Orthogonal Range Searching in 2D using Ball Inheritance

Mads Ravn

Computer Science, Aarhus University

2015

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

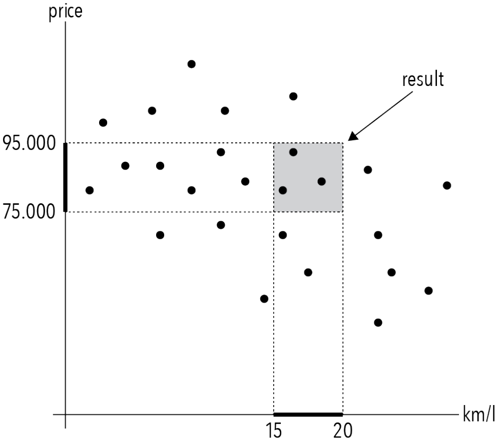
- Giv en præsentation af den i specialet introducerede simplificerede datastruktur til range searching i 2d. (3)
- Beskriv ball-inheritance problemet og forklar sammenhængen til range searching. (2)
- Beskriv også det klassiske kd-træ (1)
- og fortæl om hvilke eksperimenter du har foretaget for at sammenligne performance af de to strukturer. Forklar hvad du så og om det var som forventet. (4)

Outline

Outline

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Orthogonal Range Searching i 2D



Punkt i 2D søgerum er objekt.
En rektangulær søgeboks er defineret ved Opdeling af akser.

Preliminaries

Orthogonal range searching

- Svar effektivt på forespørgslen $q = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.
- $p \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \Leftrightarrow p_x \in [x_1, x_2] \wedge p_y \in [y_1, y_2]$

Preliminaries

- n punkter fra $\mathbb{R}^2$. Alle koordinater er unikke
- Rank space. Sorteret array. Vi finder $\hat{y}_1$ og $\hat{y}_2$ og så ved vi hvor mange elementer der er imellem dem.
- n er en potens af 2
- static og output-sensitive

Outline

1. Introduction
   - Orthogonal Range Searching i 2D
   - kd-tree
2. Ball Inheritance Search
   - Ball Inheritance Problem
   - Ball Inheritance Search Data Structure
3. Resultater
   - Resultater

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

kd-træ

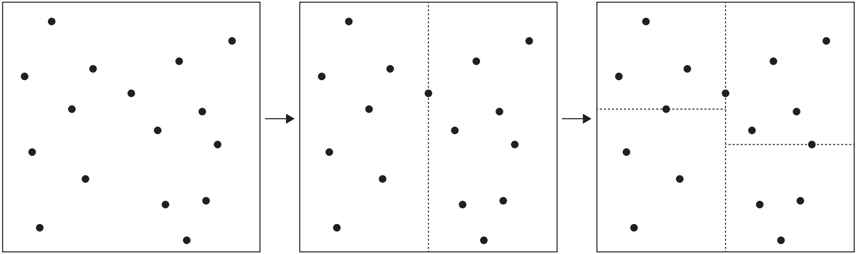
Jon L. Bentley. 1975.

- $\mathcal{O}(n)$ plads
- $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$ tid

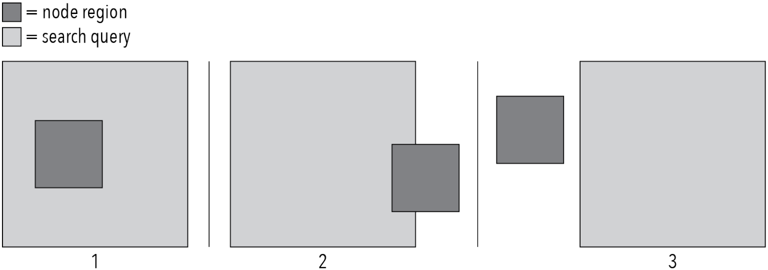
Konstruktion: Givet n punkter, x eller y på skift. Et punkt per blad i træet.

Opbygning af kd-træ

Det $\lceil \frac{n}{2} \rceil$'te element bliver valgt som median. Skille-linje. Knudens område er punkter i undertræ.

