ETSMP Eksamen E16

Opg. 1

1) Vi har at $\sum_x f_x(x) = 1$.

derved $k = 1 - \sum_{x \neq -1} f_x(x)$

$k = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

$$\underline{\underline{k = \frac{1}{8}}}$$

2)

Find $F_x(x)$:

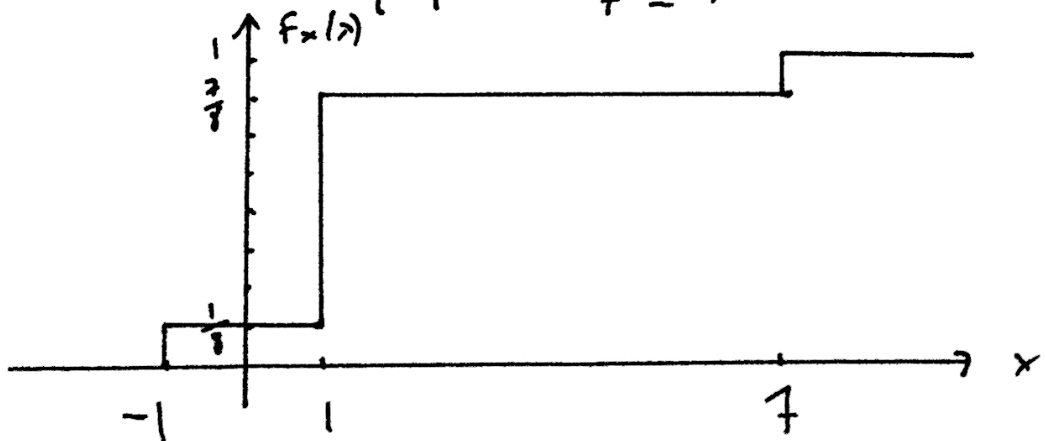
$$F_x(x=-1) = \sum_{x=-1}^{-1} f_x(x) = k = \frac{1}{8}$$

$$F_x(x=1) = \sum_{x=-1}^{1} f_x(x) = k + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$$

$$F_x(x=7) = \sum_{x=-1}^{7} f_x(x) = k + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1$$

derved:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{8} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} & 1 \leq x < 7 \\ 1 & 7 \leq x \end{cases}$$



ETSMP EKSAMEN E16

opg. 1 (fortsat)

3) Find $E[x]$:

$$E[x] = \sum_x x \cdot f_x(x) = -1 \cdot k + 1 \cdot \frac{3}{4} + 7 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{1,5}}$$

Find spredning:

$$\sigma_x = \sqrt{E[x^2] - E[x]^2}$$

$$E[x^2] = \sum_x x^2 f_x(x) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{4} + 7^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 7$$

$$\sigma_x = \sqrt{7 - 1,5^2} = \underline{\underline{2,18}}$$

4) Hvis $g(x) = 3 \cdot x^2$, find $E[g(x)]$.

Vi finder $E[3 \cdot x^2] = 3 \cdot E[x^2]$

$$= 3 \cdot 7 = \underline{\underline{21}}$$

5) X kan antage følgende værdier:

-1, 1, 7.

ETSMP Eksamen E16

Opg. 2

En stokastisk process er givet ved

$$X(t) = w(t)$$

hvor $w(t) \sim U(-2,-1)$

1) Samplet realisation:

se bilag A.

fremkommet ved:

```
% Matlab kode
x1 = rand(1,6) - 2;
t = 0:1:5;
plot(t, x1, 'x')
```

2) Ensemble middelværdien for $X(t)$:

$$E[X(t)] = \int X(t) \cdot f_{X(t)}(x(t)) \, dx(t)$$

hvor $f_{X(t)}(x(t))$ er tæthedsfunktionen for processen $X(t)$ til tiden t.

da $X(t) = w(t)$ og $w(t) \sim U(-2;-1)$

(fortsættes)

ETSMP Eksamen E16

Opg. 2.2 (fortat)

har vi at

$$E[x(t)] = \int_{-2}^{-1} \omega \cdot 1 \, d\omega = \left[\frac{1}{2} \omega^2 \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

Ensemble variansen for $x(t)$

$$\mathrm{var}(x(t)) = E[x^2(t)] - E[x(t)]^2$$

Vi finder:

$$E[x^2(t)] = \int_{-2}^{-1} \omega^2 \cdot 1 \, d\omega = \left[\frac{1}{3} \omega^3 \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \frac{7}{3}$$

derved:

$$\mathrm{var}(x(t)) = \frac{7}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

3) Den tidslige middelværdi

$$\langle \mu_x \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, dt$$

ETSMP EKSAMEN E16

opg. 2 (fortsat)

4) processen $X(t)$ er stationær i den brede forstand da ensemble middelværdi og varians ikke er tidsafhængige.

processen er ergodisk da ensemble tæthedsfunktionen kan findes udfra én realisation når $t \to \infty$.

