EFTERÅR 2015 EKSAMEN

MADS STEINER KRISTENSEN

AARHUS UNIVERSITY - AARHUS SCHOOL OF ENGINEERING

TABLE OF CONTENTS


```
clc
clear

addpath('[0] Library');
Color = load("colors.mat");
smp = load("library.mat");
```

1 STOKASTISKE VARIABLE

Lad den simultane tæthedsfunktion for to diskrete stokastiske variable X og Y være angivet som tabellen i opgavebeskrivelsen.

1.1 MARGINALE TÆTHEDSFUNKTIONER

Vis at de marginale tæthedsfunktionerfor X og Y er givet som i tabellerne i opgavebeskrivelsen.

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y), \quad f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$$

```
data = [
    [0,     1/12,   0   ];
    [2/12,  0,      2/12];
    [2/12,  1/12,   2/12];
```

```
    [0,     2/12,   0   ]
];

MarginalX = sum(data);
MarginalY = sum((data'));

TX = array2table(MarginalX, 'VariableNames',{'X1','X2','X3'}, 'RowNames',{'fX(x)'})
```

TX = 1×3 table

	X1	X2	X3
1 fX(x)	0.3333	0.3333	0.3333

```
x = sym(MarginalX)
```

x =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

```
TY = array2table(MarginalY, 'VariableNames',{'Y5','Y6','Y7', 'Y8'}, 'RowNames',{'fY(y)'})
```

TY = 1×4 table

	Y5	Y6	Y7	Y8
1 fY(y)	0.0833	0.3333	0.4167	0.1667

```
y = sym(MarginalY)
```

y =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1.2 FORVENTNINGSVÆRDI

Vis at de i opgavebeskrivelsen givet udtryk er korrekt.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X(x = x_i)$$

```
estimationX = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    estimationX = estimationX + (n * MarginalX(n));
end

disp("E[X] = " + estimationX);
```

E[X] = 2

```
offset = 4;
estimationY = 0;

for n = 1:length(MarginalY)
    estimationY = estimationY + ((n + offset) * MarginalY(n));
end
```

```
disp("E[Y] = " + estimationY);
```

```
E[Y] = 6.6667
```

```
offset = 4;
estimationXY = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    for j = 1:length(MarginalY)
        estimationXY = estimationXY + ((n * (j + offset)) * data(j, n));
    end
end

disp("E[XY] = " + estimationXY);
```

```
E[XY] = 13.3333
```

```
estimationXSquared = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    estimationXSquared = estimationXSquared + ((n^2) * MarginalX(n));
end

disp("E[X^2] = " + estimationXSquared);
```

```
E[X^2] = 4.6667
```

```
offset = 4;
estimationYSquared = 0;

for n = 1:length(MarginalY)
    estimationYSquared = estimationYSquared + ((n + offset)^2 * MarginalY(n));
end

disp("E[Y^2] = " + estimationYSquared);
```

```
E[Y^2] = 45.1667
```

1.3 KORRELATIONS KOEFFICIENT

Hvad er korrelationskoefficienten for X og Y?

$$\rho = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2, \quad \sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$\rho = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sqrt{E[X^2] - E[X]^2} \cdot \sqrt{E[Y^2] - E[Y]^2}}$$

```
upper = estimationXY - (estimationX * estimationY);

sigmaX = sqrt(estimationXSquared - estimationX^2);
```

```
sigmaY = sqrt(estimationYSquared - estimationY^2);

correlation = upper / (sigmaX * sigmaY);

disp("p = " + correlation);
```

```
p = 0
```

1.4 KORRELEREDE VARIABLE

Er de stokastiske variable X og Y korrelerede?

Da korrelationskoefficienten er lig med 0, er X og Y ukorrelerede.

