 < q_0$. Из (1.7), (1.8) следует, что $\beta_2 \| f(x_2) \| = \beta_1 \| f(x_1) \|$ и так как при $n = 1$ имеем, что $\| f(x_2) \| < \| f(x_1) \|$, то $\beta_2 > \beta_0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Аналогичные рассуждения при $n = 2$ дают соотношения
$\| f(x_3) \| < \| f(x_2) \|$, $\beta_3 > \beta_1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, $\gamma_3 > \gamma_1$.

Тогда из (1.7), (1.8) методом математической индукции получим:

$$\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_n, \beta_{n+2} > \beta_n, \gamma_{n+1} > \gamma_n. \quad (1.10)$$

Таким образом, из (1.10) имеем, что последовательности итерационных параметров β_i с чётными и нечётными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, ограниченные снизу числом β_0, последовательности ε_i чётными и нечётными индексами образуют монотонно убывающие последовательности, ограниченные сверху числом ε_0, откуда имеем, что последовательности q_i с чётными и нечётными индексами образуют монотонно убывающие последовательности, ограниченные сверху числом q_0. Из (1.8) и вышесказанного имеем оценку:

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| \quad (1.11)$$

из которой следует, что

$$\| f(x_n) \| \to 0, n \to \infty \tag{1.12}$$

Таким образом, из (1.12) имеем, что последовательность элементов $\{x_n\} \to x^*$ по функционалу и все элементы последовательности принадлежат шару $D\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$.

Рассмотрим вопрос о том, существует ли такой номер $k = n + 1$, что $\beta_i = 1$ для $i > k$. Из (1.5) имеем, что при таком k:

$$\beta_{n+1} = \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{\| f(x_{n+1}) \| \beta_n} = \frac{\gamma_0 \| f(x_0) \|}{\| f(x_{n+1}) \| \beta_n} > \frac{\gamma_0 \| f(x_0) \|}{q_0^n \| f(x_0) \|} = \frac{\gamma_0}{q_0^n}.$$

В числителе правой части последнего неравенства константа, а знаменатель стремится к нулю при $n \to \infty$, так что найдется такой номер $k = n + 1$, при котором $\beta_k = 1$ и, следовательно, все $\beta_i = 1$ для $i > k$.

Кроме того, из (1.11) следует, что существует такой номер l, начиная с которого станет выполняться неравенство $0.5KB^2 \| f(x_l) \| < 1$, так что, начиная с $i = \max(k, l)$ начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона. С этого момента процесс (1.3) - (1.5) переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Ослабим требования на оператор f.

Теорема 1.2. *Пусть в шаре* $D = S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *существует* x^**-решение уравнения (1.1), оператор* $f \in C_D^{(1)}$*, удовлетворяет условию* $\| f^{'}(u) - f^{'}(v) \| \leq \alpha \| u - v \|^p, \forall u, v \in D$, $\alpha \geq 0, p \geq 0$ *и* $\| [f^{'}(x)]^{-1} \| \leq B$, $\forall x \in D$*. Если начальное приближение* x_0 *и шаговая длина* β_0 *таковы, что* $\varepsilon_0 = \beta_0^p \frac{\alpha B^{1+p}}{p+1} \| f(x_0) \|^p < 1$, $\frac{\gamma}{\beta_0}^{1+p} < 1$, *тогда итерационный процесс (1.3) - (1.5) сходится к* x^* *и оценка погрешности n-го приближения имеет вид:*

$$\| x^* - x_n \| \leq B \| f(x_0) \| \frac{q_0^{n-1}}{1-q_0}; q_0 = 1 - \beta_0(1-\varepsilon_0).$$

Доказательство. В силу условий теоремы справедливо соотношение

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f^{'}(x_n)\Delta x_n \| \leq \frac{\alpha}{p+1} \| \Delta x_n \|^{p+1},$$

из которого следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| + \frac{\alpha}{p+1} \| \Delta x_n \|^{p+1} =$$

$$= \left(1 - \beta_n \left(1 - \beta_n^p \frac{B^{p+1}\alpha \| f(x_n) \|^p}{p+1}\right)\right) \| f(x_n) \| = \tag{1.13}$$

$$= (1 - \beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \|;$$

$$\varepsilon_n = \beta_n^p B^{p+1} \alpha \| f(x_n) \|^p; q_n = 1 - \beta_n(1-\varepsilon_n).$$

При $n = 0$ из условия теоремы имеем

$$\| f(x_1) \| \leq (1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) \|,$$

$$q_0 < 1, \| f(x_1) \| < \| f(x_0) \|, \beta_1 > \beta_0,$$

$$\| x_1 - x_0 \| \leq \beta_0 B \| f(x_0) \| < B \| f(x_0) \| /(1 - q_0), x_1 \in D$$

$$\varepsilon_1 = \beta_1^p \frac{\alpha B^{1+p}}{p+1} \| f(x_1) \|^p = \beta_0^p \frac{\alpha B^{1+p}}{p+1} \| f(x_0) \|^p = \varepsilon_0; q_1 = 1 - \beta_1(1 - \varepsilon_0) < q_0.$$

Из (1.7) в силу справедливости соотношения, связывающего шаговые длины и нормы невязок при $n = 1$, имеем оценки

$$\| f(x_2) \| \leq (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) \| = (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) \|,$$

$$q_1 < 1, \beta_2 > \beta_1$$

$$\varepsilon_2 = \beta_2^p \frac{\alpha B^{1+p}}{p+1} \| f(x_2) \|^p \leq \frac{\alpha B^{1+p}}{p+1} q_0^p (\| f(x_0) \| \beta_0)^p = q_0^p \varepsilon_0;$$

$$q_2 = 1 - \beta_2(1 - \varepsilon_2) < q_1.$$

$$\| x_2 - x_0 \| \leq \| x_2 - x_1 \| - \| x_1 - x_0 \| < B(\| f(x_1) \| + \| f(x_0) \|) <$$

$$< \frac{B \| f(x_0) \|}{1 - q_0}, x_2 \in D.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценки

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \|, q_i < 1; \tag{1.14}$$

$$\| x_{n+p} - x_n \| \le \sum_{i=n}^{n+p-1} \| x_{i+1} - x_i \| \le$$

$$\le B \sum_{i=n}^{n+p-1} \| f(x_i) \| \le B \| f(x_0) \| \frac{q_0^{n-1}}{1-q_0}. \tag{1.15}$$

Из (1.14) следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемая процессом (1.1) - (1.5), к x^*, а из (1.15) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ и в силу полноты пространства X имеет место и сильная сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x^*, а также то, что все $x_i \in D$.

Оценка погрешности n-го приближения получается при переходе к пределу в (1.15) при $p \to \infty$. *Теорема доказана.*

Теорема 1.3. *Пусть в шаре $D \subseteq S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$, существует x^*-решение уравнения (1.1) и производная оператора f в смысле Фреше удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L. Если $\| [f'(x)]^{-1} \| \le B \ \forall x \subset D$, начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 таковы, что $\varepsilon_0 = \beta_0 L B^2 \| f(x_0) \| < 1$, то итерационный процесс (1.1) - (1.5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*
Здесь $q_0 = 1 - \beta_0(1-\varepsilon_0)$.

Доказательство. В силу условий теоремы справедливо соотношение:

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)\Delta x_n \| \le$$

$$\leq \| \Delta x_n \| \sup_{0<\Theta<1} \| f'(x_n + \Theta \Delta x_n) - f'(x_n) \| \leq L \| \Delta x_n \|^2,$$

из которого следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| + L\beta_n^2 B^2 \| f(x_n) \|^2 =$$

$$= (1-\beta_n(1-\beta_n L B^2 \| f(x_n) \|)) \| f(x_n) \| = \qquad (1.16)$$

$$= (1-\beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \|; q_n = 1-\beta_n(1-\varepsilon_n).$$

Доказательство теоремы опирается на (1.16) и дословно повторяет доказательство теоремы 1.2.

Теорема 1.4. *Пусть в сфере* $D = S\left(x_0, \frac{B}{1-q_1} \| f(x_0) \|\right)$ *выполнены условия теоремы 1.3 кроме факта a priori существования решения* $x^* \in D$. *Пусть существует целое положительное число* k *такое, что*

$$1 > \beta_n = \frac{\gamma_{n-1} \| f(x_{n-1}) \|}{\| f(x_n) \| \beta_{n-1}}, n = 1, 2, \ldots, k-1. \beta_{k+j} = 1, j = 0, 1, \ldots$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, *к которому сходится итерационный процесс (1.3) – (1.5), начиная с* x_0. *Скорость сходимости* x_n *к* x^* *определяется неравенством*

$$\| x^* - x_n \| \leq B q_0^{2^{n-k}-1+k} \| f(x_0) \| . \qquad (1.17)$$

Доказательство. Так как выполняются все условия теоремы (1.1) за исключением a priori факта существования x^* в D, $l > k$ такой, что

$\beta_l = 1$ и $\beta_l B^2 L \parallel f(x_l) \parallel = B^2 L \parallel f(x_l) \parallel \leq B^2 L q_0^l \parallel f(x_0) \parallel \leq$ $\leq B^2 L \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel < 1$. Следовательно, $B^2 L \parallel f(x_l) \parallel < 1$, а это есть не что иное, как достаточное условие сходимости метода Ньютона. И, таким образом, в сфере D существует решение x^*. Оценка (1.17) получается стандартным образом. *Теорема доказана.*

Теорема, аналогичная теореме 1.4 может быть доказана и в случае, если имеют место соотношения

$$\parallel [f^{'}(x)]^{-1} \parallel \leq B, \parallel f^{''}(x) \parallel \leq M u q_0 = \beta_0 M B^2 \parallel f(x_0) \parallel < 1. \qquad (1.18)$$

Здесь $f^{''}(x)$ вторая производная в смысле Гато.

Теорема 1.5. *Пусть в D существует x^*- решение уравнения 1.1 и в D выполняются условия (1.18). Если β_0 и x_0 таковы, что* $\varepsilon_0 = \beta_0 B^2 M \parallel f(x_0) \parallel < 1$, *тогда итерационный процесс (1.3) – (1.5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Доказательство. В силу условий теоремы справедливо соотношение: $\parallel f(x_{n+1}) - f(x_n) - f^{'}(x_n)\Delta x_n \parallel \leq M \parallel \Delta x_n \parallel^2$,
из которого следует оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq (1 - \beta_n) \parallel f(x_n) \parallel + M\beta_n^2 B^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 = \qquad (1.19)$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Из (1.7) и условий теоремы при $n = 0$ имеем, что $\parallel f(x_1) \parallel \leq \parallel f(x_0) \parallel$, $\beta_1 > \beta_0$. Тогда $\parallel f(x_2) \parallel \leq (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \parallel f(x_1) \parallel = q_1 \parallel f(x_1) \parallel; q_1 < q_0$.

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \|, q_i \to 0, \beta_i \to 1, \tag{1.20}$$

из которой следует, что последовательность x_n, генерируемая процессом (1.3) - (1.5), по функционалу стремится к x^*. Из оценки (1.20)

$$\| x_{m+p} - x_m \| \leq \sum_{i=m}^{m+p-1} \| \Delta x_i \| \leq B \| f(x_0) \| \frac{q_0^m}{1 - q_0}, \tag{1.21}$$

следует фундаментальность последовательности x_n, откуда в силу полноты пространства X следует сильная сходимость последовательности x_n к x^* - предельному элементу последовательности, который является решением уравнения (1.1).

Из (1.20) следует, что в процессе счета найдется такой номер k_0, что для всех $n > k_0$ $\beta_n = 1$ и при этом $B^2 M \| f(x_n) \| < 1$, тогда из (1.19) имеем, что

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq B^2 M \| f(x_n) \|^2 \text{ и если } \overline{q} = B^2 M \| f(x_n) \|, \text{ то } \overline{q_{n+1}} \leq \overline{q_n^2},$$

откуда следует локальная квадратичная сходимость итерационного процесса (1.3) – (1.5) к x^*. *Теорема доказана.*

ЛЕКЦИЯ 2

Нелокальные сверхлинейные нерегуляризованные одношаговые и многошаговые итерационные процессы, реализующие неполный прогноз

Для решения уравнения (1.1) эффективным оказывается итерационный процесс.

Шаг 1 Решается линейное уравнение относительно Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2. \tag{2.1}$$

Шаг 2 Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{2.2}$$

Шаг 3 Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4 Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \tag{2.3}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma(\| f(x_n) \| + \| f(x_{n+1}) \|) \| f(x_n) \|}{2 \| f(x_{n+1}) \|^2}; \gamma_0 = \beta_0^2$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 2.1. *Пусть оператор f удовлетворяет в $S(x_0, r)$ условиям теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (2.1) – (2.3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к*
$x^* \in S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$, $q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$.

Доказательство. Пусть $\beta_{k\neq 1}$, тогда для $n + 2 < k$ имеет место соотношение, которое следует из (2.3):

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_{n+1}} = \frac{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)\beta_n}{\beta_{n+1} 2 \parallel f(x_{n+2}) \parallel}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) имеем соотношение, связывающее шаговые длины и нормы невязок

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \frac{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}{2}. \tag{2.5}$$

Из условий теоремы имеем оценку, связывающую нормы невязок на соседних шагах

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq (1 - \beta_n(1 - 0,5\beta_n K B^2 \parallel f(x_n) \parallel)) \parallel f(x_n) \parallel =$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel, \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_n = 0,5\beta_n K B^2 \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Если $\varepsilon_0 < 1$, то из (2.6) следует, что $\parallel f(x_1) \parallel < \parallel f(x_0) \parallel$, а из (2.3) имеем, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, тогда $\parallel f(x_2) \parallel < \parallel f(x_1) \parallel$. Из (2.3), (2.5) следует справедливость неравенств $\beta_1 > \beta_0, \beta_2 > \beta_0, q_2 < q_1 < q_0$. Индуктивно нетрудно показать, что последовательности ε_i с четными и нечетными индексами монотонно убывают и ограничены сверху числом ε_0 (при $i > l$), последовательность норм невязок $\| f(x_n) \|$ монотонно убывает и ограничена сверху числом $\| f(x_0) \|$, последовательности β_n с четными и нечетными номерами образуют монотонно возрастающие последовательности, ограниченные снизу числом β_0, так что последовательности q_n с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие и ограниченные сверху числом q_0 последовательности.

Из (2.6) и вышесказанного, имеем оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} \| f(x_i) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) \|, \tag{2.7}$$

из которой следует, что $\| f(x_n) \| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность элементов $x_n \to x^*$ по функционалу и все элементы последовательности принадлежат шару $S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$. Из (2.3) и того факта, что последовательность γ_i монотонно возрастает, следует, что если $\beta_{n+1} < 1$, то справедлива цепочка неравенств

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-1} \| f(x_n) \| (\| f(x_n) \| + \| f(x_{n-1}) \|) \| f(x_{n-1}) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \| 2 \| f(x_n) \|^2} >$$

$$> \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} > \ldots > \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_0 q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel} = \frac{\beta_0}{q_0^{n+1}}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) имеем, что существует такой номер n, что для всех $i > n$ шаговая длина $\beta_i = 1$.

В связи с вышесказанным и из (2.7) имеем, что существует такой номер $k \geq i$, начиная с которого выполнятся достаточное условие сходимости метода Ньютона $0.5KB^2 \parallel f(x_k) \parallel < 1$, откуда следует локальная квадратичная сходимость процесса (2.1) – (2.3). *Теорема доказана.*

Замечание 1. Эффективность процессов (1.3) – (1.5) и (2.1) – (2.3) может быть несколько усилена за счет введения в γ_{n+1} множителя $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$.

Теорема 2.2. *Пусть в шаре* $S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *выполняются условия теоремы 1.1 за исключением требования факта существования a priori* $x^* \in S$. *Пусть существует такое* $m \in N$, *что*

$$1 \geq \beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}\right), n = 0, 1, 2,$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n(\parallel f(x_{n-1}) \parallel + \parallel f(x_n) \parallel) \parallel f(x_n) \parallel}{2 \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}; \gamma_0 = \beta_0^2, \tag{2.9}$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \beta_{m+\gamma} = 1, \gamma = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in S$, *к которому сходится итерационный процесс (2.1) – (2.3), начиная с* x_0 *и имеет место оценка* *погрешности n-ого приближения*

$$\| x_n - x^* \| \leq B q_0^{2^{n-m}-1+m} \| f(x^0) \| . \tag{2.10}$$

Доказательство. Доказательство опирается на соотношения (2.7) – (2.9), из которых следует, что существует номер l, что $0.5KB^2 \| f(x_l) \| < 1$. Поскольку это есть достаточное условие сходимости метода Ньютона, то в шаре S существует решение x^*. Оценка (2.10) получена стандартным образом для $n > l$. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2, 1.3, 1.5 могут быть сформулированы и доказаны применительно к итерационному процессу (2.1) – (2.3). Предоставляем это выполнить в качестве упражнения.

К числу достаточно эффективных одношаговых процессов может быть отнесен процесс вида:

Шаг 1. Решаем линейное уравнение

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in (10^{-3}, 10^{-1}). \tag{2.12}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то β_{n+1} принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0) \parallel \gamma_n}{\beta_n \parallel f(x_{n+1} \parallel}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = 1 \qquad (2.13)$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 2.3. *Пусть в шаре* $S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *выполняются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (2.11) – (2.13) при* $\varepsilon_0 < 1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* $x^* \in S(x_0, r), r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$.

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины и нормы невязок. Полагая, что $\beta_k < 1$, $k \geq n+2$, в силу (2.13) имеем $\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}{\beta_{n+1}\|f(x_{n+2})\|}$, откуда следует нужное для доказательства теоремы соотношение

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel . \qquad (2.14)$$

Рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые были проведены в процессе доказательства теоремы 1.1, доказывается, что последовательность итерационных параметров $\beta_i \to 1$, последовательность норм невязок $\parallel f(x_n) \parallel \to 0$, последовательность $\varepsilon_i = 0.5KB^2\beta_i \parallel f(x_i) \parallel$, $i > 1$, монотонно убывает к нулю и справедлива оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel < q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel . \qquad (2.15)$$

Покажем, что существует такой номер $i = n+1$, начиная с которого $\beta_k = 1, k > i$. Если $\beta_{n+1} < 1$, то из (2.13) имеем

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} > \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel}. \tag{2.16}$$

Из (2.16) в силу (2.15) следует, что так как числитель в правой части (2.16) является константой, а знаменатель может быть сделан достаточно малым, то существует такой номер $i > n+1$, что $\beta_i = 1$ и все $\beta_k = 1$, $k > i$. Из (2.15) и вышесказанного следует, что существует номер $m \geq k$ такой, что

$$\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1. \tag{2.17}$$

Соотношение (2.17) есть достаточное условие сходимости метода Ньютона и, начиная с этого номера, процесс (2.11) – (2.13) непременно переходит в метод Ньютона с характерной для последнего локальной квадратичной скоростью. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2 – 1.5 могут быть сформулированы и доказаны применительно к алгоритму (2.11) – (2.13).

Достаточно эффективным с вычислительной точки зрения является процесс вида:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки

$$f'(x_n)\Delta x_n = -(x_n), n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.18}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{2.19}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.
Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_n = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n(\| f(x_n) \| + \| f(x_{n+1}) \|)}\right); \tag{2.20}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n(\| f(x_{n+1}) \| + \| f(x_{n+2}) \|)}{2 \| f(x_{n+2}) \|}, \gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\| f(x_0) \| + \| f(x_1) \|)}{\| f(x_1) \|}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Относительно процесса (2.18) – (2.20) может быть сформулирована и доказана

Теорема 2.4. *Пусть выполняется условие теоремы 1.1 в интересующем нас шаре $S(x_0, r)$, $r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$. Тогда итерационный процесс (2.18) – (2.20) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$.*

Доказательство. Доказательство опирается на соотношение, связывающее шаговые длины с нормами невязок, которое следует из (2.20).

Если $\beta_k < 1, k \geq n+2$, то из (2.20) имеем:

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2\beta_{n+1}^2(\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+2}) \parallel)} =$$

$$= \frac{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel (\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}{2\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel \parallel f(x_n) \parallel}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel \frac{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}{2 \parallel f(x_n) \parallel}. \tag{2.22}$$

Рассуждения, аналогичные тем, что приведены при доказательстве теоремы 1.1, дают оценку

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel, \tag{2.23}$$

где $q_i = 1 - \beta_i(1 - 0.5KB^2\beta_i \parallel f(x_i) \parallel) = 1 - \beta_i(1 - \varepsilon_i)$, $\varepsilon_i = 0.5KB^2\beta_i \parallel f(x_i) \parallel$.

Из (2.22) имеем, что последовательность итерационных параметров $\beta_i \to 1$, последовательность q_i образует монотонно убывающую последовательность, ограниченную сверху числом q_0, последовательности ε_i с четными и нечетными номерами монотонно убывает при $i > 1$, последовательность норм $\parallel f(x_n) \parallel \to 0$.

Нетрудно показать, что в условиях теоремы существует такой номер $k > n+1$, что $\beta_i = 1$ для $i \geq k$. Далее, из (2.23) имеем, что существует такой номер m, что $\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$. Таким образом, взяв $n_0 = \max(k, m)$, имеем, что, начиная с номера n_0, начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона и утверждения теоремы 2.4 справедливы.

Оценка погрешности n-ого приближения получается, как и выше. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2 – 1.5, могут быть сформулированы и доказаны применительно к процессу (2.18) - (2.20).

ЛЕКЦИЯ 3

Эффективные одно и многошаговые итерационные процессы неполного прогноза

Среди одношаговых методов неполного прогноза достаточно эффективным оказывается следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \dots \tag{3.1}$$

Шаг 2. Вносится поправка в x_n, определяется очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n. \tag{3.2}$$

Шаг 3. Проверяется условие окончания итерационного процесса: если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$, ε - параметр останова, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе производится пересчет β_{n+1} по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_0^2 \| f(x_0) \|^2}{\| f(x_{n+1}) \|^2 \beta_n}\right), \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \tag{3.3}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Относительно процесса (3.1) – (3.3) справедлива

Теорема 3.1. *Пусть в шаре* $S(x_0, r)$, $r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ *выполняются условия теоремы* 1.1. *Тогда итерационный процесс* (3.1) – (3.3) *при* $\varepsilon_0 < 1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* $x^* \in S(x_{0,r})$, $\varepsilon_i = 0.5KB^2\sqrt{\beta_i} \parallel f(x_i) \parallel$.
Оценка погрешности n-ого приближения имеет вид

$$\parallel x_n - x^* \parallel \leq \frac{B \parallel f(x_0) \parallel}{1 - q_0}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины с нормами невязок, для чего возьмем отношение β_{n+2} к β_{n+1}, полагая, что $\beta_{n+2} < 1$. С учетом (3.3) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel}.$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 = \beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 . \tag{3.5}$$

Рассуждения, вполне аналогичные тем, что приведены в теореме 1.1, дают возможность утверждать, что последовательности шаговых длин (итерационных параметров) β_i с четными и нечетными индексами монотонно возрастают и ограничены снизу числом β_0, последовательности $\varepsilon_i (i > 1)$ с четными и нечетными индексами монотонно убывают и ограничены сверху числом ε_0, последовательность q_i монотонно убывает и ограничена сверху числом q_0, последовательность норм невязок монотонно убывает к нулю и имеет место оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) \| . \tag{3.6}$$

С учетом (3.3), (3.6) при $\beta_{n+1} < 1$ имеет место неравенство

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_0^2 \| f(x_0) \|^2}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|^2} > \frac{\beta_0^2 \| f(x_0) \|^2}{\| f(x_{n+1}) \|^2}. \tag{3.7}$$

Так как в правой части неравенства (3.7) в числителе стоит константа, а знаменатель, в силу (3.6), может быть сделан в процессе счета сколь угодно малым, то существует такой номер k, что для $i > k$ β_i становится равным 1, в силу (3.6) существует такой номер m_0, что $\varepsilon_{m_0} = 0.5KB^2 \| f(x_{m_0}) \| < 1$. Таким образом, при $m = \max(k, m_0)$ начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона. Оценка погрешности n-ого приближения получается стандартным образом. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2 – 1.5, могут быть сформулированы и доказаны применительно к процессу (3.1) – (3.3).

Если область D определить другим способом, чем это мы делали выше, то может быть описан еще ряд эффективных процессов.

Пусть оператор f удовлетворяет в области D условиям: $f \in C_D^{(2)}$, линейный оператор $f'(x)$ в D обратим и имеют место оценки

$$\| [f'(x)]^{-1} \| \leq, \| f''(x) \| \leq K, \forall x \in D.$$

Здесь $f'(x)$ - производная Фреше оператора f.