ETSMP Eksamen E16

opg. 3

Hændelse H: HIV Smittet

Hændelse T: Test positiv

Vi ved:

$P(T \mid H) = 0,92$

$P(\bar{T} \mid \bar{H}) = 0,98$

$P(H) = 0,001$

derfor: $P(\bar{H}) = 1 - 0,001 = 0,999$

$P(T \mid \bar{H}) = 1 - 0,98 = 0,02$

$P(\bar{T} \mid H) = 1 - 0,92 = 0,08$

1) Find $P(T \cap H) = P(T \mid H) P(H)$

$= 0,92 \cdot 0,001$

$= \underline{\underline{0,00092}}$

2) Total sandsynlighed $P(T)$

Vi har: $P(T \cap \bar{H}) = P(\bar{H}) P(T \mid \bar{H})$

$= 0,999 \cdot 0,02 = 0,01998$

(fortsættes)

opg 3.2 (fortsat)

$$P(T) = P(T \cap H) + P(T \cap \bar{H})$$

$$= 0{,}00092 + 0{,}01998 = \underline{\underline{0{,}0209}}$$

3) Find $P(H|T)$

$$P(H|T) = \frac{P(T \cap H)}{P(T)} = \frac{0{,}00092}{0{,}0209}$$

$$= \underline{\underline{0{,}044}}$$

4)

Hvis sandsynlighederne er uafhængige vil vi have: $P(H \cap T) = P(H)\,P(T)$

da $P(H \cap T) = 0{,}00092$

og $P(H) \cdot P(T) = 0{,}001 \cdot 0{,}0209$

$= 0{,}0000209$

er de <u>ikke</u> uafhængige.

ETSMP EKSAMEN E16

opg. 4

1) sample middelværdi   Antal = X

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{10}\left(28+46+44+63+104+148+172+187+223+236\right) = \underline{\underline{125,1}}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\hat{\mu})^2$$

$$= \frac{1}{9}\left((28-125,1)^2 + \dots (236-125,1)^2\right)$$

$$= \underline{\underline{6,11\cdot 10^3}}$$

2) data samt den lineære regression er plottet på bilag B.

Vi finder den lineære model:

$$x_i = \alpha \cdot t_i + \beta$$

hvor t er År.

(fortsættes)

ETSMP EKSAMEN E16

Opg. 4.2 (fortsat)

Vi beregner:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{10}(1985 + \ldots + 1994)$$

$$= 1989{,}5$$

$$S_{tt} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2$$

$$= (1985^2 + \ldots + 1994^2)$$

$$- \frac{1}{10}(1985 + \ldots + 1994)^2 \quad = 82{,}5$$

$$S_{tx} = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

$$= (1985 \cdot 28 + \ldots + 1994 \cdot 236)$$

$$- \frac{(1985 + \ldots + 1994)(28 + \ldots 236)}{10}$$

$$= 2{,}099 \cdot 10^3$$

$$\alpha = \frac{S_{tx}}{S_{tt}} = \frac{2{,}099 \cdot 10^3}{82{,}5} = \underline{\underline{25{,}4}}$$

$$\beta = \bar{x} - \alpha\bar{t} = 125{,}1 - 25{,}4 \cdot 1989{,}5$$

$$= \underline{\underline{-50481}}$$

opg 4 (fortsat)

3) Residualtegning ses på bilag C

residualerne beregnes ved:

$$r_i = x_i - (\alpha \cdot t_i + \beta) = [17{,}4\ ,\ 9{,}9\ \ldots -3{,}6]$$

hvor $\alpha = 25{,}4$ $\beta = -50481$

4) 95% konfidensinterval for hældningen

α:

$$\alpha_+ = \alpha + t_{0,975}(n-2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{tt}}}$$

$$\alpha_- = \alpha - t_{0,975}(n-2)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{tt}}}$$

hvor variansen estimeres:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \frac{1}{8}(17{,}4^2 + \ldots -3{,}6^2)$$

$$= 203{,}1$$

og $t_{0,975}(8) = 2{,}3$

$$\alpha_+ = 25{,}4 + 2{,}3 \cdot \sqrt{\frac{203{,}1}{82{,}5}} = \underline{\underline{29{,}05}}$$

$$\alpha_- = 25{,}4 - 2{,}3 \cdot \sqrt{\frac{203{,}1}{82{,}5}} = \underline{\underline{21{,}82}}$$

ETSMP EKSAMEN E16

Opg. 4

5) Udfra residualplottet er residualerne fordelt pænt omkring 0. Der er altså ikke et tydeligt mønster. Desuden ligger konfidensintervalet mellem 21,82 til 29,05 og altså tæt - ~~nø~~ Antagelsen om linearitet virker derfor rimelig.

6) Årstal hvor antallet er negativt kan ikke bruges.