Orthogonal Range Searching in 2D using Ball Inheritance

Mads Ravn

Computer Science, Aarhus University

2015

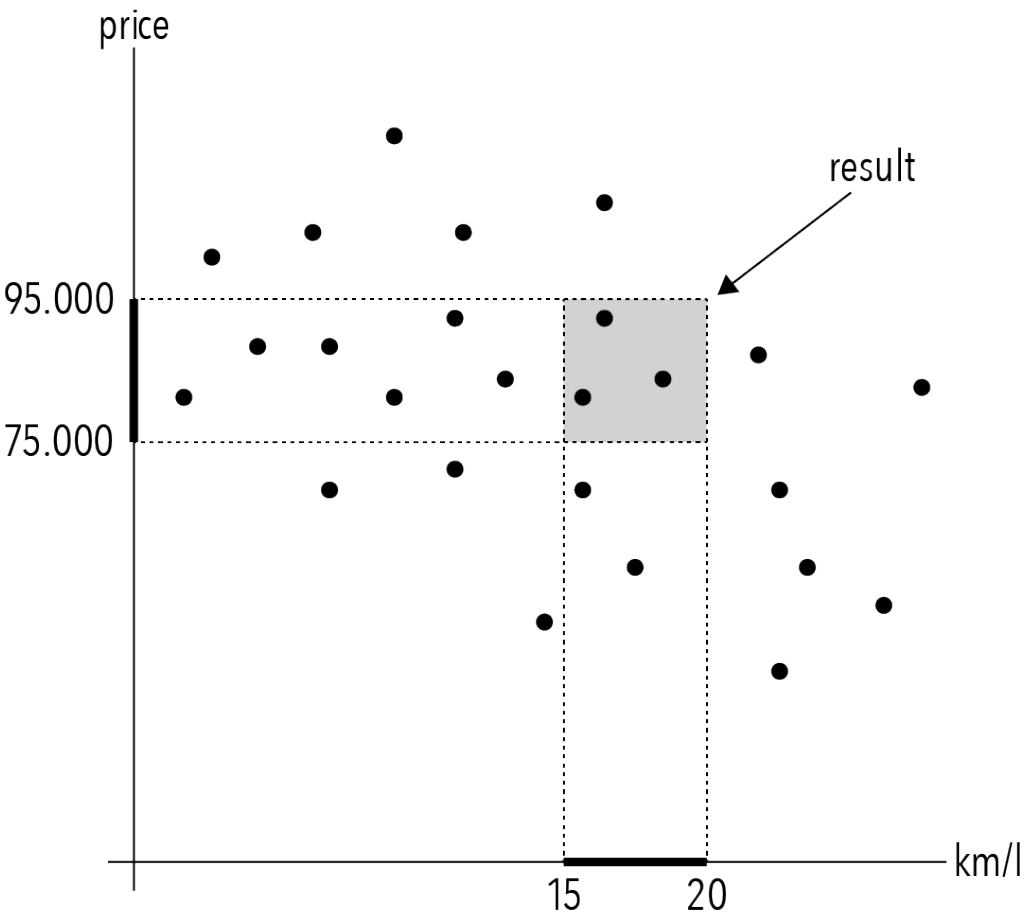
AARHUS
UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

- Giv en præsentation af den i specialet introducerede simplificerede datastruktur til range searching i 2d. (3)
- Beskriv ball-inheritance problemet og forklar sammenhængen til range searching. (2)
- Beskriv også det klassiske kd-træ (1)
- og fortæl om hvilke eksperimenter du har foretaget for at sammenligne performance af de to strukturer. Forklar hvad du så og om det var som forventet. (4)

Outline

Outline

Orthogonal Range Searching i 2D



Punkter repræsenterer objekter der er plottet efter to attributer. 2D søgerum. Opdeling af akser.

Preleminaries

Orthogonal range searching

- Svar effektivt på forespørgslen $q = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.
- $p \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \Leftrightarrow p_x \in [x_1, x_2] \wedge p_y \in [y_1, y_2]$

Preleminaries

- n punkter fra $\mathbb{R}^2$. Alle koordinater er unikke
- Rank space. Sorteret array. Vi finder $\hat{y}_1$ og $\hat{y}_2$ og så ved vi hvor mange elementer der er imellem dem.
- n er en potens af 2
- static og output-sensitive

Outline

kd-træ

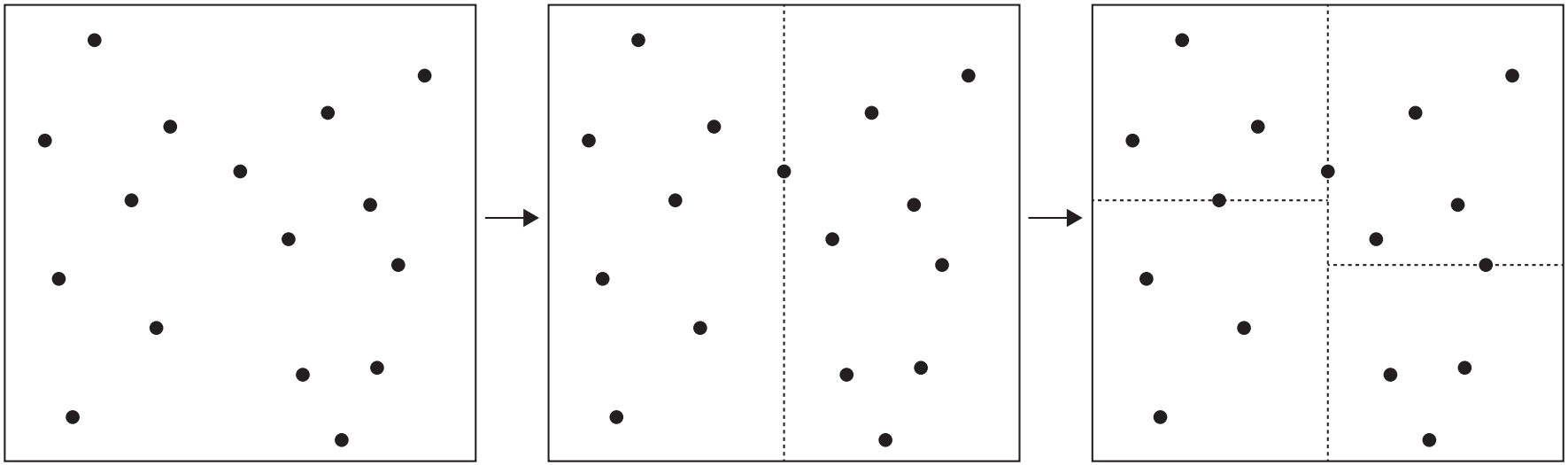
Jon L. Bentley. 1975.

- $\mathcal{O}(n)$ plads
- $\mathcal{O}(\sqrt{n}+k)$ tid

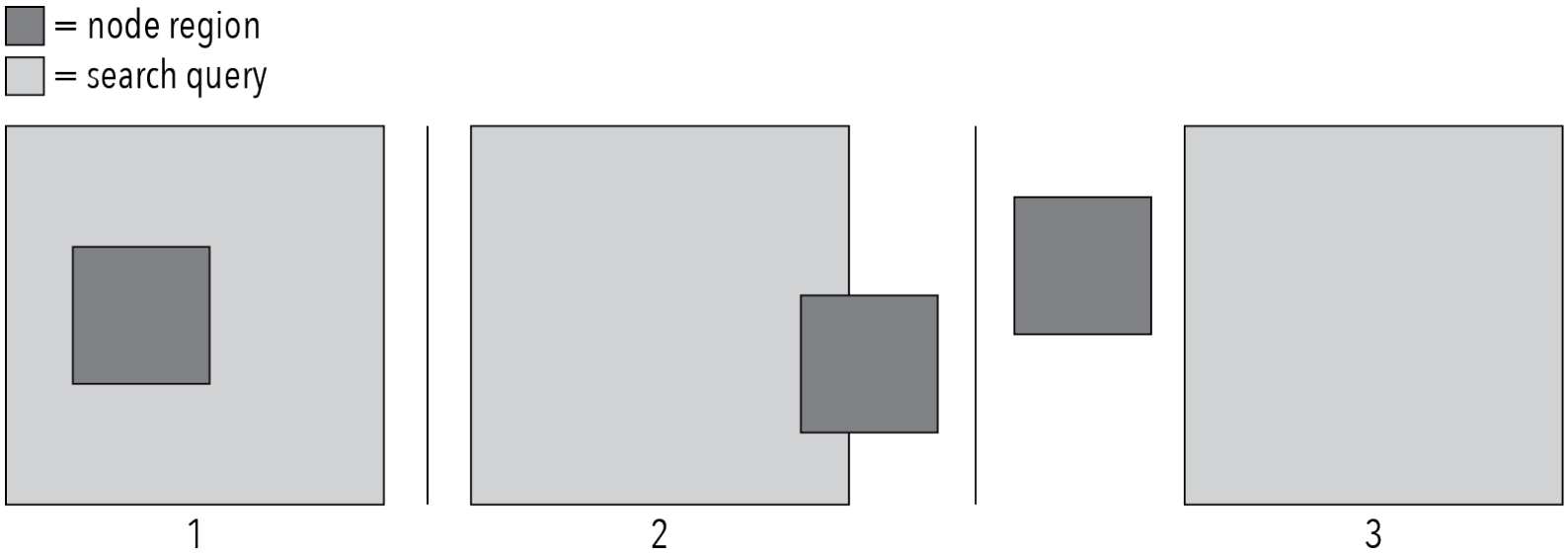
Konstruktion: Givet n punkter, x eller y på skift. Et punkt per blad i træet.

Opbygning af kd-træ

Det $\lceil \frac{n}{2} \rceil$'te element bliver valgt som median. Skille-linje. Knudens område er punkter i undertræ.

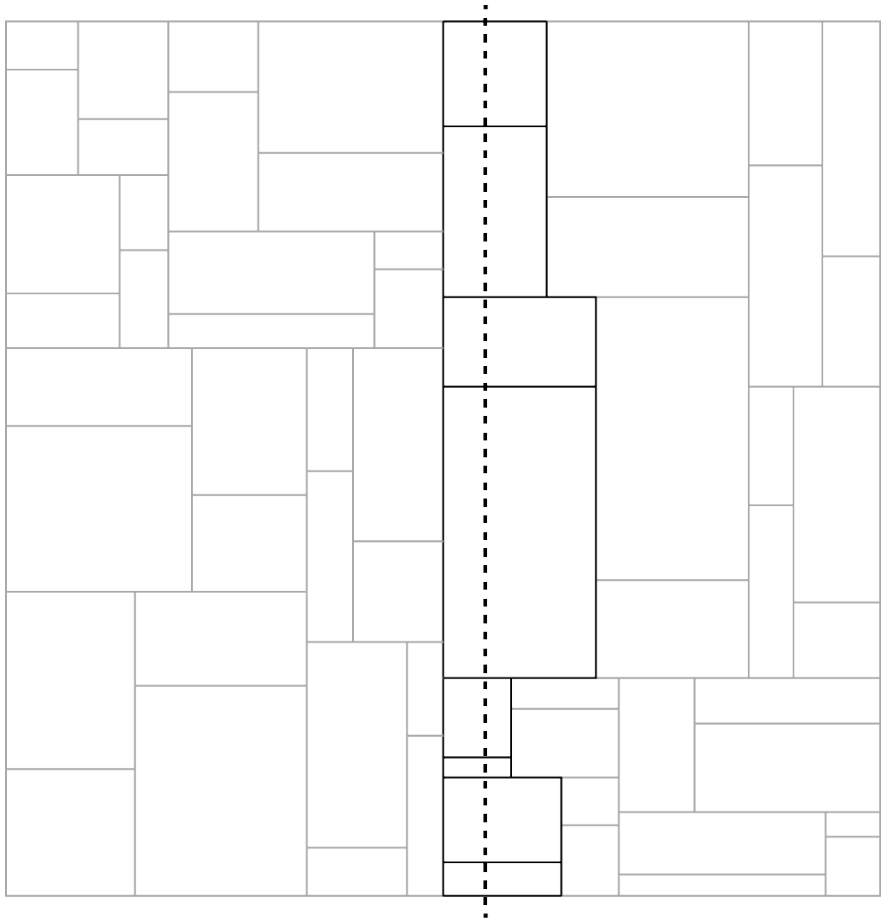


Søgning i kd-træ



1 tager $\mathcal{O}(k)$ tid, 3 tager $\mathcal{O}(1)$ tid. Bound på 2.