Определим область D так: $D = \{x : \omega_n \leq \omega_0\}$. Для решения уравнения (1.1) применим процесс вида:

Шаг 1. Решается линейное уравнение

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.8}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in (10^{-3}, 10^{-1}). \tag{3.9}$$

Шаг 3. Если $\| \; f(x_{n+1}) \; \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\omega_n}{\alpha\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \tag{3.10}$$

$$\omega_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})\omega_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1}) \|, \omega_0 =$$
$$= \gamma \| f(x_0) \|; \alpha > 1, \gamma << 1 \tag{3.11}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 3.2. *Пусть в области D существует x^* - решение уравнения (1.1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям. Пусть сверх того, выполняются условия:*

1. $\beta_0 \frac{KB^2\|f(x_0)\|}{2} = l_0 < 1$;

2. $\frac{\gamma}{\alpha\beta_0^2} < 1$.

Тогда итерационный процесс (3.8) – (3.11) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in D$ к $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$.

Доказательство. Подставляя (3.10) в (3.11) и применяя индукцию, имеем соотношение

$$\omega_{n-1} = \prod_{i=0}^{n}(1-(1-\frac{1}{\alpha})\beta_i)\omega_0, \tag{3.12}$$

из которого следует ограниченность последовательности чисел ω_n, которая определяется формулами (3.10), (3.11), а также их монотонное убывание с ростом номера n. Из (3.10) нетрудно получить соотношение

$$\beta_{n+1}\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel = \frac{\omega_n}{\alpha}, \tag{3.13}$$

которое при замене n на $n-1$ имеет вид

$$\beta_n\beta_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel = \frac{\omega_{n-1}}{\alpha}. \tag{3.14}$$

Для соотношение, определяемое (3.13) на соотношение (3.14), имеем оценку, связывающую шаговую длину с нормой невязки

$$\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel \le \beta_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel, n = 1, 2\ldots \tag{3.15}$$

В силу условий теоремы справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| = \| f(x_n) + \beta_n \Delta x_n \| \leq$$

$$\leq \left[1 - \beta_n \left(1 - \beta_n \frac{KB^2}{2} \| f(x_n) \|\right)\right] \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \|, \qquad (3.16)$$

$$q_n = 1 - \beta_n \left(1 - \beta_n \frac{KB^2}{2} \| f(x_n) \|\right).$$

Найдём условия, при которых все $q_i < 1$. Пусть $n = 0$, тогда из (3.16) следует, что

$$\| f(x_1) \| \leq \left[1 - \beta_0 \left(1 - \beta_0 \frac{KB^2}{2} \| f(x_0) \|\right)\right] \| f(x_0) \|$$

и если $\beta_0 \frac{KB^2}{2} \| f(x_0) \| = l_0 < 1$, то из последнего неравенства следует, что $q_0 = 1 - \beta_0(1 - l_0) < 1$.

Пусть $n = 1$. Тогда из (3.16) имеем, что

$$\| f(x_2) \| \leq (1 - \beta_1(1 - 0.5\beta_1 KB^2 \| f(x_1) \|)) \| f(x_1) \| \qquad (3.17)$$

или с учётом (3.10) при $n = 0$ оценка (3.17) примет вид

$$\| f(x_2) \| \leq \left[1 - \beta_1 \left(1 - \frac{KB^2}{2} \frac{\omega_0}{\alpha\beta_0}\right)\right] \| f(x_1) \| =$$

$$= \left[1 - \beta_1 \left(1 - \frac{l_0 \gamma}{\alpha\beta_0^2}\right)\right] \| f(x_1) \|. \qquad (3.18)$$

Если $\frac{\gamma}{\alpha\beta_0^2} < 1$, то $q_1 < 1, \| f(x_2) \| \leq q_0 q_1 \| f(x_0) \|$.

Пусть $n = 2$, тогда в силу (3.15), (3.16) имеем

$$\| f(x_3) \| \leq \left[1 - \beta_2 \left(1 - \beta_2 \frac{KB^2}{2} \| f(x_2) \| \right)\right] \| f(x_2) \| \leq$$

$$\leq \left[1 - \beta_2 \left(1 - \beta_0 \frac{KB^2}{2} \| f(x_1) \| \right)\right] \| f(x_2) \| \leq$$

$$\leq (1 - \beta_2(1 - l_0 q_0)) \| f(x_2) \| = q_2 \| f(x_2) \|,$$

$$q_2 < 1, \| f(x_3) \| \leq q_0 q_1 q_2 \| f(x_0) \| .$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \|, \forall q_i < 1, \tag{3.19}$$

из которой с очевидностью следует сходимость по функционалу к x^* последовательности элементов x_n, образованной итерационным процессом (3.8) - (3.11), а также сильная (по норме) сходимость элементов последовательности x_n к x^*.

Действительно, из (3.8) – (3.11) и условий теоремы следуют оценки

$$\| \Delta x_n \| \leq B \frac{q^n}{1 - q}, q = \max(q_0, q_1, \dots).$$

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \| \Delta x_i \| \leq \frac{B \| f(x_0) \| q^n}{1-q} \to 0, n \to \infty,$$

из которых следует фундаментальность последовательности x_n. В силу полноты пространства X имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $p \to \infty$ и имея в виду по выше доказанному, что x^* - решение уравнения (1.1), получим, что $\| x^* - x_n \| \to 0$ при $n \to \infty$, откуда следует утверждение о сильной сходимости x_n к x^*.

Далее, покажем, что $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Положив противное, имеем из (3.10), что ω_n стремиться к пределу со сверхлинейной скоростью, а из (3.11) следует, что ω_n стремится к пределу со скоростью не быстрее линейной. Противоречие будет снято, если отказаться от предположения о том, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В связи с тем, что $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, ряд $\sum \beta_i$ расходится, следовательно, расходится к нулю бесконечное произведение $\prod\limits_{i=0}^{\infty}(1-\beta_i)$. Таким образом, как следует из (3.12), $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$ и при этом для “хороших” задач порядки убывания $\| f(x_n) \|$ и ω_n, как правило, совпадают. Стандартными рассуждениями нетрудно показать, что все последовательные приближения $x_n \in D$ и $x^* \in D$. *Теорема доказана.*

Замечание 2. Как следует из (3.11), ω_{n+1} аппроксимирует $\| f(x_{n+1}) \|$, а из (3.19) видно, что существует такой номер k, что для всех $i > k$ начинает выполнятся достаточное условие сходимости метода Ньютона. Если $\beta_i \sim 1$, тогда x_i попадает в область притяжения метода Ньютона и мы можем рассчитывать на локальную квадратичную сходимость процесса (3.8) - (3.11).

Теорема 3.2 справедлива в предположении существования в D x^* – решения уравнения (1.1). Сформулируем и докажем теорему, в которой будут использованы доказательные вычисления.

Теорема 3.3. *Пусть в области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\| \ [f'(x)]^{-1} \| \leq B$, $\| \ f''(x) \ \| \leq K$, $\forall x \in D$ и, сверх того, выполняются условия:*
1. $\frac{\beta_0 K B^2 \|f(x_0)\|}{2} = l_0 < 1$,
2. $\frac{\gamma}{\alpha\beta_0^2} < 1$,
3. начиная с некоторого номера k $\beta_i = 1$, $i > k$,
тогда итерационный процесс (3.8)-(3.11) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in D$.

Доказательство. Вполне аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.2, могут быть получены оценки вида (3.19)

$$\| \ f(x_{n-1}) \ \| \leq \prod_{i=1}^{n} q_i \ \| \ f(x_0) \ \|, q_i < 1$$

и если, начиная с k-го шага, $\beta_k = 1$, а, начиная с l-го шага, выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона, то, взяв $m = \max(k, l)$

будем иметь, что точка x_m попадает в область притяжения метода Ньютона и налицо локальная квадратичная скорость сходимости и существование решения $x^* \in D$. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2 - 1.5 могут быть сформулированы и доказаны и относительно процесса (3.8) – (3.11)

Замечание 3. Эффективная проверка условий (1.2) часто затруднительна, оценки для D и K получаются завышенными, радиус интересующей нас сферы содержит глобальную константу B. Все вышесказанное требует осуществить поиск других путей определения радиуса области D.

Замечание 4. Обратимость оператора $f'(x)$ в области D является также достаточно обременительным условием.

ЛЕКЦИЯ 4

Нелокальные сверхлинейные итерационные процессы неполного прогноза, не требующие обратимости производной оператора

В связи с вышесказанным, следуя идее работы [1], найдем условия, при которых при переходе от точки x_0, в которой $[f'(x_0)]^{-1}$ существует, к точке x_1 будет существовать ограниченный обратный оператор $[f'(x_1)]^{-1}$. Если $f \in C_D^{(2)}$, имеем оценку

$$\| E - [f'(x_0)]^{-1} f'(x_1) \| = \| [f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0) - f'(x_1)) \| \leq$$

$$\leq \| [f'(x_0)]^{-1} \| \cdot \| f'(x_0) - f'(x_1) \| \leq B_0 K \| x_1 - x_0 \| = B_0 K \| \Delta x_0 \| = l_0.$$

Здесь $\| [f'(x_0)]^{-1} \| = B_0$, E– единичный оператор.

Если $l_0 < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор обратный оператору $[f'(x_0)]^{-1} f'(x_1)$ и справедлива оценка
$\| [f(x_1)]^{-1} \| \leq B_0 (1 - l_0)^{-1}$.

Если для получения элемента x_1 использовать метод Ньютона, имеем оценку

$$\| f(x_1) \| = \| f(x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0)) \| \leq$$

$$\leq \frac{K \| \Delta x_0 \|^2}{2} < \frac{l_0}{2B_0} \| \Delta x_0 \| . \qquad (4.1)$$

Определим l_0 так, чтобы при переходе от точки x_0 к точке x_1 выполнялось неравенство $l_1 < l_0$. Имеем

$$l_1 = B_1 K \parallel \Delta x_1 \parallel \leq B_0(1-l_0)^{-1} K B_1 \parallel f(x_1) \parallel \leq \frac{B_0^2(1-l_0^2 K l_0 \parallel \Delta x_0 \parallel)}{2B_0} =$$

$$= \frac{B_0 K \parallel \Delta x_0 \parallel l_0}{2(1-l_0)^2} = \frac{l_0^2}{2(1-l_0)^2}.$$

Неравенство $l_1 < l_0$ справедливо при $l_0 \leq \frac{1}{2}$. Нетрудно найти радиус области существования решения уравнения (1.1) в сфере $S(x_0, r_3)$. Учитывая (4.1), имеем оценку для сходящегося процесса Ньютона

$$r_3 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \parallel \Delta x_i \parallel \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + B_1 \parallel f(x_1) \parallel + B_2 \parallel f(x_2) \parallel + \cdots \leq$$

$$\leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \frac{l_0}{2(1-l_0)} \parallel \Delta x_0 \parallel +$$

$$+ \left(\frac{l_0}{2(1-l_0)} \right)^2 \parallel \Delta x_0 \parallel + \cdots \leq \frac{2(1-l_0)}{2-3l_0} \parallel \Delta x_0 \parallel . \qquad (4.2)$$

Наряду с оценкой (4.2) может быть получена оценка (4.3).

$$r_3 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \parallel \Delta x_i \parallel \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \parallel \Delta x_1 \parallel + \frac{l_1}{2(1-l_1)} \parallel \Delta x_1 \parallel +$$

$$+\left(\frac{l_1}{2(1-l_1)}\right)^2 \parallel \Delta x_1 \parallel + \dots \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \frac{2(1-l_0)}{2-3l_0} \parallel \Delta x_1 \parallel . \qquad (4.3)$$

Найдем условия, при выполнении которых в области $S(x_0, r)$ не более одного решения. Положим, что $s(x_0, r)$ существуют два решения x^* и x^{**}. Тогда справедлива оценка:

$$\parallel x^* - x^{**} \parallel = \parallel x^* - x^{**} - [f'(x_0)]^{-1}(f(x^*) - f(x^{**})) \parallel \leq$$

$$\leq \parallel [f(x_0)]^{-1} \parallel \parallel f'(x_0)(x^* - x^{**}) - (f(x^*) - f(x^{**})) \parallel \leq \qquad (4.4)$$

$$\leq B_0 \sup_{0 \leq \Theta \leq 1} \parallel f'(x^{**} + \Theta(x^* - x^{**})) - f'(x_0) \parallel \parallel x^* - x^{**} \parallel \leq B_0 K r \parallel x^* - x^{**} \parallel .$$

Если в (4.4) потребовать, чтобы $B_0 K r = q < 1$ или

$$r = \frac{q}{B_0 K} = \frac{q \parallel \Delta x_0 \parallel}{B_0 K \parallel \Delta x_0 \parallel} = \frac{q \parallel \Delta x_0 \parallel}{l_0}, \qquad (4.5)$$

то в сфере $S(x_0, r)$ будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\frac{2(1-l_0)}{2-3l_0} \parallel \Delta x_0 \parallel \leq \frac{q}{B_0 K} = \frac{q \parallel \Delta x_0 \parallel}{l_0}, \qquad (4.6)$$

которое равносильно утверждению $r_3 \leq r$. Из (4.6) следует оценка l_0:

$$l_0 \leq \frac{2 + 3q - \sqrt{9q^2 - 4q + 4}}{4} = F(q) < \frac{1}{2}. \qquad (4.7)$$

Если в качестве r_3 взять правую часть соотношения (4.3) и потребовать выполнения условия

$$\| \Delta x_0 \| + \frac{2(1-l_0)}{2-3l_0} \| \Delta x_1 \| \leq \frac{q \| \Delta x_0 \|}{l_0}, \tag{4.8}$$

то неравенство (4.8) также равносильно утверждению того, что $r_3 \leq r$.

Из (4.8) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\| \Delta x_1 \|}{\| \Delta x_0 \|} \leq \left(\frac{q}{l_0} - 1 \right) \cdot \frac{2-3l_0}{2(1-l_0)} = G(l_0). \tag{4.9}$$

Так как $G'_{l_0}(l_0) < 0$, то $G(F(q)) \leq G(l_0)$. Тогда из выполнения соотношения (4.10)

$$\frac{\| \Delta x_1 \|}{\| \Delta x_0 \|} \leq \left(\frac{q}{F(q)} - 1 \right) \cdot \frac{2-3F(q)}{2(1-F(q))}. \tag{4.10}$$

будет следовать соотношение (4.9), которое является следствием утверждения того, что $r_3 \leq r$.

Пусть выполняется (4.10). Тогда соотношение (4.10) можно переписать в следующем виде:

$$\| \Delta x_0 \| + \| \Delta x_1 \| + \frac{F(q)}{2(1-F(q))} \cdot \| \Delta x_1 \| +$$

$$+ \left(\frac{F(q)}{2(1-F(q))} \right)^2 \| \Delta x_1 \| + \cdots \leq \frac{q \| \Delta x_0 \|}{F(q)}. \tag{4.11}$$

Левая часть неравенства (4.11) мажорирует правую часть соотношения (4.3), а правая часть (4.11) минорирует правую часть (4.6). Следовательно, из выполнения (4.10) следует выполнение (4.9), которое есть условие того, что $r_3 \leq r$. Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 4.1. *Пусть оператор* $f \in C_D^{(2)}$, $\| \, [f'(x_0)]^{-1} \, \| = B_0$. *На некотором шаге сходящегося процесса Ньютона выполняется соотношение*

$$\frac{\| \Delta x_{n+1} \|}{\| \Delta x_n \|} \leq \left(\frac{q}{F(q)} - 1 \right) \cdot \frac{2 - 3F(q)}{2(1 - F(q))}, \left| \, \frac{\| \Delta x_{n+1} \|}{\Delta x_n} - G(f(q)) \, \right| << 1.$$

Тогда в сфере $\overline{S}\left(x_n, \frac{q\|\Delta x_n\|}{F(q)}\right) \subset D$ *решение* x^* *уравнения (1.1) существует и единственно.*

Замечание 5. Доказанная выше теорема 4.1 относится к классу так называемых «доказательных» вычислений, поскольку вся необходимая информация получается в результате работы вычислительного алгоритма.

Весьма эффективным с вычислительной точки зрения являются многошаговые методы неполного прогноза, одним из представителей которого является следующий алгоритм

<u>Шаг 1.</u> Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.12}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \tag{4.13}$$

Шаг 3. Если $\| \ f(x_{n+1}) \ \| < \varepsilon, \varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина, если $\| \ f(x_{n+1}) \ \| < \| \ f(x_n) \ \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma n \ \| \ f(x_n) \ \|}{\beta_n(\| \ f(x_n) \ \| + \| \ f(x_{n+1}) \ \|)}\right), \tag{4.14}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n(\| \ f(x_{n+1}) \ \| + \| \ f(x_{n+2}) \ \|) \ \| \ f(x_n) \ \|}{2 \ \| \ f(x_{n+1}) \ \|\| \ f(x_{n+2}) \ \|},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0(\| \ f(x_0) \ \| + \| \ f(x_1) \ \|)}{\| \ f(x_1) \ \|}$$

и переход на шаг 1.

Теорема 4.2. *Пусть в сфере* $S(x_0, r), r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ *выполняются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (4.12) - (4.14) при* $\varepsilon_0 < 1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* $x^* \in S(x_0, r)$ *и имеет место оценка погрешности n-ого приближения*

$$\| \ x_n - x^* \ \| \leq B q_0^{2^{n-m}-1+m} \ \| \ f(x_0) \ \| .$$

Доказательство. Пусть $\beta_{n+2} < 1$, тогда имеем в силу (4.14)

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\beta_{n+1}(\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)\beta_{n+1}} = \tag{4.15}$$

$$= \frac{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)\beta_n}{2\beta \parallel f(x_{n+2}) \parallel}.$$

Из (4.15) имеем соотношение, связывающее шаговые длины и нормы невязок

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \frac{\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2}. \tag{4.16}$$

Из (4.14) и условий теоремы следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\parallel f(x_1) \parallel < \parallel f(x_0) \parallel$, $\beta_1 > \beta_0$. Из (4.16) имеем, что ε_i с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие последовательности, ограниченные сверху числом ε_0, шаговые длины β_i с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, ограниченные снизу числом β_0, q_i образуют монотонно убывающую последовательность, ограниченную сверху числом $q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\beta_0 \parallel f(x_0) \parallel$ и справедлива оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel = \prod q_i \parallel f(x_0) \parallel \leq q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel \to 0, n \to \infty. \tag{4.17}$$

Из (4.17) следует сходимость последовательности элементов x_n, генерируемых алгоритмом (4.12) - (4.14) к x^*.

Далее, из (4.14) имеем оценку при β_{n+1}

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-1}(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel) \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{2 \parallel f(x_{n+1}) \parallel \beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-2}(\parallel f(x_{n-1}) \parallel + \parallel f(x_n) \parallel) \parallel f(x_{n-1}) \parallel \parallel f(x_{n-2}) \parallel}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel 2 \parallel f(x_{n-1}) \parallel \parallel f(x_n) \parallel} >$$

$$> \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} > \cdots > \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_0 \parallel f(x_{n+1}) \parallel}. \qquad (4.18)$$

Из (4.17), (4.18) следует что, начиная с некоторого номера k, все шаговые длины становятся равными единице.

Если при некотором номере $m \geq k$ начинает выполняться условие $\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$ (достаточное условие сходимости метода Ньютона), то имеет место локальная квадратичная скорость сходимости процесса. Оценка n–ого приближения может быть получена стандартным способом. *Теорема доказана.*

Теоремы аналогичные теоремам 1.2 – 1.5, могут быть сформулированы и доказаны относительно процесса (4.12) – (4.14).

Вычислительная практика решения существенно нелинейных систем показывает эффективность следующего алгоритма:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2\dots \tag{4.19}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \tag{4.20}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon, \varepsilon << 1$ (ε –параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_{n-1}) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \tag{4.21}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\gamma_n \| f(x_{n-1}) \|}{\| f(x_n) \|}, \gamma_0 = \beta_{-1}\beta_0, \beta_{-1} = \beta_0$$

и переход на шаг 1.

Относительно алгоритма (4.19) – (4.21) справедлива

Теорема 4.3. *Пусть в сфере $S(x_0, r), r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ выполняются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (4.19) – (4.21) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r).\varepsilon_0 = 0.5KB^2\beta_0 \| f(x_0) \|, q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$.*

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины и нормы невязок, полагая, что шаговые длины меньше единицы. Из (4.21) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \sqrt{\frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_{n+1}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel (\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 \gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}} = \tag{4.22}$$

$$\sqrt{\frac{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel) \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2 \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2}}.$$

Из (4.22) получаем необходимое соотношение

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_{n+1} \sqrt{\frac{\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2}} \parallel f(x_{n+1}) \parallel. \tag{4.23}$$

Рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые приведены в доказательстве теоремы 4.2 с учетом (4.23), приходим к выводу о том, что последовательность итерационных параметров β_i монотонно возрастают и ограничены снизу числом β_0, все $q_i < 1$ монотонно убывают и имеет место оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel = \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel \leq q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel, q_0 < 1. \tag{4.24}$$

Далее из (4.21) имеем при $\beta_{n+1} < 1$, что

$$\beta_{n+1} = \sqrt{\frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}} = \sqrt{\frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel (\parallel f(x_{n-1}) \parallel + \parallel f(x_n) \parallel)}{2\beta_{n-1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}} > \tag{4.25}$$

$$> \sqrt{\frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{\beta_{n-1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}} > \cdots > \sqrt{\frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_0 \parallel f(x_{n+1}) \parallel}} \to \infty, n \to \infty.$$

Из (4.24), (4.25) следует, что существует такой номер k, что $\beta_k := 1$ и $\varepsilon_k = 0.5KB^2 \parallel f(x_k) \parallel < 1$. Таким образом, выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона и итерационный процесс, начиная с этого номера, переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Относительно процесса (4.19) - (4.21) могут быть сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1.2 – 1.5.

ЛЕКЦИЯ 5

Многошаговые нелокальные итерационные процессы неполного прогноза для решения нелинейных уравнений

Далее рассмотрим алгоритм:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \dots \tag{5.1}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n. \tag{5.2}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon, \varepsilon << 1$, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина, если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right); \tag{5.3}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\| f(x_{n+2}) \|}; \gamma_0 = \beta_0^2$$

и переход на шаг 1.

Относительно процесса (5.1) – (5.3) справедлива

Теорема 5.1. *Пусть в шаре* $S(x_0, r), r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ *выполняются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (5.1) – (5.3) при* $\varepsilon_0 < 1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* $x^* \in S(x_0, r)$. $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\sqrt{\beta_0} \parallel f(x_0) \parallel$, $q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$.

Доказательство. Доказательство опирается на соотношение связывающее шаговые длины и нормы невязок. Пусть $\beta_k < 1, k \geq n+2$, тогда из (5.3) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_{n+1}^2} =$$

$$= \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n}{\parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 \beta_{n+1}\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 = \beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 . \tag{5.5}$$

Рассуждения, вполне аналогичные вышеприведенным, позволяют утверждать, что последовательности итерационных параметров β_i с четными и нечетными индексами монотонно возрастают, последовательности $q_i = 1 - \sqrt{\beta_i}(1 - \varepsilon_i)$, где $\varepsilon_i = 0.5KB^2\sqrt{\beta_i} \parallel f(x_i) \parallel$ с четными и нечетными номерами монотонно убывают и ограниченны сверху числом $q_0 < 1$. Справедлива оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel < q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel . \tag{5.6}$$

Из (5.3) имеем, что

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} = \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel \parallel f(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n} = \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel \beta_n \parallel f(x_n) \parallel} > \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} \geq \cdots \geq \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}.$$

Из последнего соотношения и (5.6) следует, что при некотором k параметр β_k становится равным единице и существует такой номер m, что начинает выполняться достаточное условие $\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$. Взяв $i = \max(k, m)$, имеем, что $\beta_i = 1$ и $\varepsilon_i < 1$. Таким образом, начиная с i–ой начинает выполняться условие сходимости метода Ньютона и процесс (5.1) – (5.3) становится сверхлинейным (локально квадратичным). *Теорема доказана.*

Теоремы аналогичные теоремам 1.2 – 1.5 могут быть сформулированы и доказаны относительно процесса (5.1) – (5.3).

Следующим эффективным многошаговым итерационным процессом является алгоритм

<u>Шаг 1.</u> Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \ldots \tag{5.7}$$

<u>Шаг 2.</u> Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \tag{5.8}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon, \varepsilon << 1$, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.
Шаг 4. Определяется новая шаговая длина, если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_0) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right); \tag{5.9}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\gamma_n \| f(x_{n+1}) \|}{\| f(x_{n+2}) \|}; \gamma_0 = \beta_0^2$$

и переход на шаг 1.

Относительно процесса (5.7) – (5.9) справедлива

Теорема 5.2. *Пусть в шаре $S(x_0, r), r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ налагаются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (5.7) – (5.9) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) сходится к $x^* \in S(x_0, r)$.* $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\sqrt{\beta_0} \| f(x_0) \|$.

