EFTERÅR 2015 RE-EKSAMEN

MADS STEINER KRISTENSEN

AARHUS UNIVERSITY - AARHUS SCHOOL OF ENGINEERING

TABLE OF CONTENTS


```
clc
clear

addpath('[0] Library');
Color = load("colors.mat");
smp = load("library.mat");
```

1 STOKASTISKE VARIABLE

En kontinuært stokastisk variabel har følgende fordelingsfunktion (cdf):

$$F_X(x) = \begin{Bmatrix} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{Bmatrix}$$

1.1 TÆTHEDSFUNKTION

Vis at tæthedsfunktionen (pdf) er givet ved

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{Bmatrix}$$

Tæthedsfunktionen findes som $f_x(x) = \frac{\mathrm{dF}_X(x)}{\mathrm{dx}}$, hvorved

```
syms x k
f = k * exp(x);
diff(f, x)
```

ans = $k\,e^x$

```
f = sym('1');
diff(f)
```

ans = 0

Hvilket dermed givet, at

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{Bmatrix}$$

1.2 GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For hvilken værdi af k er $f_x(x)$ en gyldig tæthedsfunktion?

En PDF er gyldig når

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\mathrm{dx} = 1$$

og alle værdier af PDF'en er større eller lig med 0. Det vil sige, at

$$\int_{-\infty}^{1} k \cdot e^x \mathrm{dx} + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathrm{dx} = 1$$

$$k[e^x]_{-\infty}^{1} = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} k(e^1 - e^{-t}) = 1$$

$$k \cdot e = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e}$$

1.3 SANDSYNLIGHEDER

```
k = 1 / exp(1);

probability = k * exp(0.4);

disp("Pr(x < 0.4) = " + probability);
```

```
Pr(x < 0.4) = 0.54881
```

```
probability = probability - (k * exp(0.1));

disp("Pr(0.1 <= x < 0.4) = " + probability);
```

```
Pr(0.1 <= x < 0.4) = 0.14224
```

1.4 FORVENTNINGSVÆRDI

Middelværdien / Forventningsværdien bestemmes som følgende,

$$E[X] = \overline{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\mathrm{dx}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{1} x \cdot f_x(x)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{1} x \cdot \frac{1}{e} \cdot e^x \mathrm{dx}$$

```
f = @(a) a.*1/exp(1).*exp(a);

value.expectation = round(integral(f, -inf, 1), 10);

disp("Forventningsværdien er bestemt til at være: " + value.expectation);
```

```
Forventningsværdien er bestemt til at være: 0
```

$$\mathrm{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x}) \cdot f_X(x)\mathrm{dx} = E[X^2] - E[X]^2$$

```
f = @(a) (a.^2).*1/exp(1).*exp(a);

value.expectationsquared = round(integral(f, -inf, 1), 10);

disp("Variansen er bestemt til at være: " + (value.expectationsquared - value.expectation^2));
```

```
Variansen er bestemt til at være: 1
```

2 STOKASTISKE PROCESSER

En diskret stokastisk process er givet ved

$$X(n) = w(n) + 4$$

Hvor hver sample n af w er i.i.d Gaussisk fordelte stokastiske variable w(n) ~ N(0,1).