Søgning i kd-træ



$\mathcal{O}(\sqrt{n})$ regioner.
$\mathcal{O}(\sqrt{n}+k)$ tid.

Outline

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.

Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.

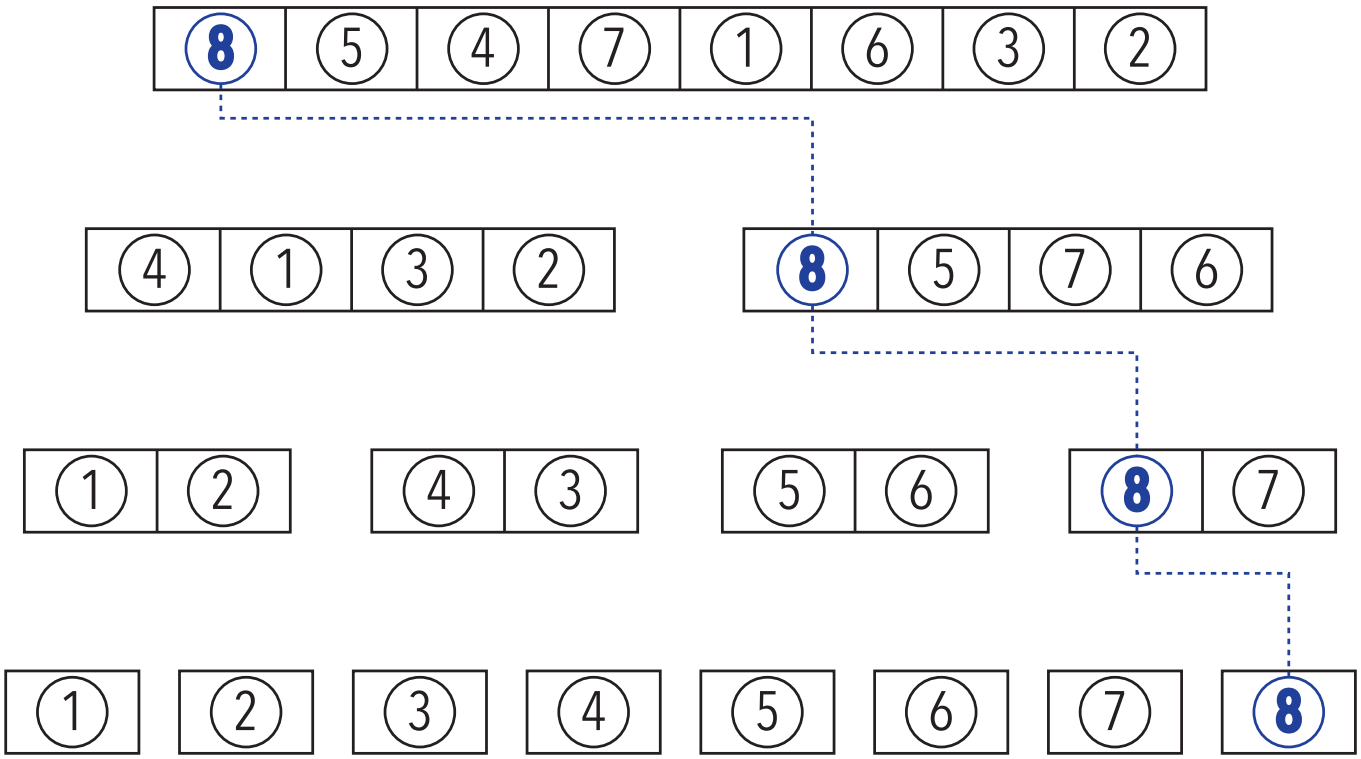
Ball Inheritance

- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.
- Løs: Givet en knude og et index i knudens liste, hvilket blad ender denne bold ved?

Ball Inheritance

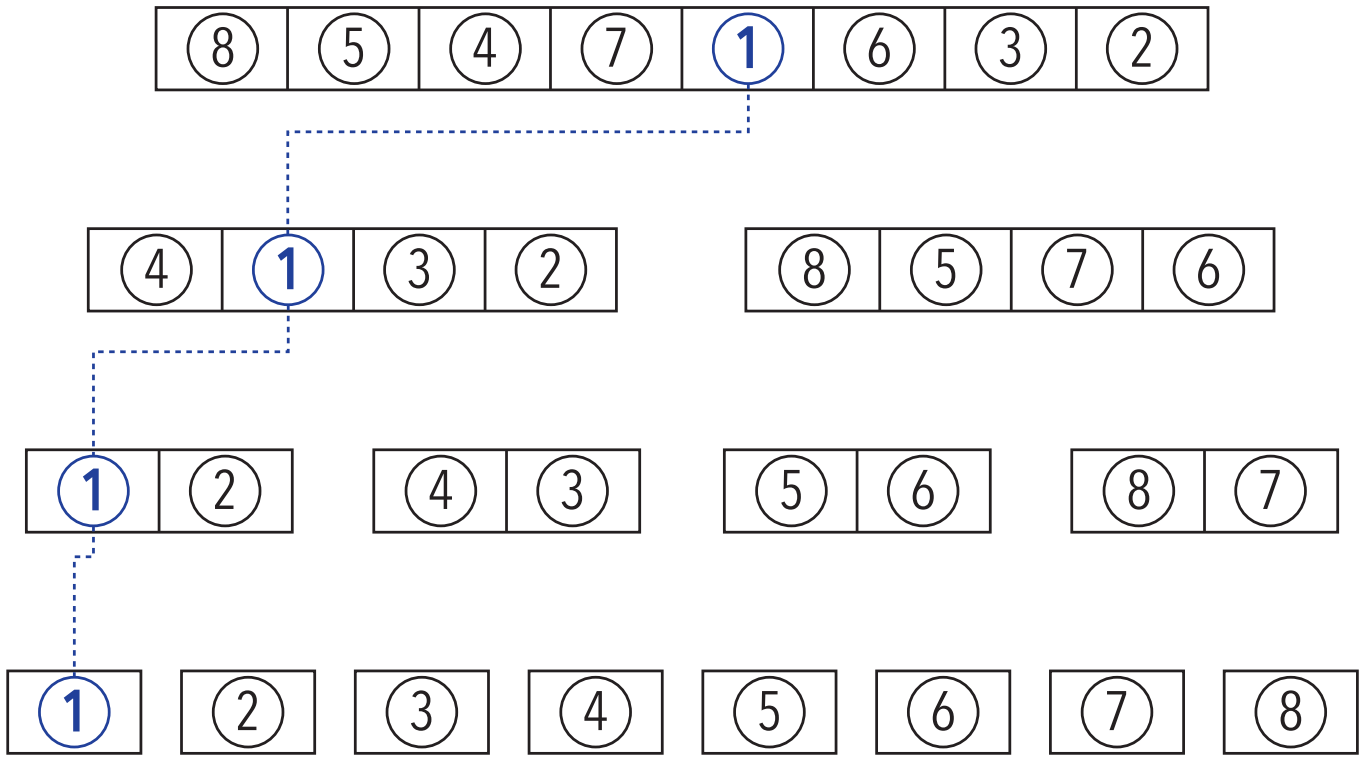
- Vi er givet et perfekt binært træ.
- Roden indeholder n punkter(bolde) som er blevet fordelt sådan at hvert blad lagrer et punkt. Boldene i roden er sorteret.
- Hver knude har en liste over hvilke bolde der går igennem knuden. Boldene i knudens liste har samme rækkefølge som boldene i forældre-knudens liste.
- Løs: Givet en knude og et index i knudens liste, hvilket blad ender denne bold ved?
- Vi ønsker at følge en bold ned til bladet for at "dekode" punktets koordinater.

Ball Inheritance



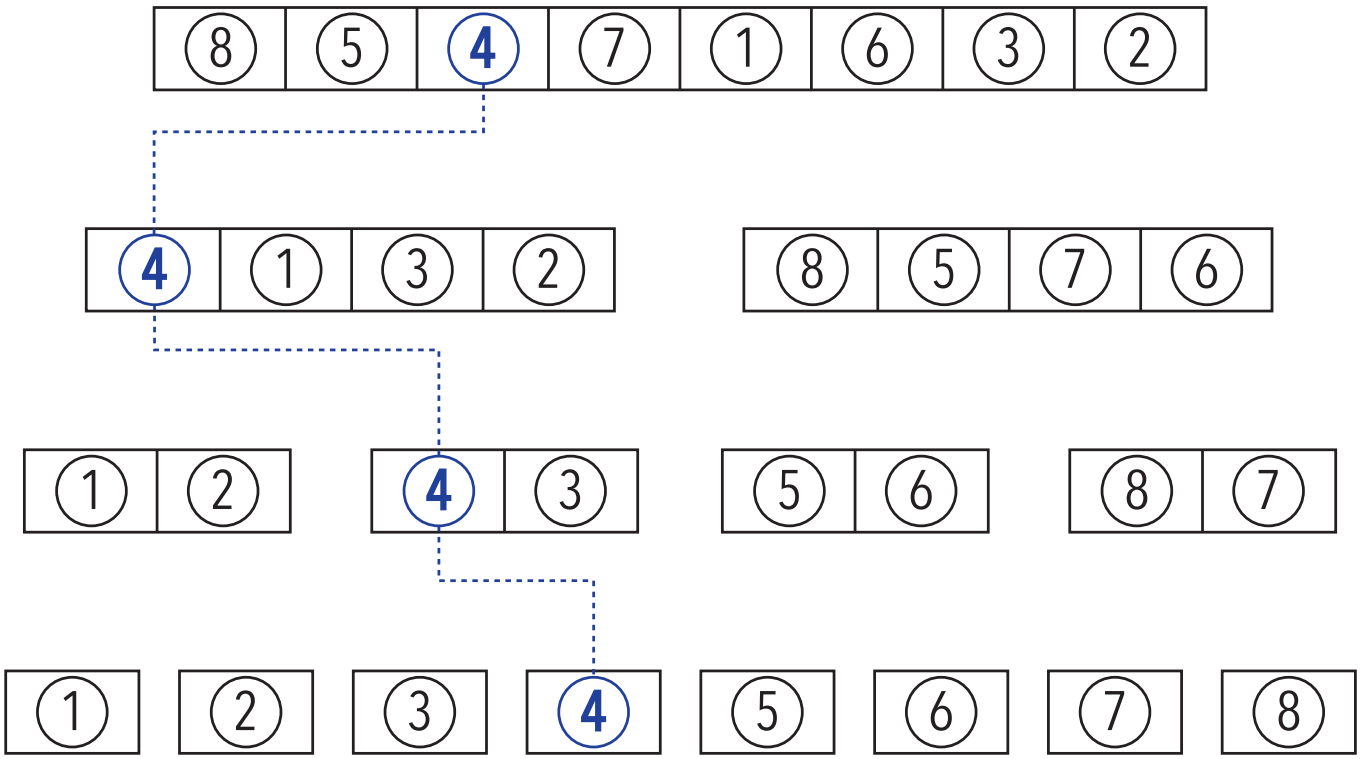
AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Ball Inheritance