Доказательство. При доказательстве теоремы обратим внимание на два факта: наличие связи между шаговыми длинами и нормами невязок и то, что существует номер k такой, начиная с которого все $\beta_i = 1, i \geq k$. Взяв отношение $\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}$ при $\beta_{n+2} < 1$ из (5.9) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \| f(x_0) \|}{\beta_{n+1} \| f(x_{n+2}) \| \beta_{n+1}} =$$

$$= \frac{\gamma_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \parallel f(x_0) \parallel \beta_n}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 \gamma_n \parallel f(x_0) \parallel} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2}. \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует соотношение

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 = \beta_n \parallel f(x_n) \parallel^2 . \tag{5.11}$$

Из (5.11) и условий теоремы следует монотонное убывание норм невязок и оценка, аналогичная (5.6). Далее

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_0) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel_2 \beta_n} > \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_0) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}. \tag{5.12}$$

Из (5.12) следует, что существует такой номер k , что $\beta_k = 1$, а из (5.6) следует, что при некотором номере m $\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$, так что если $i = \max(k, m)$, то $\beta_i = 1$ и $\varepsilon_i < 1$. Итак, начиная с номера i, выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона. *Теорема доказана.*

Теоремы аналогичные теоремам 1.2 – 1.5 могут быть сформулированы и доказаны относительно процесса (5.7) – (5.9).

Среди многошаговых нелокальных сверхлинейных итерационных процессов, реализующих процедуру неполного прогноза, интересен следующий процесс.

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2\dots \tag{5.13}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \tag{5.14}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \|< \varepsilon, \varepsilon << 1$, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина, если $\| f(x_{n+1}) \|<\| f(x_n) \|$, то

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n(\| f(x_n) \| + \| f(x_{n+1}) \|)}\right) \tag{5.15}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n(\| f(x_{n+1}) \| + \| f(x_{n+2}) \|)}{2 \| f(x_{n+1}) \|\| f(x_{n+2}) \|}, \gamma_0 = \beta_0^2\frac{\| f(x_0) \| + \| f(x_1) \|}{\| f(x_1) \|}$$

и переход на шаг 1.

Имеет место

Теорема 5.3. *Пусть в сфере $S(x_0, r)$ выполняются условие теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (5.13) – (5.15) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$.* $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\beta_0 \| f(x_0) \|, q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)$.

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины с нормами невязок. Если $\beta_{n+2} < 1$, то имеем в силу (5.15)

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{\beta_{n+1}(\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+2}) \parallel)\beta_{n+1}} = \tag{5.16}$$

$$= \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel (\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+2}) \parallel) \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2 \parallel f(x_{n+1}) \parallel \parallel f(x_{n+2}) \parallel} \times$$

$$\times \frac{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}{\beta_{n+1}(\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+2}) \parallel)\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel} =$$

$$= \frac{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}{2 \parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_{n+1}}.$$

Из (5.16) имеем

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \frac{\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel}{2}. \tag{5.17}$$

Вполне аналогично тому, как это мы делали выше с учетом (5.17), доказываем монотонное убывание норм невязок, стремление к нулю последовательности норм невязок, монотонное возрастание последовательностей β_i с четными и нечетными номерами.

Если $\beta_{n+1} < 1$, то из (5.15) может быть получена оценка

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)} = \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} = \tag{5.18}$$

$$= \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel (\parallel f(x_{n-1}) \parallel + \parallel f(x_n) \parallel)}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel 2 \parallel f(x_n) \parallel} >$$

$$> \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel} > \cdots > \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}.$$

Из (5.18) следует, что существует такой номер k, что β_k становится равным единице и такой номер m, что $0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$ становится меньше единицы, так что взяв $i = \max(m, k)$, можно утверждать что с этого номера итерации начинает выполнятся достаточное условие сходимости метода Ньютона и итерационный процесс (5.13) – (5.16) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скорости сходится к $x^* \in S(x_0, r)$. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные теоремам 1.2 - 1.5 справедливы относительно процесса (5.13) - (5.15).

Весьма эффективным представителем семейства сверхлинейных многошаговых итерационных процессов, реализующих процедуру неполного прогноза, служит следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2 \ldots \tag{5.19}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n. \tag{5.20}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon, \varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.
Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_0) \|^2}{\beta_n(\| f(x_n) \|^2 + \| f(x_{n+1}) \|^2)}\right) \tag{5.21}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2 (\| f(x_{n+1}) \|^2 + \| f(x_{n+2}) \|^2)}{\| f(x_{n+2}) \|^2 (\| f(x_n) \|^2 + \| f(x_{n+1}) \|^2)};$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2 \frac{\| f(x_0) \|^2 + \| f(x_1) \|^2}{\| f(x_1) \|^2}$$

и переход на шаг 1.

Относительно процесса (5.19) - (5.21) справедлива теорема

Теорема 5.4. *Пусть в шаре $S(x_0, r)$,$r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$, выполняется условие теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (5.19) - (5.21) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$.*

Доказательство. Следуя идеям, которые были реализованы выше, найдём связь между шаговыми длинами и нормами невязок.

Пусть $\beta_{n+2} < 1$, тогда из (5.21) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\beta_n \| f(x_n) \|^2}{\beta_{n+1} \| f(x_{n+2}) \|^2}. \tag{5.22}$$

Из (5.22) следует, что справедливо равенство

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 = \beta_n \parallel f(x_n) \parallel^2 . \tag{5.23}$$

Вполне аналогично тому, как это мы делали выше, из условий теоремы и (5.23) имеем, что последовательность норм невязок и последовательность ε_n, $\varepsilon_n = 0.5KB^2\sqrt{\beta_n \parallel f(x_0) \parallel}$ убывает к нулю, последовательности β_i с чётными и нечётными номерами монотонно возрастают к единице. Покажем, что существует такой номер итерации k, что $\beta_i = 1$, для $i \geq k$. В самом деле, пусть $\beta_{n+1} < 1$, тогда из (5.21) имеем

$$\begin{gathered}\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_0) \parallel^2}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2)} = \\ \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel^2 \parallel f(x_0) \parallel^2}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 \beta_n(\parallel f(x_{n-1}) \parallel^2 + \parallel f(x_n) \parallel^2)} > \\ > \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_0) \parallel^2}{q_{n-1}q_n\beta_n(\parallel f(x_{n-1}) \parallel^2 + \parallel f(x_n) \parallel^2)} > \cdots > \\ > \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel^2}{\prod\limits_{i=1}^{n} q_i(\parallel f(x_0) \parallel^2 + \parallel f(x_1) \parallel^2)}.\end{gathered} \tag{5.24}$$

В числителе правой части неравенства (5.24) константа, а знаменатель стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно существует такой номер итерации k, что $\beta_i = 1$ при $i \geq k$. А так как, $\lim \parallel f(x_n) \parallel = 0$ при

$n \to \infty$, то при некотором номере итерации m
$\overline{\varepsilon_m} = 0.5KB^2 \parallel f(x_n) \parallel < 1$.

Взяв $i = \max(k, m)$, имеем, что, начиная с номера i, начинает выполнятся достаточное условие сходимости метода Ньютона и налицо сверхлинейная сходимость процесса (5.19) – (5.21). *Теорема доказана.*

Для процесса (5.19) – (5.21) справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1.2 - 1.5.

ЛЕКЦИЯ 6

Многошаговые нелокальные эффективные итерационные процессы неполного прогноза

Среди многошаговых нелокальных процессов достаточно эффективным является следующий:

Шаг 1. Решается линейная система для определения Δx_n:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 1, 2, \dots \tag{6.1}$$

Шаг 2. Находим очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.2}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2}{\beta_n \left(\| f(x_n) \|^2 + \| f(x_{n+1}) \|^2\right)}\right) \tag{6.3}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2 \left(\| f(x_{n+1}) \|^2 + \| f(x_{n+2} \|^2\right)}{2 \| f(x_{n+2}) \|^2 \| f(x_{n+1}) \|},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta 0^2 \left(\| f(x_0 \|^2 + \| f(x_1) \|^2\right)}{\| f(x_1) \|^2}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Относительно процесса (6.1) - (6.3) справедлива

Теорема 6.1. *Пусть в шаре* $S(x_0, r)$, $r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}$ *выполняются условия теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (6.1) – (6.3) при* $\varepsilon_0 < 1$ *со сверхлинейной скоростью сходится к* $x^* \in S(x_0, r)$.
$\varepsilon_0 = 0.5KB^2\sqrt{\beta_0} \parallel f(x_0) \parallel$.

Доказательство. Найдем соотношение, связывающее шаговые длины с нормами невязок. Из (6.3) при $\beta_{n+2} < 1$ имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}{\beta_{n+1}(\parallel f(x_{n+1}) \parallel)^2 + \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2)\beta_{n+1}} = \tag{6.4}$$

$$= \frac{\beta_n \left(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2\right)}{\beta_{n+1} 2 \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2}.$$

Из (6.4) следует соотношение

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel^2 = \beta_n \frac{(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2)}{2}. \tag{6.5}$$

Из условий теоремы и (6.5) следует, что последовательность норм невязок монотонно убывает к нулю, шаговые длины β_i с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие к единице последовательности. Пусть $\beta_{n+1} < 1$, тогда

$$\beta_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2)} = \frac{\gamma_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel^2}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2} =$$

$$= \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel^2 (\parallel f(x_{n-1}) \parallel^2 + \parallel f(x_n) \parallel^2)}{2 \parallel f(x_n) \parallel^2 2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2} >$$

$$> \frac{\gamma_{n-2} \parallel f(x_{n-2}) \parallel^2}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2} > \ldots > \frac{\gamma_0 \parallel f(x_0) \parallel^2}{2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}. \qquad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что при некотором k параметр β_k становится равным единице, а из сходимости последовательности норм невязок к нулю следует, что при некотором номере итерации m выполняется соотношение $\varepsilon_m = 0.5KB^2 \parallel f(x_m) \parallel < 1$, так что при $i = \max(m, k)$ начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона. Таким образом, итерационный процесс (6.1) – (6.3) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in S(x_0, r)$. *Теорема доказана.*

Относительно процесса (6.1) – (6.3) могут быть сформулированы и доказаны теоремы аналогичные теоремам 1.2 – 1.5.

Рассмотрим следующий способ введения шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}\right).$$

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и* $\varepsilon_0 < 1$. *Тогда квазиньютоновский итерационный процесс с выбором такой шаговой длины со сверхлинейной скоростью сходится к решению* x^**, если такое решение в области* D *существует.*

Доказательство. Если $\beta_k < 1$, $k > n+2$, то имеет место соотношение:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \frac{\| f(x_{n+1}) \|^2 \beta_n}{\beta_{n+1} \| f(x_{n+2}) \| \| f(x_n) \|}$$

откуда следует, что

$$\beta_{n+2} \| f(x_{n+2}) \| = \frac{\| f(x_{n+1}) \|^2}{\| f(x_n) \|} \beta_n = \frac{\| f(x_{n+1}) \|^2}{\| f(x_n) \|^2} \beta_n \| f(x_n) \|.$$

Так как, $\varepsilon_0 < 1$, то, как показано выше, $\| f(x_1) \| \leq \| f(x_0) \|$.

Из способа задания шаговой длины имеем, что $\beta_1 = 1$,

$$\| f(x_1) \| \leq q_0 \| f(x_0) \|, q_0 < 1.$$

При $n = 0$ из соотношение между шаговыми длинами и нормами невязок следует, что

$$\beta_2 \| f(x_2) \| = \beta_0 \| f(x_0) \| \frac{\| f(x_1) \|^2}{\| f(x_0) \|^2} \leq q_0^2 \beta_0 \| f(x_0) \| .$$

Так как $\beta_1 = 1$, то, как следует из способа определения шаговой длины, $\beta_2 \| f(x_2) \| = \| f(x_1) \| \leq q_0^2 \beta_0 \| f(x_0) \|$. Из последнего неравенства имеем, что

$$0.5KB^2 \| f(x_1) \| \leq q_0^2 0.5KB^2 \beta_0 \| f(x_0) \| = q_0^2 \varepsilon_0 < 1.$$

А это и есть достаточное условие сходимости метода Ньютона на элементе x_1 . Сверхлинейность рассматриваемого выше процесса доказывается стандартным образом. *Теорема доказана.*

Замечание 6. Рассмотренный выше итерационный процесс чаще пробует осуществить полный ньютоновский шаг и поэтому обладает повышенной скоростью сходимости.

Относительно процессов, рассмотренных в этом параграфе справедливо замечание 1.

ЛЕКЦИЯ 7

Одношаговые итерационные методы полного прогноза для решения нелинейных уравнений

Методы, рассмотренные в предыдущем параграфе, достаточно эффективны при решении «хороших» задач. При решении «плохих» задач мы можем столкнуться с проблемами, несмотря на то, что область применения методов, использующих процедуру неполного прогноза-коррекции, шире, чем у известных методов, описанных в работах [2], [3].

Для решения уравнения (1.1) применяется итерационный процесс.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n:

$$f^{'}(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.1}$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \tag{7.2}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, где $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то β_{n+1} принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{(\| f(x_n + \Delta x_n) \|)\beta_n}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_n) \parallel \beta_{n+1}}{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel \parallel f(x_{n+2}) \parallel \beta_n}, n = 1, 2, \ldots \qquad (7.3)$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0 + \Delta x_0) \parallel}{\parallel f(x_1) \parallel}, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

и осуществляем переход на шаг 1.

Теорема 7.1. *Пусть оператор f удовлетворяет в $D(x_0, r)$ условиям теоремы 1.1 Тогда итерационный процесс (7.1) – (7.3) при $\varepsilon_0 < 1$ со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходятся к $x^* \in D$.*

Доказательство. Если $\beta_k \neq 1$, то взяв отношение β_{n+2} к β_{n+1} $(n + 2 < k)$ имеем, в силу (7.3)

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel \gamma_{n+1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel \beta_n}{f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\beta_{n+1} \parallel f(x_n) \parallel \gamma_n} = \frac{\parallel f(x_{n+1}) \parallel \beta_n}{\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+2}) \parallel}.$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel . \qquad (7.4)$$

В силу условий теоремы имеет место оценка, связывающая нормы невязок на соседних шагах процесса

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \left(1 - \beta_n \left(1 - 0.5\beta_n K B^2 \parallel f(x_n) \parallel\right)\right) \parallel f(x_n) \parallel = \qquad (7.5)$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel,$$

$$\varepsilon_n = 0.5KB^2 \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Если $n = 0$, то из (7.2), (7.5) и условия теоремы следует оценка.

$$\parallel f(x_1) \parallel \leq (1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)) \parallel f(x_0) \parallel = q_0 \parallel f(x_0) \parallel < \parallel f(x_0) \parallel . \quad (7.6)$$

Поскольку $q_0 < 1$, то соотношение, связывающее нормы невязок и шаговые длины на первых двух шагах имеет вид

$$\beta_1 \parallel f(x_1) \parallel = \frac{\parallel f(x_0) \parallel \gamma_0}{\parallel f(x_0 + \Delta x_0) \parallel \beta_0} \parallel f(x) \parallel = \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel . \quad (7.7)$$

Из (7.6), (7.7) имеем, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\beta_1 > \beta_0$, так что
$\parallel f(x_2) \parallel \leq (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \parallel f(x_1) \parallel = q_1 \parallel f(x_1) \parallel$ и $q_1 < q_0$.

Применяя метод математической индукции, имеем из (7.4), что последовательности $\{\varepsilon_i\}$ с четными и нечетными индексами монотонно убывают и ограничены сверху числом ε_0 , последовательности итерационных параметров $\{\beta_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, которые ограничены снизу числом β_0 , последовательности $\{q_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие последовательности, ограниченные сверху числом q_0.

В связи с вышесказанным из (7.5) следует оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel < q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel . \quad (7.8)$$

Из (7.1) и (7.8) имеем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства имеем предел, который, как просто показать, является решением уравнения (1.1) и при этом все последовательные приближения не выходят за пределы сферы $D\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$. Из (7.6) следует, что существует такой номер l, начиная с которого станет выполняться неравенство $0.5KB^2 \parallel f(x_l) \parallel < 1$. Если $\beta_{l=1}$, то с этого момента процесс (7.1) - (7.3) переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Замечание 7. При «работе» итерационного процесса нет необходимости в знании оценок глобальных констант. Важен лишь факт их существования.

Теорема 7.2. *Пусть в шаре* $D\left(x_0, \dfrac{B \parallel f(x_0) \parallel}{1-q_0}\right)$ *выполнены условия теоремы 7.1 за исключением требования факта существования* $x^* \in D$. *Пусть существует такое* $m \in N$, *что*

$$1 > \beta_{n+1} = \min(1, \frac{\parallel f(x_n) \parallel \gamma_n}{(\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel)\beta_n}, n+1 < m-1$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel}{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1}) \parallel}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0 + \Delta x_0) \parallel}{\parallel f(x_1) \parallel}, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \beta_{m+j} = 1, j = 0, 1, \ldots \beta_0 \geq q_0^m.$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходится итерационный процесс (7.1) – (7.3), начиная с x_0 и имеет место оценка погрешности n-го приближения

$$\| x_n - x^*) \| \leq B q_0^{2^{n-m}-1+m} \| f(x_0 \| . \tag{7.9}$$

Доказательство. Доказательство опирается на соотношения (7.4) и (7.8), условия теоремы, из которых следует, что

$$\varepsilon_{m+j} = 0.5\beta_{m+j} \| f(x_{m+j}) \| KB^2 < 0.5KB^2 q_0^{m+j} \| f(x_0) \| < \tag{7.10}$$

$$< 0.5KB^2\beta_0 \| f(x_0) \| < 1.$$

Из (7.10) следует оценка

$$0.5\beta_{m+j} \| f(x_{m+j}) \| KB^2 = 0.5KB^2 \| f(x_{m+j}) \| < 1.$$

Последнее неравенство есть не что иное, как достаточное условие сходимости метода Ньютона, начиная с элемента x_{m+j}. Стандартным образом нетрудно показать, что все последовательные приближения не выходят за пределы шара $D(x_0, r)$ и имеет место оценка погрешности n-го приближения вида (7.9). *Теорема доказана.*

ЛЕКЦИЯ 8
Многошаговые методы полного прогноза для решения нелинейных уравнений

Для решения уравнения (1.1) с успехом применяется итерационный процесс.

<u>Шаг 1.</u> Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_n:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \tag{8.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{8.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Если $\| \ f(x_{n+1}) \ \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

<u>Шаг 4.</u> Определяется новая шаговая длина: если $\| \ f(x_{n+1}) \ \| < \| \ f(x_n) \ \|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \sqrt{\frac{\| \ f(x_n) \ \|^2 \ \gamma_n}{(\| \ f(x_n + \Delta x_n) \ \|^2 + \| \ f(x_n) \ \|^2)\beta_n}}\right), \tag{8.3}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \ \| \ f(x_n) \ \|^2 \ (\| \ f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \ \|^2 + \| \ f(x_{n+1}) \ \|^2)}{(\| \ f(x_n + \Delta x_n) \ \|^2 + \| \ f(x_n) \ \|^2) \ \| \ f(x_{n+2}) \ \|^2} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},$$

$n = 0, 1, 2 \dots$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^3(\|f(x_0+\Delta x_0)\|^2 + \|f(x_0)\|^2)}{\| \ f(x_1) \ \|^2}, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 8.1. *Пусть оператор f удовлетворяет в $D(x_0, r)$ условиям теоремы 1.1. Тогда итерационный процесс (8.1) – (8.3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходятся к $x^* \in D$.*

Доказательство. Если $\beta_k \neq 0$, то взяв отношение β_{n+2} к β_{n+1} (n+2<k) имеем

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\| f(x_{n+1}) \|}{\| f(x_{n+2}) \|}.$$

Из последнего соотношения следует равенство

$$\beta_{n+2} \| f(x_{n+2}) \| = \beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \| . \tag{8.4}$$

В силу условий теоремы имеет место оценка, связывающая нормы невязок на соседних шагах процесса

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1 - \beta_n(1 - 0.5\beta_n K B^2 \| f(x_n) \|)) \| f(x_n) \| = \tag{8.5}$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \|$$

$$\varepsilon_n = 0.5\beta_n K B^2 \| f(x_n) \|, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Если $n = 0$, то из (8.3), (8.5) и условия теоремы следует оценка

$$\| f(x_1) \| \leq (1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) \| < \| f(x_0) \| . \tag{8.6}$$

Поскольку $q_0 < 1$, имеем соотношение, связывающее нормы невязок и шаговые длины на первых двух шагах

$$\beta_1 \parallel f(x_1) \parallel = \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel . \tag{8.7}$$

Из (8.6), (8.7) имеем, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\beta_1 > \beta_0$ так что $\parallel f(x_2) \parallel \leq (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \parallel f(x_1) \parallel = q_1 \parallel f(x_1) \parallel$ и $q_1 < q_0$.

Применяя метод математической индукции, имеем из (8.4), что последовательность $\{\varepsilon_i\}$ монотонно убывает и ограничена сверху числом ε_0, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ образует монотонно возрастающую последовательность, которая ограничена снизу числом β_0, последовательность q_i образует монотонно убывающую последовательность, ограниченную сверху числом q_0.

В связи с вышесказанным из (8.5) следует оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel < q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel . \tag{8.8}$$

Из (8.8) имеем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства имеем предел, который, как просто показать, является решением уравнения (1.1) и при этом все последовательные приближения не выходят за пределы сферы $D\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$.

Из (8.8) следует, что существует такой номер l, начиная с которого станет выполняться неравенство $0.5KB^2 \parallel f(x_l) \parallel < 1$ и $\beta_l = 1$. С этого момента процесс (8.1) - (8.3) переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Теорема 8.2. *Пусть в шаре* $D\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *выполнены условия теоремы 8.1 за исключением требования факта существования* $x^* \in D$. *Пусть существует такое* $m \in N$, *что*

$$1 > \beta_{n+1} = \sqrt{\frac{\| f(x_n) \|^2 \gamma_n}{(\| f(x_n + \Delta x_n) \|^2 + \| f(x_n) \|^2)\beta_n}}, n+1 < m-1$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2 (\| f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \|^2 + \| f(x_{n+1}) \|^2)}{(\| f(x_n + \Delta x_n) \|^2 + \| f(x_n) \|^2) \| f(x_{n+2}) \|^2} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^3(\| f(x_0 + \Delta x_0) \|^2 + \| f(x_0) \|^2)}{\| f(x_1) \|^2}, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}],$$

$$\beta_{m+j} = 1, j = 0, 1 \ldots \beta_0 \geq q_0^m.$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, *к которому сходится итерационный процесс (8.1) – (8.3), начиная с* x_0 *и имеет место оценка погрешности n-го приближения*

$$\| x_n - x^* \| \leq B q_0^{2^{n-m}-1+m} \| f(x_0) \| . \tag{8.9}$$

Доказательство. Доказательство опирается на соотношения (8.4) и (8.8), условия теоремы, из которых следует, что

$$\varepsilon_{m+j} = 0.5\beta_{m+j} \parallel f(x_{m+j}) \parallel KB^2 < \tag{8.10}$$

$$< 0.5KB^2 q_0^{m+j} \parallel f(x_0) \parallel < 0.5KB^2\beta_0 < 1.$$

Из (8.10) следует оценка

$$0.5\beta_{m+j} \parallel f(x_{m+j}) \parallel KB^2 = 0.5KB^2 \parallel f(x_{m+j}) \parallel < 1.$$

Последнее неравенство есть не что иное, как достаточное условие сходимости метода Ньютона, начиная с элемента x_{m+j}. Стандартным образом нетрудно показать, что все последовательные приближения не выходят за пределы шара $D(x_0, r)$ и имеет место оценка погрешности n-го приближения вида (8.9). *Теорема доказана.*

Пусть область D определяется следующим образом:

$$D = \{x : \omega(x, \beta_n) \leq \parallel f(x_0) \parallel\}, \omega(x, \beta_n) = (1 - \beta_n)\omega(x, 0) + \beta_n^2\beta_{n-1}\omega(x, 1),$$

$$\beta \in (0, 1], \omega(x, 1) = \parallel f(x + \Delta x) \parallel .$$

тогда определим процедуру полного прогноза-коррекции так:

<u>Шаг 1.</u> Решается линейная система :

$$f^{'}(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), n = 1, 2, \ldots \tag{8.11}$$

Шаг 2.Если $\| f(x_n + \Delta x_n) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n принимает значение 1, иначе определяется новая шаговая длина β_n по формулам

$$\beta_n = \min\left(\frac{\omega(x_n,0)}{\alpha\beta_{n-1} \| f(x_n+\Delta x_n) \|}\right), \beta_{-1} \in (10^{-4},1), \alpha > 1, \tag{8.12}$$

$$\omega_{n+1} = \omega(x_n,\beta_n) = (1-\beta_n)\omega(x_n,0) + \beta_n^2\beta_{n-1} \| f(x_n+\Delta x_n) \|, \tag{8.13}$$

$$\omega_0 = \gamma \| f(x_0) \|, \gamma << 1.$$

Шаг3. Очередные приближения определяем по формулам

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \tag{8.14}$$

Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 1.

