ETS4P Opgave 1: Stokastiske variable F16

① Tæthedsfunktionen er givet ved:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

for:

$2 \geq x$ $\quad \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0$

for:

$2 < x \leq 5$ $\quad \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\, k\cdot x - \frac{2}{3}}{dx} = k$

for

$5 < x$ $\quad \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0$

derved:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & 2 \geq x \\ k & 2 < x \leq 5 \\ 0 & 5 < x \end{cases}$$

② $f_X(x)$ er en gyldig pdf når:

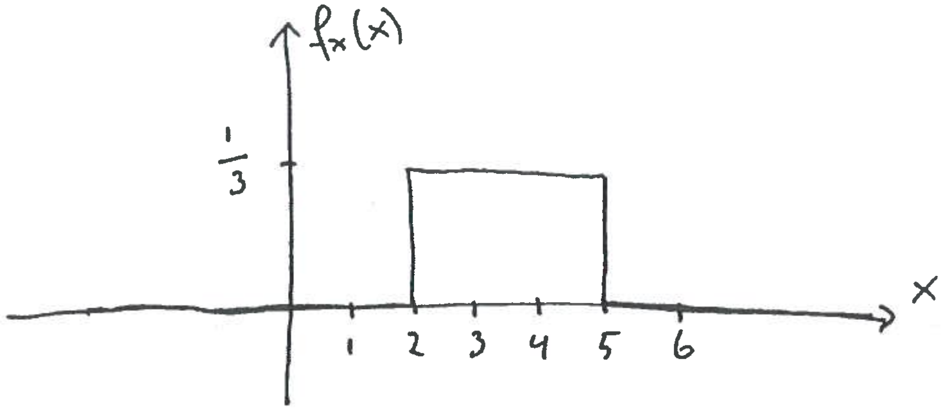
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_2^5 k\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{3}}}$$

Opgave 1: Stokastiske variable
(fortsat)

(3) skitse af tæthedsfunktion $f_X(x)$



Uniform fordeling $U[2, 5]$

(4) Beregning af $Pr(x \geq 3)$.

$Pr(x<3) = F_X(3)$ $\qquad$ $Pr(x \geq 3) = 1 - Pr(x<3)$

$Pr(x \geq 3) = 1 - F_X(x=3) = 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$$\underline{\underline{Pr(x \geq 3) = \frac{2}{3}}}$$

(5) Forventningsværdi:

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_2^5 \frac{1}{3} \cdot x \, dx$

$= \frac{7}{2}$

tabel opslag (uniform fordeling)

$E[x] = \frac{a+b}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

$$\underline{\underline{E[x] = \frac{7}{2}}}$$

Opgave 1: stokastiske Variable

⑤ (fortsat)

Varians af X:

$$Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_x(x)\, dx$$

$$= \int_2^5 x^2 \cdot \frac{1}{3}\, dx$$

$$= 13 \qquad var(x) = 13 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

tabel opslag (uniform fordeling)

$$var(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{Var(x) = \frac{3}{4}}}$$

ETSMP

OPGAVE 2: stokastiske processer

1) plot 5 realisationer

$$X(t) = \omega + 4 \qquad \omega \sim \mathcal{N}(5,1)$$

$$= \tilde{\omega} + 9 \qquad \tilde{\omega}\ \mathcal{N}(0,1)$$

$\tilde{\omega}$ trækkes fra en normalt fordeling med middel 0, og varians 1.

se matlab kode:

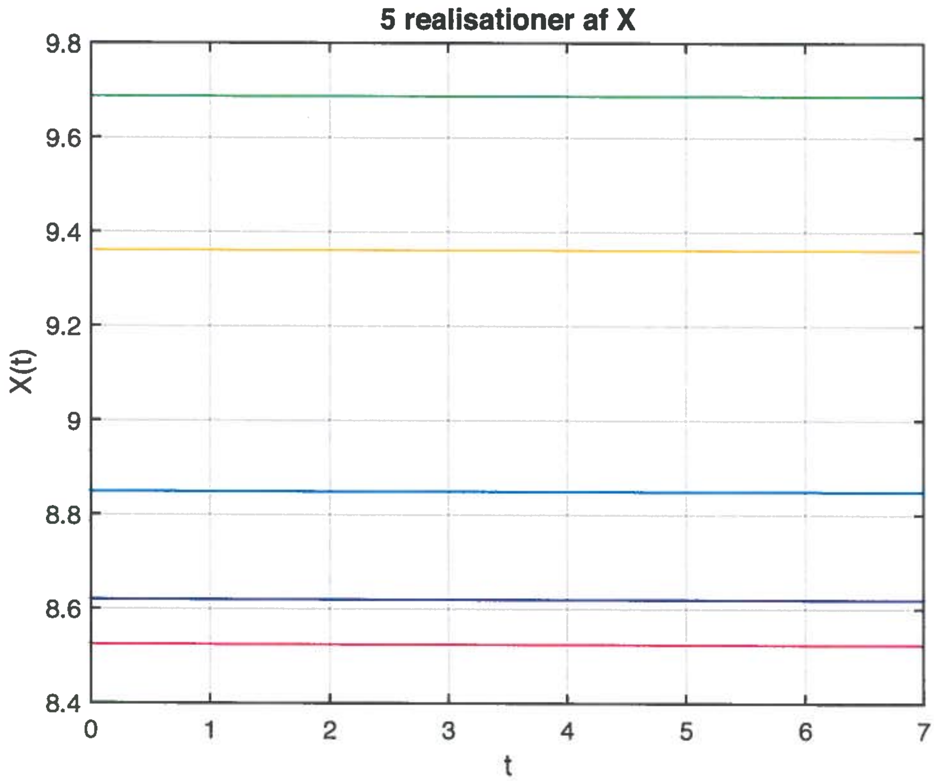
```
close all
% Generer w:

w=randn(1,5)+5;
t=0:7;

x1=w(1)+4;
x2=w(2)+4;
x3=w(3)+4;
x4=w(4)+4;
x5=w(5)+4;

plot(t,ones(1,length(t))*x1)
grid
hold on
plot(t,ones(1,length(t))*x2)
plot(t,ones(1,length(t))*x3)
plot(t,ones(1,length(t))*x4)
plot(t,ones(1,length(t))*x5)
```