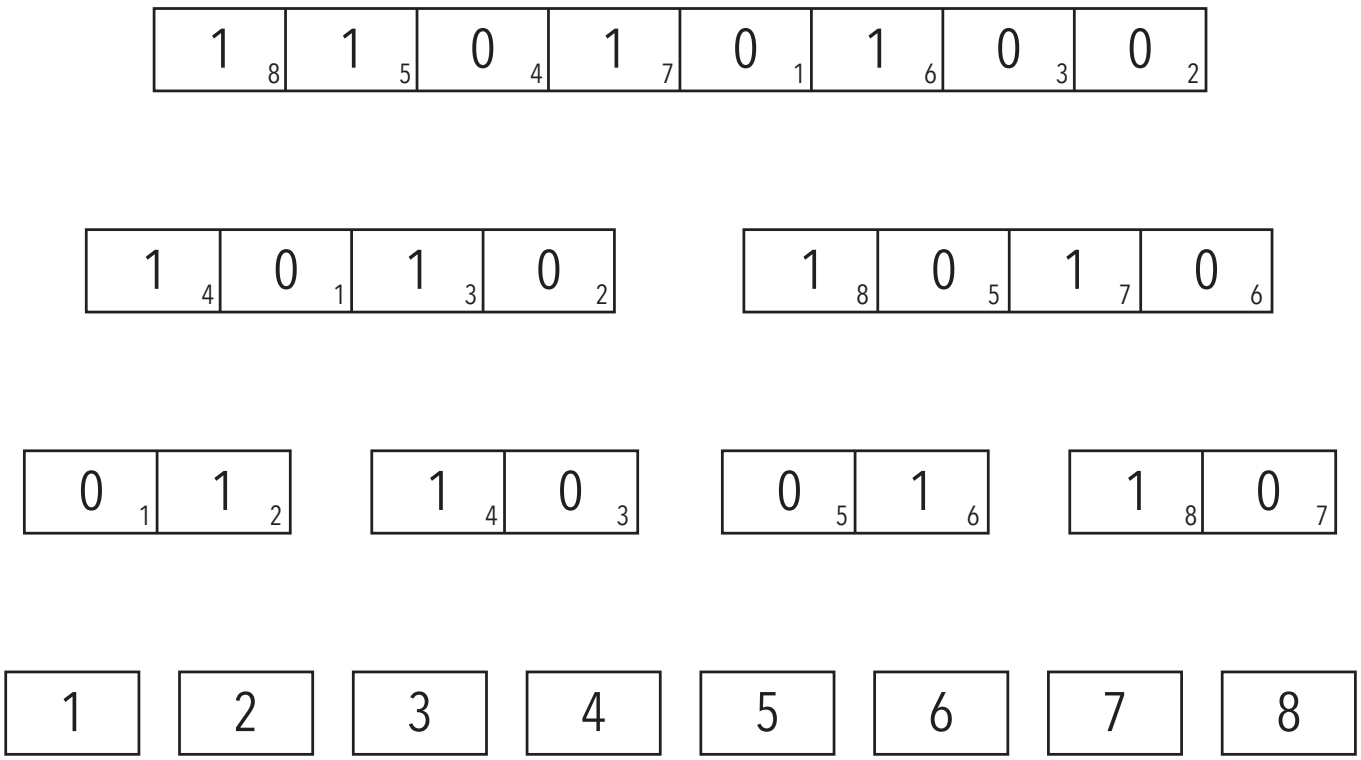


AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Rank-select

Givet en bitvektor, så er rank-select query en constant-time query der finder boldens nye position i barnets bitvektor.
Man kan nu komme ned med $\mathcal{O}(\lg n)$ tid. $\mathcal{O}(1 \cdot \lg n)$. Fylder $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

Ball Inheritance



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Store hop

Færre skridt. $\mathcal{O}(B^i)$ bits per entry hvert B^ite level.

$$\sum_{i=1}^{\lg_B \lg n} \frac{\lg n}{B^i} \cdot \mathcal{O}(B^i) = \mathcal{O}(\lg n \cdot \lg_B \lg n)$$

Vi har n punkter, hvilket giver $\mathcal{O}(n \lg n \cdot \lg_B \lg n)$ bits. Det er $\mathcal{O}(n \cdot \frac{\lg lgn}{\epsilon \lg \lg n}) = \mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon})$ ord, da $B = \Omega(\lg^\epsilon n)$.

Store hop

Vi hopper højst B hop på B^i før vi rammer hop på B^{i+1}. Vi har at $i = \lg_B \lg n$ er det største i sådan at $B^i \leq \lg n$.

$$\mathcal{O}(B \lg_B \lg n) = \mathcal{O}(\lg^\epsilon n)$$

$B = \lg^{\epsilon/2} n = \Omega(\lg \lg n)$.

Faster Queries

Færre skridt fra knude til blad. Knuder på niveau deleligt med B^i hopper B^i niveauer over.
Det bruger

- $\mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon}) = \mathcal{O}(n)$ plads
- $\mathcal{O}(\lg^{\epsilon} n)$ tid

hvor $\epsilon > 0$ er en arbitrær lille konstant. Space-time tradeoff.

Outline

BISintro

Ball Inheritance Search (BIS) er en datastruktur som er en simplificering af den datastruktur der findes i **Orthogonal Range Searching on the RAM, Revisited**[1] af Chan et al.
$\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ imod $\mathcal{O}(\lg \lg n + (1 + k) \cdot \lg^{\epsilon} n)$.

Ball Inheritance Search

- $\mathcal{O}(n + \frac{n}{\epsilon})$ plads.
- $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ tid, hvor $\epsilon > 0$ er en arbitrær lille konstant

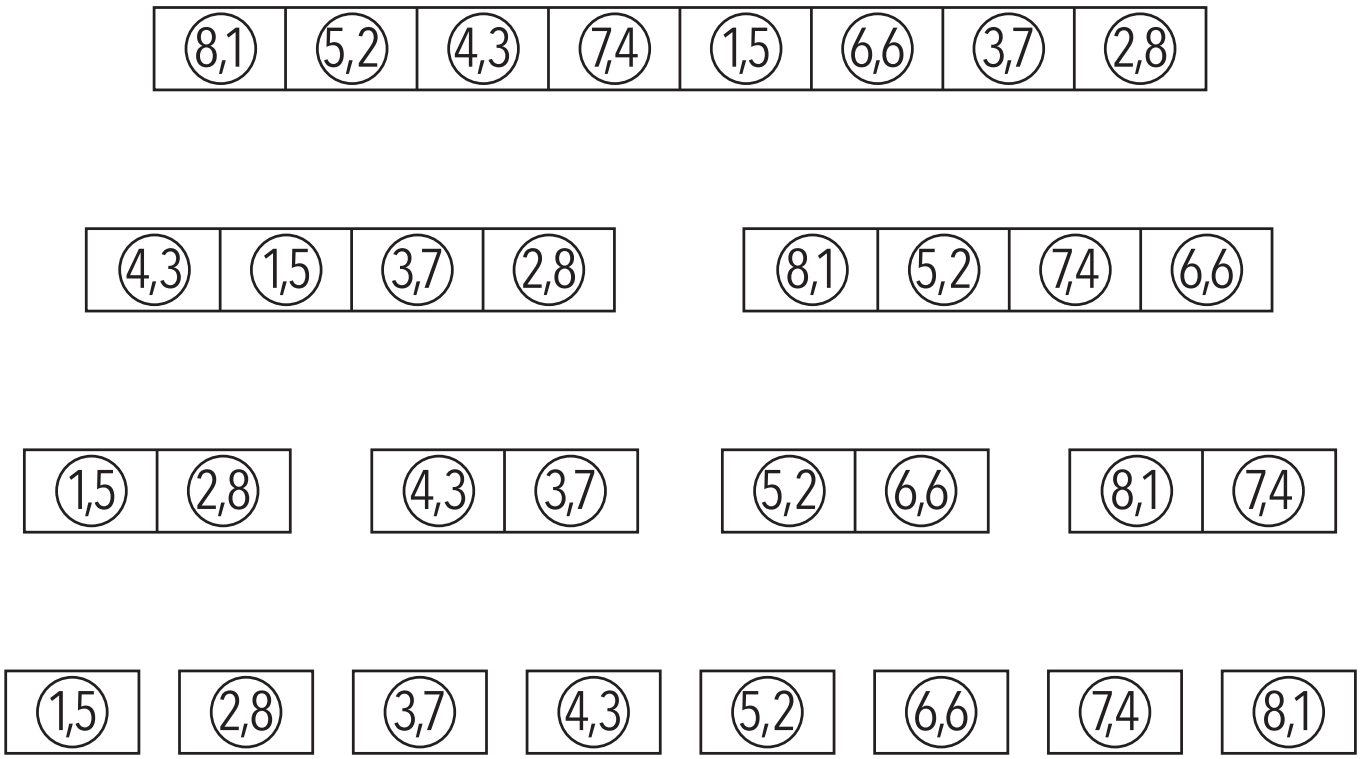
da vi har valgt $B = \Omega(\lg^{\epsilon} n) = \lceil \frac{1}{2} \lg^{\frac{1}{3}} n \rceil$.

Ball Inheritance Search

Specifikt til BIS, så er punkterne **fordelt** efter x og **sorteret** efter y. Det betyder

- Undertræer i knuder i mellem $\hat{x}_1$ og $\hat{x}_2$ kun indeholder punkter i $[x_1, x_2]$.
- Bolde mellem $\hat{y}_1$ og $\hat{y}_2$ kun indeholder punkter i $[y_1, y_2]$. Ligesom fractional cascasding.

Ball Inheritance Search



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

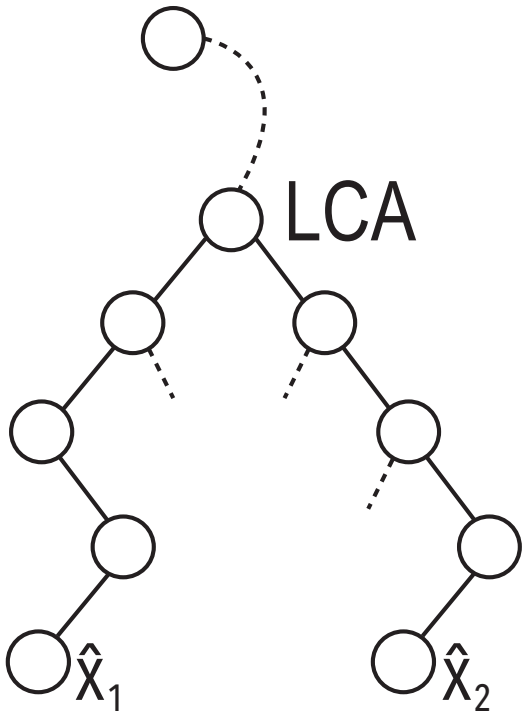
Ball Inheritance Search

I denne datastruktur bruger vi ball-inheritance til

- Følge en bold ned når vi ved den ligger i vores søge-område. Dvs dekode fra bold-til-blad(punkt).
- Fra roden, opdatere et interval af hvilke bolder der ligger i $[y_1, y_2]$.

Nu har vi markeret de bolde der ligger i $[y_1, y_2]$ på de knuder hvis undertræ kun indeholder punkter i $[x_1, x_2]$. Og det er netop de punkter der ligger i $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

Ball Inheritance Search



- Rank space opslag ved roden.
- Vedligehold $[\hat{y}_1, \hat{y}_2]$ ned til LCA.
- Find fully contained knuder og deres $[\hat{y}_1, \hat{y}_2]$ interval.
- Ball Inheritance fra knuder.