Теорема 8.3. *Пусть в области D существует решение уравнения (1.1), оператор $f \in C_D^{(2)}$ и справедлива оценка $\| [f(x_n) \|]^{-1} \le B$. Тогда итерационный процесс (8.11) - (8.14) даёт последовательность элементов $\{x_n\}$ сходящихся к $x^* \in D$.*

Доказательство. Подставляя (8.12) в (8.13), имеем соотношение

$$\omega_{n+1} = (1-(1-1/\alpha)\beta_n)\omega_n, \omega_n = \omega(x_n,0), n = 0,1,2,\ldots \tag{8.15}$$

из которого индуктивно получаем оценку

$$\omega_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(1-(1-\frac{1}{\alpha})\beta_i) \| f(x_0) \| \gamma. \tag{8.16}$$

Из (8.16) следует, что все элементы $x_n \in D$. Из (8.14) с учётом (8.16) получаем соотношение, связывающее шаговую длину β_n с нормой невязки на элементе $x_{n+\Delta x_n}$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\omega_{n+1}\alpha\beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}{\alpha\beta_n \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel \omega_n} \leq \frac{\beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel},$$

из которого следует оценка

$$\beta_{n+1} \leq \beta_{n-1}\frac{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel}, n = 0, 1, \ldots \tag{8.17}$$

Если $\beta_n \to 0$, $n \to \infty$ то для того чтобы выполнялось соотношение (8.17) при любом n, необходимо выполнение условия $\frac{\|f(x_n+\Delta x_n)\|}{\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\|} \geq 1$, откуда следует ограниченность последовательности $\{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel\}$. Из ограниченности последовательности и (8.12) имеем, что ω_n убывает со сверхлинейной скоростью, а из (8.13) следует, что ω_n может убывать со скоростью не выше линейной. Противоречие будет снято, если мы откажемся от предположения, что $\beta_n \to 0$.

Поскольку $\beta_n \nrightarrow 0$, то из (8.16) следует, что $\lim \omega_n = 0$, а поскольку $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, из (8.13) имеем, что $\lim \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel = 0$. Таким образом, последовательность элементов $\{x_n + \Delta x_n\}$ по функционалу стремится к x^* – решению уравнения (1.1). *Теорема доказана.*

Сформулируем и докажем теорему о сходимости процесса (8.11) - (8.14) в предположении, что нам ничего не известно a priori о существовании x^* – решения уравнения (1.1) в D.

Теорема 8.4. *Пусть в D выполняются все условия теоремы 8.3, исключая требования существования в D x^* – решения уравнения (1.1) и, сверх того, существует такое число $k \in N$, что выполняются соотношения*

$$1 > \beta_n = \frac{\omega_n}{\alpha\beta_n \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}, \omega_0 = \gamma \parallel f(x_0) \parallel,$$

$$\alpha > 1, \gamma << 1, n = \overline{0, k-1}$$

$$\omega_{n+1} = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n^2\beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel, \beta_{k+i} = 1, i = 0, 1 \ldots$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходится итерационный процесс (8.11) - (8.14), начиная с $x_0 \in D$, сходимость процесса сверхлинейная (локально квадратичная).

Доказательство. Так как выполняются все условия теоремы 8.3, оказываются справедливыми оценки (8.16), (8.17) и вывод о том, что последовательность норм $\{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel\}$ ограничена в D, $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, откуда следует, что последовательность элементов $\{x_n + \Delta x_n\}$ по функционалу стремится к x^*.

Из условий теоремы следует, что, начиная с некоторого номера m элементы x_i, $i \geq m > k$, попадают в, область притяжения итераций Ньютона, откуда следует локальная квадратичная сходимость процесса (8.11) - (8.14) и существование в D решения уравнения (1.1). *Теорема доказана.*

Относительно процессов, рассмотренных в этом параграфе справедливо замечание 1.

ЛЕКЦИЯ 9

Частично регуляризованные методы неполного прогноза для решения нелинейных уравнений

Если в области D нарушается условие обратимости оператора f', то алгоритмы, рассмотренные выше, нуждаются в модификации. Рассмотрим ряд частично регуляризованных алгоритмов для решения уравнения (1.1). Первый из рассматриваемых ниже алгоритмов имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f'(x))\Delta x_n = -f(x_n),$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1. \qquad (9.1)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \qquad (9.2)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \beta_{n+1}}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel \beta_n}, \qquad (9.3)$$

$$\beta_0 \in [10^{-2}, 0, 5], \gamma_0 = \beta_0^2$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f сделаем следующие предположения:

$$f \in C_D^{(2)}, \| f''(x) \| \leq K, \| [\alpha\beta_n \| f(x_n) \| + f'(x_n)]^{-1} \| \leq B. \tag{9.4}$$

Теорема 9.1. *Пусть в D существует x^* - решение уравнения (1.1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и $\varepsilon = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_0 \| f(x_0) \| < 1$, тогда итерационный процесс (9.1)-(9.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Доказательство. Преобразуем (9.1) к “неявному” виду

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\alpha\beta_n \| f(x_n) \| \Delta x_n - \beta_n f(x_n). \tag{9.5}$$

Из (9.1) следует оценка $\| \Delta x_n \| \leq \beta_n B \| f(x_n) \|$, далее в силу условий теоремы имеем

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)\Delta x_n \| \leq 0.5K \| \Delta x_n \|^2 . \tag{9.6}$$

После подстановки (9.5) в (9.6) получаем оценку

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) + \alpha\beta_n \| f(x_n) \| \Delta x_n + \beta_n f(x_n) \| \leq \tag{9.7}$$
$$\leq 0.5\beta_n^2 KB^2 \| f(x_n) \|^2 .$$

Из (9.7) имеем соотношение, связывающее нормы невязок на соседних шагах

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| + \alpha\beta_n^2 B \| f(x_n) \|^2 + 0.5\beta_n^2 KB^2 \| f(x_n) \|^2 =$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \beta_n(\alpha B + 0.5KB^2) \parallel f(x_n) \parallel)) \parallel f(x_n) \parallel = \qquad (9.8)$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel,$$

$$\varepsilon_n = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_n \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 = \varepsilon_n).$$

При $n = 0$ из (9.8) и условий теоремы имеем, что

$$\parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 \parallel f(x_0) \parallel, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel = \beta \parallel f(x_1) \parallel, q_1 < q_0$$

и так как из (9.3) при $\beta_k \neq 1$ и $n - 2 < k$ следует что

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (9.9)$$

то при $n = 0$ имеем, что $\beta_2 \parallel f(x_2) \parallel = \beta_0 \parallel f(x_1) \parallel$.

Поскольку $\parallel f(x_2) \parallel < \parallel f(x_1) \parallel$, то из последнего равенства следует, что $\beta_2 > \beta_0$, опираясь на (9.9), методом математической индукции нетрудно показать, что последовательности итерационных параметров $\{\beta_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, ограниченные снизу числом β_0, последовательности $\{q_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие к нулю последовательности, ограниченные сверху числом q_0 и имеет место

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel < q_0^{n+1} \parallel f(x_0) \parallel . \qquad (9.10)$$

Из (9.10) следует сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x^*. В силу (9.10) имеем, что $\| f(x_n) \| \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, существует такой номер l, что выполняется соотношение $0.5KB^2 \| f(x_l) \| < 1$ при $\beta_l = 1$, а это есть достаточное условие сходимости метода Ньютона, так что в силу построения алгоритма на l-ом шаге процесс переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Замечание 8. Квадратичная скорость сходимости будет иметь место в силу того, что при $\alpha = 10^{-6} \div 10^{-10}$ слагаемое $\alpha \| f(x_n) \|$ при $\| f(x_n) \| \leq 10^{-12} - 10^{-13}$ становится пренебрежительно малым.

Теорема 9.2. *Пусть в сфере $D = \overline{S}\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ выполняются условия теоремы 9.1 за исключением требования факта существования x^* в D.*
Пусть существует $k \in N$ такое, что

$$1 \geq \beta_{n+1}\frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}, n = 1, 2, \ldots, k-1, \beta_0 \geq q_0^k.$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходится итерационный процесс (9.1) - (9.3), начиная с x_0. Оценки погрешности l-ого приближения имеет вид

$$\| x_l - x^* \| \leq Bq_0^{2^l-1+l} \| f(x_0) \| . \tag{9.11}$$

Начало

Содержание

Страница 81 из 173

Назад

На весь экран

Закрыть

Доказательство. В связи с тем, что выполняются условия теоремы 9.1, для номера $l > k$ имеет место, в силу условий теоремы 9.1, оценка

$$\varepsilon_l = 0.5\beta_l B^2 K \parallel f(x_l) \parallel \leq 0.5KB^2 \parallel f(x_l) \parallel \leq$$

$$\leq 0.5KB^2 q_0^{l+1} \parallel f(x_0) \parallel \leq 0.5KB^2\beta_0 \parallel f(x_0) \parallel \leq 1$$

из которой следует, что, начиная с номера l, будет выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона, при этом все итерации не будут выходить за пределы сферы D, и в сфере D будет существовать решение x^*. Оценка погрешности l-ого приближения (9.11) получается стандартным образом. *Теорема доказана.*

Следующий многошаговый итерационный процесс будет иметь вид:
Шаг 1. Решается линейное уравнение

$$(\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f^{'}(x_n))\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, \dots, \tag{9.12}$$

$$\delta \in [10^{-6}, 10^{-3}]|, \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}].$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n \Delta x_n}. \tag{9.13}$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.
Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel \, | < \parallel f(x_n) \parallel$,

то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel \beta_n}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+2}) \parallel} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2 \tag{9.14}$$

и переход на шаг 1.

Теорема 9.3. *Пусть $f \in C_D^{(2)}$, в D существует решение x^* уравнения (1.1) и справедлива оценка $\parallel (\delta \parallel f(x_n) \parallel E + \parallel f'(x_n))^{-1} \parallel \le B$. Тогда если выполняется условие $\varepsilon_0 = \sqrt{\beta_o} B \parallel f(x_0) \parallel (\delta + \frac{KB}{2}) < 1$, то итерационный процесс (9.12) - (9.14) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится по функционалу к x^* – решению уравнения (1.1), итерационные параметры β_n монотонно возрастают и область D имеет вид*
$D = \overline{S}(x_0, r), r \ge \frac{D}{1-q_0} \parallel f(x_0) \parallel$, $K = \sup\limits_{0 \le \Theta \le 1} \parallel f''(x_n + \Theta \beta_n \Delta x_n) \parallel$.

Доказательство. Представим уравнение (9.12) в виде

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n) - \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel \Delta x_n. \tag{9.15}$$

В силу условий теоремы и (9.15) имеем оценку

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel = \parallel f(x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n) \parallel \le$$

$$\le \parallel f(x_n) + \sqrt{\beta_n} f'(x_n)\Delta x_n \parallel + \frac{\beta_n}{2} K \parallel \Delta x_n \parallel^2 =$$

$$=\| f(x_n) - \sqrt{\beta_n}(f(x_n) + \delta\beta_n \| f(x_n) \| \Delta x_n) \| + \frac{\beta_n}{2} K \| \Delta x_n \|^2 \leq \quad (9.16)$$

$$\leq (1 - \sqrt{\beta_n}) \| f(x_n) \| + \delta\beta_n B \| f(x_n) \|^2 + \frac{\beta_n}{2} K B^2 \| f(x_n) \|^2 =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\beta_n}\left(1 - \sqrt{\beta_n} B \| f(x_n) \| \left(\delta + \frac{KB}{2}\right)\right)\right) \| f(x_n) \| .$$

Пусть выполняется условие

$$\sqrt{\beta_0} B \| f(x_0) \| (\delta + 0.5KB) = \varepsilon_0 < 1 \quad (9.17)$$

Тогда, как следует из (9.16), (9.17),

$$\| f(x_1) \| \leq (1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) \|, \quad (9.18)$$

$$q_0 = 1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0) < 1$$

ε_1 с учетом (9.14), представимо в виде

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\beta_1} B \| f(x)_1 \| (\delta + \frac{KB}{2}) = \sqrt{\beta_0} B \| f(x)_0 \| (\delta + \frac{KB}{2}) = \varepsilon_0.$$

Так что из (9.16) следует оценка

$$\| f(x_2) \| \leq (1 - \sqrt{\beta_1}(1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) \| \leq$$

$$\leq (1 - \sqrt{\beta_1}(1 - \varepsilon_0)) q_0 \| f(x_0) \| = q_1 q_0 \| f(x_0) \| .$$

При этом так как $\| f(x_2) \| < \| f(x_1) \|$, то $\beta_1 > \beta_0$, $q_1 = 1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0) < 1$.

Так как $\| f(x_{n+1}) \| \leq q_n \| f(x_n) \|$; $q_n < 1$, то индуктивные соображения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| \tag{9.19}$$

и при этом все $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_0) < 1$, $q_n < q_{n-1} < \ldots < q_0$.

Таким образом, до того момента, пока $\beta_n < 1$, последовательность итерационных параметров с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающую последовательности, последовательности $\{q_n\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие последовательности. Переход к пределу в (9.19) при позволяет утверждать, что последовательность элементов $n \to \infty$, определяемая итерационным процессом (9.12) - (9.14), по функционалу стремится к x^* – решению уравнения (1.1).

Проверим фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Используя (9.12), условия теоремы и неравенство треугольника, имеем оценку:

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \| f(x_{i+1}) - x_i \| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} B \| f(x_i) \| \leq$$

$$\leq B \sum_{i=n}^{n+p-1} \prod_{j=0}^{i-1} q_j \parallel f(x_0) \parallel,$$

которая доказывает фундаментальность последовательности x_n, откуда в силу полноты пространства X следует существование предельного элемента x^*.

Найдём радиус области $D = \overline{S}(x_0, r)$.

$$\parallel x_1 - x_0 \parallel \leq B \parallel f(x_0) \parallel,$$

$$\parallel x_2 - x_0 \parallel \leq \parallel x_2 - x_1 \parallel + \parallel x_1 - x_0 \parallel \leq B \parallel f(x_1) \parallel +$$
$$+B \parallel f(x_0) \parallel \leq B \parallel f(x_0) \parallel (1 + q_0).$$

Продолжая цепочку неравенств, имеем

$$\parallel x_{n+1} - x_0 \parallel \leq \sum_{i=0}^{n} \parallel x_{i+1} - x_i \parallel \leq BfB(x_0)(1+q_0+\dots+q_0^n) \leq \frac{B \parallel f(x_0) \parallel}{1 - q_0}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$, получаем радиус области D.

Сверхлинейность процесса (9.12) - (9.14) следует из того, что, начиная с некоторого номера k, величина $\delta\beta_k \parallel f(x_k) \parallel$ становится меньше ε – точности просчетов, и при этом одновременно начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона $0.5KB^2 \parallel f(x_k) \parallel < 1$ и $\beta_n = 1$ для $n > k$. В этих условиях процесс (9.12) - (9.14) переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Замечание 9. Условие непрерывной обратимости оператора $(\delta \parallel f(x) \parallel E + f^{'}(x))$ в D существенно слабее традиционного условия непрерывной обратимости оператора $f^{'}(x)$, $\forall x \in D$. Процесс (9.12) - (9.14) будет работать даже в том случае, если на каком–либо элементе x_1 окажется, что $f^{'}(x_1) = \Theta$ (Θ – нуль пространства).

Замечание 10. При доказательстве теоремы (9.3) нам потребовалось условие существования в D решения x^* уравнения (1.1).

Ниже покажем, как избавиться от этого достаточно обременительного условия за счет контроля поведения некоторых параметров итерационного метода в процессе счета.

В теореме 1.1 постулировалось существование x^* - решения уравнения (1.1), и принадлежность его замыканию сферы $\overline{S}\left(x_0, \frac{B}{1-q_0} \parallel f(x_0) \parallel\right)$.

В рассматриваемой ниже теореме (9.4) это условие снимается.

Теорема 9.4. *Пусть оператор f удовлетворяет в D тем же условиям, что и в теореме 9.3, исключая требования существования a priori $x^* \in D$, существует такое число $k \in N$, что выполняются соотношения*

$$1 > \beta_n = \frac{\gamma_n \parallel f(x_{n-1}) \parallel}{\parallel f(x_n) \parallel \beta_{n-1}}, n = \overline{1, k-1}, \tag{9.20}$$

$$\beta_{k+i} = 1, i = 0, 1, \ldots \sqrt{\beta_0} \geq q_0^k. \tag{9.21}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходятся итерации (9.12) - (9.14), начиная с $x_0 \in D$. При этом справедлива оценка погрешности n-го приближения:

$$\| x^* - x_n \| \leq B q_0^{2^{n-k}-1+k} \| f(x_0) \| \tag{9.22}$$

$$q_0 = 1 - \sqrt{\beta_0}(1-\varepsilon_0), \varepsilon_0 = \sqrt{\beta_0} B \| f(x_0) \| \left(\delta + \frac{KB}{2}\right).$$

Доказательство. Так как выполняются условия теоремы 9.3, то справедлива оценка (9.16) и $q_i = 1 - \sqrt{\beta_i}(1-\varepsilon_i) < 1$, $i = \overline{1, k-1}$.

В силу (9.16) и (9.21) имеем оценку

$$\| f(x_k) \| \leq B \| f(x_{k-1}) \| \left(\delta + \frac{KB}{2}\right) \| f(x_{k-1}) \| = \tag{9.23}$$

$$= q_{k-1} \| f(x_{k-1}) \| \leq q_0^k \| f(x_0) \| \leq \sqrt{\beta_0} \| f(x_0) \| .$$

В силу малости δ итерации (9.12) - (9.14) при $n \geq k$ практически переходят в метод Ньютона с $\overline{x_0} = x_k$ и при этом из (9.23) следует, что

$$q_0^H = B \| f(x_k) \| \left(\delta + \frac{KB}{2}\right) < 1. \tag{9.24}$$

Стандартными рассуждениями доказывается фундаментальность последовательности элементов $\{\overline{x}_n\}$, сохранение условия (9.24) при переходе от точки $\overline{x}_0$ к точке $\overline{x}_1 = x_{k+1}$ и справедливость оценки

$$\| f(x_n) \| \leq (q_0^H)^{2^{n-k}-1} \| f(x_n) \|, n \geq k \tag{9.25}$$

Таким образом, в сфере D существует предельный элемент x^* и справедлива оценка

$$\| x_{n+1} - x_0 \| \leq \sum_{i=1}^{k-1} \| x_{i+1} - x_i \| + \sum_{i=k}^{n} \| x_{i+1} - x_i \| \leq \tag{9.26}$$

$$\leq B \| f(x_0) \| (1 + q_0 + \dots + q_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{i=k}^{n} B (q_0^H)^{2^{n-k}-1} \| f(x_0) \| \leq \frac{B}{1-q} \| f(x_0) \| .$$

Переходя к пределу в (9.25) при $n \to \infty$, имеем, что x^* – решение уравнения (1.1). Оценка (9.22) следует из (9.25) и соотношения

$$\| x^* - x_n \| \leq B \| f(x^*) - f(x_n) \| = B \| f(x_n) \| \leq$$

$$\leq B \prod_{i=0}^{k-1} q_i (q_0^H)^{2^{n-k}-1} \| f(x_0) \| < B (q_0^H)^{2^{n-k}-1+k} \| f(x_0) \| .$$

Теорема доказана.

Замечание 11. Теорема 9.4 может служить примером доказательных вычислений, так как в результате работы вычислительного процесса мы можем убедиться, что все $\beta_i = 1$ для $i \geq k$, а это условие поддаётся эффективной проверке, поскольку, как только β_k становится равным 1, все остальные параметры $\beta_{k+i}, i = 1, 2, \dots,$ автоматически будут равны единице, что следует из доказанного в теореме 9.3 соотношения $\beta_{n+1} > \beta_n$.

Замечание 12. Как теорема 9.3, так и теорема 9.4 обладают тем недостатком, что нам необходимо знать оценку глобальной константы B. Если оценка находится за разумный объем вычислительной работы, теоремы 9.3, 9.4 достаточно эффективны.

При рассмотрении вычислительного процесса в работах [2],[3] предполагалось, что изменение нормы невязки пропорционально изменению параметра β_n.

По-видимому, большие возможности могут представить алгоритмы, в которых обратная связь реализована на непропорциональной основе. Вычислительная практика решения ряда существенно нелинейных задач с успехом подтвердила это предположение.
Для алгоритмов, неполного прогноза рассмотренных в лекции и не вошедших в лекцию 3, могут сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные доказанным выше.

Относительно процессов, рассмотренных в этой лекции справедливо замечание 1.

ЛЕКЦИЯ 10

Нелокальные частично регуляризованные методы полного прогноза

Для «плохих» задач итерационные процедуры «неполного» прогноза часто оказываются менее эффективными, чем процедуры полного прогноза. Рассмотрим несколько итерационных процедур, реализующих полный прогноз.

Первый из рассматриваемых ниже алгоритмов имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f^{'}(x))\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, \dots, \qquad (10.1)$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1.$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \qquad (10.2)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel}{\parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel \parallel f(x_{n+2}) \parallel}, \qquad (10.3)$$

$$\beta_0 \in [10^{-2}; 0,5], \gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0 + \Delta x_0) \parallel}{\parallel f(x_1) \parallel}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f сделаем следующие предположения:

$$f \in C_D^{(2)}, \parallel f''(x) \parallel \leq K, \parallel [\alpha\beta \parallel f(x_n) \parallel E + f'(x_n)]^{-1} \parallel \leq B. \qquad (10.4)$$

Теорема 10.1. *Пусть в D существует x^*- решение уравнения (1.1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и $\varepsilon = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_0 \parallel f(x_0) \parallel < 1$, тогда итерационный процесс (10.1) - (10.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Доказательство. Преобразуем (10.1) к "неявному" виду

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel \Delta x_n - \beta_n f(x_n), \qquad (10.5)$$

из (10.1) следует оценка $\Delta x_n \parallel \leq \beta_n B \parallel f(x_n) \parallel$. В силу условий теоремы

$$\parallel f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n) \parallel \leq 0.5K \parallel \Delta x_n \parallel^2 . \qquad (10.6)$$

После подстановки (10.5) в (10.6) получаем соотношение

$$\parallel f(x_{n+1}) - f(x_n) + \alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel \Delta x_n + \beta_n f(x_n) \parallel \leq$$

$$\leq 0.5\beta_n^2 KB^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 . \tag{10.7}$$

Из (10.7) имеем соотношение, связывающее нормы невязок на соседних шагах

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq (1-\beta_n) \parallel f(x_n) \parallel + \alpha\beta_n^2 B \parallel f(x_n) \parallel^2 + 0.5\beta_n^2 KB^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 =$$

$$= (1 - \beta_n(1 - \beta_n(\alpha B + 0.5KB^2) \parallel x_n \parallel)) \parallel f(x_n) \parallel = \tag{10.8}$$

$$(1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel .$$

$$\varepsilon_n = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_n \parallel f(x_n) \parallel, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

При $n = 0$ из условий теоремы имеем, что

$$\parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 \parallel f(x_0) \parallel, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel = \beta_1 \parallel f(x_1) \parallel, q_1 < q_0$$

и так как из (10.3) при $\beta_k \neq 1$ и $n - 2 < k$ следует что

$$\beta_{n+2} \parallel f(x_{n+2}) \parallel = \beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.9}$$

то при $n = 0$ имеем, что $\beta_2 \parallel f(x_2) \parallel = \beta_0 \parallel f(x_1) \parallel$.