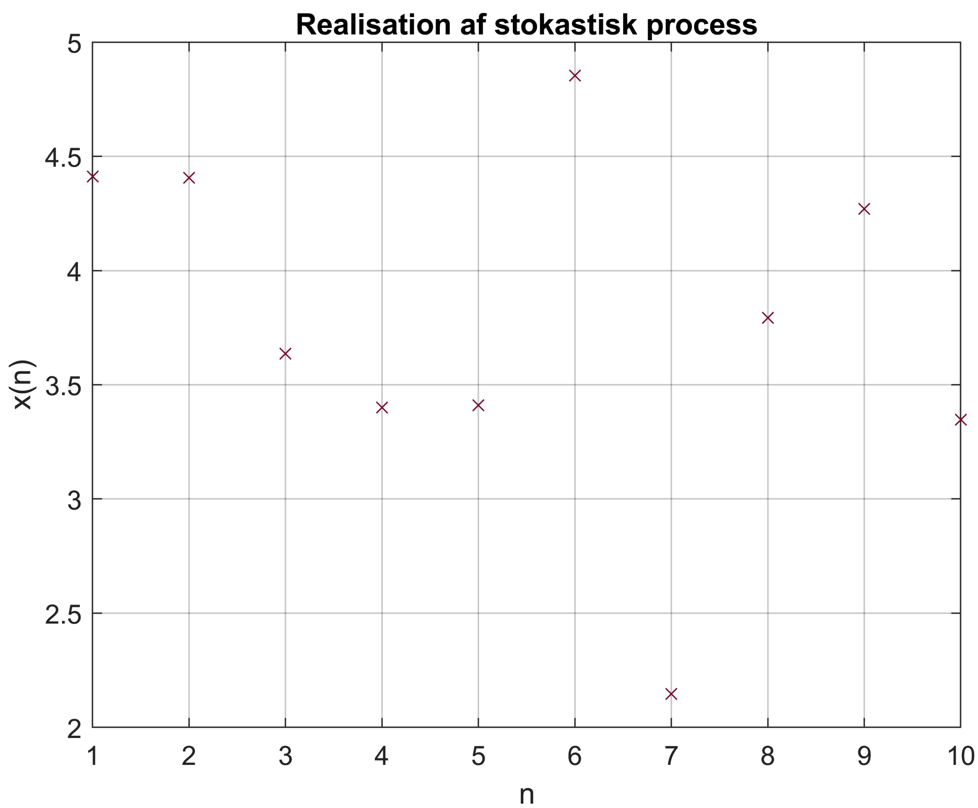
2.1 SKITSERING AF REALISATION

```
mu = 0;
sigma = 1;

realisation = (sigma * randn(1, 10) + mu) + 4;

figure(1)
plot(1:length(realisation), realisation, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
title('Realisation af stokastisk process');
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
```

```
grid on
```



2.2 MIDDELVÆRDI OG VARIANS

$$E[X(n)] = E[w(n) + 4]$$

$$E[X(n)] = E[w(n)] + E[4]$$

```
Ensemble.Mean = mu + 4;

disp("Ensemble middelværdien er: " + Ensemble.Mean);
```

```
Ensemble middelværdien er: 4
```

$$\mathrm{var}[X(n)] = E[X(n)^2] - E[X(n)]^2$$

$$\mathrm{var}[X(n)] = E[w(n)^2] + E[4^2] - 4^2$$

$$\mathrm{var}[X(n)] = E[w(n)^2] = \mathrm{var}(w(n)) = 1$$

```
Ensemble.Variance = 1;

disp("Ensemble variansen er : "+ Ensemble.Variance);
```

```
Ensemble variansen er : 1
```

2.3 PROCESSEN

Processen er wide state stationary da middelværdien og varians ikke er tidsafhængige. Processen er ergodisk, da middelværdi og varianskan bestemmes ud fra en realisation.

3 SANDSYNLIGHED

Du spiller kort i et kasino. Der er et sæt af 52 kort i et spil, du trækker syv kort.

3.1 HÆNDELSE HJERTE KONGE

EVENT A: HJERTER KONGE

EVENT B: SPAR ES

Sandsynligheden for at trækker hjerte konge blandt de syv kort er som følgende. Der vil være syv muligheder blandt de allerede trukket kort for at finde en hjerter konge.

```
Cards = 52;
Drawings = 7;

A = Drawings / Cards;

disp("Sandsynligheden for at trække en hjerter konge blandt de syv kort er: " + A);
```

```
Sandsynligheden for at trække en hjerter konge blandt de syv kort er: 0.13462
```

3.2 HÆNDELSE SPAR ES OG HJERTET KONGE

$$P(B) = P(A) = 0.13462$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

```
B = Drawings / Cards;

AGivenB = (Drawings - 1) / (Cards - 1);

AAndB = AGivenB * B;

disp("Sandsynligheden for at hjerter konge og spar es er blandt de syv trukne kort er: " + AAnd
```

```
Sandsynligheden for at hjerter konge og spar es er blandt de syv trukne kort er: 0.015837
```