Ball Inheritance Search

Vi har nu nogle knuder og lister over indeces i disse knuder. Det er præcis det problem ball inheritance løser. Vi kan nu bruge ball inheritance på alle disse knuder til at finde ud af hvilke blade der indeholder punkter i $[y_1, y_2]$.
Det giver en kørselstid på $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ for at finde k punkter.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. $(\lg \Sigma = B^i)$.

plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. $(\lg \Sigma = B^i)$.
- Egentlig punkter

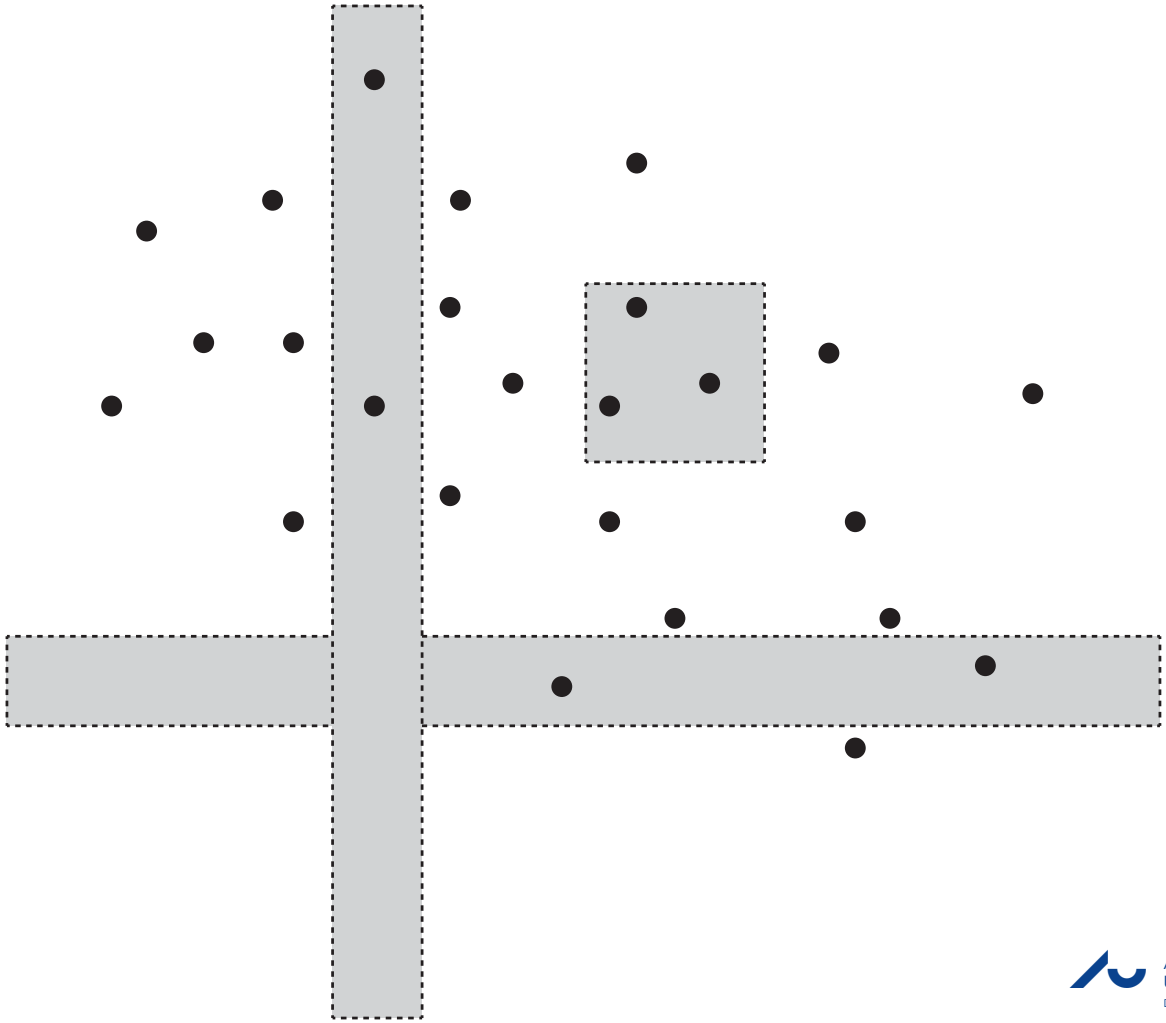
plads

Denne datastruktur bruger $\mathcal{O}(n)$ plads.

- Bit vectors. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.
- Store hop $\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ bits per entry hvert $\lg \Sigma$ level. ($\lg \Sigma = B^i$).
- Egentlig punkter
- Binær søgning

Outline

Setup



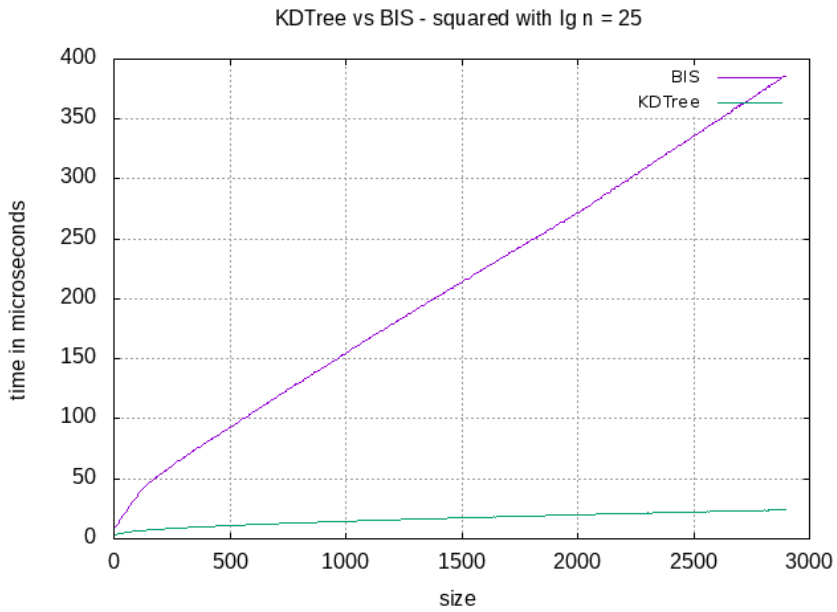
Setup

- Square area $\sqrt{n} \cdot \sqrt{k} \times \sqrt{n} \cdot \sqrt{k}$ returnerer k punkter.
- Slices af størrelse k returnerer k punkter. $[0, n] \times [y, y + k]$
- $\sqrt{n} + k = \lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{n} - \lg n}{\lg^{\epsilon} n - 1}$

Setup

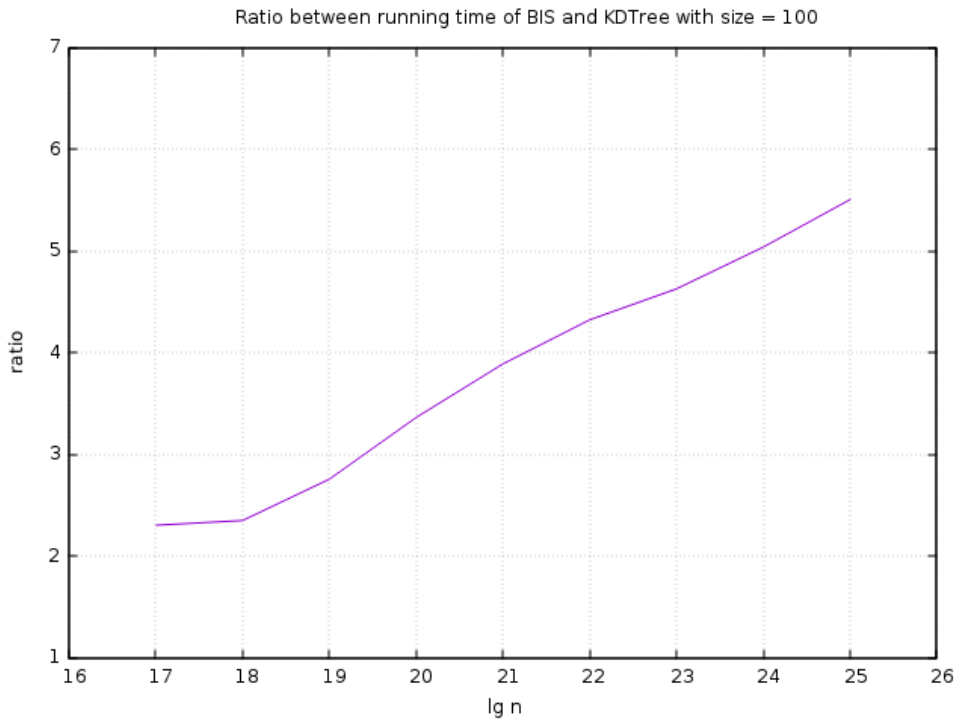
- $\mathcal{O}(\lg n + k \cdot \lg^{\epsilon} n)$ vs $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$.
- $y = ax + b$. Forskel i a og b.
- BIS er mere stabil når vi ændrer shape. $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ er problemet.
- Slice er godt for BIS og square er godt for kd-træ.
- kd-træ er hurtigere jo flere punkter, og jo mindre $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ er.
- Vi har også kigget på $k \leq 200$ for personlig interaktion. Der er BIS god.

Squared



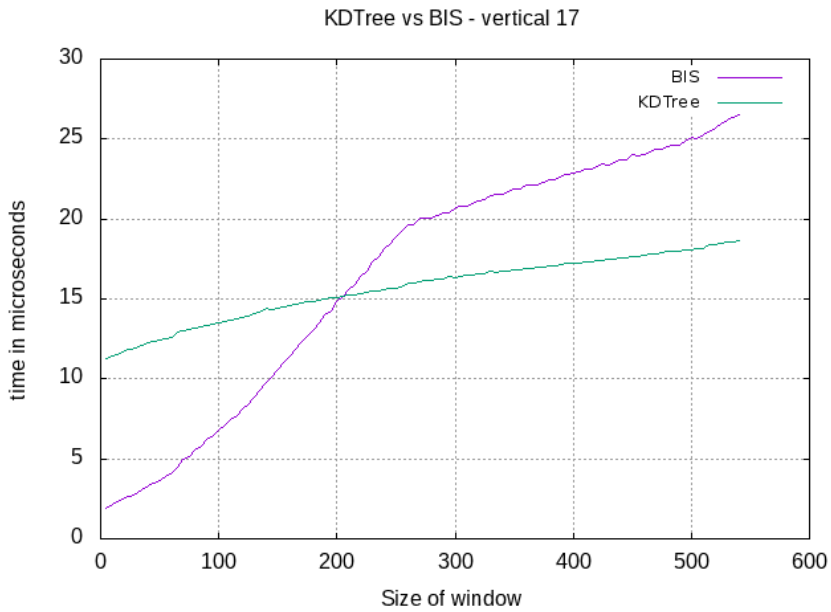
AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