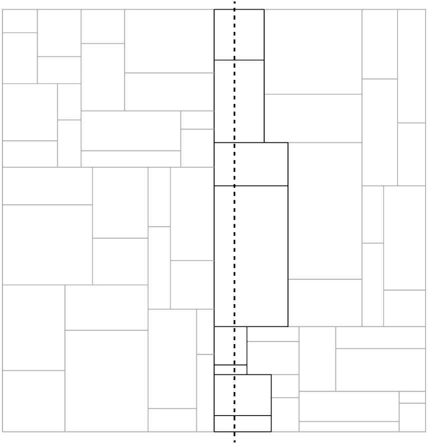


Søgning i kd-træ



1 tager $\mathcal{O}(k)$ tid, 3 tager $\mathcal{O}(1)$ tid. Bound på 2.

Søgning i kd-træ



$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ regioner.
$\mathcal{O}(\sqrt{n}+k)$ tid.

Outline

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.

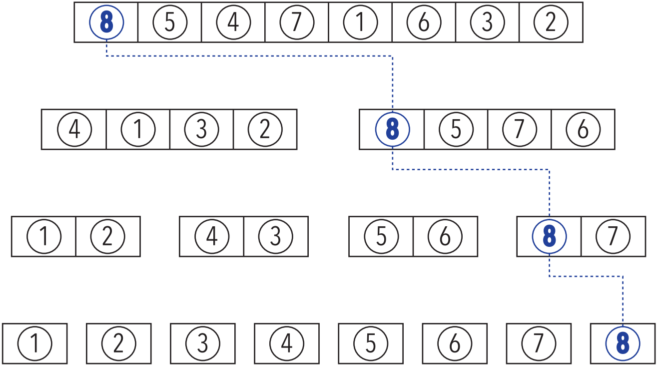
Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.
- Løs: Givet en knude og et index i knudens liste, hvilket blad ender denne bold ved?

Ball Inheritance

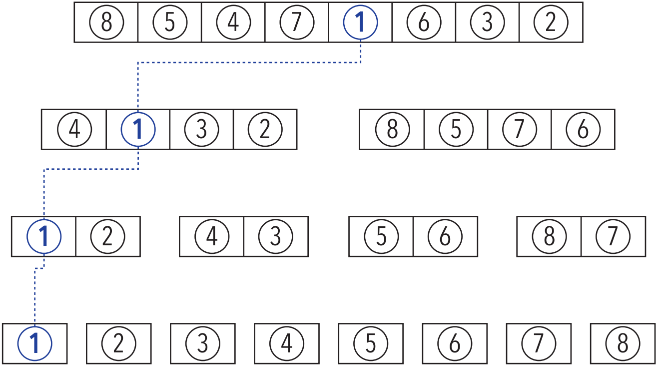
- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.
- Løs: Givet en knude og et index i knudens liste, hvilket blad ender denne bold ved?
- Vi ønsker at følge en bold ned til bladet for at "dekode" punktets koordinater.