3.3 UAFHÆNGIGHED

For at tjekke om der er uafhængig gælder følgende udtryk for uafhængighed

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

```
if A * B == AAndB
    disp("A og B er uafhængige");
```

```
else
    disp("A og B er ikke uafhængige");
end
```

```
A og B er ikke uafhængige
```

3.4 KOMBINATIONER

Det antages at eksperimentet ikke er i orden og er uden tilbagelægning, derved gælder, at (k objects out of collection of n objects)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
n = 52;
k = 7;

Combinations = factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n-k));

disp("Antallet af kombinationer med 7 kort er: " + Combinations);
```

```
Antallet af kombinationer med 7 kort er: 133784560
```

4 STATISTIK

Den gennemsnitlige alder for 1. gangs viede mænd i Danmark er angivet ved følgende tabel

$$\begin{bmatrix} \text{Alder} & 25.2 & 26.5 & 27.9 & 29.2 & 30.2 & 31.7 & 32.8 & 34.0 & 34.3 \\ \text{År} & 1971 & 1976 & 1981 & 1986 & 1991 & 1996 & 2001 & 2006 & 2011 \end{bmatrix}$$

4.1 PLOT DATA

Til denne opgave anvendes lineær tilnærmelse, hvor

$$\hat{x} = \beta \cdot t + \alpha$$

Dertil anvendes, at

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x - \overline{x}) \cdot (y - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x - \overline{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta} \cdot \overline{x}$$

Samt at der for middelværdien gælder, at

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

```
Year = [1971, 1976, 1981, 1986, 1991, 1996, 2001, 2006, 2011];
```

```
Age = [25.2, 26.5, 27.9, 29.2, 30.2, 31.7, 32.8, 34.0, 34.3];
```

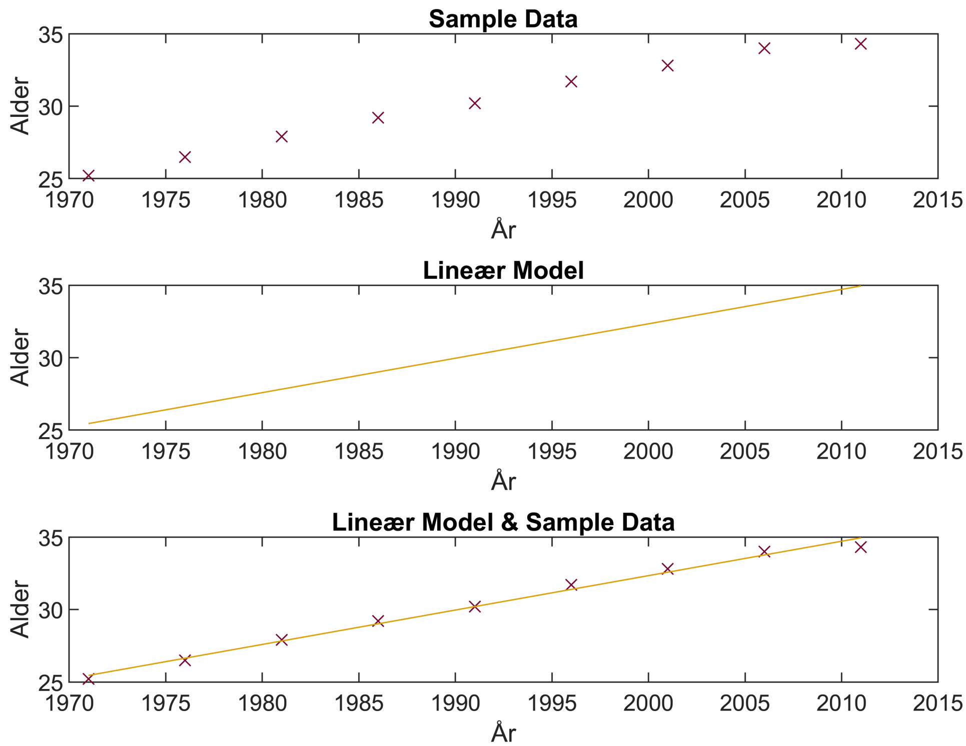
```
AgeMean = mean(Age);
YearMean = mean(Year);
```