1.5 UAFHÆNGIGHED

Er de stokastiske variable X og Y uafhængige?

```
if MarginalX(1) * MarginalY(1) == data(1, 1)
    disp("X og Y er uafhængige, da fx(x) * fy(y) er identisk med fxy(x, y)");
else
    disp("X og Y er ikke uafhængige, da fx(x) * fy(y) ikke er identisk med fxy(x, y)");
end
```

```
X og Y er ikke uafhængige, da fx(x) * fy(y) ikke er identisk med fxy(x, y)
```

1.6 BETINGET SANDSYNLIGHED

Opskriv den betinget sandsynlighed for

$$f_{X|Y}(x|y = 6)$$

Den betinget sandsynlighed kan opskrives som

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

```
for n = 1:3
    probabilityX(n) = data(6 - offset, n) / MarginalY(6 - offset);
    names(n) = cellstr(("X" + num2str(n)));
end

TP = array2table(probabilityX, 'VariableNames', names, 'RowNames',{'fX|Y(x|y)'})
```

TP = 1×3 table

	X1	X2	X3
1 fX|Y(x|y)	0.5000	0	0.5000

```
prob = sym(probabilityX)
```

prob =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

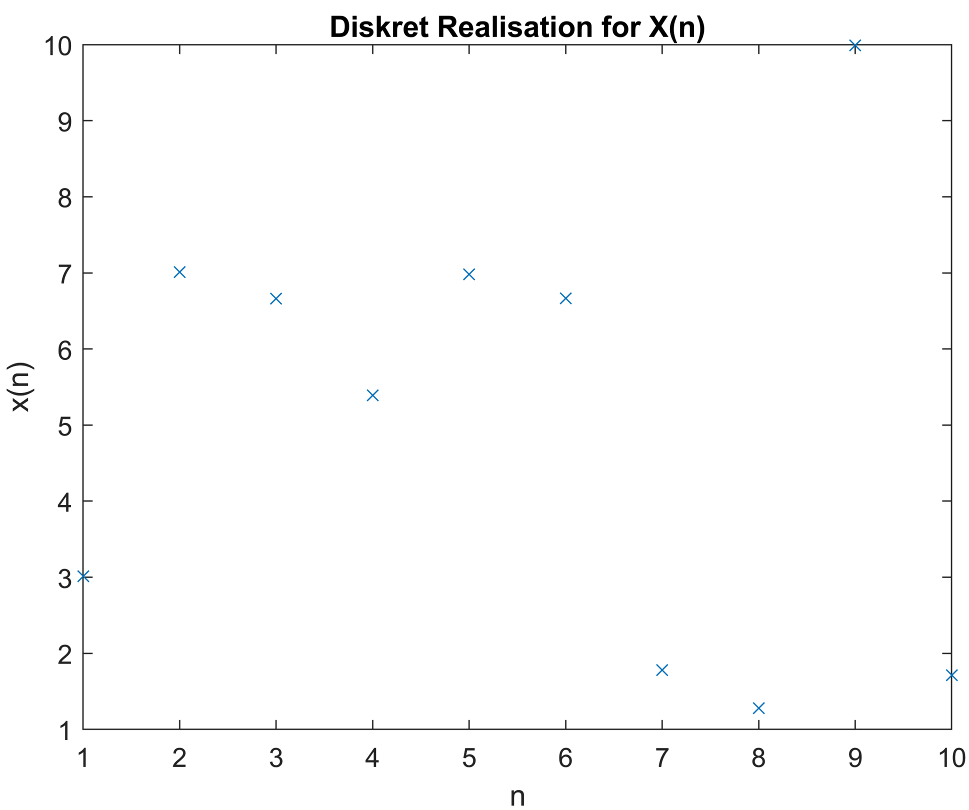
2 STOKASTISKE PROCESSER

En diskret process er givet ved X(n) = w(n), w(n) angives desuden til at være i.i.d efter en uniform fordeling med w(n) ~ U(0, 10).

