ETSMP reeksamen E2016

Opgave 1: stokastiske Variable

cdf:

$$F_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

1) pdf findes ved $f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx}$

$$\frac{d\,k \cdot e^x}{dx} = k \cdot e^x \qquad \frac{d\,1}{dx} = 0$$

$$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx} = \begin{cases} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

2) pdf er gyldig når $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

og alle værdier af pdf er større eller lig 0.

dvs: $$\int_{-\infty}^{1} k e^x\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = 1$$

$$k \left[e^x \right]_{-\infty}^{1} = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} k \left(e^1 - e^{-t} \right) = 1$$

$$k \cdot e = 1 \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{e}}}$$

ETSMP reeksamen E2016

Opgave 1 fortsat

3) $$Pr(x < 0{,}4) = F_X(x = 0{,}4)$$
$$= \frac{1}{e} e^{0{,}4} = \underline{\underline{0{,}55}}$$

$$Pr(x < 0{,}1) = F_X(x = 0{,}1)$$
$$= \frac{1}{e} e^{0{,}1} = \underline{\underline{0{,}41}}$$

$$Pr(0{,}1 \leq x < 0{,}4) = Pr(x < 0{,}4) - Pr(x < 0{,}1)$$
$$= 0{,}55 - 0{,}41$$
$$= \underline{\underline{0{,}14}}$$

4) Middelværdi / forventningsværdi:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{1} x \frac{e^x}{e}\, dx$$
$$= \frac{1}{e}\left[xe^x - e^x\right]_{-\infty}^{1}$$
$$= \frac{1}{e}(e^1 - e^1) - 0 = \underline{\underline{0}}$$

Opgave 1 fortsat

4) fortsat

Varians af X:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Vi finder $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{1} x^2 \frac{e^x}{e} \, dx$$

$$= \frac{1}{e} \left[e^x \left(\frac{x^2}{1} - \frac{2x}{1^2} + \frac{2}{1^3} \right) \right]_{-\infty}^{1}$$

$$= \frac{1}{e} \left[e^x (x^2 - 2x + 2) \right]_{-\infty}^{1}$$

$$= \frac{1}{e} e (1^2 - 2 \cdot 1 + 2) - 0 = 1$$

$$Var[X] = 1 - 0^2 = \underline{\underline{1}}$$

ETSMP reeksamen E2016

Opgave 2: Stokastiske processer

1) se bilag A

2) ensemble middelværdien:

$$E[x(n)] = E[w(n) + 4]$$
$$= E[w(n)] + E[4]$$
$$= 0 + 4 = \underline{\underline{4}}$$

ensemble variansen:

$$\mathrm{var}[x(n)] = E[x(n)^2] - E[x(n)]^2$$
$$= E[w(n)^2] + E[4^2] - 4^2$$
$$= E[w(n)^2]$$
$$= \mathrm{var}(w(n))$$
$$= \underline{\underline{1}}$$

3) processen er WSS, da middelværdi og varians ikke er tidsafhængige.
processen er ergodisk, da middelværdi og varians kan bestemmes udfra én realization.

ETSMP reeksamen E2016

Opgave 3: Sandsynlighedsregning

1) Sandsynligheden for hændelse A:

$$Pr(A) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \underline{\underline{0{,}13}}$$

2) Sandsynligheden for hændelse B

$$Pr(B) = Pr(A) = 0{,}13$$

Simultan sandsynlighed:

$$Pr(A,B) = Pr(A|B)\,Pr(B)$$

$$Pr(A|B) = 6 \cdot \frac{1}{52}$$

Derved:

$$Pr(A,B) = Pr(A|B)\,Pr(B) = \frac{6}{5\cancel{4}1} \cdot \frac{7}{52} = \underline{\underline{0{,}0158}}$$

3) Da $Pr(A) \cdot Pr(B) = 0{,}0181$ ~~og~~ og

$Pr(A,B) = 0{,}0155$ er $Pr(A)\,Pr(B) \neq Pr(A,B)$

Derved er ~~og~~ $\underline{\underline{\text{A og B er ikke uafhængige.}}}$

4) Antal kombinationer af 7 kort:

uden orden og uden tilbagelægning:

$$K(52,7) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{52!}{(52-7)! \cdot 7!}$$

$$= \underline{\underline{133784560 \text{ kombinationer}}}$$

ETSMP Reeksamen E2016

Opgave 4: statistik

1) Linear regression anvendes til at finde hældning og skæring

hældning α:

Sample middel af antal:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}(25,2 + \dots + 34,3) = 30,2$$

middeltid:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{9}(1971 + \dots + 2011) = 1991$$

derved:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t-\bar{t})(x-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(t-\bar{t})^2} = \underline{\underline{0,237}}$$

skæring β:

$$\beta = \bar{x} - \alpha \cdot \bar{t} = \underline{\underline{-442,33}}$$

Lineær tilnærmelse: $\hat{x} = \alpha t + \beta$

$$\alpha = 0,237$$

$$\beta = -442,33$$

plottet på bilag B

Opgave 4 (fortsat):

2) Beregning af residualer.

$$res(t) = x(t) - (\alpha t + \beta)$$

$$= x(t) - (0{,}237t - 442{,}33)$$

Residuler er vist i Bilag C.

3) Da varians. er ukendt og data er Gaussiske og ikke parret, bruges en t-test for sammenligning af middelværdier.