```
beta = sum((Age - AgeMean) .* (Year - YearMean)) / sum((Year - YearMean).^2);
alpha = AgeMean - beta * YearMean;
Fitting = beta * Year + alpha;
```

```
figure(2)
subplot(3,1,1,gca)
plot(Year, Age, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
title('Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Alder');

subplot(3,1,2)
plot(Year, Fitting, 'Color', Color.BurntYellow);
title('Lineær Model');
xlabel('År');
ylabel('Alder');

subplot(3,1,3)
plot(Year, Age, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
hold on
plot(Year, Fitting, 'Color', Color.BurntYellow);
title('Lineær Model & Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Alder');
hold off
```



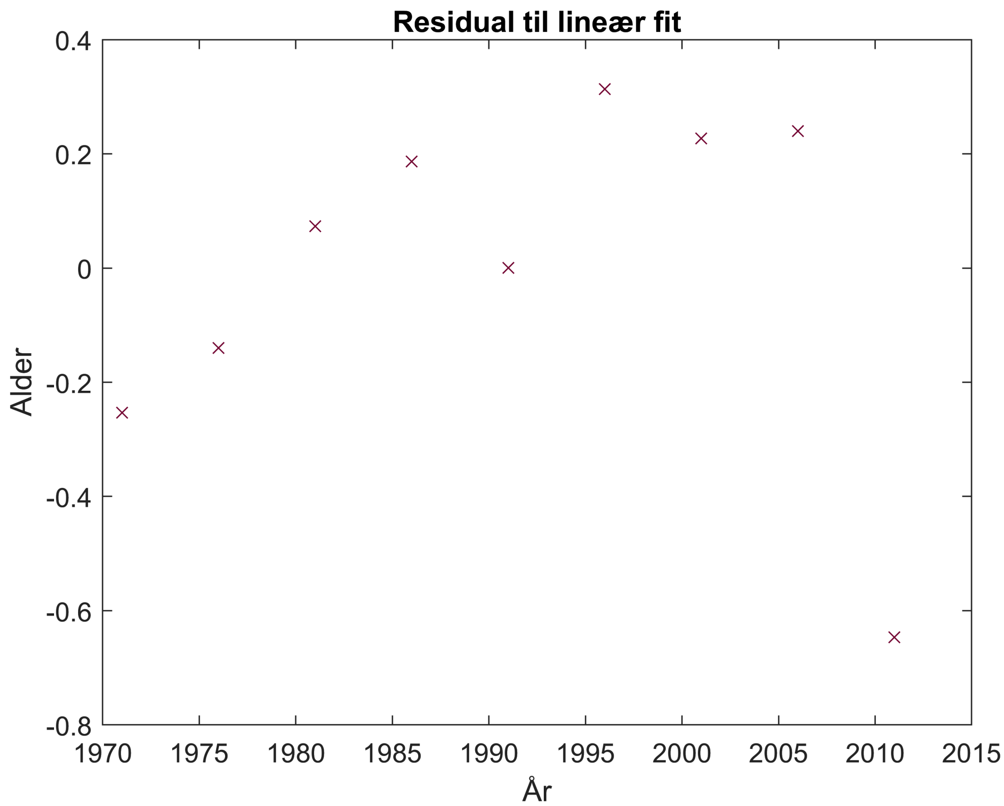
4.2 RESIDUALTEGNING

Til at tegne residualer og beregne disse anvendes følgende udtryk.

$$\epsilon_i = y_i - (\alpha + \beta \cdot x_i)$$

```
Residuals = Age - (alpha + beta * Year);

figure(6)
plot(Year, Residuals, 'kx', 'Color', Color.DeepCleret);
title('Residual til lineær fit');
xlabel('År');
ylabel('Alder');
```



4.3 STATISTISK TEST

Da variansen er ukendt og data er gaussiske og ikke parret, benyttes en t-test for sammenligning af middelværdier.