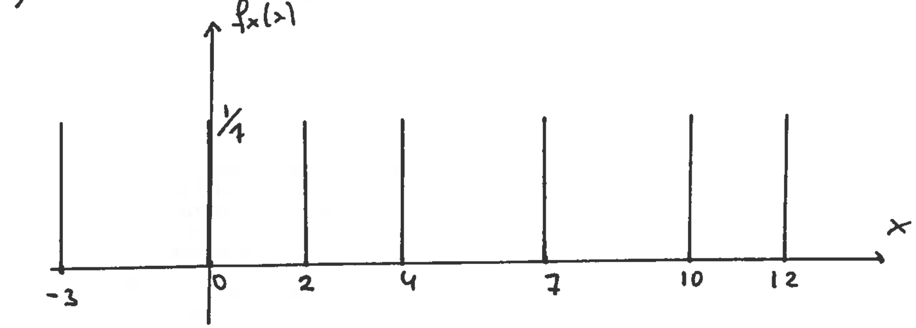
opgave 1: Stokastiske variable

① For at $f_x(x)$ er en gyldig tæthedsfunktion, har vi at $\sum f_x(x) = 1$.

derved: $\sum f_x(x) = k+k+k+k+k+k+k = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{7}}}$

②



③ Forventningsværdien af x:

$E|x| = \sum x \cdot f_x(x) = \frac{1}{7}(-3+0+2+4+7+10+12) = \underline{\underline{4,57}}$

varians:

$var(x) = E|x^2| - E|x|^2$

$E|x^2| = \sum x^2 \cdot f_x(x) = \frac{1}{7}((-3)^2+0^2+2^2+4^2+7^2+10^2+12^2) = 46$

$var(x) = E|x^2| - E|x|^2 = 46 - 4,57^2 = \underline{\underline{25}}$

Opgave 1 (fortsat)

④ Beregn $Pr(x \geq 2) = f_x(x=2) + f_x(x=4) + f_x(x=7) + f_x(x=10) + f_x(x=12)$

$= \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$

Beregn $Pr(x > 2) = f_x(x=4) + f_x(x=7) + f_x(x=10) + f_x(x=12)$

$= \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$

⑤ Fordelingsfunktion for x:

Vi har $F_x(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

$F_x(x=-3) = \sum_{x_i \leq -3} f_x(x_i) = f_x(x=-3) = \frac{1}{7}$

$F_x(x=0) = \sum_{x_i \leq 0} f_x(x_i) = f_x(x=-3) + f_x(x=0) = \frac{2}{7}$

osv., derved:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ \frac{1}{7} & -3 \leq x < 0 \\ \frac{2}{7} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{3}{7} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{4}{7} & 4 \leq x < 7 \\ \frac{5}{7} & 7 \leq x < 10 \\ \frac{6}{7} & 10 \leq x < 12 \\ \frac{7}{7} & 12 \leq x \end{cases}$$

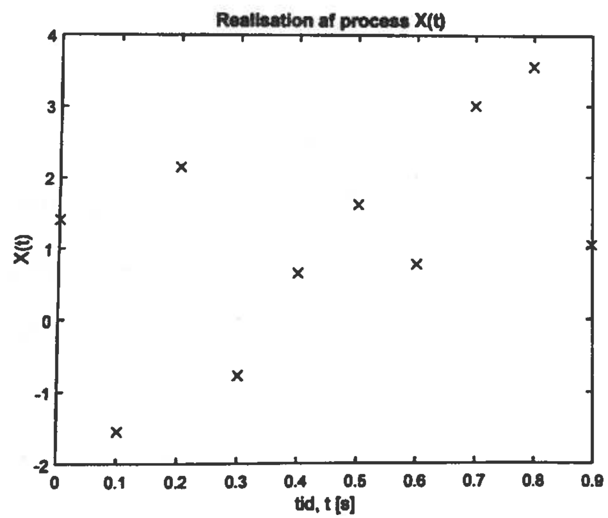
~~Opgave~~ Opgave 2: Stokastiske processer.

① Skitse af process $X(t)$

$$X(t) = w(t)$$

$$w(t) \sim \mathcal{N}(t, 1)$$

```
1 t=0:0.1:0.9;
2 X=randn(1,length(t))+t;
3
4 plot(t,X,'x')
5 grid
6 xlabel('tid, t [s]')
7 ylabel('X(t)')
8 title('Realisation af process X(t)')
```



ETSMP Re-eksamen F16

Opgave 2 (fortsat)

② Ensemble middel:

fordi $w(t)$ har en middelværdi på t,

fås:

$$E[x(t)] = E[w(t)] = \underline{\underline{t}}$$

Ensemble varians

fordi $w(t)$ har en varians på 1,

fås:

$$Var(x(t)) = Var(w(t)) = \underline{\underline{1}}$$

③ Tidslig middelværdi for en realisation i interval $t \doteq [0; 100]$, forventes:

$$\hat{X} = \frac{1}{100}\int_0^{100} E[x(t)]\, dt = \frac{1}{100}\int_0^{100} t\, dt$$

$$\underline{\underline{= 50}}$$

④ processen er ikke stationær, da middelværdien afhænger af tiden t.
Fordi den ikke er stationær kan den heller ikke være ergodisk.