Поскольку $\parallel f(x_2) \parallel < \parallel f(x_1) \parallel$, то из последнего равенства следует, что $\beta_2 > \beta_0$, опираясь на (10.9), методом математической индукции нетрудно показать, что последовательности итерационных параметров $\{\beta_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, ограниченные снизу числом β_0, последовательности $\{q_i\}$ с четными и нечетными индексами образуют монотонно убывающие к нулю последовательности, ограниченные сверху числом q_0 и имеет место

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) \| . \tag{10.10}$$

Из (10.10) следует сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x^*. В силу (10.10) имеем, что $\| f(x_n) \| \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, существует такой номер l, что выполняется соотношение
$0.5KB^2 \| f(x_l) \| \leq 1$ и $\beta_l = 1$, а это есть достостаточное условие сходимости метода Ньютона, так что в силу построения алгоритма на l-ом шаге процесс переходит в метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Теорема 10.2. *Пусть в сфере* $D = \overline{S}\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *выполняются условия теоремы 10.1 за исключением требования факта существования* x^* *в* D.
Пусть существует $k \in N$ *такое, что*

$$1 \geq \beta_{n+1} \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}, n = 1, 2, \ldots, k-1, \beta_{k+j} = 1, \beta_0 \geq q_0^k.$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, *к которому сходится итерационный процесс (10.1) - (10.3), начиная с* x_0. *Оценки погрешности l-ого приближения имеет вид*

$$\| x_l - x^* \| \leq B q_0^{2^l - 1 + l} \| f(x_0) \| . \tag{10.11}$$

Доказательство. В связи с тем, что выполняются условия теоремы 10.1, для номера $l > k$ в силу условий теоремы 10.1, имеет место оценка

$$\varepsilon_l = 0.5\beta_l B^2 K \parallel f(x_l) \parallel \leq 0.5KB^2 \parallel f(x_l) \parallel \leq$$

$$\leq 0.5KB^2 q_0^{l-1} \parallel f(x_l) \parallel \leq 0.5KB^2\beta_0 \parallel f(x_l) \parallel \leq 1$$

из которой следует, что, начиная с номера l, будет выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона, при этом все итерации не будут выходить за пределы сферы D, и в сфере D будет существовать решение x^*. Оценка погрешности l-ого приближения (10.11) получается стандартным образом. *Теорема доказана.*

Далее определим область D следующим образом:

$$D = \{x : w(x, \beta_n \leq \parallel f(x_0) \parallel)\}, \omega(x, \beta_n) = (1 - \beta_n)\omega(x, 0) + \beta_n^2\beta_{n-1}\omega(x, 1),$$

$$\beta \in (0, 1], \omega(x, 1) = \parallel f(x + \Delta x) \parallel .$$

Следующий эффективный одношаговый итерационный процесс можно определить так:

<u>Шаг 1.</u> Решается линейное уравнение

$$(\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f^{'}(x_n))\Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots , \qquad (10.12)$$

$$\delta << 1, \beta_0 \in [10^{-4} \div 10^{-1}).$$

Шаг 2. Если $\| f(x_n+\Delta x_n) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n примет значение 1, иначе определяется новая шаговая длина β_n по формулам

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{\omega(x_n,0)}{\alpha\beta_{n-1} \| f(x_n+\Delta x_n) \|}\right), \beta_{-1} \in [10^{-4}, 1), \alpha > 1, \quad (10.13)$$

$$\omega_{n+1} = \omega(x_n, \beta_n) = (1-\beta_n)\omega(x_n, 0) + \beta_n^2\beta_{n-1} \| f(x_n+\Delta x_n) \|, \quad (10.14)$$

$$\omega_0 = y \| f(x_0) \|, y << 1.$$

Шаг 3. Очередные приближения определяемые по формулам

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \quad (10.15)$$

Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 1.

Теорема 10.3. *Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1.1), выполняются условия (10.4). Тогда итерационный процесс (10.12) - (10.15) генерирует последовательность элементов $\{x_n\}$, сходящуюся к x^*.*

Доказательство теоремы 10.3 вполне аналогично доказательству теоремы 8.3.

Следующая теорема позволяет снять априорное условие существования в D x^* – решения уравнения (1.1).

Теорема 10.4. *Пусть в области D выполняются условия теоремы 2.13, исключая априорное условие существования в D x^*. Если при этом выполняются дополнительно условия: существует $k \in N$, что*

$$1 > \beta_n = \frac{\omega_n}{\alpha \beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}, \alpha > 1, n = \overline{0, k-1},$$

$$\omega_{n+1} = (1 - \beta_n)\omega_n + \beta_n^2 \beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel, \beta_{k+i} = 1, i = 0, 1, \ldots$$

тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходится итерационный процесс (10.12) - (10.15), в D существует решение уравнения (1.1) и при этом имеет место локальная квадратичная скорость сходимости.

Доказательство теоремы в основных моментах повторяет доказательство теоремы 8.4.

Относительно процессов рассмотренных в лекции 9 и не вошедших в лекцию 10 могут быть сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные тем, которые были нами рассмотрены выше в лекции 9.

Относительно процессов рассмотренных в этой лекции справедливо замечание 1.

ЛЕКЦИЯ 11

Нелокальные регуляризованные итерационные процессы неполного прогноза

В этом параграфе для решения уравнения (1.1) предлагаются следующие регуляризованные итерационные процессы.

Первый из рассматриваемых ниже одношаговых алгоритмов имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n^2 E \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n)f(x_n), \qquad (11.1)$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1.$$

здесь $\overline{f'}(x_n)$- оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.2)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_n) \parallel}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \qquad (11.3)$$

$$\beta_0 \in [10^{-2}; 0,5], \gamma_0 = \beta_0^2$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f сделаем следующие предположения:

$$f \in C_D^{(2)}, \| f''(x) \| \leq K, \| [\| f'(x_n) \|]^{-1} \| \leq B, \varepsilon_0 < 1. \qquad (11.4)$$

Покажем, что если выполняются условия (11.4), то итерационный процесс (11.1) - (11.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Перепишем (11.1) в «неявном» относительно поправки Δx_n виде

$$\overline{f'}(x_n) f'(x_n) \Delta x_n = -\overline{f'}(x_n) f(x_n) - \alpha\beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 \Delta x_n$$

или с учетом существования $[\overline{f'}(x_n)]^{-1}$ в виде

$$\overline{f'}(x_n) \Delta x_n = -f(x_n) - \alpha\beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 [\overline{f'}(x_n)]^{-1} \Delta x_n. \qquad (11.5)$$

Далее находим оценку для $\| f(x_{n+1}) \|$, для чего воспользуемся теоремой о среднем, полагая, что $f(x_{n+1}) = f(x_n + \beta_n \Delta x_n)$:

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_n \overline{f'}(x_n) \Delta x_n \| \leq \frac{K}{2} \beta_n^2 \| \Delta x_n \|^2 . \qquad (11.6)$$

Из (11.6) с учетом (11.5) имеем

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1 - \beta_n) \| f(x_n) \| +$$

$$+ \alpha\beta_n^3 \| f(x_n) \|^2 B \| \Delta x_n \| + \frac{K}{2} \beta_n^2 \| \Delta x_n \|^2 . \qquad (11.7)$$

Если ввести оценку $\| (\alpha\beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 E + \overline{f'}(x_n) f'(x_n))^{-1} \| \leq A$ для положительно определенного оператора, стоящего в круглых скобках, и положить, что $\| f'(x_n) \| \leq C$, то из (11.7) и (11.5) окончательно получим оценку, связывающую нормы невязок $\| f(x_{n+1}) \|$ и $\| f(x_n) \|$:

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| + \alpha\beta_n^3 \| f(x_n) \|^3 ABC +$$

$$+ \beta_n^2 \frac{K}{2} A^2 C^2 \| f(x_n) \|^2 = \tag{11.8}$$

$$= \left(1 - \beta_n \left(1 - \left(\alpha\beta_n B \| f(x_n) \| + \frac{K}{2} AC\right) \beta_n \| f(x_n) \| AC\right)\right) \times$$

$$\times \| f(x_n) \| = (1 - \beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \| .$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \left(\alpha\beta_n B \| f(x_n) \| + \frac{KAC}{2}\right) \beta_n AC \| f(x_n) \|,$$

$$q_n = 1 - \beta_n(1-\varepsilon_n). \tag{11.9}$$

Пусть β_0 и x_0 таково, что $\varepsilon_0 < 1$, тогда $q_0 < 1$ и из (11.7) следует, что

$$\| f(x_1) \| \leq q_0 \| f(x_0) \|, \| f(x_1) \| < \| f(x_0) \| . \tag{11.10}$$

Из (11.3) имеем, что $\beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \| = \beta_{n-1} \| f(x_n) \|$, из последнего соотношения, из (11.9) и (11.10), следует

$$\varepsilon_1 = \left(\alpha\beta_1 B \| f(x_1) \| + \frac{KAC}{2}\right) \beta_1 AC \| f(x_1) \| < \varepsilon_0, \beta_1 > \beta_0, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| . \qquad (11.11)$$

Переходя к пределу в (11.11), имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| f(x_{n+1}) \| = 0$, при этом последовательность норм $\{\| f(x_n) \|\}$ монотонно убывает. В процессе счета, начиная с некоторого номера итерации k, начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона, так как последовательность β_n, как это следует из (11.3) и квадратичной сходимости процесса вблизи корня.

Таким образом, может быть сформулирована доказанная выше

Теорема 11.1. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям, в D существует x^* – решение уравнения (1.1) и $\varepsilon_0 < 1$. Тогда итерационный процесс (11.1) - (11.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Как показала практика решения существенно нелинейных задач, достаточно эффективным оказывается следующий многошаговый итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 E + (\alpha\beta_n \| f(x_n) \| E+$$
$$+ \overline{f}'(x_n))f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f}'(x_n)f(x_n), \qquad (11.12)$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1$$

здесь $\overline{f'}(x_n)$- оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.13}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{(\| f(x_n) \| + \| f(x_{n+1}) \|)\beta_n}\right), \tag{11.14}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \| (\| f(x_{n+1}) \| + \| f(x_{n+2}) \|)}{2 \| f(x_{n+1}) \| \| f(x_{n+2}) \|},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\| f(x_0) \| + \| f(x_1) \|)}{\| f(x_1) \|}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предположим, что выполняются условия (11.4). Покажем, что если выполняются условия (11.4), то итерационный процесс (11.12) - (11.14) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Перепишем (11.12) в «неявном» относительно поправки Δx_n виде

$$\overline{f'}(x_n) f'(x_n) \Delta x_n = -\overline{f'}(x_n) f(x_n) - \alpha \beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 \Delta x_n$$

или с учетом существования $[\overline{f'}(x_n)]^{-1}$ в виде

$$\overline{f'}(x_n)f'(x_n)\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n)f(x_n) - \alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 \Delta x_n$$

или с учетом существования $\left[(\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n))\right]^{-1}$ в виде

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n) - \alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 \left[\overline{f'}(x_n)\right]^{-1} \Delta x_n. \qquad (11.15)$$

Далее находим оценку для $\parallel f(x_{n+1}) \parallel$, для чего воспользуемся теоремой о среднем, полагая, что $f(x_{n+1}) = f(x_n + \beta_n \Delta x_n)$:

$$\parallel f(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_n f'(x_n)\Delta x_n \parallel \leq \frac{K}{2}\beta_n^2 \parallel \Delta x_n \parallel^2 . \qquad (11.16)$$

Из (11.16) с учетом (11.15) следует оценка

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq (1 - \beta_n) \parallel f(x_n) \parallel + \alpha\beta_n^3 \parallel f(x_n) \parallel^2 B \parallel \Delta x_n \parallel + \qquad (11.17)$$

$$+\frac{K}{2}\beta_n^2 \parallel \Delta x_n \parallel^2 .$$

Если ввести оценку

$$\parallel (\alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 E + (\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n))f'(x_n))^{-1} \parallel \leq A$$

для положительно определенного оператора, стоящего в круглых скобках, и положить, что $(\alpha\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n)) \leq C$, то из (11.17) окончательно получим оценку, связывающую нормы невязок $\| f(x_{n+1}) \|$ и $\| f(x_n) \|$:

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| +$$

$$+ \alpha\beta_n^3 \| f(x_n) \|^3 ABC + \beta_n^2 \frac{K}{2} A^2 C^2 \| f(x_n) \|^2 = \tag{11.18}$$

$$= \left(1 - \beta_n \left(1 - \left(\alpha\beta_n B \| f(x_n) \| + \frac{K}{2} AC\right) \beta_n \| f(x_n) \| AC\right)\right) \times$$

$$\times \| f(x_n) \| = (1 - \beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \| .$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \left(\alpha\beta_n B \| f(x_n) \| + \frac{KAC}{2}\right) \beta_n AC \| f(x_n) \|, \tag{11.19}$$

$$q_n = 1 - \beta_n(1-\varepsilon_n).$$

Пусть β_0 и x_0 таково, что $\varepsilon_0 < 1$, тогда $q_0 < 1$ и из (11.17) следует, что

$$\| f(x_1) \| \leq q_0 \| f(x_0) \|, \| f(x_1) \| < \| f(x_0) \| . \tag{11.20}$$

Из (11.14) следует, что $\beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \| = \beta_{n-1}(\| f(x_n) \| + + \| f(x_{n-1}) \|)$ и из последнего соотношения, из (11.19) и (11.20), имеем, что

$$\varepsilon_1 = \left(\alpha\beta_1 B \| f(x_1) \| + \frac{KAC}{2}\right) \beta_1 AC \| f(x_1) \| < \varepsilon_0, \beta_1 > \beta_0, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) \| . \qquad (11.21)$$

Переходя к пределу в (11.21), имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| f(x_{n+1}) \|$, при этом последовательность норм $\{\| f(x_n) \|\}$ монотонно убывает. В процессе счета, начиная с некоторого номера итерации k, начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона и последовательность β_n с четными и нечетными номерами монотонно возрастает к единице, как это следует из (11.14) и квадратичной сходимости процесса вблизи корня.

Таким образом, может быть сформулирована доказанная выше

Теорема 11.2. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям, $\varepsilon_0 < 1$ и в D существует x^* – решение уравнения (1.1). Тогда итерационный процесс (11.12) - (11.14) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

ЛЕКЦИЯ 12

Нелокальные регуляризованные многошаговые методы неполного прогноза для решения нелинейных уравнений

Среди эффективных итерационных процессов для решения нелинейных задач необходимо отметить следующий многошаговый итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n^2 E \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f'}(x_n) f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n) f(x_n), \qquad (12.1)$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1$$

здесь $\overline{f'}(x_n)$- оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (12.2)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}\right), \qquad (12.3)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel (\parallel f(x_{n+1}) \parallel + \parallel f(x_{n+2}) \parallel)}{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1} \parallel) \parallel f(x_{n+2}) \parallel},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\parallel f(x_0) \parallel + \parallel f(x_1) \parallel)}{\parallel f(x_1) \parallel}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предположим, что выполняются условия (11.4). Тогда имеет место

Теорема 12.1. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям, $\varepsilon_0 < 1$ и в D существует x^* – решение уравнения (1.1). Тогда итерационный процесс (12.1) - (12.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Если определить область D следующим образом
$D = \{x : \omega(x, \beta_n) \leq \gamma \parallel f(x_0) \parallel\}$, тогда для решения уравнения (1.1) целесообразно применять следующий итерационный процесс:
Шаг 1. Решается линейное уравнение

$$(\delta\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n)f(x_n) \qquad (12.4)$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots, \delta << 1, \beta_0 \in [10^{-4} \div 10^{-1}].$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n\Delta x_n, n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (12.5)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\omega_n}{\alpha\beta_n \| f(x_n) \|}\right), \tag{12.6}$$

$$\omega_{n+1} = (1-\beta_{n+1})\omega_n + \beta_{n+1}^2\beta_n \| f(x_{n+1}) \|, \tag{12.7}$$

$$\omega_0 = \gamma \| f(x_0) \|, \gamma << 1, \alpha > 1$$

и переход на шаг 1.

Теорема 12.2. *Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1.1), оператор f удовлетворяет условию (11.4). Тогда при выполнении условий*
а) $\frac{\beta_n K B^2 \| f(x_0) \|}{2} \equiv l_0 < 1$;
б) $\frac{\gamma}{\alpha\beta_0^2} < 1$
итерационный процесс (12.4) - (12.7) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in D$.

Доказательство. Вполне аналогично тому, как это доказывалось выше, получаем соотношение, связывающее шаговую длину с нормой невязки

$$\beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \| \le \beta_{n-1} \| f(x_n) \|, n = 1, 2, \dots, \tag{12.8}$$

а также оценку, устанавливающую соотношение между невязками на $(n+1)$–м и n–м шагах.

Далее имеем оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| = \| f(x_n + \beta_n \Delta x_n) \| \leq \tag{12.9}$$

$$\leq \left[1 - \beta_n \left(1 - \beta_n \frac{KB^2}{2} \| f(x_n) \| \right) \right] = q_n \| f(x_n) \| .$$

Здесь $q_n = 1 - \beta_n \left(1 - \beta_n \frac{KB^2}{2} \| f(x_n) \| \right)$.

Из условий теоремы и оценки (12.9) следует сходимость по функционалу последовательности элементов $\{x_n\}$, полученной процессом (12.4) - (12.7) к $x^* \in D$ и при этом $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. *Теорема доказана.*

Условие существования в D решения уравнения (1.1) может быть снято, если, начиная с некоторого номера k, все β_k, определяемые по формуле (12.6) становятся равными единице.

Теорема 12.3. *Пусть выполняются условия теоремы 12.2, исключая требование существования a priori в D x^*– решения уравнения (1.1) и, сверх того, начиная с некоторого номера k все $\beta_i = 1, i \geq k$ и справедливо условие $q^k \leq \beta_0$. Тогда итерационный процесс (12.4) - (12.7) со сверхлинейной (локально с квадратичной скоростью) сходится к $x^* \in D$.*

Доказательство теоремы 12.3 в основных частях повторяет доказательство теоремы 10.2.

Замечание 13. Относительно процессов, рассмотренных выше и не вошедших в лекцию 12 могут быть сформулированы и доказаны теоремы аналогичные тем, которые были рассмотрены выше и справедливо замечание 1 относительно рассмотренных выше процессов.

ЛЕКЦИЯ 13

Нелокальные регуляризованные процессы для решения нелинейных уравнений, реализующие процедуру полного прогноза

Для «плохих» задач итерационные процедуры «неполного» прогноза часто оказываются менее эффективными, чем процедуры полного прогноза. Рассмотрим несколько итерационных процедур, реализующих полный прогноз.

Первый из рассматриваемых ниже многошаговых алгоритмов имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$(\alpha\beta_n^2 E \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f'}(x_n)f(x_n), \tag{13.1}$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1$$

здесь $\overline{f'}(x_n)$- оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{13.2}$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}\right), \tag{13.3}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel}{\parallel f(x_n + \Delta x_n \parallel \parallel f(x_{n+2}) \parallel},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \parallel f(x_0 + \Delta x_1 \parallel}{\parallel f(x_1) \parallel}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f сделаем следующие предположения:

$$f \in C_D^{(2)}, \parallel f''(x) \parallel \leq K, \parallel \left[f'(x_n)\right]^{-1} \parallel \leq B, \varepsilon_0 < 1. \tag{13.4}$$

Покажем, что если выполняются условия (13.4), то итерационный процесс (13.1) - (13.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Перепишем (13.1) в «неявном» относительно поправки Δx_n виде

$$\overline{f'}(x_n) f'(x_n) \Delta x_n = -\overline{f'}(x_n) f(x_n) - \alpha \beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 \Delta x_n$$

или с учетом существования $\left[\overline{f'}(x_n)\right]^{-1}$ в виде

$$\overline{f'}(x_n) \Delta x_n = -f(x_n) - \alpha \beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 \left[\overline{f'}(x_n)\right]^{-1} \Delta x_n. \tag{13.5}$$

Далее находим оценку для $\| f(x_{n+1}) \|$, для чего воспользуемся теоремой о среднем, полагая, что $f(x_{n+1}) = f(x_n + \beta_n \Delta x_n)$:

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_n \overline{f'}(x_n)\Delta x_n \| \leq \frac{K}{2}\beta_n^2 \| \Delta x_n \|^2 . \qquad (13.6)$$

Из (13.6) с учетом (13.5) имеем

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| +$$

$$+ \alpha\beta_n^3 \| f(x_n) \|^2 B \| \Delta x_n \| + \frac{K}{2}\beta_n^2 \| \Delta x_n \|^2 . \qquad (13.7)$$

Если ввести оценку $\| (\alpha\beta_n^2 \| f(x_n) \|^2 E + \overline{f'}(x_n))f'(x_n))^{-1} \| \leq A$ для положительно определенного оператора, стоящего в круглых скобках, и положить, что $\| f'(x_n) \| \leq C$, то из (13.7) окончательно получим оценку, связывающую нормы невязок $\| f(x_{n+1}) \|$ и $\| f(x_n) \|$:

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| +$$

$$+ \alpha\beta_n^3 \| f(x_n) \|^3 ABC + \beta_n^2 \frac{K}{2} A^2 C^2 \| f(x_n) \|^2 = \qquad (13.8)$$

$$= \left(1 - \beta_n \left(1 - \left(\alpha\beta_n B \| f(x_n) \| + \frac{K}{2}AC\right)\beta_n \| f(x_n) \| AC\right)\right) \times$$

$$\times \| f(x_n) \| = (1 - \beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \| .$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \left(\alpha\beta_n B \parallel f(x_n) \parallel + \frac{KAC}{2}\right)\beta_n AC \parallel f(x_n) \parallel, \qquad (13.9)$$

$$q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n).$$

Пусть β_0 и x_0 таково, что $\varepsilon_0 < 1$, тогда $q_0 < 1$ и из (13.7) следует, что

$$\parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 \parallel f(x_0) \parallel, \parallel f(x_1) \parallel < \parallel f(x_0) \parallel . \qquad (13.10)$$

Из (13.3) следует, что $\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel = \beta_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel$ и из последнего соотношения, из (13.9) и (13.10), имеем, что

$$\varepsilon_1 = \left(\alpha\beta_1 B \parallel f(x_1) \parallel + \frac{KAC}{2}\right)\beta_1 AC \parallel f(x_1) \parallel < \varepsilon_0, \beta_1 > \beta_0, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel . \qquad (13.11)$$

Переходя к пределу в (13.11), имеем, что $\lim\limits_{n\to 0} \parallel f(x_{n+1}) \parallel = 0$, при этом последовательность норм $\{\parallel f(x_n) \parallel\}$ монотонно убывает. В процессе счета, начиная с некоторого номера итерации k, начинает выполняться достаточное условие сходимости метода Ньютона и последовательности $\{\beta_n\}$ с четными и нечетными номерами сходится к единице, как это следует из (13.3) и квадратичной сходимости процесса вблизи корня.

Таким образом, может быть сформулирована доказанная выше

Теорема 13.1. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям, $\varepsilon_0 < 1$ и в D существует x^* – решение уравнения (1.1). Тогда итерационный процесс (13.1) - (13.3) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Второй из рассматриваемых ниже многошаговых алгоритмов имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$\left(\alpha\beta_n^2 E \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f'}(x_n) f'(x_n)\right) \Delta x_n = -\overline{f'}(x_n) f(x_n), \tag{13.12}$$

$$\beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha << 1$$

здесь $\overline{f'}(x_n)$- оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$.

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.13}$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \parallel f(x_n) \parallel$, то устанавливаем β_{n+1} равным 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n (\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel^2)}\right), \tag{13.14}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2 \left(\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel^2 \right)^2}{(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_n + \Delta x_n \parallel^2) \parallel f(x_{n+2}) \parallel},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \left(\parallel f(x_0) \parallel^2 + \parallel f(x_0 + \Delta x_0 \parallel \right)}{\parallel f(x_1) \parallel^2}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предполагаем, что он удовлетворяет условиям (13.4).

Тогда имеет место

Теорема 13.2. *Пусть оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям, $\varepsilon_0 < 1$ и в D существует x^* – решение уравнения (1.1). Тогда итерационный процесс (13.12) - (13.14) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.*

Доказательство теоремы 13.2 вполне аналогично доказательству теоремы 11.2.

ЛЕКЦИЯ 14

Нелокальные многошаговые регуляризованные методы, реализующие полный прогноз

Определим область D следущим образом:

$$D = \{x : \omega(x, \beta_n) \leq \| f(x_0) \|\}\omega(x, \beta_n) =$$
$$(1 - \beta_n)\omega(x, 0) + \beta_n^2\beta_{n-1}\omega(x, 1)\beta_n \in (0, 1], \omega(x, 1) = \| f(x_n + \Delta x_n) \| .$$

Определим итерациооный процесс так:

Шаг 1. Решается линейное уравнение:

$$(\delta\beta_{n-1}^2 \| f(x_n) \|^2 E + f'(x_n))\Delta x_n = -f'(x_n)f(x_n) \tag{14.1}$$

$$\beta_{-1}[10^{-3}, 10^{-1}]; \delta \ll 1, n = 1, 2, \ldots$$

Шаг 2. Если $\| f(x_n + \Delta x_n) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n принимает значение 1, иначе определяется новая шаговая длина β_n по формулам:

$$\beta_n = \min(\frac{\omega(x_n, 0)}{\alpha\beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|}) \tag{14.2}$$

$$\beta_{-1} \in (10^{-4}, 1), \alpha > 1$$

$$\omega_{n+1} = \omega(x_n\beta_n) = (1 - \beta_n)\omega(x_n, 0) + \beta_n^2\beta_{n-1} \| f(x_n + \Delta x_n) \|, \tag{14.3}$$

$$\omega_0 = \gamma \| f(x_0) \|, \gamma \ll 1.$$

Шаг 3. Очередные приближнеия определяем по формулам

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n \tag{14.4}$$

Шаг 4. Если $\| \ f(x_{n+1}) \ \| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ (параметр останова), то конец просчетов, иначе переход на шаг 1.