Ball Inheritance

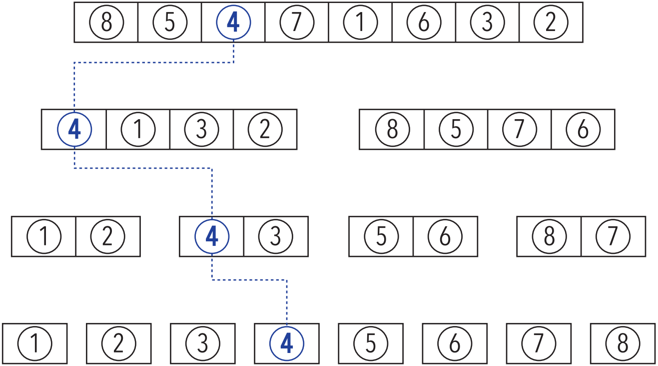


AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance



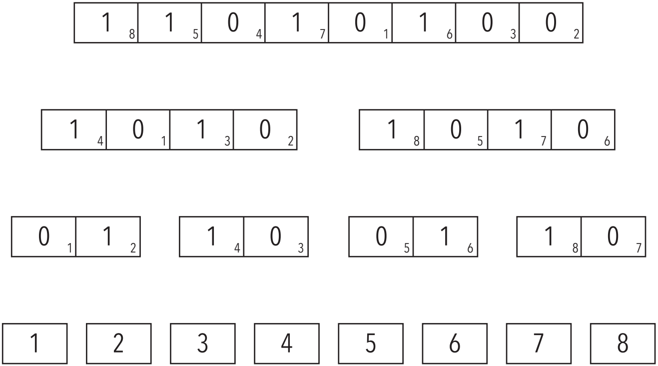
Ball Inheritance



Rank-select

Givet en bitvektor, så er rank-select query en constant-time query der finder boldens nye position i barnets bitvektor.
Man kan nu komme ned med $\mathcal{O}(\lg n)$ tid. $\mathcal{O}(1 \cdot \lg n)$. Fylder $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

Ball Inheritance



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Faster Queries

Færre skridt fra knude til blad. Knuder på niveau deleligt med B^i hopper B^i niveauer over. Det er $\mathcal{O}(B^i)$ bits per bold per B^ite level. $B = \Omega(lg^\epsilon n)$.
Det bruger

- $\mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon}) = \mathcal{O}(n)$ plads
- $\mathcal{O}(\lg^\epsilon n)$ tid

hvor $\epsilon > 0$ er en arbitrær lille konstant. Space-time tradeoff.

Outline

1. Introduction
   - Orthogonal Range Searching i 2D
   - kd-tree
2. Ball Inheritance Search
   - Ball Inheritance Problem
   - Ball Inheritance Search Data Structure
3. Resultater
   - Resultater

BISintro

Ball Inheritance Search (BIS) er en datastruktur som er en simplificering af den datastruktur der findes i **Orthogonal Range Searching on the RAM, Revisited**[1] af Chan et al.
$\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ imod $\mathcal{O}(\lg \lg n + (1 + k) \cdot \lg^{\epsilon} n)$.

Ball Inheritance Search

- $\mathcal{O}(n + \frac{n}{\epsilon})$ plads.
- $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ tid, hvor $\epsilon > 0$ er en arbitrær lille konstant

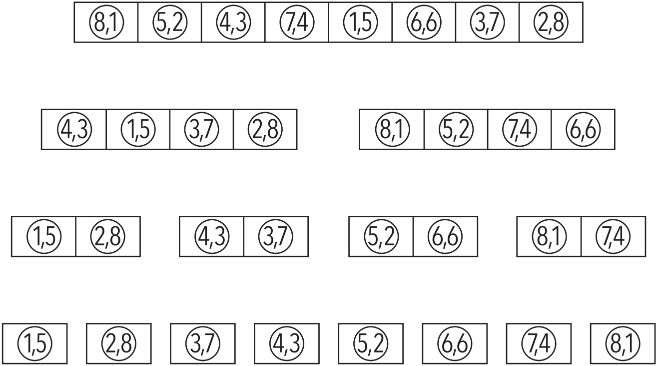
da vi har valgt $B = \Omega(\lg^{\epsilon} n) = \lceil \frac{1}{2} \lg^{\frac{1}{3}} n \rceil$.

Ball Inheritance Search

Specifikt til BIS, så er punkterne **fordelt** efter x og **sorteret** efter y. Det betyder

- Undertræer i knuder i mellem $\hat{x}_1$ og $\hat{x}_2$ kun indeholder punkter i $[x_1, x_2]$.
- Bolde mellem $\hat{y}_1$ og $\hat{y}_2$ kun indeholder punkter i $[y_1, y_2]$. Ligesom fractional cascasding.

Ball Inheritance Search



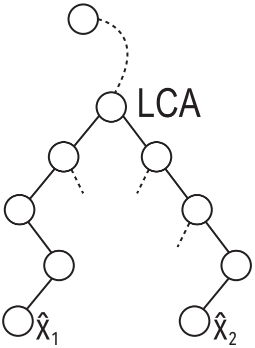
Ball Inheritance Search

I denne datastruktur bruger vi ball-inheritance til

- Følge en bold ned når vi ved den ligger i vores søge-område. Dvs dekode fra bold-til-blad(punkt).
- Fra roden, opdatere et interval af hvilke bolder der ligger i $[y_1, y_2]$.