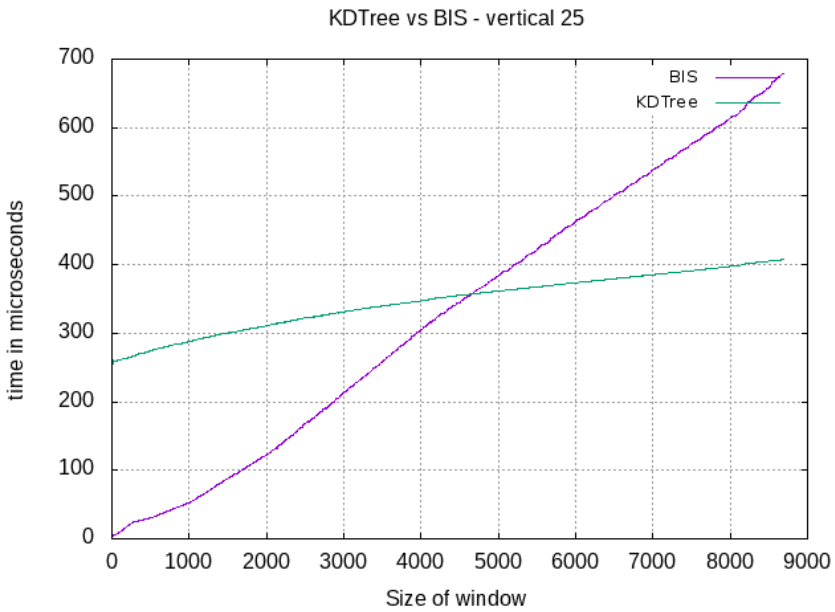
Squared



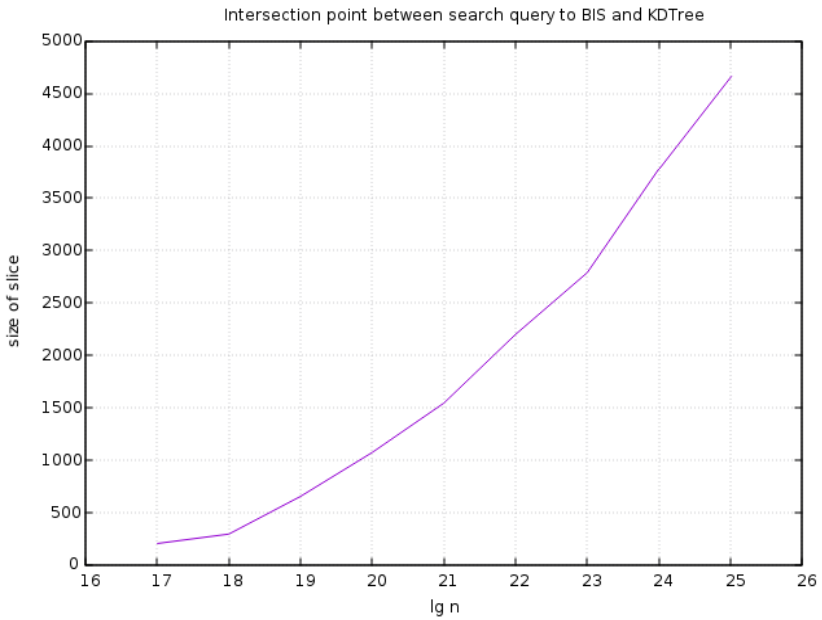
AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

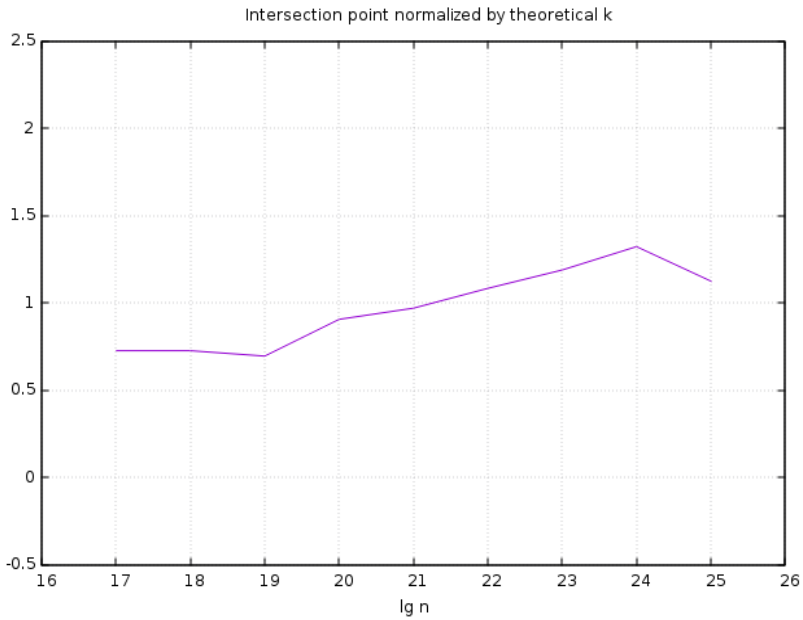
Vertical


KDTree vs BIS - vertical 17
time in microseconds
Size of window
BIS
KDTree
0
5
10
15
20
25
30
0
100
200
300
400
500
600


KDTree vs BIS - vertical 25
time in microseconds
Size of window
BIS
KDTree
0
100
200
300
400
500
600
700
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000