Теорема 14.1. *Пусть в области D существует x^* - решение уравнения (1.1), оператор f удовлетворяет условиям (13.4). Тогда итерационный процесс (14.1) - (14.4) дает последовательность элементов $\{x_n\}$, сходящуюся к $x^* \in D$.*

Доказательство. Подставляя (14.2) в (14.3), имеем, что

$$\omega_{n+1} = (1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \beta_n) \omega_n \tag{14.5}$$

и индуктивно получаем соотношение

$$\omega_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \beta_i)) \gamma \ \| \ f(x_0) \ \| = \prod_{i=0}^{n} q_i \ \| \ f(x_0) \ \| \ \gamma. \tag{14.6}$$

Из (14.6) следует, что все элементы $x_n \in D$. Далее из (14.4) и (14.5) легко получить оценку, связывающую нормы невязок на элементах $(x_n + \Delta x_n)$ и $(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})$ с шаговой длиной, для чего рассмотрим отношение β_{n+1} к β_n

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\omega_{n+1}\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n\|}{\beta_n\omega_n\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1}\|} \le \frac{\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n\|}{\beta_n\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1}\|}.$$

Из последнего соотношения следует оценка

$$\beta_{n+1} \le \beta_{n-1}\frac{\| f(x_n+\Delta x_n) \|}{\| f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1}) \|}. \qquad (14.7)$$

Если предположить, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для того чтобы выполнялось неравенство (14.7) при $\forall n$, необходимо выполение условия

$$\frac{\|f(x_n+\Delta x_n)\|}{\|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\|} \ge 1,$$

откуда следует ограниченность последовательности $\| f(x_n+\Delta x_n) \|$.

Из ограничености $\| f(x_n+\Delta x_n) \|$ и (14.2) имеем, что ω_n убывает с ростом n со сверхлинейной скоростью, а из (14.2) следует, что ω_n может убывать со скоростью не выше линейной. Противоречие будет снято, если мы откажемся от предположения что $\beta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Так как $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$, то из (14.3) и (14.6) следует, что $\lim\limits_{n} \| f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1}) \| = 0$. Таким образом, последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремиться к x^*. *Теорема доказана.*

Ниже следущая теорема позволяет снять априорное требование существования в D решения уравнения (1.1).

Теорема 14.2. *Пусть в D выполняются условия теоремы 14.1, исключая требование существования в D решения уравнения (1.1). Тогда, если существует $k \in N$ такое, что выполняется соотношение*

$$1 > \beta_n = \frac{\omega_n}{\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n+\Delta x_n)\|}, n = 0, k-1, \beta_{k+i} = 1, i = 0, 1, \ldots, q_0^k \leq \beta_n$$

тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходится итерационный процесс (14.1) - (14.4), начиная с $x_0 \in D$ и при этом скорость сходимости сверхлинейная (локально квадратичная).

Доказательство теоремы 14.2 вполне аналогично доказательству теоремы 10.2.

Достаточно эффективным является итерационный процесс приведенного в этом параграфе типа, в котором на шаге 2 итерационные параметры β_n определяются следующим образом:

$$\beta_n = \frac{\omega(x_n, 0)}{\omega(x_n, 0) + \beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n \parallel^2} \tag{14.8}$$

$$\omega_n = \omega(x_n, 0) = \gamma \parallel f(x_0) \parallel^2; \gamma \ll l$$

$$\omega_{n+1} = \omega(x_n, \beta_n) = (1 - 2\beta_n)\omega(x_n, 0) +$$

$$+ \beta_n^2 \beta_{n-1}(\omega(x_n, 0) + \parallel f(x_n + \Delta x_n \parallel^2). \tag{14.9}$$

Теорема 14.3. *Пусть оператор f удовлетворяет в $D = \{x : \omega(x_n, \beta_n) \leq \parallel f(x_0) \parallel^2\}$ условиям теоремы 14.2. Тогда итерационный процесс (14.1), (14.8), (14.9), (14.4) даёт последовательность элементов $\{x_n\}$, сходящихся к $x^* \in D$.*

Доказательство теоремы 14.3, в основных моментах вполне аналогично доказательству теоремы 14.1.

Замечание 15. Относительно процессов, рассмотренных в предыдущих лекциях и не вошедших в лекцию 14 могут быть сформулированы и доказаны теоремы аналогичные тем, которые были нами рассмотрены выше. Справедливо также замечание 1.

Замечание 16. Если заменить условие существования ограниченного обратного оператора $[f'(x)]^{-1}$ более слабым условием обратимости оператора $[\alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n)]$ и во всех алгоритмах §6 на первом шаге рассматривать решение линейного уравнения

$$(\alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel E + (\alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n))f'(x_n))\Delta x_n =$$
$$= -(\alpha\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel E + \overline{f'}(x_n))f(x_n),$$

то с точностью до констант все наши рассуждения, связанные с алгоритмами этого пункта остаются в силе.

ЛЕКЦИЯ 15
Нелокальные варианты метода Канторовича-Красносельского решения нелинейных уравнений

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x) + g(x) \tag{15.1}$$

f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D банахова пространства X в X в монографии [4] предложен алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - [f^{'}(x)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) = x_n - \Delta x_n, \, n = 0, 1, \dots$$

его локальная сходимость. Для решения уравнения (15.1) предлагается нелокальный алгоритм с регулировкой шага [5]:
Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n:

$$f^{'}(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)), n = 0, 1, \dots \tag{15.2}$$

Шаг 2. Находится очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, n = 1, 2, \dots \tag{15.3}$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$,ε -малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \parallel \beta_n}\right) \qquad (15.4)$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in \lfloor 10^{-6}, 10^{-1} \rfloor, \beta_{-1} < \beta_0;$$
$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}\gamma_n}{\beta_n} \frac{\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2;$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предполагаем, что $f \in C_D^{(1)}$, производная Фреше $f'(x)$ оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и $\| [f'(x)]^{-1} \| \leq B$, $\forall x \in D$. Относительно оператора g полагаем, что $\forall x \in D$ имеет место соотношение

$$\| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| \leq \beta_n L \| \Delta x_n \| \| f(x_n + \beta_{n-1} g(x_n)) \| . \quad (15.5)$$

Условие вида (15.5) впервые, по-видимому, было рассмотрено в [7].

Теорема 15.1. *Пусть в области* $D = \overline{S}\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *существует* x^* *– решение уравнения (15.1), операторы* f *и* g *удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение* x_0 *и шаговые длины* β_0, β_{-1} *таковы, что*

$$\varepsilon_0 = \beta_0(KB + LB^2) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < 1.$$

Тогда алгоритм (15.2) – (15.4) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Доказательство. Из условий теоремы имеем

$$\| f(x_{n+1})-f(x_n)-f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) \| \le \| f(x_n+\theta(x_{n+1}-x_n))-f'(x_n) \| \times$$
$$\times \| x_{n+1}-x_n \| \le L \| x_{n+1}-x_n \|^2 . \tag{15.6}$$

С учетом (15.2) и (15.6) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})-\beta_n g(x_{n+1})-f(x_n)-\beta_{n-1}g(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)+$$
$$+\beta_n(f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)) \| \le \beta_n^2 LB^2 \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \|^2 . \tag{15.7}$$

Из (15.7) следует соотношение, связывающее нормы квазиневязок на соседних шагах

$$\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1}) \| \le (1-\beta_n) \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \| +$$
$$+ \| \beta_n g(x_{n+1})-\beta_{n-1}g(x_n) \| +\beta_n^2 LB^2 \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \|^2 \le$$
$$\le (1-\beta_n(1-\varepsilon_n)) \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \| = \tag{15.8}$$
$$= q_n \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \| .$$

Здесь $\varepsilon_n=\beta_n(KB+LB^2) \| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n) \|$, $q_n=1-\beta_n(1-\varepsilon_n)$.

Соотношение (15.8) является базовым при доказательстве сходимости процесса (15.2) – (15.4). При $n=0$ из (15.8) и условий теоремы имеем

$$\| f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \| \leq (1-\beta_0(1-\varepsilon_0)) \| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0) \| =$$
$$= q_0 \| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0) \| . \qquad (15.9)$$

Из (15.4) и (15.9) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n=1$ из (15.4), (15.8) и условий теоремы получим оценку

$$\| f(x_2)+\beta_1 g(x_2) \| \leq (1-\beta_1(1-\varepsilon_1)) \| f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \| =$$
$$= q_1 \| f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \| \qquad (15.10)$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$. Из (15.10) имеем, что $\| f(x_2)+\beta_1 g(x_2) \| \leq \| f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \|$, тогда из (15.4) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (15.8) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0) \| <$$
$$< q_0^{n+1} \| f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0) \| \qquad (15.11)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов x_n, генерируемых процессом (15.2) – (15.4), к x^*. При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Положим противное, то есть пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta^* \neq 1$, тогда из (15.4), (15.11) имеем

$$0 < C = \beta_0 \parallel f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \parallel =$$

$$= \beta_1 \parallel f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \parallel = \dots = \beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \parallel \qquad (15.12)$$

и переходя к пределу в (15.12) при $n \to \infty$ имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} \parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \parallel = \beta^* \parallel f(x^*) + \beta^* g(x^*) \parallel = C \neq 0,$$

а из (15.11) следует, что этот предел равен нулю. Противоречие будет снято, если мы откажемся от того, что $\beta^* \neq 1$. Итак,

$$\beta^* = 1, \ \lim_{n\to\infty} \parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \parallel = \parallel f(x^*) + g(x^*) \parallel = 0.$$

Из соотношения (15.2), (15.11) и условий теоремы имеем оценку

$$\parallel x^* - x_n \parallel \leq \sum_{i=n}^{\infty} \parallel \Delta x_i \parallel < \frac{B q_0^n \parallel f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \parallel}{1 - q_0}, \qquad (15.13)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*. При $n = 0$ из (15.13) находим величину радиуса сферы $D = \overline{\mathrm{S}}(x_0, r)$, $r = \frac{B \| f(x_0 + \beta_{-1} g(x_0)) \|}{1 - q_0}$. Как следует из (15.11), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (15.2) - (15.4) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$ рассмотренного в [4].

Нетрудно показать, что, начиная с $n > n_0$, метод (15.2) - (15.4) имеет квадратичную скорость сходимости. В самом деле, при $\beta_n \equiv 1$ из (15.8) следует оценка

$$\| f(x_{n+1} + g(x_{n+1})) \| \leq (LB + KB^2) \| f(x_n + g(x_n)) \|^2,$$

или $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ из которой следует локальная квадратичная сходимость процесса (15.2) - (15.4) с $\beta_n = 1$ к x^*. *Теорема доказана.*

Замечание 17. Частный случай алгоритма (15.2) – (15.4) при $g(x) = 0$ рассмотрен в работе [6].

Рассмотрим сходимость процесса (15.2) – (15.4) в условиях Вертгейма, то есть если производная Фреше оператора $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида

$$\| f'(x) - f'(y) \| \leq L \| x - y \|^p, L > 0, 0 < p < 1. \tag{15.14}$$

Теорема 15.2. *Пусть в интересующей нас области D выполняются условия теоремы (15.1), оператор $f'(x)$ удовлетворяет условию (15.14), начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что*

$$\varepsilon_0 = \beta_0^p (KB + LB^{1+p}) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|^p < 1.$$

Тогда алгоритм (15.2) – (15.4) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Доказательство. Из условий теоремы следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \leq \| f'(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)) - f'(x_n) \| \times$$

$$\times \parallel x_{n+1} - x_n \parallel \leq L \parallel x_{n+1} - x_n \parallel^{1+p} . \qquad (15.15)$$

С учетом (15.15) имеем

$$\parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_{n-1} g(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) + \beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)) \parallel \leq \beta_n^{1+p} L B^{1+p} \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel^{1+p} ,$$

откуда следует соотношение, связывающие нормы квазиневязок на соседних шагах.

$$\parallel f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \parallel \leq (1 - \beta_n) \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel + \parallel \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \parallel + \beta_n^{1+p} L B^{1+p} \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel^{1+p} \leq$$

$$\leq (1 - (\beta_n (1 - \varepsilon_n))) \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel = \qquad (15.16)$$

$$= q_n \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel,$$

здесь $\varepsilon_n = \beta_n^p (KB + B^{1+p}) \parallel f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \parallel^p$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

При $n = 0$ из (15.16) и условий теоремы имеем

$$\parallel f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \parallel \leq (1 - (\beta_0 (1 - \varepsilon_0))) \parallel f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \parallel =$$

$$= q_0 \parallel f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \parallel \qquad (15.17)$$

$$q_0 < 1, \parallel f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \parallel < \parallel f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \parallel .$$

Из (15.4) и (15.17) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (15.4), (15.17) и условий теоремы следует оценка

$$\parallel f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \parallel \leq (1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_1)) \parallel f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \parallel =$$

$$= (1-\beta_1(1-\varepsilon_0)) \parallel f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \parallel = q_1 \parallel f(x_1)+\beta_0 g(x_1) \parallel \le$$
$$\le q_1 q_0 \parallel f(x_0)+\beta_{-1} g(x_0) \parallel, \qquad (15.18)$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$.

Из (15.4) и (15.18) имеем, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (15.16) справедлива оценка

$$\parallel f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1}) \parallel \le \prod_{i=1}^{\infty} q_i \parallel f(x_0)+\beta_{-1} g(x_0) \parallel <$$
$$< q_0^{n+1} \parallel f(x_0)+\beta_{-1} g(x_0) \parallel, \qquad (15.19)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (15.2) - (15.4) к x^*. При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Доказательство того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta^* = 1$, проводим вполне аналогично тому, как это делалось в теореме (15.1)

Из соотношений (15.2), (15.16) и условий теоремы имеем оценку

$$\parallel x^* - x_n \parallel \le \sum_{i=n}^{\infty} \parallel \Delta x_i \parallel < \frac{B q_0^n \parallel f(x_0)+\beta_{-1} g(x_0) \parallel}{1-q_0}, \qquad (15.20)$$

из которой следует и сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n = 0$ из (15.20) находим величину радиуса интересующей нас области $D = \overline{\mathrm{S}}(x_0, r) : r = \frac{B\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_0)\|}{1-q_0}$.

Как следует из (15.16), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (15.2) - (15.4) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$ так что из (15.16) при $n > n_0$ следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \leq (LB + KB^{1+p}) \| f(x_n) + g(x_n) \|^{1+p},$$

или $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^{1+p}$, из которой следует сверхлинейная сходимость процесса (15.2) - (15.4) с $\beta_n = 1$ к x^*. *Теорема доказана.*

Теорема 15.3. *Если операторы f и g недифференцируемы, но оператор первой разделенной разности $[f(x_n, y_n)]^{-1}$ по норме равномерно ограничен в интересующей нас области D константой $B > 0$, оператор $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L, имеет место соотношение (15.5), а шаговая длина β_n и начальное приближение x_0 таковы, что выполняется условие*

$$\varepsilon_0 = \beta_0(KB + LBM) \| f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0) \| < 1, \| E - [f(x_n, y_n)]^{-1} \| \leq M,$$

то итерационный процесс (15.21), (15.3), (15.4) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* – решению уравнения (15.1), если решение в D существует. Здесь решение системы (15.2) заменено решением системы (15.21).

$$f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)) \qquad (15.21)$$

$$y_n = x_n - \beta_n(f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)).$$

Доказательство сформулированной выше теоремы вполне аналогично доказательству теоремы (15.2).

Относительно процессов рассмотренных выше и не вошедших в лекцию 15 могут быть сформулированы и доказаны теоремы аналогичные тем, которые были нами рассмотрены выше.

ЛЕКЦИЯ 16

Нелокальные варианты метода хорд

Для решения нелинейного уравнения (1.1) А.С. Сергеевым [1] был предложен операторный вариант метода хорд, локально сходящийся со сверхлинейной скоростью.

Итерационная процедура имела следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - [f(x_n, x_{n-1})]^{-1} f(x_n) = x_n - \Delta x_n, n = 1, 2, \ldots \tag{16.1}$$

Достоинство метода (16.1) состоит в том, что метод применим в том случае, если оператор f лишь непрерывен в области D и первые и вторые разделенные разности оператора f равномерно ограничены в D. К числу важных недостатков метода (16.1) является необходимость иметь в своем распоряжении достаточно хорошие начальные приближения x_0 и x_1, а также знание оценок ряда глобальных констант, нахождение которых представляет задачу, сравнимую по трудности с решением задачи (1.1).

Положим, что в интересующей нас области $D \subset X$ для каждого x_1, x_2, x_3 выполняется условие:

$$\| f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3) \| \leq L \| x_1 - x_3 \| . \tag{16.2}$$

Рассматривается итерационный процесс (16.1).

Относительно сходимости процесса (16.1) справедлива

Теорема 16.1. *Пусть в области D выполняются условие (16.2) и элементы x_0, x_1 таковы, что*

$$BL \parallel f(x_1) \parallel (1+B) = l < \min\left(\frac{q}{3}, \frac{a-1}{2a-1}\right), \tag{16.3}$$

$$a = \frac{q - 3LB \parallel f(x_1) \parallel}{2B^2L^2 \parallel f(x_1) \parallel}$$

$$\parallel x_1 - x_0 \parallel \leq \parallel f(x_1) \parallel, q \in (0,1), \parallel [f(x_0, x_1)]^{-1} \parallel = B$$

тогда итерационный процесс (16.1) с квадратичной скоростью сходится к единственному в $\Omega_\delta = \left(x_1, \frac{q - BL\|f(x_1)\|}{2BL}\right)$ *решению x^* уравнения (1.1).*

Доказательство. Выведем вначале некоторые соотношения:

$$\parallel E - [f(x_0, x_1)]^{-1} f(x_1, x_2) \parallel \leq \parallel [f(x_0, x_1)]^{-1} \parallel \parallel f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2) \parallel \leq$$

$$\leq BL \parallel x_2 - x_0 \parallel \leq BL(\parallel x_2 - x_1 \parallel + \parallel x_1 - x_0 \parallel) \leq BL \parallel f(x_1) \parallel)(1+B) = l$$

Так как $l < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $[f(x_0, x_1)]^{-1} f(x_1, x_2)$ и $\parallel [f(x_0, x_1)]^{-1} [f(x_1, x_2)]^{-1} \parallel \leq$ $\leq (1-l)^{-1}$. Далее, имеем соотношение $\parallel f(x_1, x_2)^{-1} \parallel \leq \frac{\|[f(x_0, x_1)]^{-1}\|}{1-l}$. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, получаем оценку

$$\parallel f(x_2) \parallel = \parallel f(x_1 - \Delta x_1) \parallel \leq \parallel f(x_1) - f(x_1, x_0) \Delta x_1 \parallel + L \parallel x_2 - x_1 \parallel \times$$

$$\times \| x_2 - x_0 \| \leq \| f(x_1) - f(x_1, x_0)[f(x_1, x_0)]^{-1} f(x_1) \| +$$

$$+ L \| [f(x_1, x_0)]^{-1} f(x_1) \| (\| x_2 - x_1 \| + \| x_1 - x_0 \|) \leq \tag{16.4}$$

$$\leq LB \| f(x_1) \|^2 (1 + B).$$

Покажем, что при переходе от точки x_1 к точке x_2, соотношение (16.4) не меняется. Имеем

$$\| [f(x_1, x_2)]^{-1} \| L \| f(x_2) \| (1 + \| [f(x_1, x_2)]^{-1} \|) \leq BL \| f(x_1) \|$$
$$l \frac{(1-l+B)}{(1-l)^2} < BLl \| f(x_1) \| \frac{(1+B)}{(1-l)^2} = \frac{l^2}{(1-l)^2}$$

И если потребовать, чтобы выполнялось соотношение $\frac{l^2}{(1-l)^2} \leq l$, а это неравенство будет выполнятся при $l < \frac{q}{3}$, то получим, что соотношение (16.4) при переходе от точки x_1 к точке x_2 не нарушается.

Из соотношения (16.4) следует квадратичная сходимость последовательности $\{x_n\}$, определённой процессом (16.1), к x^* – решению уравнения (1.1).

Докажем единственность полученного решения в сфере Ω_δ. Пусть в Ω_δ существует еще одно решение x^{**}. Имеем:

$$\| x^* - x^{**} \| = \| x^* - [f(x_1, x_0)]^{-1} f(x^*) - x^{**} + [f(x_1, x_0)]^{-1} f(x^{**}) \| \leq$$

$$\leq \| [f(x_1, x_0)]^{-1} \| \| f(x_1, x_0)(x^* - x^{**}) - f(x^*) + f(x^{**}) \| \leq$$

$$\leq \| [f(x_1, x_0)]^{-1} \| \| f(x_1, x_0) - f(x^*, x^{**}) \| \| x^* - x^{**} \| =$$

$$= \| [f(x_1, x_0)]^{-1} \| \| f(x_1, x_0) - f(x_0, x^*) + f(x_0, x^*) - f(x^*, x^{**}) \| \times$$

$$\times \parallel x^* - x^{**} \parallel \leq \parallel [f(x_1, x_0)]^{-1} \parallel L \parallel x_1 - x^* \parallel + \parallel x_1 - x^{**} \parallel +$$

$$+ \parallel f(x_1) \parallel \parallel x^* - x^{**} \parallel \leq BL(2r + \parallel f(x_1) \parallel \parallel x^* - x^{**} \parallel).$$

Если $BL(2r+ \parallel f(x_1) \parallel) = q$, то решений будет не более одного. Таким образом имеем радиус единственности $r = \frac{q - BL\|f(x_1)\|}{2BL}$.

Найдём радиус сферы существования решения. Для этого рассмотрим ряд соотношений, которые следуют из приведённых выше неравенств:

$$\parallel x_2 - x_1 \parallel \leq B \parallel f(x_1) \parallel,$$

$$\parallel x_3 - x_1 \parallel \leq \parallel x_3 - x_2 \parallel + \parallel x_2 - x_1 \parallel \leq B \parallel f(x_1) \parallel)(1 + \tfrac{l}{1-l}).$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\parallel x_{n+1} - x_n \parallel \leq B \parallel f(x_1) \parallel)(1 + \tfrac{l}{(1-l)} + \ldots + (\tfrac{l}{1-l})^{n-1}) < B \parallel f(x_1) \parallel \tfrac{1-l}{1-2l},$$

из которой следует, что радиус существования решения $r_\exists = \parallel f(x_1) \parallel (1 + B\frac{1-l}{1-2l})$.

Чтобы решение в Ω_δ существовало и было единственным, достаточно выполнения соотношения $\parallel f(x_1) \parallel \left(1 + B\frac{1-l}{1-2l}\right) \leq \frac{q - BL\|f(x_1)\|}{2BL}$, которая непременно выполняется при выполнении неравенства

$$1 \leq \tfrac{a-1}{2a-1}, \text{ где } a = \tfrac{q - 3LB\|f(x_1)\|}{2B^2L\|f(x_1)\|}.$$

Из последнего неравенства следует, что при $l = \min\left(\frac{q}{3}, \frac{a-1}{2a-1}\right)$ решение x^* в области Ω_δ существует и единственно. *Теорема доказана.*

Предложенные ниже нелокальные варианты метода хорд “работают” при “плохих” начальных приближениях и некоторые из вариантов продолжаемы даже в том случае, если на каких-либо элементах x_n, x_{n-1} оператор $f(x_n, x_{n-1})$ обращается в нуль.

Условие (16.2) часто представляется достаточно обременительным: в ряде важных задач условие симметричности (16.2) не выполняется, в связи с чем это условие заменяется другим:

$$f(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3) = f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3).$$

Следствием из последнего соотношения является равенство (аналог интерполяционной формулы для операторов)

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, y)(x - x_0) + f(x_0, x, y)(x - x_0)(x - y),$$

которое положено в основу наших дальнейших рассуждений.

Введение демпфирующего множителя позволяет построить следующий нелокальных процесс:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_n:

$$f(x_n, x_{n-1})\Delta x_n = -f(x_n), n = 1, 2, \ldots \tag{16.5}$$

Шаг 2. Очередное приближение находится по правилу

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, n = 1, 2, \ldots, \tag{16.6}$$

Шаг 3. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$ и(или) $\| \Delta x_n \| \leq \varepsilon$ (ε - параметр останова) – конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \|^2}{\| f(x_{n+1}) \|^2}\beta_n\right), \beta_1 \in [10^{-3}, 10^{-1}] n = 1, 2, \dots \qquad (16.7)$$

и переход на шаг 1.