Nu har vi markeret de bolde der ligger i $[y_1, y_2]$ på de knuder hvis undertræ kun indeholder punkter i $[x_1, x_2]$. Og det er netop de punkter der ligger i $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

Ball Inheritance Search



- Rank space opslag ved roden.
- Vedligehold $[\hat{y}_1, \hat{y}_2]$ ned til LCA.
- Find fully contained knuder og deres $[\hat{y}_1, \hat{y}_2]$ interval.
- Ball Inheritance fra knuder.
- $p \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \Leftrightarrow$ ..

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance Search

Vi har nu nogle knuder og lister over indeces i disse knuder. Det er præcis det problem ball inheritance løser. Vi kan nu bruge ball inheritance på alle disse knuder til at finde ud af hvilke blade der indeholder punkter i $[y_1, y_2]$.
Det giver en kørselstid på $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ for at finde k punkter.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. $(\lg \Sigma = B^i)$.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. ($\lg \Sigma = B^i$).
- Egentlig punkter

plads

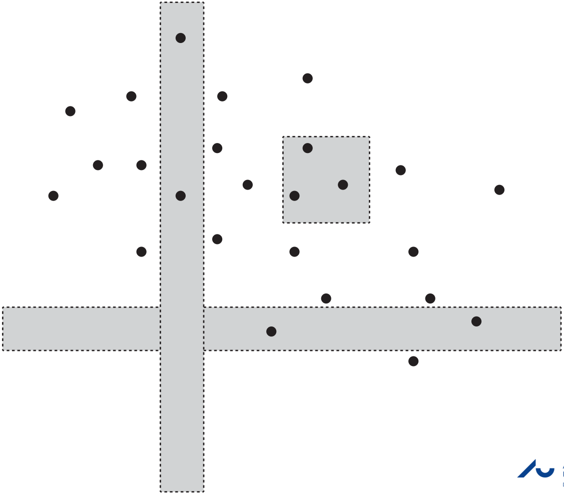
Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. $(\lg \Sigma = B^i)$.
- Egentlig punkter
- Binær søgning

Outline

AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Setup



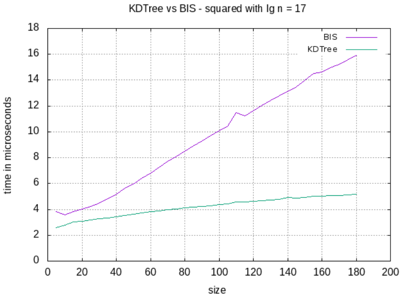
Setup

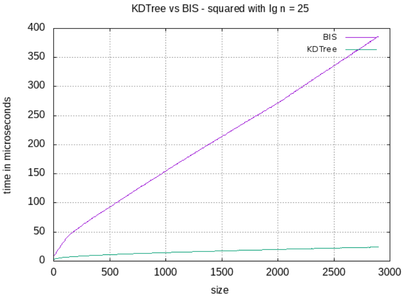
- Square area $\sqrt{n} \cdot \sqrt{k} \times \sqrt{n} \cdot \sqrt{k}$ returnerer k punkter.
- Slices af størrelse k returnerer k punkter. $[0, n] \times [y, y + k]$
- $\sqrt{n} + k = \lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{n} - \lg n}{\lg^{\epsilon} n - 1}$

Setup

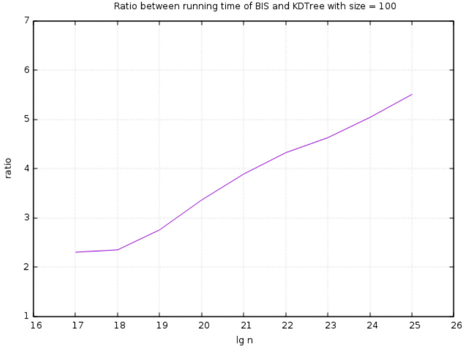
- $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ vs $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$. $y = ax + b$
- BIS er mere stabil når vi ændrer shape. $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ er problemet.
- Slice er godt for BIS og square er godt for kd-træ.
- kd-træ er hurtigere jo flere punkter, og jo mindre $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ er. Så BIS vil klare sig bedre når k er mindre.