De 5 realisationer er plottet: bilag A.



5 realisationer af X
9.8
9.6
9.4
9.2
9
8.8
8.6
8.4
X(t)
0
1
2
3
4
5
6
7
t

ETSMP

OPGAVE 2: Stokastiske Processer

2) Ensemble middelværdien:

$$E[X(t)] = E[w] + E[4]$$
$$= 5 + 4 = \underline{\underline{9}}$$

Ensemble variansen:

$$var[X(t)] = var[w] + var[4]$$
$$= 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

3) Vi udvælger 1 realisation fra Bilag A:

$x(t) = 5,7 + 4$ udvælges

middelværdi:

$$\underline{\underline{E[x(t)] = E[5,7 + 4] = 9,7}}$$

Varians:

$$\underline{\underline{var[x(t)] = var[5,7 + 4] = 0}}$$

ETSMP

OPGAVE 2: Stokastiske Processer

4) $X(t)$ er stationær i den brede forstand, da ensemble middelværdien $E[X(t)]$ ikke er tidsafhæng, samt at variansen $var[X(t)]$ heller ikke er tidsafhængig.

$X(t)$ er ikke ergodisk, da én realisation ikke siger noget om middelværdi og varians af hele processen $X(t)$.

ETS MP

OPGAVE 3: Sandsynligheds regning

Hændelse A: Pige

Hændelse B: dreng

Hændelse C: vægt over 4000 g.

$Pr(C \mid A) = 0{,}128$ $\qquad$ $Pr(C \mid B) = 0{,}202$

1) sandsynligheden for hændelse A:

$$Pr(A) = \frac{28.131}{28.131 + 29.785} = \underline{\underline{0{,}4857}}$$

2) $Pr(B) = 1 - Pr(A) = 0{,}5143$

$$Pr(C) = Pr(C \mid A)\,Pr(A) + Pr(C \mid B)\,Pr(B)$$

$$= 0{,}128 \cdot 0{,}4857 + 0{,}202 \cdot 0{,}5143$$

$$\underline{\underline{Pr(C) = 0{,}1661}}$$

3) sandsynligheden for pige, hvis vægt over 4000 g: $Pr(A \mid C)$

$$Pr(A \mid C) = \frac{Pr(C \mid A)\,Pr(A)}{Pr(C)} = \frac{0{,}128 \cdot 0{,}4857}{0{,}1661}$$

$$\underline{\underline{Pr(A \mid C) = 0{,}3744}}$$

ETS MP

OPGAVE 4: Statistik

19 kvinder, 35 mænd

$\hat{\mu}_1 = 1{,}68\ m$ $\quad s_1^2 = 0{,}10\ m^2$ $\quad n_1 = 19$

$\hat{\mu}_2 = 1{,}78\ m$ $\quad s_2^2 = 0{,}20\ m^2$ $\quad n_2 = 35$

1) Hypotese test

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2) Da varianserne er ukendte og data er normal-fordelt, bruges en t-test på forskellen af middelværdierne.

3) Estimation af forskellen på middel-værdierne:

$$\hat{\delta} = |\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2| = |1{,}68\ m - 1{,}78\ m| = 0{,}10\ m$$

Estimation af standard afvigelsen:

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(19-1) 0{,}1 + (35-1) 0{,}2}{19 + 35 - 2}}$$

$$= \underline{\underline{0{,}407}}$$

ETS MP

OPGAVE 4: Statistik

4) t-test:

test parameter

$$t = \frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)}{s\left(\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\right)} = \frac{0,1}{0,\ \left(\sqrt{1/19 + 1/35}\right)}$$

$$= -0,8629 \sim t(19+35-2)$$

$$t_{cdf}(0,8629, 52) = 0,8039$$

Approximativ p-værdi (dobbelt-sidet)

$$\tilde{p} = 2(1 - t_{cdf}(0,8629, 52)) = 0,3922$$

Vi kan ikke afvise Null hypotesen fordi

$$\tilde{p} > 0,05.$$

5) 95% konfidens interval for δ

$$\delta_- = |\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2| - t_0 \cdot s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$t_0 = tinv(0,975, 52) = 2,0066$$

$$\delta_- = 0,1 - 2,01 \cdot 0,407\sqrt{\frac{1}{35} + \frac{1}{19}} = \underline{\underline{-0,33}}$$

$$\delta_+ = |\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2| + t_0 \cdot s\sqrt{\frac{1}{35} + \frac{1}{39}} = \underline{\underline{0,13}}$$