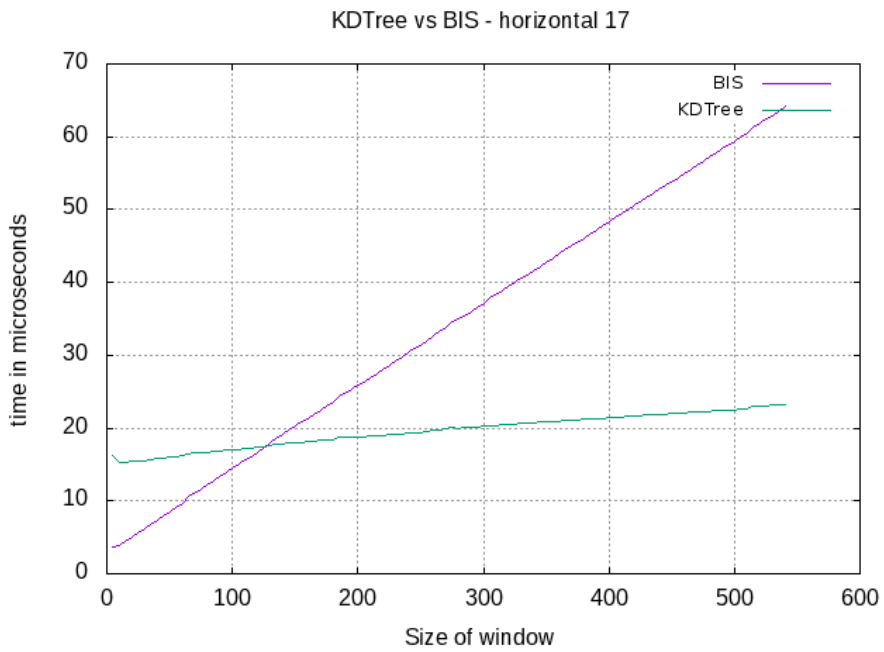
Vertical

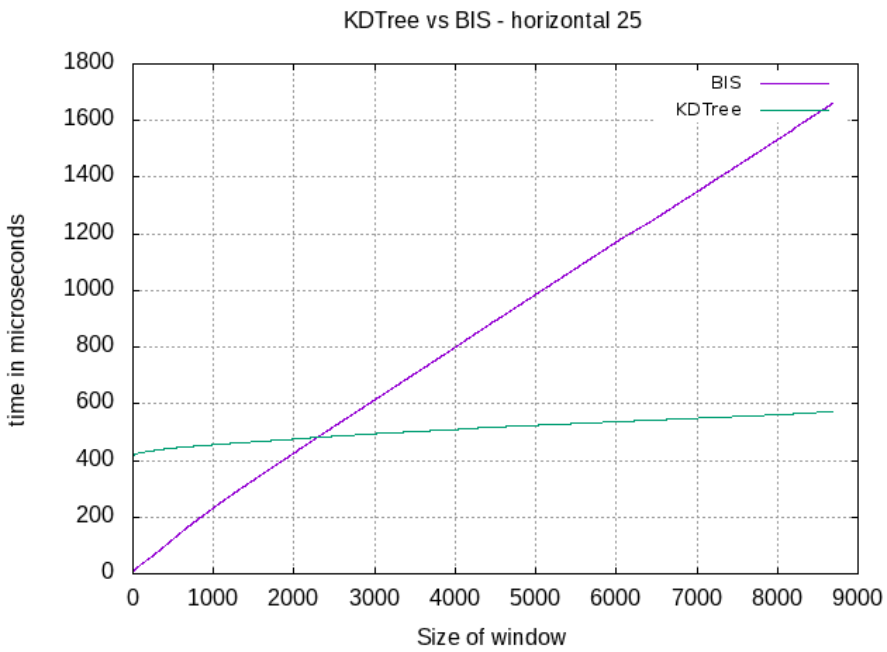




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

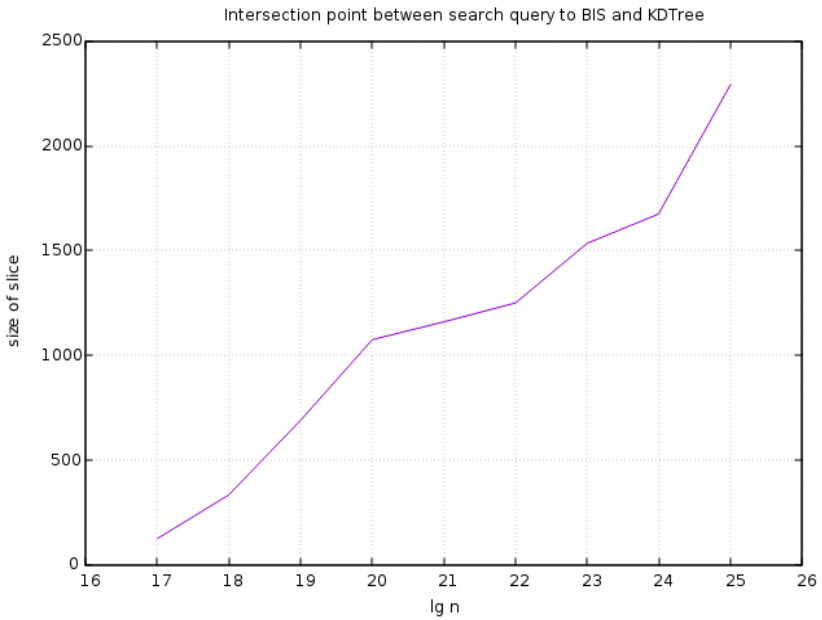
Horizontal

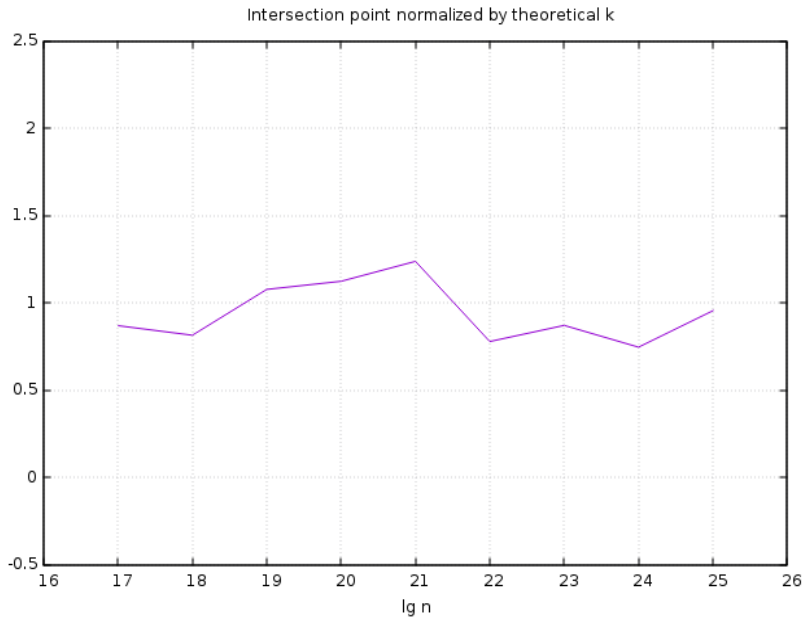




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

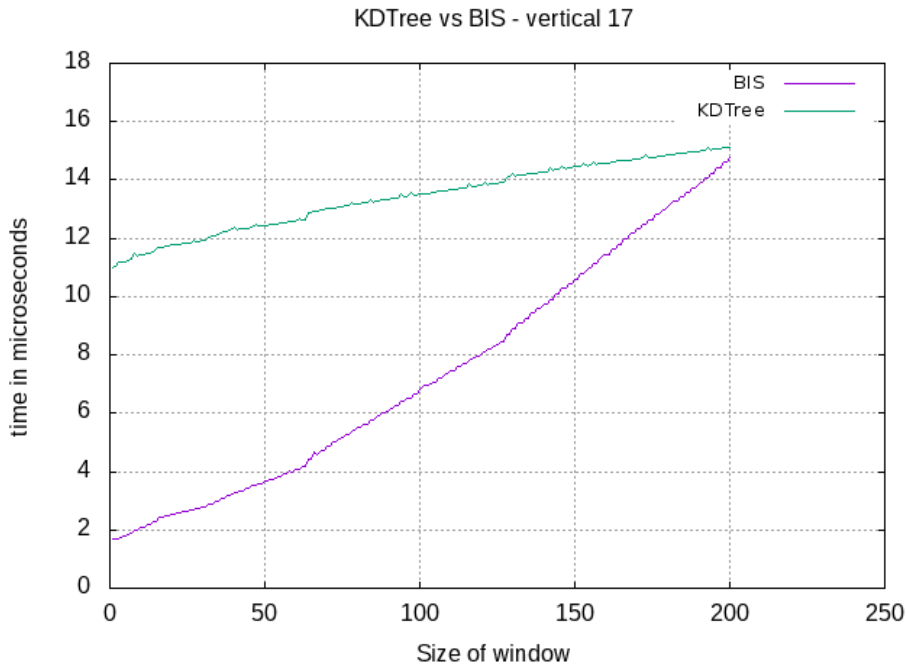
Horizontal

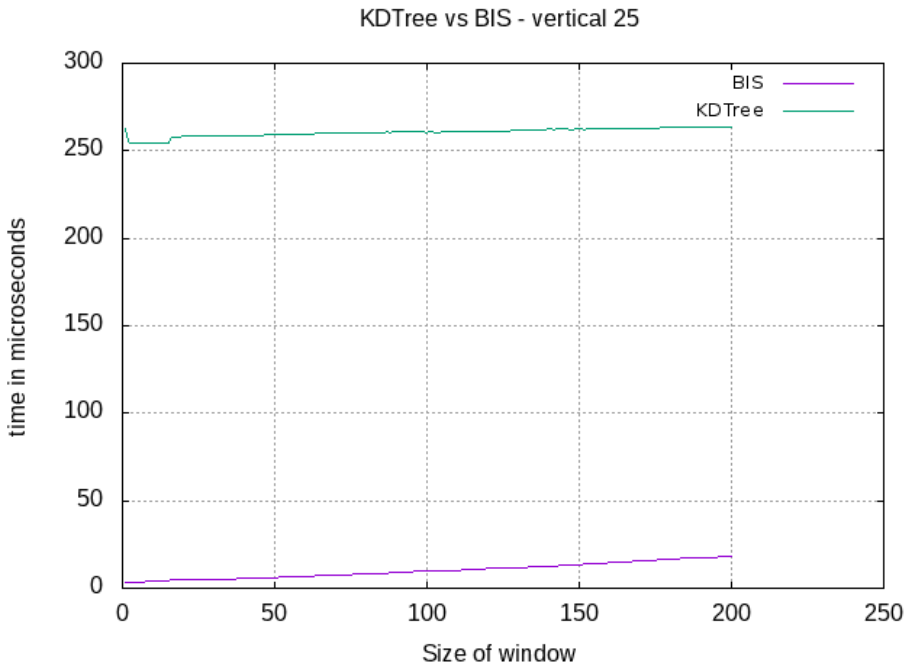




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

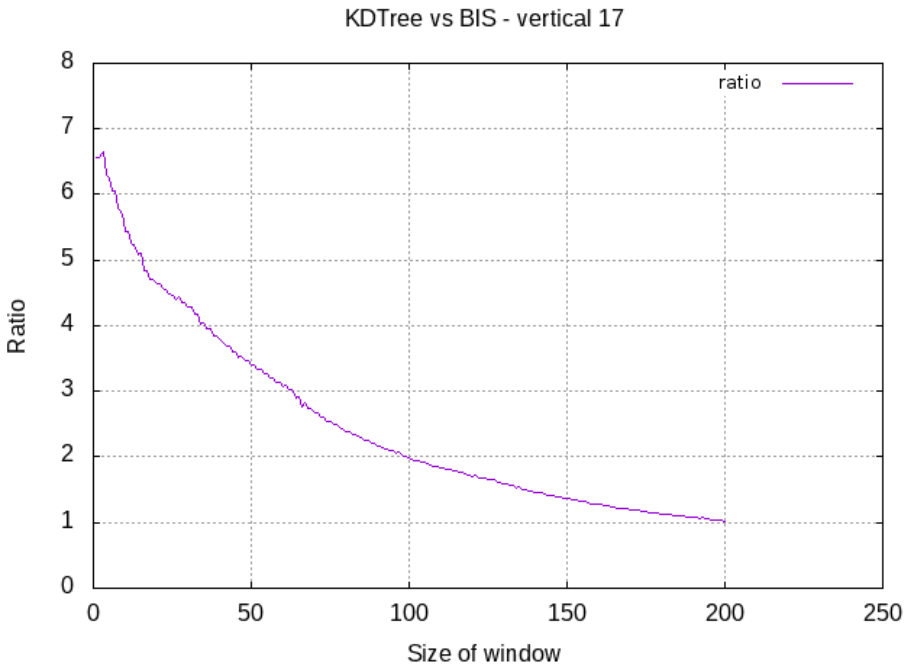
Small k

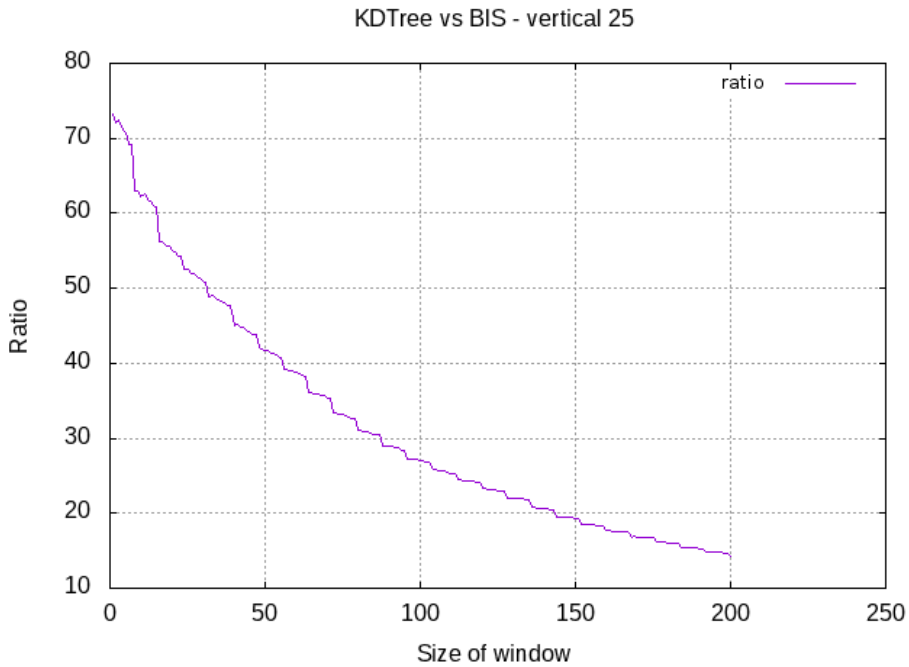




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

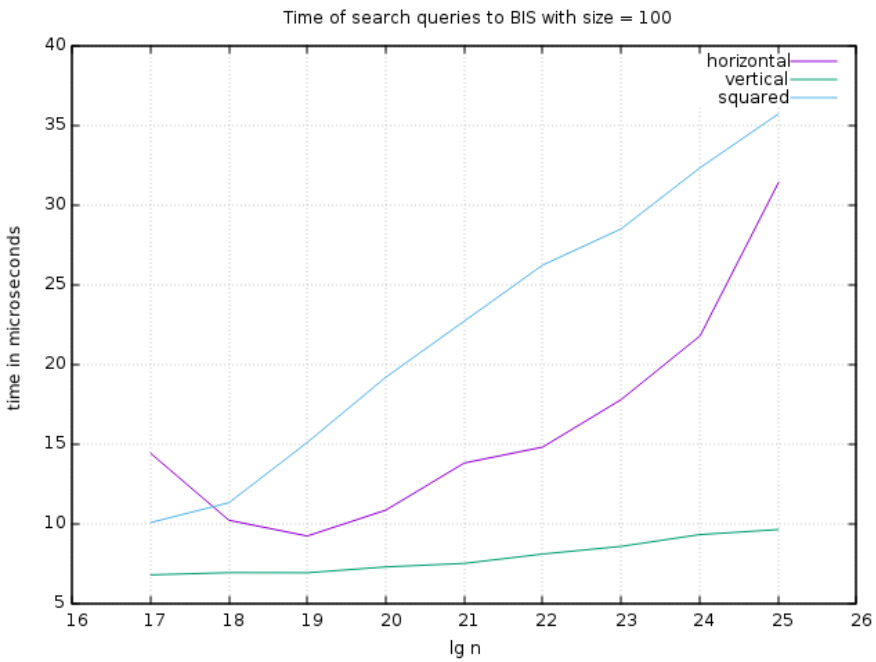
Small k

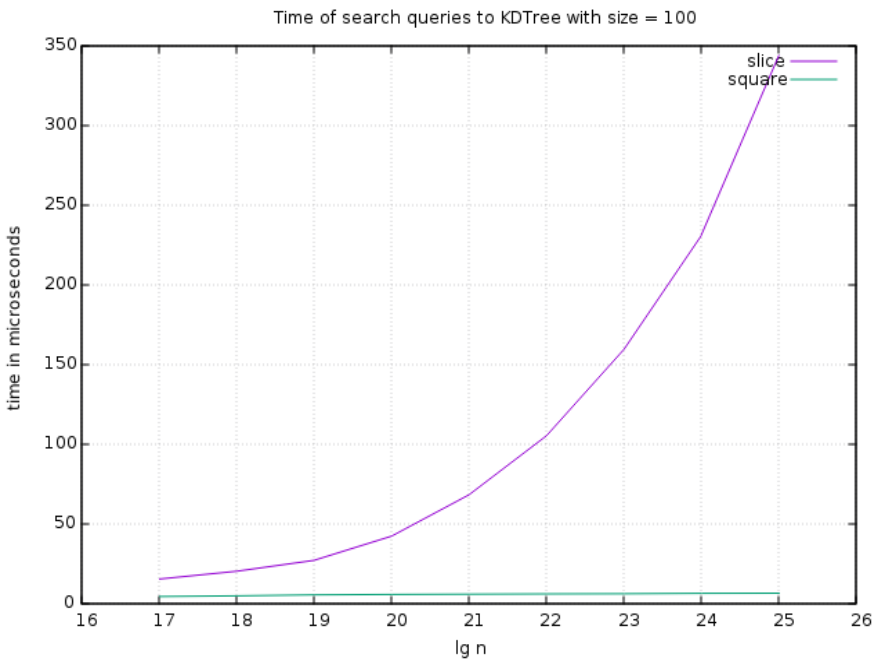




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

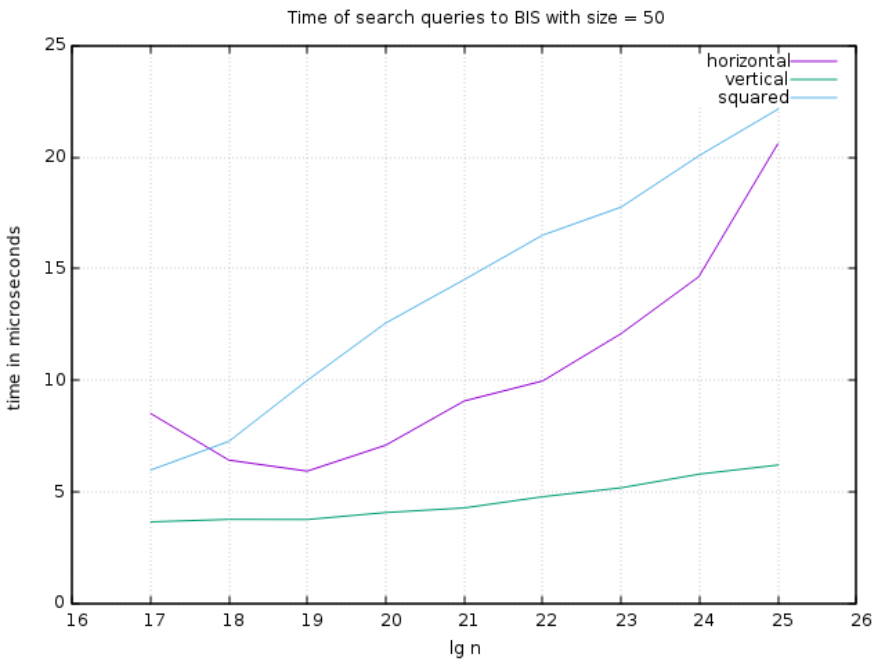
Shapes

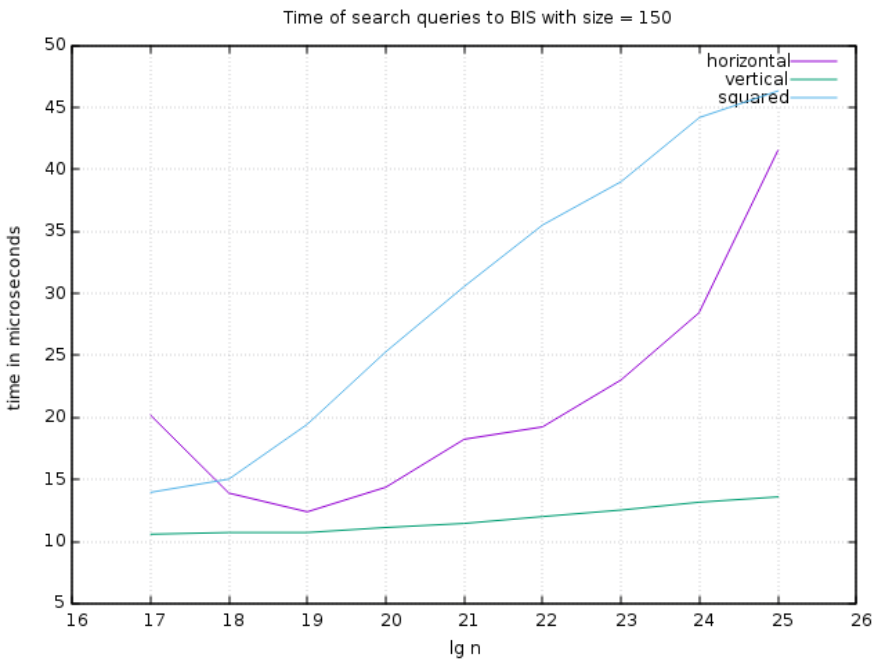