Squared

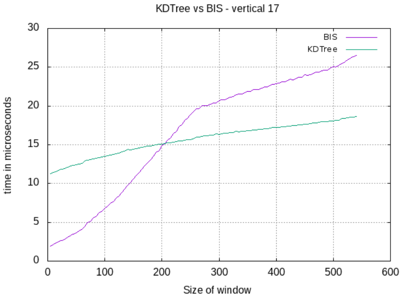

KDTree vs BIS - squared with lg n = 17
BIS
KDTree
time in microseconds
size
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

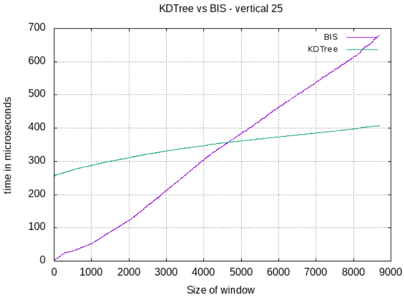

KDTree vs BIS - squared with lg n = 25
BIS
KDTree
time in microseconds
size
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

Squared

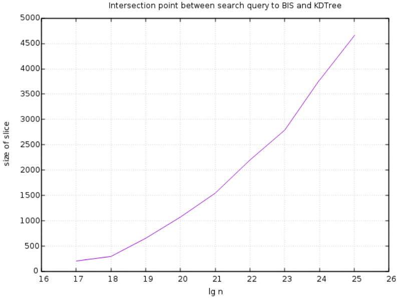

Ratio between running time of BIS and KDTree with size = 100
ratio
lg n
1
2
3
4
5
6
7
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

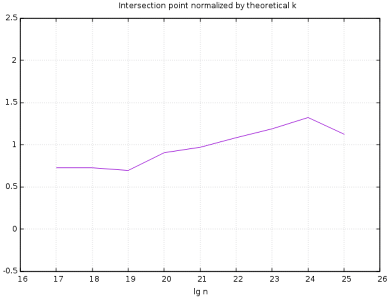
Vertical


KDTree vs BIS - vertical 17
BIS
KDTree
time in microseconds
Size of window
0
5
10
15
20
25
30
0
100
200
300
400
500
600


KDTree vs BIS - vertical 25
BIS
KDTree
time in microseconds
Size of window
0
100
200
300
400
500
600
700
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000

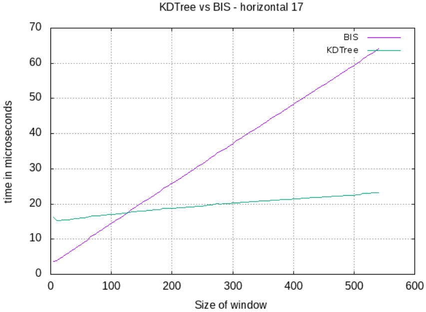
Vertical

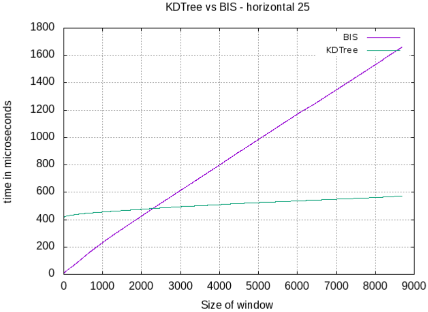




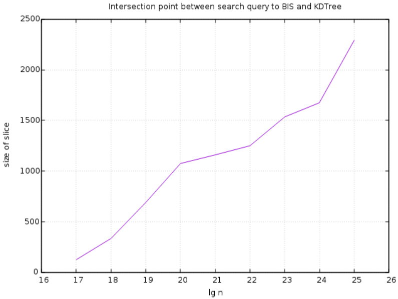
AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