2.1 SKITSERING AF REALISATION

Skitser 10 samples af en realisation af processen X(n) for n = 1.. 10.

```
mu = 0;
sigma = 10;

realisation = sigma * rand(1, 10) + mu;

figure(1)
plot(1:length(realisation), realisation, 'x');
title('Diskret Realisation for X(n)')
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
```



2.2 MIDDELVÆRDI OG VARIANS

Bestem ensemble middelværdien og variansen for processen X(n).

$$E[X(n)] = E[w(n)]$$

da processen er uniform fordelt gælder følgende for $w = \mu(a, b)$

$$E[X(n)] = \frac{a+b}{2}$$

Som omskrevet bliver til

$$E[X(n)] = \frac{1}{2}(a+b)$$

```
ensembleMean = (1/2) * (mu + sigma);

disp("Ensemble middelværdien for processen er " + ensembleMean);
```

```
Ensemble middelværdien for processen er 5
```

for variansen af en uniform fordeling gælder følgende for $w = \mu(a, b)$

$$\mathrm{var}(w) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

```
ensembleVariance = (1/12) * (sigma - mu)^2;

disp("Ensemble variansen for processen er " + ensembleVariance);
```

```
Ensemble variansen for processen er 8.3333
```

```
sym(ensembleVariance)
```

ans =

$$\frac{25}{3}$$

2.3 AUTOKORRELATION

Bestem autokorrelationsfunktionen Rxx(t) for processen X(n) for t = 0.. 3.

For korrelationen til n = 0 gælder der, at

$$R_{XX}(n) = E[X(n) \cdot X(n)]$$

Da der for variansen gældet, at

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Kan korrelation omskrives til følgende

$$R_{XX}(n) = \mathrm{var}(X) + E[X]^2$$

```
n = 0;

correlation(n + 1) = ensembleVariance + ensembleMean^2;
```

Hvor der for autokorrelationen til n > 0 gælder, at

$$R_{XX}(n) = E[X(n) \cdot X(n+1)],\ n > 1$$

Kan omskrives til

$$R_{XX}(n) = E[X(n)] \cdot E[X(n+1)]$$

da processen er uniform fordelt gælder følgende for $w = \ \mu(a, b)$

$$E[X(n)] = \frac{a+b}{2}$$

således bliver det til følgende

$$R_{XX}(n) = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

w(n) og w(n + 1) er uafhængige grundet i.i.d.

```
for n = 1:3
    correlation(n + 1) = ((mu + sigma) / 2)^2;
end

correlation = sym(correlation)
```

```
correlation =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{100}{3} & 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}$$

2.4 PROCESSEN

Angiv om processen er WSS (stationær i den bredde forstand) og om den er ergodisk.

Da middelværdien $E[X(n)]$er uafhængig af n og konstant samt variancen er uafhængig af n og konstant, kan processen siges at være stationær i den bredde forstand.Samtidig er processen ergodisk da den ikke er tidsahængig samt middelværdien og variansen for ensemble ikke ændres. Disse værdier kan opnås ved en enkelt realisering og vil for flere realiseringer være den samme.

3 SANDSYNLIGHED

Laktoseintolerans er tilstede hos 20% af den finske befolkning. Hvis en finne har laktoseintolerans, vil en test give en positiv test i 90% af tilfældene. Hvis finnen ikke har sygdommen, vil testen give en positiv test i 30% af tilfældene.

3.1 TOTAL SANDSYNLIGHED

Event A: Laktoseintolerent

Event B: Positiv Test

$$P(A) = 0.2, \quad P(B|A) = 0.9, \quad P(B|\overline{A}) = 0.3$$

Den totale sandsynlighed kan findes udtryk som følgende:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

```
Intolerant = 0.2;
IntolerantPositiveTest = 0.9;
NoIntolerantPositiveTest = 0.3;
NotIntolerant = 1 - Intolerant;

PositiveTest = (IntolerantPositiveTest * Intolerant) + (NoIntolerantPositiveTest * NotIntolerar

disp("Den totale sandsynlighed for en positiv test er: " + PositiveTest);
```

```
Den totale sandsynlighed for en positiv test er: 0.42
```

3.2 BETINGET SANDSYNLIGHED

For at finde sandsynligheden for at have en positiv test same også at have sygdommen kan findes ved at anvende bayes formel som nedenstående:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