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

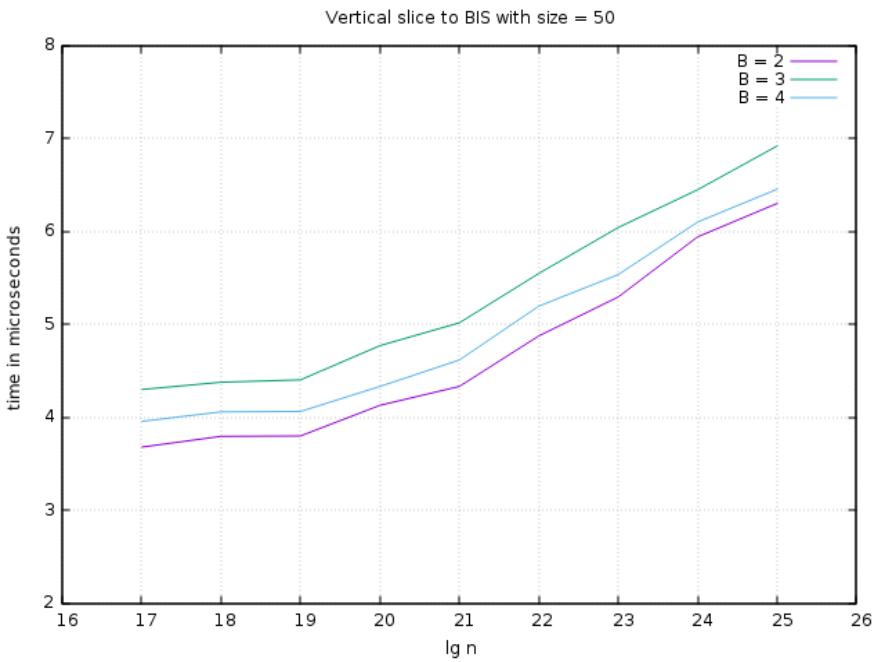
Shapes

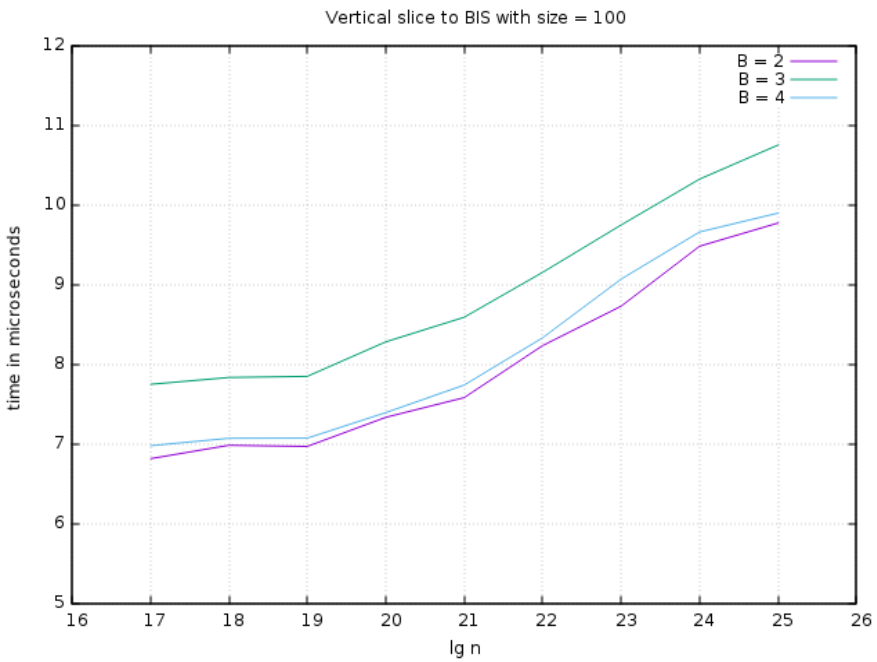




AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

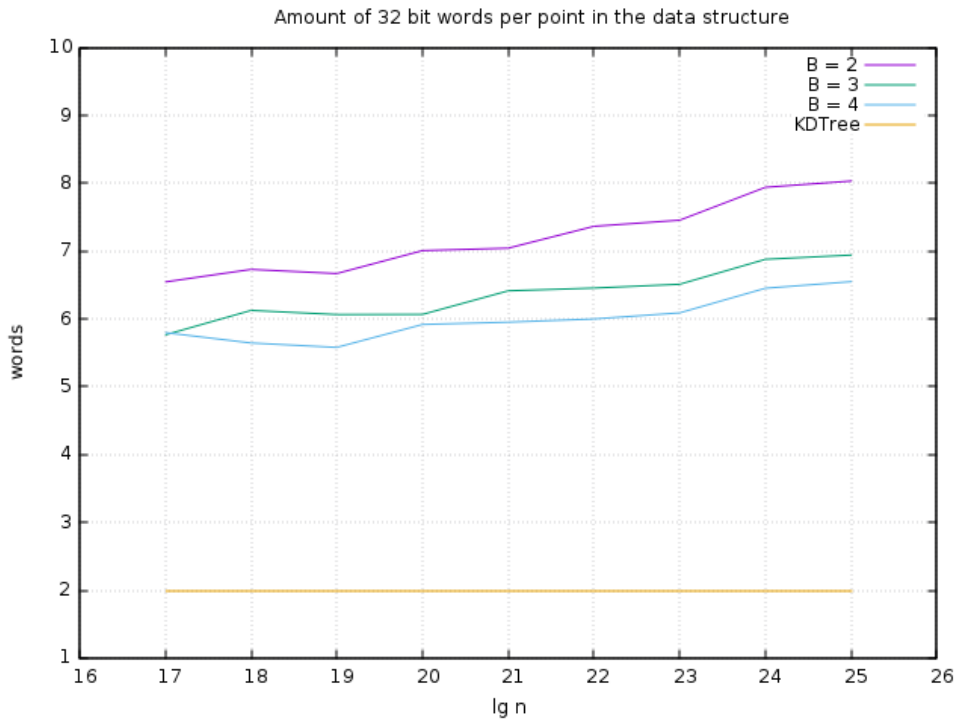
Different B





AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Sizes



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

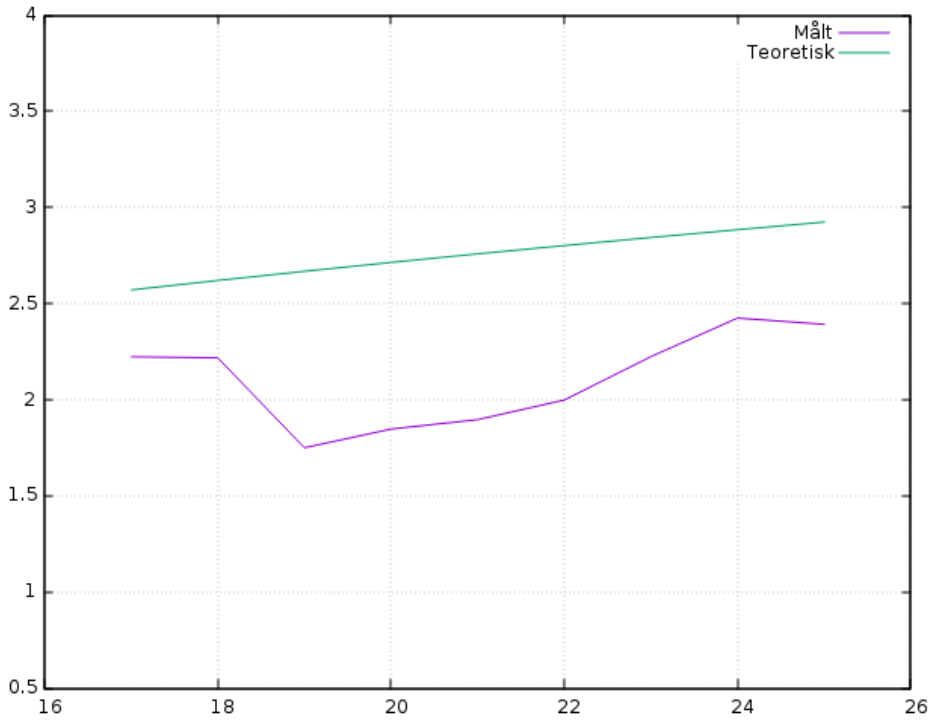
Future work

- Bedre bit-fiddling
- Cache
- Concurrency

Færdig

Spørgsmål?

praktisk log epsilon n



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Små hop

Hvert niveau gemmer n bits som indikerer om bolden er gået til højre eller venstre. Hvert 32 bit gemmer vi et 32 bit major checkpoint. Precomputed tabel med 16 bit tal som tæller antal 1-entries. $\mathcal{O}(n)$ bits per level.