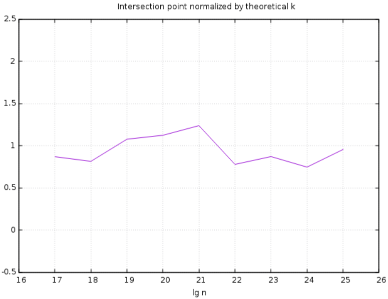
Horizontal


KDTree vs BIS - horizontal 17
time in microseconds
Size of window
BIS
KDTree
0
10
20
30
40
50
60
70
0
100
200
300
400
500
600

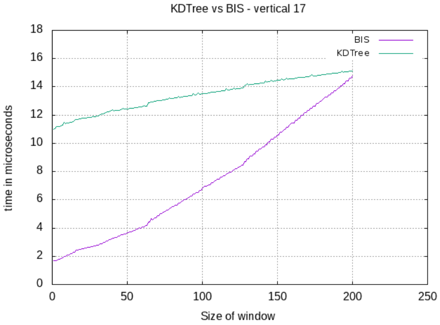

KDTree vs BIS - horizontal 25
time in microseconds
Size of window
BIS
KDTree
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000

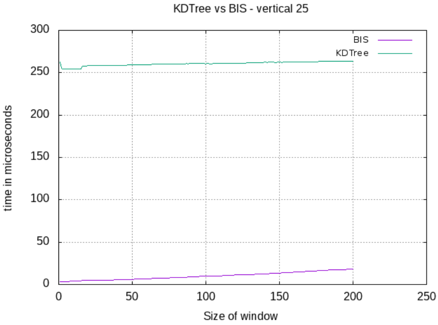
Horizontal


Intersection point between search query to BIS and KDTree
size of slice
lg n
0
500
1000
1500
2000
2500
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

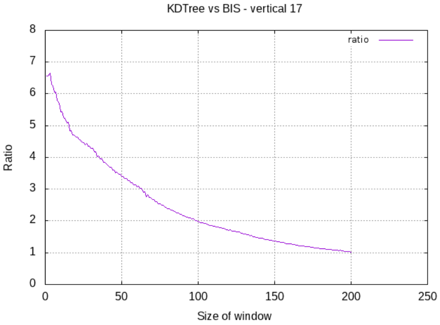

Intersection point normalized by theoretical k
lg n
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

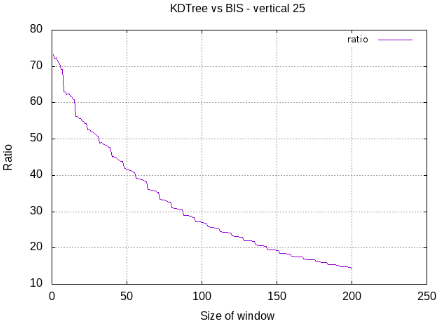
Small k


KDTree vs BIS - vertical 17
BIS
KDTree
time in microseconds
Size of window
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
50
100
150
200
250

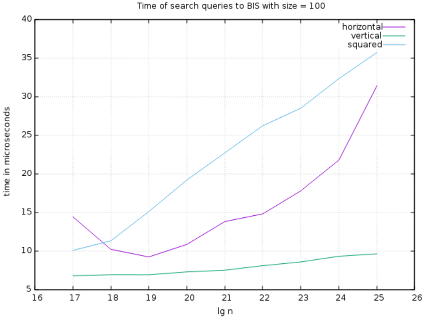

KDTree vs BIS - vertical 25
BIS
KDTree
time in microseconds
Size of window
0
50
100
150
200
250
300
0
50
100
150
200
250

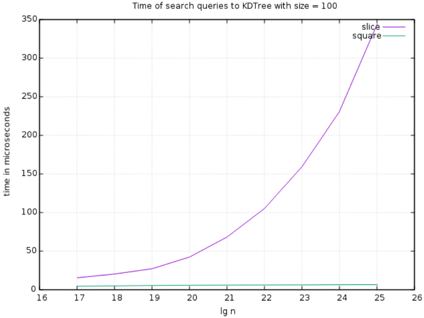
Small k


KDTree vs BIS - vertical 17
ratio
Ratio
Size of window
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
50
100
150
200
250