5. Opstilling af udregning af autokorrelation:

$$R_{x(t_1)x(t_2)}(t_1=1,\ t_2=2)$$

$$= \int_{x(t_1)} \int_{x(t_2)} x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot f_{x(t_1)\,x(t_2)}(x(t_1), x(t_2)) \cdot dx(t_1)\, dx(t_2)$$

da $x(t_1)$ og $x(t_2)$ er uafhængig.

$$R_{x(1)x(2)}(t_1=1, t_2=2) = E[x(1)]\,E[x(2)]$$

$$= t\Big|_{t=1} \cdot t\Big|_{t=2} = \underline{\underline{1 \cdot 2 = 2}}$$

Opgave 3: Sandsynlighedsregning

Hændelse A: Barn flyttet mere end én gang.

Hændelse B: Begår kriminalitet.

$Pr(B|A) = 0{,}06$ $\qquad Pr(B|\bar{A}) = 0{,}03$

$Pr(A) = 0{,}31$ $\qquad Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A) = 0{,}69$

1. total sandsynlighed for B

$$Pr(B) = Pr(B, A) + Pr(B, \bar{A})$$

$$= Pr(A)\,Pr(B|A) + Pr(\bar{A})\,Pr(B|\bar{A})$$

$$= 0{,}31 \cdot 0{,}06 + 0{,}69 \cdot 0{,}03 = \underline{\underline{0{,}0393}}$$

2. Find $Pr(A|B)$

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)\,Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}31}{0{,}0393}$$

$$= \underline{\underline{0{,}47}}$$

Opgave 4: statistik

① Vi definerer gruppe 1 som gruppen af hvaler døde : fangenskab og gruppe 2 som gruppen af hvaler døde : det fri

Null hypotese

$$\underline{\underline{H_0: \mu_1 = \mu_2}}$$

hvor μ_1 er middelværdi for gruppe 1, og μ_2 er middelværdi for gruppe 2.

Alternativ hypotese

$$\underline{\underline{H_1: \mu_1 \neq \mu_2}}$$

② Testen bør være uparret, da data ikke er parret sammen.

Opgave 4: statistik

③ Estimation af middelværdier

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} x1_i = \frac{1}{10}(7+2+1+3+15+6+14+1+5+9) = \underline{\underline{6,3}}$$

$N_1 = 10$ antal hvaler i gruppe 1.

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} x2_i = \frac{1}{10}(50+43+11+35+7+62+70+67+25+1) = \underline{\underline{37,1}}$$

$N_2 = 10$ antal hvaler i gruppe 2.

④ Estimation af varians

$$s_1^2 = \frac{1}{N_1-1}\sum_{i=1}^{N_1}(x1_i - \hat{\mu}_1)^2 = \underline{\underline{25,57}}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{N_2-1}\sum_{i=1}^{N_2}(x2_i - \hat{\mu}_2)^2 = \underline{\underline{648,77}}$$

Pooled varians

$$s_p^2 = \frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2} = \underline{\underline{337,17}}$$

Opgave 4: Statistik.

(5) Uparret t-test:

$$t = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p = \sqrt{s_p^2} = \sqrt{337{,}17} = 18{,}36$$

$$t = \frac{6{,}3 - 37{,}1}{18{,}36\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -3{,}75 \sim t(10+10-2)$$

p-værdi: (2 - sidet)

$$\tilde{p} = 2(1 - t_{cdf}(3{,}75, 18)) = 0{,}0015$$

da $t_{cdf}(3{,}75, 18) = 0{,}9993$

da $\tilde{p}$ er mindre end 0,05 afvises hypotesen.

(6) 95% konfidensinterval

$$t_0 = t_{inv}(0.975, 18) = 2.101$$

$$\Delta\delta = t_0 \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 2.101 \cdot 18.36 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = 17.3$$

$$\delta_- = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \Delta\delta = 6.3 - 37.1 - 17.3 = -48.1$$

$$\delta_+ = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 + \Delta\delta = 6.3 - 37.1 + 17.3 = -13.5$$

$$\underline{\delta = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2} \in \underline{[-48.1; -13.5]}$$

(6) 95% konfidensintervall

$t_\alpha = \text{tinv}(0.975, 18) = 2.101$

$\Delta\delta = t_\alpha \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 2.101 \cdot 18.36 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = 17.3$

$\delta_- = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \Delta\delta = 6.5 - 37.1 - 17.3 = -48.1$

$\delta_+ = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 + \Delta\delta = 6.5 - 37.1 + 17.3 = -13.5$

$\Rightarrow \delta = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \in [-48.1; -13.5]$