Теорема 16.2. *Пусть в области* $D = \overline{S}(x_0, r)$, $r \geq \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} + \| x_1 - x_0 \|$ *существует* x^* *- решение уравнения (1.1) и выполняются следующие условия:*

a) $[\| f(x_n, y_n) \|]^{-1} \leq B; x, y \in D;$

b) $\| f(x, y, z) \| \leq K; x, y, z \in D;$

c) $\varepsilon_1 = 2\beta_1 K B^2 \| f(x_1) \| < 1.$

Тогда итерационный процесс (16.5) - (16.7) со сверхлинейной скоростью (локально с квадратичной) сходится к $x^* \in D$. *Оценки погрешности n-го приближения имеет вид*

$$\| x_n - x^* \| \leq \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} q_1^{n-1}, q_1 = 1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1).$$

Доказательство. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, имеем оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| = \| f(x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n) \| = \| f(x_n) - \sqrt{\beta_n}[f(x_n, x_{n-1})]^{-1} f(x_n) \| \leq$$

$$\leq (1 - \sqrt{\beta_n} \| f(x_n) \| + \| f(x_n, x_{n-1}, x_{n+1}) \| \times$$

$$\times\sqrt{\beta_n} \parallel [f(x_n, x_{n-1})]^{-1} f(x_n) \parallel \parallel x_{n+1} - x_{n-1} \parallel \leq 1 - \sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel +$$

$$+ BK\sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel \parallel x_{n+1} - x_n \parallel + \parallel x_n - x_{n-1} \parallel . \qquad (16.8)$$

В силу (16.7) $\forall n$, для которого $\beta_n \neq 1$ справедлива цепочка равенств

$$\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2 = \beta_n \parallel f(x_n) \parallel^2 =$$

$$\beta_{n-1} \parallel f(x_{n-1}) \parallel^2 = \ldots = \beta_0 \parallel f(x_0) \parallel^2 . \qquad (16.9)$$

Перепишем соотношение (16.8) в виде

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq (1 - \sqrt{\beta_n}) \parallel f(x_n) \parallel + BK\sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel \times$$

$$\times(\sqrt{\beta_n} \parallel \Delta x_n \parallel + \sqrt{\beta_{n-1}} \parallel \Delta x_{n-1} \parallel) \leq (1 - \sqrt{\beta_n}) \parallel f(x_n) \parallel +$$

$$+ 2K\beta_n \parallel f(x_n) \parallel^2 B^2 = (1 - \sqrt{\beta_n}(1 - 2KB^2\sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel))\times \qquad (16.10)$$

$$\times \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel;$$

$q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)$; $\varepsilon_n = 2\sqrt{\beta_n}KB^2 \parallel f(x_n) \parallel; n = 1, 2, \ldots$

Пусть β_1 таково, что $\varepsilon_1 < 1$, тогда в силу (16.10) $\parallel f(x_2) \parallel \leq q_1 \parallel f(x_1) \parallel$, в этом случае в силу (16.7) $\beta_2 > \beta_1$. Рассмотрим $\varepsilon_2 = 2\sqrt{\beta_2}KB^2 \parallel f(x_2) \parallel$, которое, в силу (16.9) равно ε_1 и так как $\beta_2 > \beta_1$, то $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n) < q_1$.

Таким образом, последовательность итерационных параметров $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает, а последовательность $\{q_n\}$ - монотонно убывает с ростом n. Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod\limits_{i=1}^{n} q_i \| f(x_i) \|$, из которой следует слабая сходимость элементов $\{x_n\}$, генерируемых алгоритмом (16.5) - (16.7), к x^*. Справедливо и более сильное утверждение: так как из (16.8) и условий теоремы имеем, что $\| x_{n+1} - x_n \| \leq \beta_n B \| f(x_n) \| \leq \beta_n B \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_i \| f(x_i) \|$, то

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq \sum_{l=n}^{n+p-1} \| x_{l+1} - x_l \| \leq B \sum_{l=n}^{n+p-1} \beta_l \prod_{j=1}^{l-1} q_j \| f(x_l) \| <$$

$$< B \| f(x_1) \| (q_1^{n-1} + q_1^n + \cdots + q_1^{n+p-2}) < \frac{B \| f(x_1) \|}{1 - q_1} q_1^{n-1}. \qquad (16.11)$$

Из (16.11) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ и в силу полноты пространства X существование предельного элемента, который, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (1.1). Оценка погрешности n-го приближения получается переходом к пределу в (16.11) при $p \to \infty$. Имеем $\| x_n - x^* \| \leq \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} q_1^{n-1}$.

Радиус сферы $\overline{\mathrm{S}}(x_0, r)$ определяем стандартным образом.

$$\| x_2 - x_1 \| \leq B \| f(x_1) \|; \| x_3 - x_2 \| + \| x_2 - x_1 \| \leq B \| f(x_2) \| +$$

$$+ B \| f(x_1) \| \leq B \| f(x_1) \| (1 + q_1).$$

Индуктивно получаются оценки

$$\| x_{n+1} - x_1 \| \leq B \| f(x_1) \| (1 + q_1 + \cdots + q_{n-1}) < \tfrac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1}.$$

Переход к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$ позволяет утверждать, что все последовательные приближения не выходят за пределы сферы $\overline{\mathrm{S}}(x_0, r)$. *Теорема доказана.*

Замечание 18. Локальная квадратичная скорость сходимости процесса (16.5) – (16.7) следует из (16.10) при $\beta_n = 1$. А.С. Сергеевым [8] доказана лишь локальная сверхлинейная скорость сходимости процесса (16.1).

В теореме 16.2 требовалось существование apriori существование x^* - решения уравнения (1.1) и принадлежность его замыканию сферы $\overline{\mathrm{S}}(x_0, r)$. Предлагаемая ниже теорема позволяет снять это требование.

Теорема 16.3. *Пусть оператор f удовлетворяет в D тем же условиям, что и в теореме 16.2, исключая требование существования $x^* \in D$, существует такое число $k \in N$, что выполняются соотношения*

$$1 > \beta_{n+1} = \frac{\| f(x_n) \|^2}{\| f(x_{n+1}) \|^2} \beta_n, n = \overline{1,k\text{-}1}, \tag{16.12}$$

$$\beta_{k+i} = 1, i = 1, 2, \ldots, \beta_1 \geq q_1,$$

тогда уравнение (1.1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходятся итерации (16.5), (16.6), (16.12), начиная с $x_0, x_1 \in D$.
При этом справедлива оценка погрешности m-го приближения

$$\| x^* - x_m \| \leq B q_1^{2^{m-k}} \| f(x_1) \|$$

Доказательство. Так как выполняются условия теоремы 16.2, то справедлива оценка (16.10), $q_i = 1-\beta_i(1-\varepsilon_i) < 1, i = \overline{1,k\text{-}1}$, а в силу условия (16.12) $\| f(x_{n+1}) \| \leq 2KB^2 \| f(x_n) \|^2, n = k+i, i = 0,1,2,\ldots$ и при этом величина $\| f(x_n) \|$ такова, что $2KB^2 \| f(x_n) \| < 1$. Таким образом, локальная квадратичная сходимость наступает на элементе $x_0^* = x_n$, для которого справедливо соотношение $q_1^* = 2KB^2 \| f(x_n) \| < 1$.

Стандартным рассуждением доказывается фундаментальность последовательности элементов $\{x_n^*\}$, сохранение условия (16.12) при переходе от точки x_0^* к точке $x_1^* = x_{k+1}$ и справедливость оценки

$$\| f(x_m) \| \leq (q_1^*)^{2^{m-n-1}-1} \| f(x_1) \|, m > n.$$

Так что в сфере D существует предельный элемент x^* и справедлива оценка

$$\| x_{m+1} - x_1 \| \leq \sum_{l=0}^{k-1} \| x_{l+1} - x_1 \| + \sum_{l=k}^{m} \| x_{l+1} - x_1 \| \leq \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} +$$

$$+ \sum_{l=k}^{m} (q_1^*)^{2^{m-1}-1} \| f(x_1) \| + \| x_1 - x_0 \| \leq \tag{16.13}$$

$$\leq \frac{B \| f(x_1) \|}{1-q_1} + \| x_1 - x_0 \| .$$

Переходя к пределу в (16.13) при $n \to \infty$, имеем, что x^* - решение уравнение (1.1). Оценка погрешности n-го приближения следует из (16.13) и соотношения

$$\| x^* - x_n \| \leq B \| f(x^*) - f(x_n) \| = B \| f(x_n) \| < B(q_1^*)^{2^{n-1}-1+k} \| f(x_1) \| .$$

Теорема доказана.

Теоремы аналогичные теоремам 16.2 и 16.3 можно доказать относительно нелокальных вариантов метода хорд, где β_{n+1} и очередное приближение находится следующими способами:

1. одношаговые методы неполного прогноза

1-ый способ -

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_0) \| \gamma_n}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2. \qquad (16.14)$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$.

2-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \|^2 \gamma_n}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|^2}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2}{\| f(x_{n+1}) \|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2. \qquad (16.15)$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n} \Delta x_n$.

2. одношаговый метод полного прогноза

3-ий способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \|^2 \gamma_n}{(\| f(x_n) \|^2 + \| f(x_n + \Delta x_n) \|^2)\beta_n}\right), \qquad (16.16)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\|f(x_n)\|^2 \|f(x_{n+1})\|^2 (\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|^2)}{(\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_n + \Delta x_n)\|^2) \|f(x_{n+2})\|^2},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\|f(x_0)\|^2+\|f(x_0+\Delta x_0)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2}.$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

3. многошаговые методы неполного прогноза

4-ый способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \tag{16.17}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|}{\beta_n\|f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2.$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

5-ый способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|^2}{\beta_n(\| f(x_n) \|^2 + \| f(x_{n+1}) \|^2)}\right), \tag{16.18}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}\|f(x_n)\|^2(\|f(x_n)\|^2+\|f(x_{n+2})\|^2)}{\beta_n\|f(x_{n+2})\|^2(\|f(x_n)\|^2+\|f(x_{n+1})\|^2)},$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2\frac{(\|f(x_0)\|^2+\|f(x_1)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2}.$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

6-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1} \| f(x_n) \|}{\beta_n \| f(x_{n+2}) \|}, \gamma_0 = \beta_0^2. \tag{16.19}$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

7-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2)}\right) \tag{16.20}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\|f(x_n)\|^2(\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_{n+2})\|^2)}{\|f(x_{n+2})\|^2(\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_{n+1})\|^2)}$$

$$\gamma_0 = \frac{(\|f(x_0)\|^2 + \|f(x_1)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2}.$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

4. многошаговый метод полного прогноза

8-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel^2)}\right) \tag{16.21}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\|^2(\|f(x_{n+1})\|^2 + \|f(x_n + \Delta x_n)\|^2)}{\beta_n(\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_n + \Delta x_n)\|^2)\|f(x_{n+2})\|^2}$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2 \frac{(\|f(x_0)\|^2 + \|f(x_0 + \Delta x_0)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2}.$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

Замечание 19. Как показывает вычислительная практика решения ряда существенно нелинейных задач, применение алгоритмов, в которых обратная связь реализуется на непропорциональной основе, оказывается эффективнее.

Пусть на каком-нибудь шаге итерационного процесса оператор $f(x_n, x_{n-1})$ обращается в нуль, в этом случае в итерационном процессе поправку Δx_n находим, решая уравнение

$$(\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f(x_n, x_{n-1}))\Delta x_n = -f(x_n). \tag{16.22}$$

Откуда оценка для $\parallel \Delta x_n \parallel$ имеет вид

$$\parallel \Delta x_n \parallel = \parallel (\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f(x_n, x_{n-1}))^{-1} \parallel \parallel f(x_n) \parallel \leq B \parallel f(x_n) \parallel,$$

$$\parallel (\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E + f(x_n, x_{n-1}))^{-1} \parallel \leq B.$$

Рассмотрим итерационный процесс:

Шаг 1. Решается уравнение (16.22)

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n. \tag{16.23}$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \varepsilon$ и(или) $\parallel \Delta x_n \parallel \leq \varepsilon$ (ε- параметр останова) – конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \parallel f(x_n) \parallel$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\parallel f(x_n) \parallel^2}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel^2}, \gamma_0 = \beta_0^2 \tag{16.24}$$

и переход на шаг 1.

Теорема 16.4. *Пусть в области D существует x^* - решение уравнения (1.1). Тогда при выполнении условия b) теоремы 16.2 и соотношения*

$$\varepsilon_1 = \beta_1 B \parallel f(x_1) \parallel (\delta + 2BK) < 1, \tag{16.25}$$

итерационный процесс (16.22) - (16.24) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* и справедливы оценки погрешности n-го приближения:

$$\parallel x_n - x^* \parallel \le B \frac{\parallel f(x_1) \parallel}{1 - q_1} q_1^{n-1}, q_1 = 1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1). \tag{16.26}$$

Доказательство. Представим уравнение (1.1) в “неявном” виде

$$f(x_n, x_{n-1})\Delta x_n = -f(x_n) - \delta\sqrt{\beta_1} \parallel f(x_n) \parallel \Delta x_n.$$

В силу условий теоремы и аналога формулы Ньютона для операторов имеем оценку

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel = \parallel f(x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n) \parallel \le \parallel f(x_n) - \sqrt{\beta_n} f(x_n) -$$
$$-\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel \Delta x_n \parallel + \sqrt{\beta_n} K \parallel \Delta x_n \parallel \parallel x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n - x_{n-1} \parallel \le$$
$$\le (1 - \sqrt{\beta_n}) \parallel f(x_n) \parallel + \delta\beta_n B \parallel f(x_n) \parallel^2 + \sqrt{\beta_n} K B \parallel f(x_n) \parallel \times$$
$$\times(\sqrt{\beta_n} \parallel \Delta x_n \parallel + \sqrt{\beta_{n-1}} \parallel \Delta x_{n-1} \parallel) \le (1 - \sqrt{\beta_n}) \parallel f(x_n) \parallel +$$
$$+\delta\beta_n B \parallel f(x_n) \parallel^2 + \sqrt{\beta_n} K B^2 \parallel f(x_n) \parallel (\sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel +$$
$$+\sqrt{\beta_{n-1}} \parallel f(x_{n-1}) \parallel .$$

Из (16.24) следует, что $\sqrt{\beta_n} \parallel f(x_n) \parallel = \sqrt{\beta_{n-1}} \parallel f(x_{n-1}) \parallel$, в силу чего оценка для $\parallel f(x_{n+1}) \parallel$ принимает вид

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq (1-\beta_n) \| f(x_n) \| + \delta\beta_n B \| f(x_n) \|^2 + 2\beta_n B^2 K \| f(x_n) \|^2 =$$

$$= (1-\sqrt{\beta_n}(1-\sqrt{\beta_n} B \| f(x_n) \| (\delta + 2BK))) \| f(x_n) \| . \qquad (16.27)$$

Так как в силу (16.25) $\varepsilon_1 = \beta_1 B \| f(x_1) \| (\delta + 2KB) < 1$, то

$$\| f(x_2) \| = (1-\sqrt{\beta_1}(1-\varepsilon_1)) \| f(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) \|; q_1 < 1.$$

Поскольку $\| f(x_2) \| < \| f(x_1) \|$, тогда $\beta_2 > \beta_1$.
С учетом последних соотношений имеем, что

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\beta_2} B \| f(x_2) \| (\delta + 2KB) = \sqrt{\beta_1} B \| f(x_1) \| (\delta + 2KB) = \varepsilon_1$$

$$\| f(x_3) \| \leq (1-\sqrt{\beta_2}(1-\varepsilon_2)) \| f(x_2) \| = q_2 \| f(x_2) \| \leq q_2 q_1 \| f(x_1) \|$$

$$q_2 < q_1, \beta_2 > \beta_1.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| \leq \prod_{i=1}^{n} q_i \| f(x_i) \| . \qquad (16.28)$$

При этом последовательность элементов $\{q_i\}$ монотонно убывает, а последовательность итерационных параметров $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает.

Переходя к пределу в (16.28) при $n \to \infty$, убеждаемся в том, что последовательность элементов $\{x_n\}$, генерируемая формулами (16.22) -

(16.24) сходится по функционалу к x^*. Стандартными рассуждениями нетрудно показать сильную (по норме) сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x^* и справедливость оценки (16.26).

Сверхлинейность процесса следует из (16.27) при $\beta_n \to 1$. *Теорема доказана.*

Теоремы, аналогичные доказанной выше, могут быть сформулированы и доказаны относительно процессов, где β_{n+1} и очередные приближения определяем формулами (16.14) - (16.21).

Аналогично теореме 16.3 может быть сформулирована и доказана теорема с использованием доказательных вычислений, позволяющая снять априорное требование существования в D решения x^*.

Рассмотренные выше частично регуляризованные варианты метода хорд оказываются малоэффективными в случае "плохих" задач. Для решения "плохих" задач применяют регуляризованные итерационные процессы, в которых поправка Δx_n находится из решения уравнения

$$(\delta \parallel f(x_n) \parallel^2 E + \overline{f(x_n, x_{n-1})} f(x_n, x_{n-1}))\Delta x_n = \overline{f(x_n, x_{n-1})} f(x_n),$$

$n = 1, 2, \ldots$ здесь $\overline{f(x_n, x_{n-1})}$ оператор, сопряженный оператору $f(x_n, x_{n-1})$, который является оператором первой разделенной разности, а шаговые длины по одной из формул этого параграфа или из соотношений (16.14) - (16.21).

ЛЕКЦИЯ 17

Нелокальные итерационные процессы типа Стеффенсена для решения нелинейных уравнений

Перейдем к рассмотрению других нелокальных итерационных процессов, отличных от метода хорд.

Исследуя процессы, описываемые нелинейными уравнениями, мы почти всегда имеем дело с приближёнными решениями. Чрезвычайно важными являются два вопроса, как эффективно организовать процесс получения приближённого решения и насколько точно это приближённое решение описывает реальный процесс, в частности, существует ли в определённой окрестности приближённого решения точное изолированное решение уравнения $f(x) = 0; f(D \subset X \to X)$, где X – B-пространство.

Для решения уравнения (1.1) часто используют метод Ньютона с регулировкой шага

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n[f'(x_n)]^{-1}f(x_n) = x_n - \beta_n \Delta x_n; \beta_n \in (0; 1]; \qquad (17.1)$$

$n = 0, 1, \dots$
или варианты метода Гаусса-Ньютона с регулировкой шага (МГНРШ)

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n(\alpha E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))^{-1}\overline{f'}(x_n)f(x_n) = x_n - \beta_n \Delta x_n \qquad (17.2)$$

$$0 < \alpha \ll 1, \beta_n \in (0; 1]; n = 0, 1, \dots$$

Здесь E – единичный оператор; $f'(x_n)$ – производная Фреше оператора f на элементе x_n; $\overline{f'}(x_n)$ -оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$; $[f'(x_n)]^{-1}$ и $(\alpha E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))^{-1}$ – операторы, обратные соответственно операторам $f'(x_n)$ и $(\alpha E + \overline{f'}(x_n)f'(x_n))$.

В зависимости от способа получения итерационных параметров β_n различают варианты МНРШ (17.1) и МГНРШ (17.2) [1].

Относительно оператора f обычно полагают, что $f \in C_D^2$ и в D существует ограниченный обратный оператор $[f'(x)]^{-1}$. В ряде важных практических задач оператор f лишь непрерывен в D и $\forall x_1, x_2, x_3 \in D$ выполняются условия

$$\begin{gathered}
\| \, [f(x_1, x_2)]^{-1} \, \| \leq B; B > 0, \\
\| \, f(x_1, x_2, x_3) \, \| \leq K, K > 0, \qquad (17.3) \\
\| \, E - f(x_1, x_2) \, \| \leq M, M > 0.
\end{gathered}$$

Здесь $f(x_1, x_2)$ – разностное отношение первого порядка оператора f. Ниже будем рассматривать уравнения с негладкими операторами.

Нерегуляризованные алгоритмы (МНРШ). Одношаговые методы.

Пусть оператор $f(x) \in C_D$ и такой, что выполняются условия (17.3). Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [f(x_n, y_n)]^{-1} f(x_n) = x_n - \beta_n \Delta x_n, \qquad (17.4)$$

$$y_n = x_n - \beta_n f(x_n), n = 0, 1, \ldots, \beta_n \in (0; 1].$$

Используя, рассмотренный выше, аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и соотношение (17.4), имеем оценку

$$\| f(x_{n+1}) \| = \| f(x_n) + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n, y_n, x_{n+1})(x_{n+1} -$$

$$- x_n)(x_{n+1} - y_n) \| \leq (1 - \beta_n) \| f(x_n) \| + K \| x_{n+1} - x_n \| \| x_{n+1} - y_n \| \leq$$

$$\leq (1 - \beta_n) \| f(x_n) \| + K\beta_n^2 \| \Delta x_n \| BM \| f(x_n) \| \leq \tag{17.5}$$

$$(1 - \beta_n(1 - \beta_n K B^2 M \| f(x_n) \|)) \| f(x_n) \| < (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) \| =$$

$$= q_n \| f(x_n) \|,$$

$$\varepsilon_n = \beta_n K B^2 (1 + M) \| f(x_n) \|; q = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n).$$

Соотношение (17.5) является базовым при рассмотрении семейства итерационных процессов, которые получаются при различных способах введения итерационных параметров β_n (способах регулировки шага). Если, следуя идеям работы [1], определить итерационные параметры β_n следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\| f(x_n) \| \gamma_n}{\beta_n \| f(x_{n+1}) \|}), \beta_0 \in (10^{-4}, 10^{-1}) \tag{17.6}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \| f(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) \|}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

то, взяв β_0 таким, чтобы выполнялось соотношение $\varepsilon_0 = \beta_0 K B^2(1+M) \parallel f(x_0) \parallel < 1$, из (17.5), (17.6) имеем, что $q_0 < 1$; $\parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 \parallel f(x_0) \parallel$ и $\beta_1 > \beta_0$. Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что итерационные параметры с четными и нечетными индексами образуют монотонно возрастающие последовательности, нормы последовательности элементов $\{\parallel f(x_n) \parallel\}$ монотонно убывают к нулю, все $q_i < 1$, и если в области $D = \overline{\mathrm{S}}\left(x_0, \frac{(1+B)\parallel f(x_0)\parallel}{1-q_0}\right)$ решение x^* уравнения (1.1) существует, то итерационный процесс (17.4), (17.6) сходится к x^*. Нетрудно проверить, что процесс(17.4), (17.6) с $\beta_n = 1$ имеет квадратичную скорость сходимости. Действительно, из (17.5) при $\beta_n = 1$ имеем, что $\parallel f(x_n) \parallel \leq KB^2(1+M) \parallel f(x_n) \parallel^2$ или $q_{n+1} \leq q_n^2$. Из последнего неравенства следует, что достаточным условием квадратичной сходимости процесса (17.1) с $\beta_n = 1$ является условие $KB^2(1+M) \parallel f(x_n) \parallel = q_n < 1$. В процессе реализации алгоритма (17.1), (17.6) это условие при некотором номере k начинает выполняться. Тогда, как следует из (17.6), β_i для $i > k$ будут равными единице. Таким образом, нами доказана

Теорема 17.1. *Пусть в области $D = \overline{S}\left(x_0, \frac{(1+B)\parallel f(x_0)\parallel}{1-q_0}\right)$ существует решение x^* и оператор f удовлетворяет условиям (17.3). Тогда, если $\varepsilon_0 < 1$, итерационный процесс (17.4), (17.6) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к x^*.*

Замечание 20. Итерационный процесс лишь символически записывается в виде (17.4). В действительности реализуется следующая пошаговая процедура, при этом β_n находится по некоторому правилу.

<u>Шаг 1.</u> Решается линейная система

$$f(x_n, y_n)\Delta x_n = -f(x_n); y_n = x_n - \beta_n f(x_n); n = 0, 1, \ldots$$

<u>Шаг 2.</u> Вносится поправка в вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n.$$

<u>Шаг 3.</u> Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$ и (или) $\| \Delta x_n \| = \| x_{n+1} - x_n \| < \varepsilon$ (ε – параметр останова, $\varepsilon \ll 1$), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

<u>Шаг 4.</u> Если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе β_{n+1} находим по правилу (17.6) и переход на шаг 1.

Замечание 21. При использовании процесса (17.4), (17.6) знание оценок глобальных констант K, B, M не требуется, важен лишь факт их существования.

Замечание 22. В работе [8] доказана локальная квадратичная сходимость процесса (17.4) с $\beta_n = 1$ для случая, когда оператор разделённой разности первого порядка симметричен, т.е. выполняется условие $f(x, y - x) = f(y, x - y)$. Это требование, как показано в [1], является чрезвычайно обременительным и ему не удовлетворяют операторы разделённой разности первого порядка во всех важных для практики случаях.

Выше доказана локальная квадратичная сходимость процесса (17.4) с $\beta_n = 1$ без использования симметричности оператора разделённой разности первого порядка.

В итерационном процессе (17.4), (17.6) шаговая длина автоматически изменялась непропорционально изменению нормы невязки, что позволяет эффективно управлять процессом.

Определим итерационные параметры β_n формулами

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}\right), W_0 = \gamma \parallel f(x_0) \parallel; n = 0, \ldots, \quad (17.7)$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel; \quad (17.8)$$

$$\alpha > 1; \gamma \ll 1; \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}]$$

Теорема 17.2. *Пусть в области* $D = \overline{S}\left(x_0, \frac{(1+B)\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *выполняются условия теоремы (17.1) и, кроме того, имеет место неравенство* $\frac{\gamma}{\alpha\beta_0^2} < 1$. *Тогда итерационный процесс (17.4), (17.7), (17.8) со сверхлинейной скоростью сходится к* $x^* \in D$.