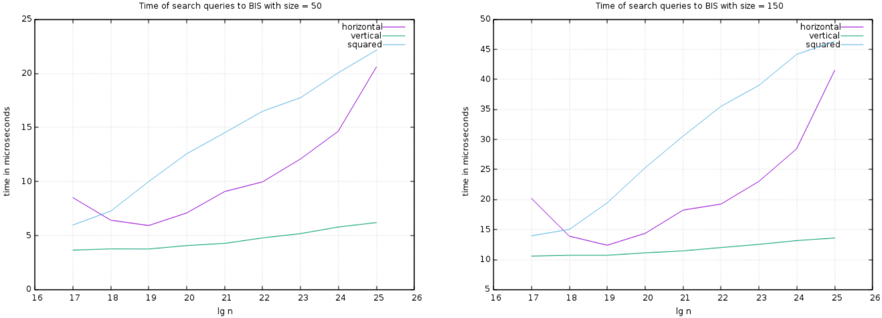

KDTree vs BIS - vertical 25
ratio
Ratio
Size of window
10
20
30
40
50
60
70
80
0
50
100
150
200
250

Shapes


Time of search queries to BIS with size = 100
time in microseconds
lg n
horizontal
vertical
squared
40
35
30
25
20
15
10
5
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

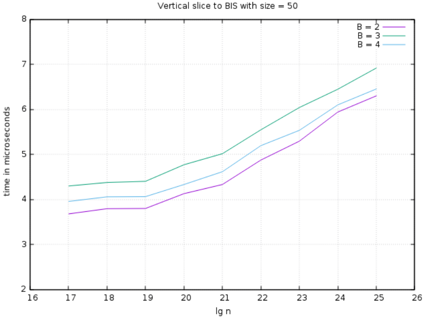

Time of search queries to KDTree with size = 100
time in microseconds
lg n
slice
square
350
300
250
200
150
100
50
0
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

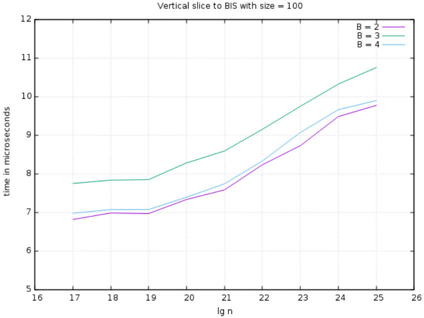
Shapes



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

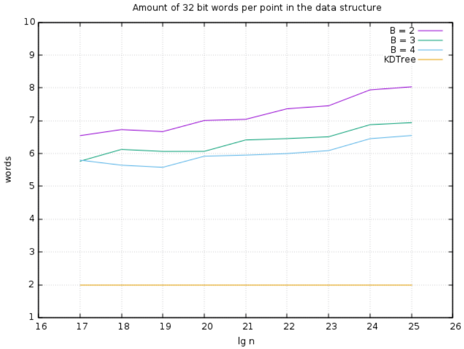
Different B





AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Sizes


Amount of 32 bit words per point in the data structure
words
lg n
B = 2
B = 3
B = 4
KDTree
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

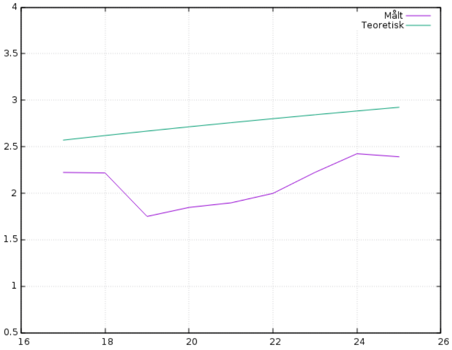
Future work

- Bedre bit-fiddling
- Cache
- Concurrency

Færdig

Spørgsmål?

praktisk log epsilon n



Små hop

Hvert niveau gemmer n bits som indikerer om bolden er gået til højre eller venstre. Hvert 32 bit gemmer vi et 32 bit major checkpoint. Precomputed tabel med 16 bit tal som tæller antal 1-entries. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

Store hop

$\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ per entry. $\Sigma = 2^{B^i}$. Så plads er $\mathcal{O}(B^i)$ bits per entry.
Det er

$$\sum_{i=1}^{\lg_B \lg n} \frac{\lg n}{B^i} \cdot \mathcal{O}(B^i) = \mathcal{O}(\lg n \cdot \lg_B \lg n)$$

for hele kæden. Vælg nu $B = \Omega(\lg^{\epsilon} n)$.
Vi har n punkter, hvilket giver $\mathcal{O}(n \lg n \cdot \lg_B \lg n)$ bits. Det er $\mathcal{O}(n \cdot \frac{\lg lgn}{\epsilon \lg \lg n}) = \mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon})$ ord.