Store hop

$\mathcal{O}(\lg \Sigma)$ per entry. $\Sigma = 2^{B^i}$. Så plads er $\mathcal{O}(B^i)$ bits per entry.
Det er

$$\sum_{i=1}^{\lg_B \lg n} \frac{\lg n}{B^i} \cdot \mathcal{O}(B^i) = \mathcal{O}(\lg n \cdot \lg_B \lg n)$$

for hele kæden. Vælg nu $B = \Omega(\lg^\epsilon n)$.
Vi har n punkter, hvilket giver $\mathcal{O}(n \lg n \cdot \lg_B \lg n)$ bits. Det er $\mathcal{O}(n \cdot \frac{\lg lgn}{\epsilon \lg \lg n}) = \mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon})$ ord.

Store hop

Tiden for de store hop er højst $\mathcal{O}(B \lg_B \lg n)$. Vælg $B = \lg^{\epsilon/2} n = \Omega(\lg \lg n)$.

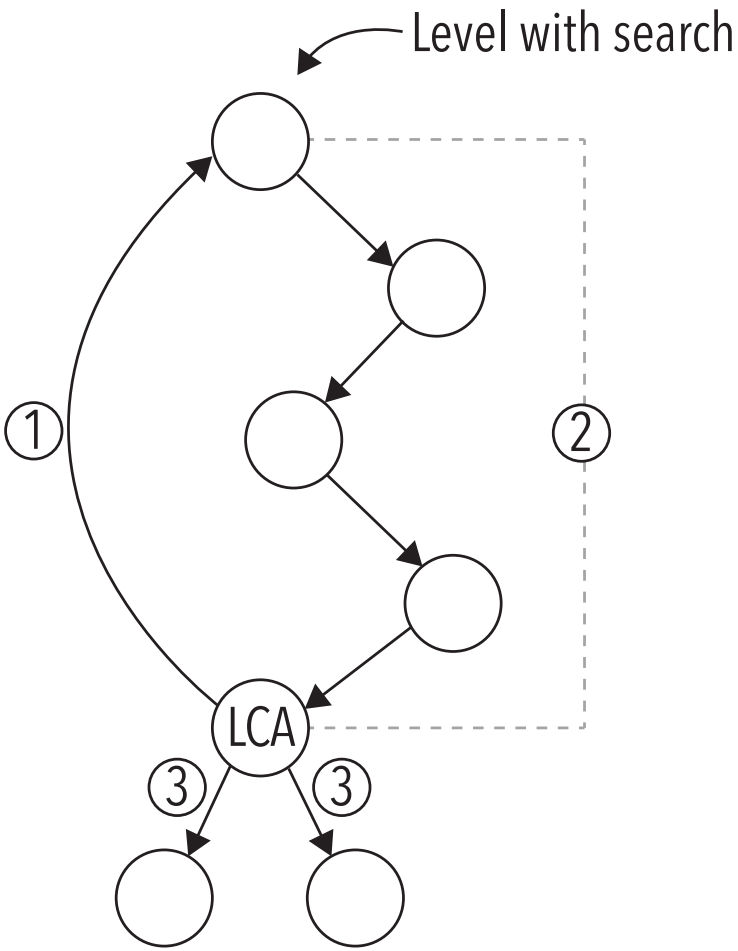
- Vi har B hop på B^0 før vi rammer B^1.
- Vi har B hop på B^1 før vi rammer B^2.
- Vi har B hop på B^2 før vi rammer B^3.
- ...

Det er $B \cdot i$ hvor $i \leq \lg_B \lg n$.

OBIS

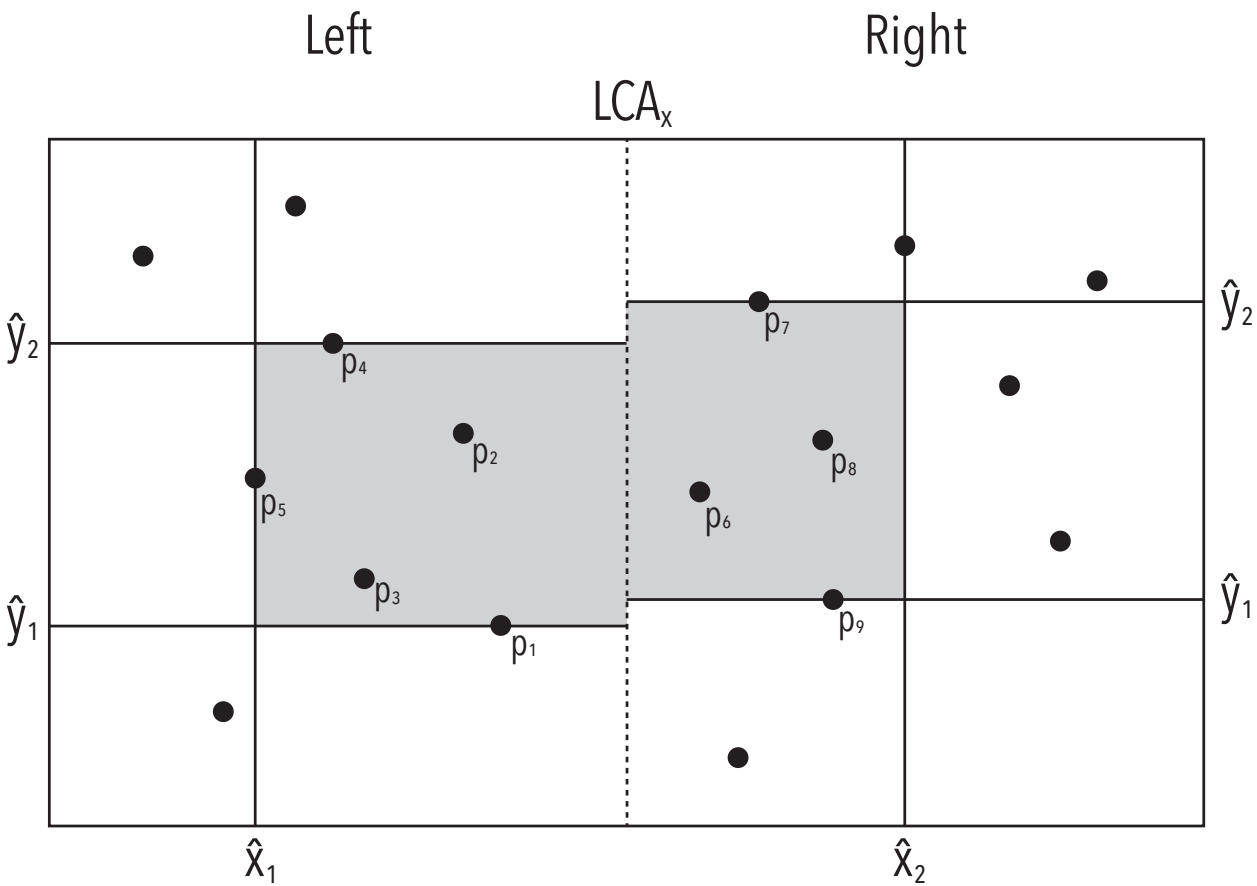
OBIS af Chan et al. Med $\mathcal{O}(n)$ plads og $\mathcal{O}(\lg\lg n + (1+k)\cdot \lg^{\epsilon} n)$. Bruger også Ball Inheritance til at finde de k punkter.

OBIS



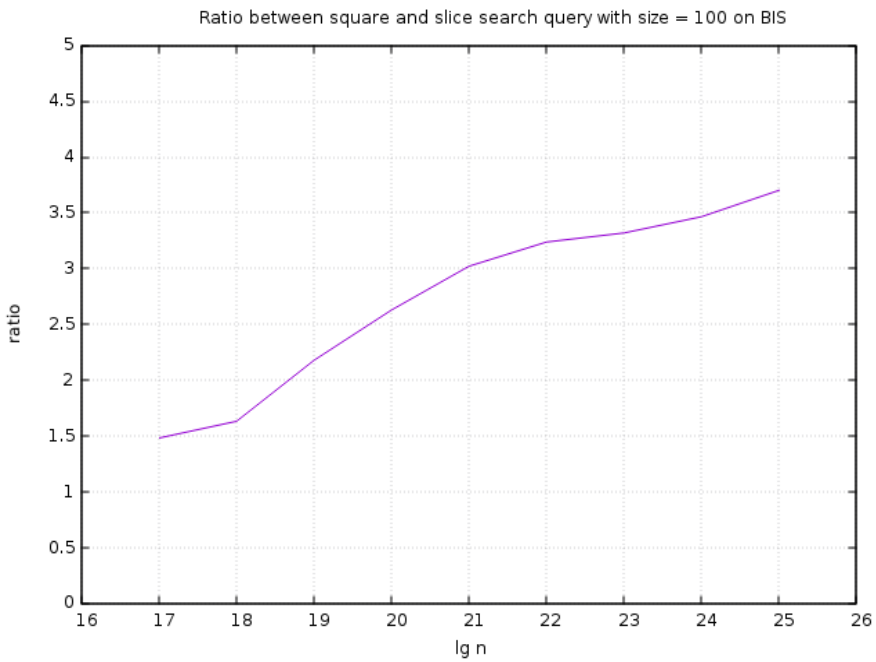
- Op til nærmeste level med pred-search
- Gå ned til LCA højst $\lg \lg n$ levels nede.
- Gå ned og find resultater i begge børn af LCA.

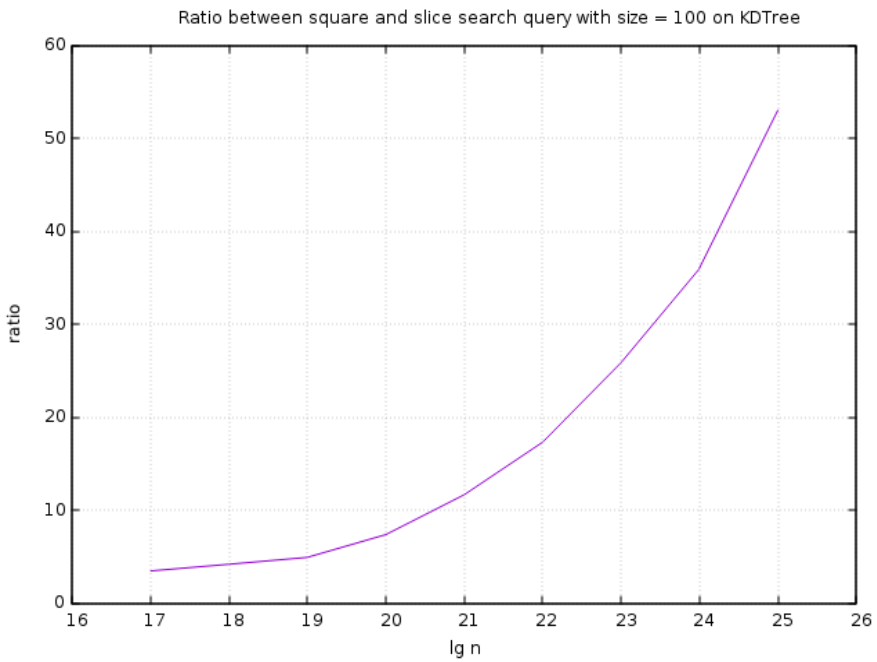
OBIS



AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

small k





AARHUS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

References I

 Timothy M. Chan, Kasper Green Larsen, Mihai Patrascu.
Orthogonal Range Searching on the RAM, Revisited.