```
IntolerantGivenPositiveTest = (IntolerantPositiveTest * Intolerant) / PositiveTest;

disp("Sandsynligheden for at en finne har en positiv test og samtidig har sygdommen er: " + Int
```

```
Sandsynligheden for at en finne har en positiv test og samtidig har sygdommen er: 0.42857
```

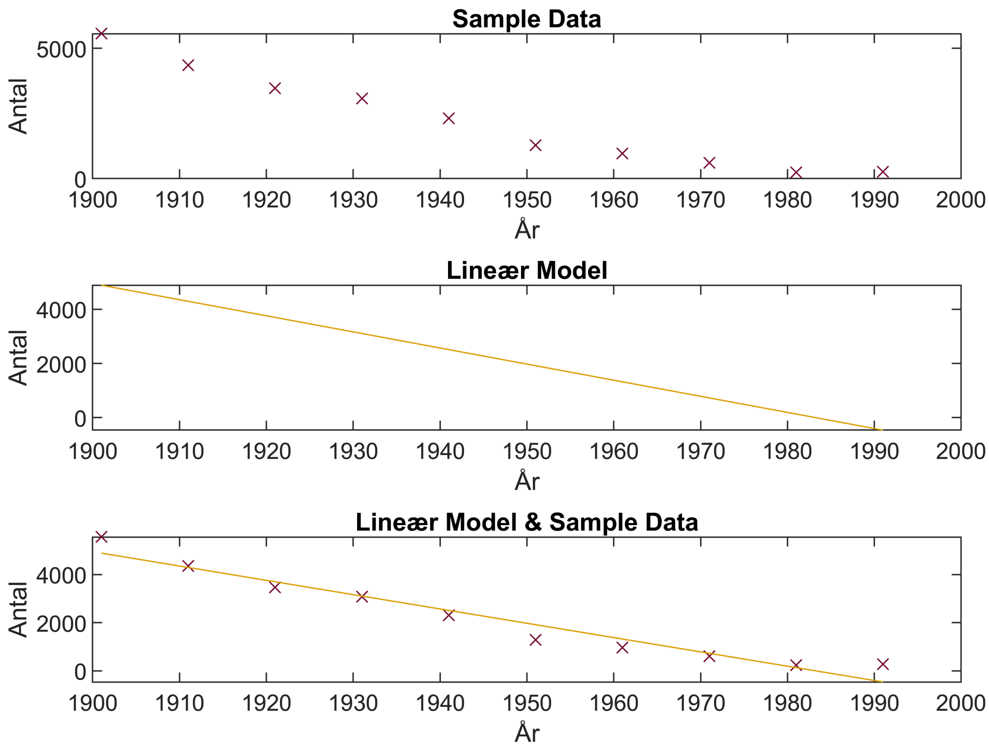
4 STATISTIK

4.1 PLOT

Plot data fra tabellen, og optegn den bedste rette linie gennem punkterne ved at bestemme skæringen med y-aksen og hældningen af den lineære model. Angiv hvilken metode, der er anvendt til at finde den lineære model.