Store hop

Vi hopper højst B hop på B^i før vi rammer hop på B^{i+1}. Vi har at $i = \lg_B \lg n$ er det største i sådan at $B^i \leq \lg n$.

$$\mathcal{O}(B \lg_B \lg n) = \mathcal{O}(\lg^\epsilon n)$$

$B = \lg^{\epsilon/2} n = \Omega(\lg \lg n)$.

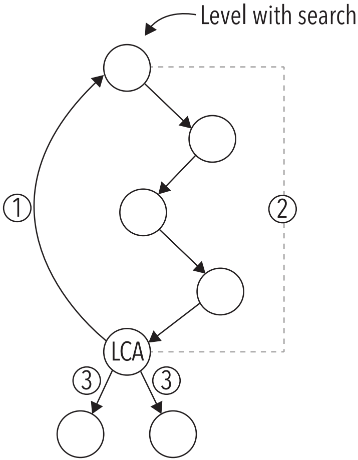
- Vi har B hop på B^0 før vi rammer B^1.
- Vi har B hop på B^1 før vi rammer B^2.
- Vi har B hop på B^2 før vi rammer B^3.
- ...

Det er $B \cdot i$ hvor $i \leq \lg_B \lg n$.

OBIS

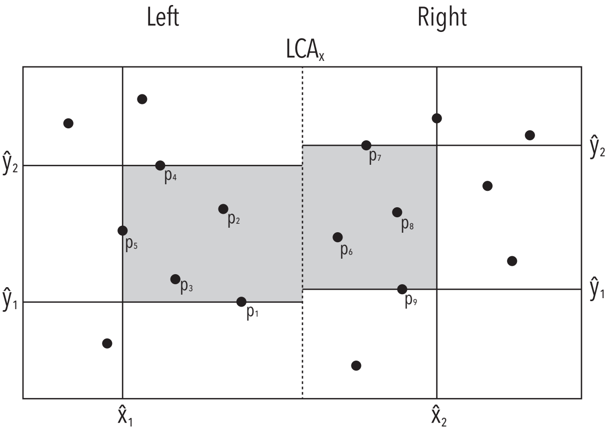
OBIS af Chan et al. Med $\mathcal{O}(n)$ plads og $\mathcal{O}(\lg\lg n + (1+k)\cdot\lg^{\epsilon} n)$.
Bruger også Ball Inheritance til at finde de k punkter.

OBIS

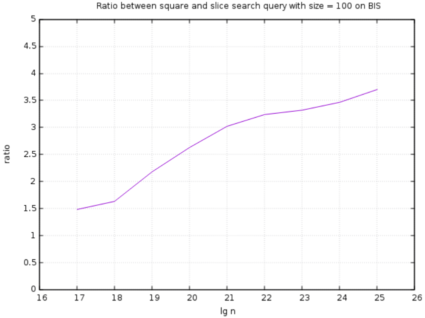


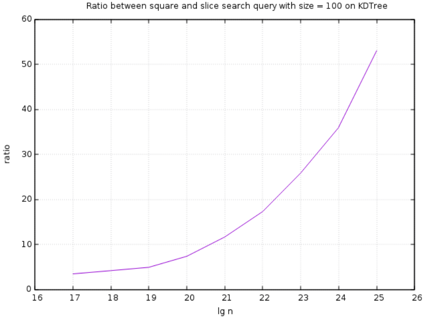
- Op til nærmeste level med pred-search
- Gå ned til LCA højst $\lg \lg n$ levels nede.
- Gå ned og find resultater i begge børn af LCA.

OBIS



small k





AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

References I

Timothy M. Chan, Kasper Green Larsen, Mihai Patrascu.
Orthogonal Range Searching on the RAM, Revisited.