Доказательство. Из формулы (17.7) следует, что справедливо равенство

$$\beta_{n+1}\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel = \frac{W_n}{\alpha} \quad (17.9)$$

которое при замене n на $(n-1)$ имеет вид

$$\beta_n\beta_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel = \frac{W_{n-1}}{\alpha}. \quad (17.10)$$

Разделив соотношение (17.9) на соотношение (17.10). Имеем оценку, связывающую шаговую длину с нормой невязки:

$$\beta_{n+1} \parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \beta_{n-1} \parallel f(x_n) \parallel ; n = 1, 2, \ldots \tag{17.11}$$

В силу (17.5) и условий теоремы справедлива оценка $\parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 \parallel f(x_0) \parallel ; q_0 < 1$. С учётом (17.5) и (17.7) имеем оценку

$$\parallel f(x_2) \parallel \leq (1 - \beta_1(1 - \beta_1 KB^2(1 + M) \parallel f(x_1) \parallel)) \parallel f(x_1) \parallel \leq$$

$$\leq (1 - \beta_1(1 - \frac{W_0}{\alpha\beta_0} KB^2(1 + M))) \parallel f(x_1) \parallel = (1 - \beta_1(1 - \frac{\varepsilon_0\gamma}{\alpha\beta_0^2}) \parallel f(x_1) \parallel =$$

$$= q_1 \parallel f(x_1) \parallel \leq q_0 q_1 \parallel f(x_1) \parallel ; q_1 < 1.$$

Продолжая индуктивные рассуждения и учитывая соотношение (14.8), (17.11), нетрудно получить оценку

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel \leq \prod_{i=0}^{n} q_i \parallel f(x_0) \parallel , \forall q_i < 1, \tag{17.12}$$

из которой с очевидностью следует сходимость по функционалу последовательности приближённых решений x_n к x^*, а также сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

Далее покажем, что $\beta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Положив противное, из (17.7), (17.12) имеем, что $W_n \to 0$ со сверхлинейной скоростью, а из (17.8). (17.12) следует, что W_n стремится к нулю со скоростью не выше линейной. Противоречие будет снято, если отказаться от предположения, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Как следует из (17.8), W_{n+1} аппроксимирует $\| f(x_{n+1}) \|$, а из (17.12) следует, что существует такой номер k, что для всех $i > k$ начинает выполняться условие $KB^2(1+M) \| f(x_i) \| < 1$, и мы имеем локальную квадратичную сходимость процесса (17.4), (17.8), (17.9). Стандартными рассуждениями нетрудно показать, что все последовательные приближения $x_n \in D$. *Теорема доказана.*

Рассмотрим один из представителей многошаговых методов, когда на шаге 4 итерационный параметр β_{n+1} находится по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

Нетрудно заметить, что шаговые длины и нормы невязок на соседних шагах связаны соотношением

$$\beta_{n+2} \| f(x_{n+2}) \|^2 = \beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \|^2, n = 0, 1, 2, \dots,$$

из которого следует, что $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+1}$.

В связи с вышесказанным и базовым соотношением, связывающем нормы невязок на соседних шагах, доказывается достаточно просто

Теорема 17.3. *Пусть в сфере* $S\left(x_0, \frac{(1+B)\|f(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ *существует решение* x^*. *Тогда итерационный процесс*

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n), x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}],$$

$n = 0, 1, 2, \dots$
при выполнении условия $\varepsilon_0 = 0.5KB^2\sqrt{\beta_0} \parallel f(x_0) \parallel < 1$ *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* $x^* \in S(x_0, r)$.

Аналогичные теоремы могут быть сформулированы и достаточно просто доказаны относительно других способов задания шаговой длины.

Среди нелокальных методов сходящихся со сверхлинейной скоростью отметим методы, в которых шаговая длина определяется следующим образом:

1. одношаговые методы неполного прогноза

1-ый способ -

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel}\right), \tag{17.13}$$

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \frac{\parallel f(x_n) \parallel}{\parallel f(x_{n+1}) \parallel}, \gamma_0 = \beta_0^2.$$

2. одношаговый метод полного прогноза

2 - ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\parallel f(x_n) \parallel \gamma_n}{(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel)\beta_n}\right), \tag{17.14}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \|f(x_{n+1})\| (\|f(x_{n+1})\| + \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|)\beta_{n+1}}{(\|f(x_n)\| + \|f(x_n + \Delta x_n)\|)\|f(x_{n+2})\|\beta_n},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\|f(x_0)\| + \|f(x_0 + \Delta x_0)\|)}{\|f(x_1)\|}.$$

3. многошаговые методы неполного прогноза

3 - ий способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}\right), \qquad (17.15)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}(\|f(x_{n+1})\|+\|f(x_{n+2})\|)\|f(x_n)\|}{\beta_n(\|f(x_n)\|+\|f(x_{n+1})\|)\|f(x_{n+2})\|},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\|f(x_0)\|+\|f(x_1)\|)}{\|f(x_1)\|}.$$

4 - ый способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel (\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_{n+1}) \parallel)}\right), \qquad (17.16)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}\|f(x_n)\|^2(\|f(x_{n+1})\|+\|f(x_{n+2})\|)}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|^2(\|f(x_n)\|+\|f(x_{n+1})\|)}, \gamma_0 = \frac{\beta_0^2(\|f(x_0)\|+\|f(x_1)\|)}{\|f(x_1)\|}.$$

5 - ый способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel^2}{\beta_n \parallel f(x_{n+1}) \parallel (\parallel f(x_n) \parallel^2 + \parallel f(x_{n+1}) \parallel^2)}\right) \qquad (17.17)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}\|f(x_n)\|^3(\|f(x_{n+1})\|^2+\|f(x_{n+2})\|^2)}{\beta_n(\|f(x_n)\|^2+\|f(x_{n+1})\|^2)\|f(x_n)\|\|f(x_{n+1})\|^2}$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2\frac{(\|f(x_0)\|^2+\|f(x_1)\|^2)}{\|f(x_1)\|^2}.$$

6-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}\right) \tag{17.18}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\| \|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\|}{\beta_n(\|f(x_n)\|+\|f(x_n+\Delta x_n)\|)}$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \|f(x_0+\Delta x_0)\|}{\|f(x_1)\|}.$$

7-ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \parallel f(x_n) \parallel}{\beta_n(\parallel f(x_n) \parallel + \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel)}\right) \tag{17.19}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\|(\|f(x_{n+1})\|+\|f(x_n+\Delta x_n)\|)}{\beta_n(\|f(x_n)\|+\|f(x_n+\Delta x_n)\|)\|f(x_{n+2})\|}$$

$$\gamma_0 = \beta_0^2 \frac{(\|f(x_0)\|+\|f(x_0+\Delta x_0)\|)}{\|f(x_1)\|}.$$

8 - ой способ –

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\parallel f(x_n) \parallel \gamma_n}{\beta_n \parallel f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1}) \parallel}\right), \tag{17.20}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\| \|f(x_{n+2}+\Delta x_{n+2})\|}{\beta_n \|f(x_{n+1}+\Delta x_{n+1})\| \|f(x_{n+2})\|},$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \|f(x_1+\Delta x_1)\|}{\|f(x_1)\|}.$$

9 - ый способ –

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel}\right), \alpha \in (1, 2], W_0 = \parallel f(x_0) \parallel \tag{17.21}$$

$$W(x_n, \beta_n) = W_{n+1} = (1 - \beta_n)W_n + \beta_n^2\beta_{n-1} \parallel f(x_n + \Delta x_n) \parallel,$$

$$W_0 = W(x_n, 0), \beta_{n-1} = 1.$$

Требование существования ограниченного оператора $[f(x_1, y_2)]^{-1}$ во всей области D является также достаточно обременительным условием.

Попытаемся снять это условие, для чего, следуя идеям работы [6], введём соотношения, связывающие нормы операторов $[f(x_0, y_0)]^{-1}$ и $[f(x_1, y_1)]^{-1}$:

$$\parallel E - [f(x_0, y_0)]^{-1} f(x_1, y_1) \parallel = \parallel [f(x_0, y_0)]^{-1}(f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1)) \parallel \leq$$

$$\leq \parallel [f(x_0, y_0)]^{-1} \parallel \parallel f(x_0, y_0) - f(y_0, x_1) + f(y_0, x_1) - f(x_1, y_1) \parallel \leq$$

$$\leq B_0 K(\parallel \Delta x_0 \parallel + \parallel \Delta y_0 \parallel) < B_0 K(1 + M) \parallel \Delta x_0 \parallel = l_0.$$

Здесь $B_0 = \parallel [f(x_0, y_0)]^{-1} \parallel$; $\parallel \Delta y_0 \parallel = \parallel y_1 - y_0 \parallel$.

Если $l_0 < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $[f(x_0, y_0)]^{-1} f(x_1, y_1)$ и справедлива оценка $\parallel [f(x_1, y_1)]^{-1} \parallel \leq B_0(1 - l_0)^{-1}$. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и формулу (17.4) при $\beta_n = 1$, получим оценку

$$\parallel f(x_1) \parallel = \parallel f(x_0 - [f(x_1, y_1)]^{-1} f(x_0)) \parallel \leq$$

$$\leq KM \parallel \Delta x_0 \parallel^2 < \frac{l_0}{B_0} \parallel \Delta x_0 \parallel . \tag{17.22}$$

Тогда определим l_0 так, чтобы при переходе от точки x_0 к точке x_1 выполнялось соотношение $l_1 \leq l_0$, где

$$l_1 = B_1 K(1+M) \parallel \Delta x_1 \parallel \leq \frac{B_0 K(1+M) l_0 \parallel \Delta x_0 \parallel}{(1-l_0)^2} \leq \frac{l_0^2}{(1-l_0)^2}.$$

Неравенство $\frac{l_0^2}{(1-l_0)^2} \leq l_0$ справедливо при $l_0 \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Нетрудно получить радиус области существования решения уравнения (1.1) в сфере $S(x_0, r_\exists)$. Учитывая (17.22), получаем оценку для сходящегося процесса (17.6) с $\beta_n = 1$.

$$r_\exists \leq \sum_{i=0}^{n} \parallel \Delta x_i \parallel \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + B_1 \parallel f(x_1) \parallel + B_2 \parallel f(x_2) \parallel + \cdots \leq$$

$$\leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \frac{l_0^2}{(1-l_0)^2} \parallel \Delta x_0 \parallel + \ldots \frac{1-l_0}{1-2l_0} \parallel \Delta x_0 \parallel . \tag{17.23}$$

Наряду с оценкой(17.23) может быть получена оценка (17.24)

$$r_\exists = \sum_{i=0}^{n} \parallel \Delta x_i \parallel \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \parallel \Delta x_1 \parallel + \frac{B_1}{1-l_1 B_1} \frac{l_1}{B_1} \parallel \Delta x_1 \parallel +$$

$$+ \frac{l_1^2}{(1-l_1)^2} \parallel \Delta x_1 \parallel + \cdots \leq \parallel \Delta x_0 \parallel + \frac{1-l_0}{1-2l_0} \parallel \Delta x_1 \parallel . \tag{17.24}$$

Найдём условие, при выполнении которого решений в области $S(x_0, r)$ не более одного. Положим, что в $S(x_0, r)$ существуют два решения x^* и x^{**}. Тогда, если имеют место соотношения (17.3), получим оценку

$$\| x^* - x^{**} \| = \| x^* - x^{**} - [f(x_0, y_0)]^{-1}(f(x^*) - f(x^{**})) \| \leq$$

$$\leq \| [f(x_0, y_0)]^{-1} \| \| f(x_0, y_0) - f(x^*, x^{**})(x^* - x^{**}) \| \leq$$

$$\leq B_0(\| f(x_0, y_0) - f(y_0, x^*) \| + \| f(y_0, x^*) - f(x^* - x^{**}) \|) \leq$$

$$\leq B_0K(\| x_0 - x^* \| + \| y_0 - x^{**} \|) \leq B_0K(1 + M)\delta \| x^* - x^{**} \| . \quad (17.25)$$

Здесь δ. Если в (17.25) потребовать, чтобы $B_0K(1 + M)\delta = q < 1$ или $\delta = \frac{q}{B_0K(1+M)}$ то в сфере $S(x_0, \delta)$ будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса (17.4) с $\beta_n = 1$ рассмотрим неравенство

$$\frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \| \Delta x_0 \| \leq \frac{q}{B_0K(1 + M)} = \frac{q \| \Delta x_0 \|}{l_0}, \quad (17.26)$$

которое равносильно утверждению $r_\exists \leq r$. Из (17.26) следует оценка

$$l_0 \leq \frac{1 + 2q - \sqrt{1 + 4q^2}}{2} = F(q) < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \quad (17.27)$$

Если в качестве $r_\exists$ взять правую часть соотношения (17.24) и потребовать выполнение условия

$$\| \Delta x_0 \| + \frac{1 - l_0}{1 - 2l_0} \| \Delta x_1 \| \leq \frac{q}{B_0K(1 + M)} = \frac{q \| \Delta x_0 \|}{l_0}, \quad (17.28)$$

то неравенство (17.28) также равносильно утверждению $r_{\exists} \leq r$. Из оценки (17.28) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \| \leq (\frac{q}{l_0} - 1)\frac{1 - 2l_0}{1 - l_0} = G(l_0). \tag{17.29}$$

Так как G'_{l_0} то $G(F(q)) \leq G(l_0)$ Тогда из выполнения соотношения

$$\| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \| \leq (\frac{q}{F(q)} - 1)\frac{1 - 2F(q)}{1 - f(q)}, \| \| \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \| - G(F(q)) | \ll 1 \tag{17.30}$$

будет следовать неравенство (17.29). Таким образом, из сходимости процесса и утверждения $r_{\exists} \leq r$ следует (17.30). С другой стороны, если выполняется соотношение (17.30), то $r_{\exists} \leq r$. В самом деле, соотношение (17.30) эквивалентно

$$\| \Delta x_0 \| + \frac{1 - F(q)}{1 - 2f(q)} \| \Delta x_1 \| \leq \frac{q \| \Delta x_0 \|}{F(q)}. \tag{17.31}$$

Но в условиях сходящегося процесса величина $\frac{q\|\Delta x_0\|}{F(q)}$ минимальный радиус единственности, поэтому из (17.31) и сходимости процесса следует, что $l_0 \leq F(q)$, а это условие того, что $r_{\exists} \leq r$.

Таким образом, может быть сформулирована

Теорема 17.4. *Пусть оператор f удовлетворяет в D условиям (17.3). Тогда итерационный процесс (17.4) с $\beta_n = 1$ при выполнении со-*

отношения (17.30) с квадратичной скоростью сходится к единственному в $S(x_0, \frac{q\|\Delta x_0\|}{F(q)}) \subset D$ решению уравнения (1.1).

Замечание 23. Доказанная выше теорема 17.4 относится к классу так называемых «доказательных» вычислений, поскольку вся необходимая информация получается в результате работы вычислительного алгоритма.

Для «плохих» нелинейных задач с успехом применяются регуляризованные алгоритмы:

Шаг 1. Решается линейное уравнение:

$$(\delta\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 E + (\overline{f(x_n, y_n)} + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E)(f(x_n, y_n) + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E)\Delta x_n =$$

$$= -(\overline{f(x_n, y_n)} + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E) f(x_n), \qquad (17.32)$$

$$\delta \in (10^{-8}, 10^{-4}), \beta_0 \in (10^{-4}, 10^{-1}), n = 0, 1, \ldots$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \qquad (17.33)$$

Шаг 3. Если $\parallel f(x_{n+1}) \parallel < \varepsilon$ и(или) $(\parallel \Delta x_n \parallel < \varepsilon)$ то конец просчетов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Шаговая длина β_{n+1} находится по формуле (1.5) или по одной из формул, приведённых в мографии [5], далее переход на шаг 1.

Здесь $\overline{f(x_n, y_n)}$ – оператор, сопряженный оператору $f(x_n, y_n)$. В предположении, что существует ограниченный обратный оператор $[\overline{f(x_n, y_n)} + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E]^{-1}$, уравнение (17.32) относительно элемента Δx_n можно переписать в виде

$$f(x_n, y_n)\Delta x_n = -f(x_n) - \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel (\overline{f(x_n, y_n)}+$$

$$+ \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E)^{-1}\Delta x_n - \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel\parallel \Delta x_n \parallel . \qquad (17.34)$$

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и (17.32), имеем

$$\parallel f(x_{n+1}) \parallel = \parallel f(x_n = \beta_n \Delta x_n) \parallel = \qquad (17.35)$$

$$= \parallel f(x_n) + \beta_n f(x_n, y_n)\Delta x_n + f(x_n, y_n, x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - y_n) \parallel \leq$$

$$\leq (1 - \beta_n) \parallel f(x_n) \parallel + \delta\beta_n^2 AC(1 + B) \parallel f(x_n) \parallel^2 +$$

$$+\beta_n^2 KAC(1 + AC) \parallel f(x_n) \parallel^2 = (1 - \beta_n(1 - \beta_n AC(\delta(1 + B)+$$

$$+K(1+AC) \parallel f(x_n) \parallel))) \parallel f(x_n) \parallel = (1-\beta_n(1-\varepsilon_n)) \parallel f(x_n) \parallel = q_n \parallel f(x_n) \parallel .$$

Здесь введены обозначения оценок

$$\parallel f(x_n, y_n) \parallel \leq A \parallel [\overline{f(x_n, y_n)} + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E]^{-1} \parallel,$$

$$\parallel [\delta\beta_n^2 \parallel f(x_n) \parallel^2 E + (\overline{f(x_n, y_n)} + \delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E)(f(x_n, y_n)+$$

$$+\delta\beta_n \parallel f(x_n) \parallel E)]^{-1} \parallel \leq C,$$

$$\| f(x,y) \| \leq A \| f(x_n,y_n,x_{n+1}) \| \leq K, x_n, y_n, x_{n+1} \in D.$$

Соотношение (17.35) является базовым при рассмотрении различных регуляризованных итерационных процессов. За счет малости β_0, ε_0 становится меньше единицы, $q_0 = 1 - \beta_0(1-\varepsilon_0) < 1$ и $\| f(x_1) \| \leq q_0 \| f(x_0) \|$. Далее, следуя идеям работ [3, 5, 6], вполне аналогично тому, как это мы делали выше при доказательстве теоремы 1.1, показываем сходимость процесса (17.34), (17.6) к x^* – решению уравнения (1.1), если это решение в $D = S\left(x_0, \frac{AC\|f(x_0)\|}{1-q_0} + \| f(x_0) \|\right)$ существует. Таким образом, могут быть сформулирована

Теорема 17.5. *Пусть в области $D = S(x_0, \frac{AC\|f(x_0)\|}{1-q_0} + \| f(x_0) \|)$ существует решение уравнения (1.1). Если оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и $\varepsilon_0 < 1$, то итерационный процесс (17.34), (14.8), (14.9) с β_{n+1}, определенными по формуле (14.9) или β_{n+1}, определенными по одной из формул монографии [1] сходится к x^*.*

Замечание 24. При рассмотрении регуляризованных методов нам на каждом шаге вычислительного процесса приходится решать СЛАУ (17.32) с положительно-определенными симметричными матрицами. Специальный вид этих матриц позволяет организовать решение систем (17.32) прямыми методами практически на уровне вычислительных затрат метода Гаусса.

Практическое применение описанных выше регуляризованных алгоритмов показало их высокую эффективность при решении существенно нелинейных задач теории колебаний .

Приложение

Определение 17.1. *Отображение* $F : D \subset R^n \to R^m$ *называется дифференцируемым по Фреше в точке* $x \in int(D)$, *если существует такой линеный оператор* $A \in L(R^n \to R^m)$, *что*

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\| h \|} \right) \| F(x+h) - Ex - Ah \| = 0.$$

Этот линейный оператор обозначается через $f'(x)$ *и называется* F-*производной отображения* f *в точке* x.

Определение 17.2. *Если отображение* $F : D \subset R^n \to R^m$ *является* F-*дифференцируемым в точке* x, *то оно непрерывно в этой точке.*

Определение 17.3. *Отображение* $F : D \subset R^n \to R^m$ *называется непрерывным по Гельдеру на множестве* $D_0 \subset D$, *если существуют такие постоянные* $c \geq 0$ *и* $p \in (0, 1]$, *что для всех* $x, y \in D_0$ *выполняется неравенство*

$$\| fy - fx \| \leq c \| y - x \|^p .$$

В случае $p = 1$ *отображение* f *называется непрерывным по Липшицу на* D_0.

Следствие 17.1. F-*дифференцируемая в некоторой точке функция непрерывна по Липшицу в этой точке.*

Следствие 17.2. *Если иметь в виду интегрируемость по Риману, то справедливо соотношение*

$$fy - fx = \int\limits_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x)dt.$$

Определение 17.4. *Если $f'(x)$ имеет F-производную в точке x, то f'' называется второй F-производной в точке x.*

Следствие 17.3. *Вторая производная – симметричный оператор, т. е.*

$$F''(x)hk - F''(x)kh = 0, h, k \in R^n.$$

Определение 17.5. *(теорема о среднем - первая)*

Если отображение $F : D \subset R^n \to R^m$ F- дифференцируема на выпуклом множестве $D_0 \subset D$, то для любых $x, y, z \in D_0$

$$\| fy - fz - f'(x)(y - z) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| f'(z + t(y - z)) - f'(x) \| \| y - z \| .$$

Определение 17.6. *(вторая теорема о среднем)*

Пусть отображение $F : D \subset R^n \to R^m$ непрерывно дифференцируемо на выпуклом множестве $D_0 \in D$. Тогда для любых $x, y \in D_0$

$$\| fy - fx - f'(x)(y - x) \| \leq \left[\frac{\alpha}{p + 1} \right] \| y - x \|^{p+1}$$

$\alpha \geq 0$; $p \geq 0$, *если* $\| f'(u) - f'(v) \| \leq \| u - v \|^p$, $u, v \in D_0$.

Определение 17.7. *(третья теорема о среднем)*

Если отображение $F : D \subset R^n \to R^m$ *имеет вторую производную в каждой точке выпуклого множества* $D_0 \subset D$, *то для любых* $x, y \in D$

$$\| fy - fx - f'(x)(y-x) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| f''(x + t(y-x)) \| \| y - x \|^2 .$$

Определение 17.8. *(четвертая теорема о среднем)*

Если отображение $F : D \subset R^n \to R^m$ *имеет вторую непрерывную* F*-производную, то в каждой точке выпуклого множества* $D_0 \subset D$ $\forall x, y \in D_0$ *справедливо*

$$f'(y) - f'(x) = \int_0^1 f''(x + t(y-x))(y-x)dt.$$

Определение 17.9. *(сопряженного оператора)*

Линейный оператор $\overline{A}$ *называется сопряженным к линейному оператору* $A : H \to H$, *если* $(Ax, y) = (x, \overline{A}y), \forall x, y \in H$, H*-гильбертово пространство.*

Определение 17.10. *(первой разделенной разности)*

Первой разделенной разностью оператора F *в банаховом пространстве* X *назовем отображение* $J : D \times D \subset X \times X \to L(X)$, *удовлетворяющее условию* $J(x,h)h = F(x+h) - F(x)$, $\forall x, x+h \in D$, *если* $F \in C_D^{(1)}$, *то* $J(x,h) = F'(x)$.

Определение 17.11. *(второй разделенной разности)*
Если выполняется условие $F(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3) = F(x_1, x_2) - F(x_1, x_3)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in D$, *то оператор* $F(x_1, x_2, x_3)$ *называется второй разделенной разностью оператора* $F(x)$.

Определение 17.12. *(аналог интерполяционной формулы Ньтона для операторов)*

$$F(x) = F(x_0) + F(x_0, y)(x - x_0) + F(x_0, x, y)(x - x_0)(x - y).$$

Проверьте свои знания с помощью следующего теста.

Литература

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений —/В.М. Мадорский/

2. Ермаков, В.В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона — В.В.Ермаков, Н.Н.Калиткин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, -1981. -Т 21,№ 2 - с.491 - 497 .

3. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона . — Т.Жанлав, И.В.Пузынин // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, -1992. -Т 32,№ 6 - с.846 - 856 .

4. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений — М.А.Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я.Стеценко // М.: Наука, -1969. - 455 с.

5. Мадорский, В.М. О нелокальных вариантах метода Канторовича - Красносельского решения нелинейных уравнений — В.М. Мадорский // Вестник Брестского техн.ун-та -2003. № 5 - с.73 - 75 .

6. Мадорский, В.М. Локализация решений нелинейных уравнений — /В.М. Мадорский // Тр.ин-та матем. НАН Беларуси, -2002. -Т. 11. -с.84-90

7. Ортего, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М:Мир, -1975. -558с.

8. Сергеев, А.С. О методе хорд — А.С.Сергеев // Сибирский матем.журн., -1961. - Т.11, № 2. -с.282 - 289.