```
Year = [1901, 1911, 1921, 1931, 1941, 1951, 1961, 1971, 1981, 1991];
Amount = [5562, 4357, 3471, 3078, 2309, 1285, 969, 602, 238, 268];
```

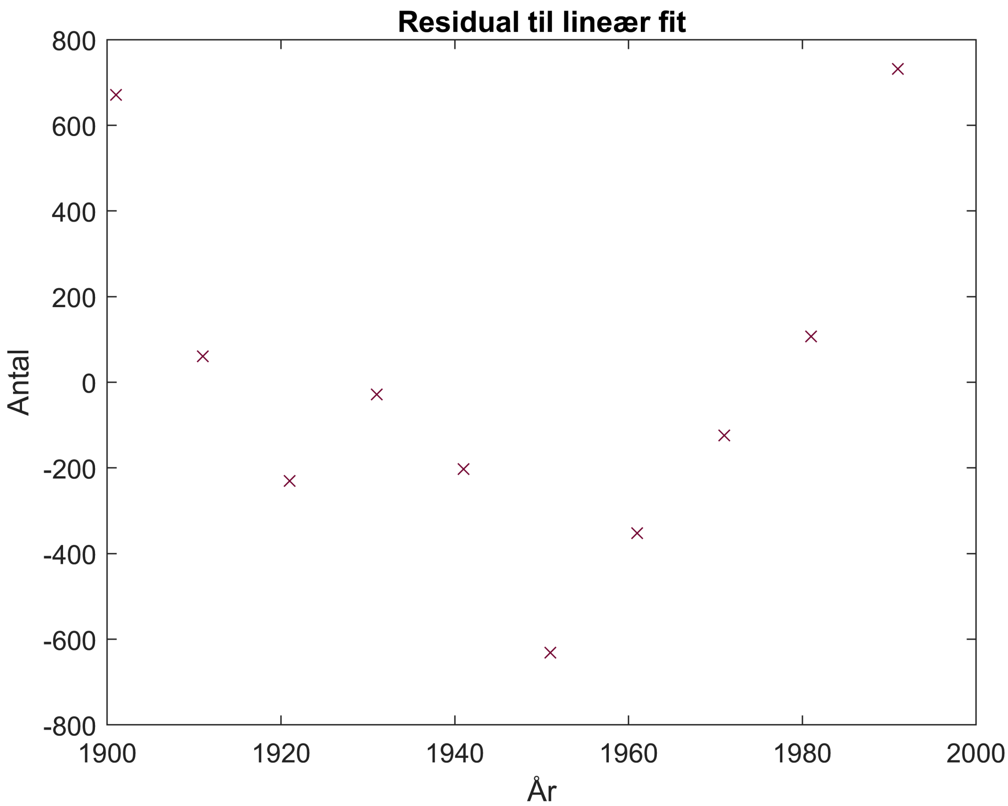
```
SampleMean = mean(Amount);
YearMean = mean(Year);


beta = sum((Amount - SampleMean) .* (Year - YearMean)) / sum((Year - YearMean).^2);

alpha = SampleMean - beta * YearMean;

Fitting = beta * Year + alpha;


figure(2)
subplot(3,1,1,gca)
plot(Year, Amount, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
title('Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Antal');

subplot(3,1,2)
plot(Year, Fitting, 'Color', Color.BurntYellow);
title('Lineær Model');
xlabel('År');
ylabel('Antal');

subplot(3,1,3)
plot(Year, Amount, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
hold on
plot(Year, Fitting, 'Color', Color.BurntYellow);
title('Lineær Model & Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Antal');
hold off
```



4.2 RESIDUAL TEGNING

$$\mathrm{res}(t) = X(t) - (\alpha + \beta \cdot t)$$

```
Residuals = Amount - (alpha + beta * Year);

figure(5)
plot(Year, Residuals, 'kx', 'Color', Color.DeepCleret);
title('Residual til lineær fit');
xlabel('År');
ylabel('Antal');
```



4.3 KONFIDENSINTERVAL

Beregn et 95% konfidensinterval for hældningen.

invers student t fordeling med frihedsgraden n - 2 = 8, og 95% konfidensinterval bestemms t_0 til at være som følgende.

```
Tzero = tinv(0.975, 8);
EmpiricalVariance = (1 / (10 - 2)) * sum((Amount - (alpha + beta * Year)).^2);

interval = Tzero * (sqrt(EmpiricalVariance) / sqrt(sum((Year - YearMean).^2)));

BetaMinus = beta - interval;
BetaPlus = beta + interval;
```

4.4 LINEARITET

Ud fra svaret i opgave 2 og 3, vil du konkludere at antagelsen om linearitet mellem dødelighed og årstal er rimelig?

Der er umiddelbart for få målepunkter til at kunne konkludere noget generelt. Derimod er der en lineær tendens, men residual plottet viser at residualerne systematisk ligger under 0 mellem år 1920 - 1970, desuden vil data forvente at afvige mere efter år 1991, da dødeligheder ikke kan være negative. Linearitet er ikke en god antagelse.