

STOKASTISK MODELLERING

MADS STEINER KRISTENSEN - 201405230

AARHUS UNIVERSITY - AARHUS SCHOOL OF ENGINEERING

TABLE OF CONTENTS

STOKASTISK MODELLERING	1
STOKASTISKE VARIABLE	5
EFTERÅR 2015.....	5
MARGINALE TÆTHEDSFUNKTIONER	5
FORVENTNINGSVÆRDI	6
KORRELATIONS KOEFFICIENT	7
KORRELEREDE VARIABLE	8
UAFHÆNGIGHED	8
BETINGET SANDSYNLIGHED	8
EFTERÅR 2015 REEKSAMEN	8
TÆTHEDSFUNKTION	9
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	9
SANDSYNLIGHEDER	10
FORVENTNINGSVÆRDI	10
EFTERÅR 2016.....	10
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	11
FORDELINGSFUNKTION	11
FORVENTNINGSVÆRDI OG STANDARD AFVIGELSE	12
TRANSFORMATION FORVENTNINGSVÆRDI	13
VÆRDIER X KAN ANTAGE	13
EFTERÅR 2016 REEKSAMEN	13
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	13
FORDELINGSFUNKTION	14
FORVENTNINGSVÆRDI OG VARIANS	14
SANDSYNLIGHED	15
EFTERÅR 2017.....	16
SANDSYNLIGHED	16
TÆTHEDS- OG FORDELINGSFUNKTION	16
MIDDELVÆRDI	18
VARIANS	18
EFTERÅR 2018.....	19
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	19
FORDELINGSFUNKTION	19
MIDDELVÆRDI	21
VARIANS	21
FORÅR 2016.....	21
TÆTHEDSFUNKTION	21
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	22
SKITSE AF TÆTHEDSFUNKTION	22
SANDSYNLIGHED	23
FORVENTNINGSVÆRDI & VARIANS	24
FORÅR 2016 REEKSAMEN	24
GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION	24
SKITSERING AF TÆTHEDSFUNKTION	25
FORVENTNINGSVÆRDI OG VARIANS	26
SANDSYNLIGHEDER	27

FORDELINGSFUNKTION.....	27
FORÅR 2017.....	28
GYLDIG FORDELINGSFUNKTION.....	28
TÆTHEDSFUNKTION.....	29
MIDDELVÆRDI.....	29
VARIANS.....	29
FORÅR 2017 REEKSAMEN.....	30
GYLDIG FORDELINGSFUNKTION.....	30
TÆTHEDSFUNKTION.....	30
SANDSYNLIGHED	31
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	32
FORÅR 2018.....	33
2.1 GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION.....	33
2.2 MIDDELVÆRDI.....	34
2.3 VARIANS.....	34
2.4 FORDELINGSFUNKTION.....	35
FORÅR 2018 REEKSAMEN.....	35
STOKASTISKE PROCESSER.....	35
EFTERÅR 2015.....	35
SKITSERING AF REALISATION.....	35
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	36
AUTOKORRELATION.....	37
PROCESSEN.....	38
EFTERÅR 2015 REEKSAMEN.....	38
SKITSERING AF REALISATION.....	38
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	39
PROCESSEN.....	39
EFTERÅR 2016.....	40
SKITSERING AF SAMPLES.....	40
ENSEMBLE MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	40
TIDSLIGE MIDDELVÆRDI.....	41
PROCESSEN.....	41
EFTERÅR 2016 REEKSAMEN.....	41
SKITSERING AF SAMPLES.....	41
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	42
AUTOKORRELATION.....	43
PROCESSEN.....	43
EFTERÅR 2017.....	43
REALISATION.....	43
ENSEMBLE.....	44
PROCESSEN.....	44
EFTERÅR 2018.....	44
REALISERING.....	45
ENSEMBLE.....	45
PROCESSEN.....	46
FORÅR 2016.....	46
REALISERING.....	46
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	47
REALISERINGS MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	48
PROCESSEN.....	48
FORÅR 2016 REEKSAMEN.....	48
REALISERING.....	48
ENSEMBLE.....	49

TEMPORAL MEAN.....	49
PROCESSEN.....	50
AUTOKORRELATION.....	50
FORÅR 2017.....	50
REALISERING.....	50
MIDDEL OG VARIANS AF REALISERING.....	51
ENSEMBLE MIDDLEVÆRDI OG VARIANS.....	52
PROCESSEN.....	52
FORÅR 2017 REEKSAMEN.....	52
REALISERING.....	53
REALISERING MIDDLEVÆRDI OG VARIANS.....	53
MIDDLEVÆRDI OG VARIANS.....	54
PROCESSEN.....	54
FORÅR 2018.....	54
REALISERING.....	54
ENSEMBLE MIDDLEVÆRDI.....	56
3.3 ENSEMBLE VARIANS.....	56
TIDSLIG MIDDLEVÆRDI.....	56
PROCESSEN.....	57
FORÅR 2018 REEKSAMEN.....	57
SANDSYNLIGHED.....	57
EFTERÅR 2015.....	57
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	57
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	58
EFTERÅR 2015 REEKSAMEN.....	58
RELATIVE FREKvens.....	58
FÆLLESMÆNGDE.....	58
UAFHÆNGIGHED.....	59
KOMBINATIONER.....	59
EFTERÅR 2016.....	59
FÆLLESMÆNGDE.....	59
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	60
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	60
UAFHÆNGIGHED.....	60
EFTERÅR 2016 REEKSAMEN.....	60
VENN DIAGRAM.....	60
FÆLLESMÆNGDE.....	61
FORENINGSMÆNGDE.....	61
SAMLET FORENINGSMÆNGDE.....	62
EFTERÅR 2017.....	62
MARGINALE MASSEFUNKTION.....	62
MARGINALE MASSEFUNKTION.....	62
MARGINALE MASSEFUNKTION.....	63
BETINGET MASSEFUNKTION.....	63
EFTERÅR 2018.....	63
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	63
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	64
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	64
FORÅR 2016.....	64
RELATIVE FREKvens.....	64
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	65
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	65
FORÅR 2016 REEKSAMEN.....	65

TOTAL SANDSYNLIGHED.....	66
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	66
FORÅR 2017.....	66
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	66
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	67
KOMBINATORIK.....	67
FORÅR 2017 REEKSAMEN.....	67
RELATIVE FREKVENS.....	68
FÆLLESMÆNGDE.....	68
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	69
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	69
FORÅR 2018.....	69
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	70
TOTAL SANDSYNLIGHED.....	70
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	70
BETINGET SANDSYNLIGHED.....	70
FORÅR 2018 REEKSAMEN.....	71
STATISTIK.....	71
EFTERÅR 2015.....	71
PLOT.....	71
RESIDUAL TEGNING.....	72
KONFIDENSINTERVAL.....	73
LINEARITET.....	73
EFTERÅR 2015 REEKSAMEN.....	74
PLOT DATA.....	74
RESIDUALTEGNING.....	75
STATISTISK TEST.....	76
EFTERÅR 2016.....	76
MIDDELVÆRDI OG VARIANS.....	76
LINEÆR REGRESSION.....	77
RESIDUAL TEGNING.....	78
KONFIDENSINTERVAL FOR HÆLDNINGEN.....	79
LINEARITET.....	79
LINEÆRE MODEL.....	79
EFTERÅR 2016 REEKSAMEN.....	79
NULL HYPOTESE.....	80
PARRET EL. UPARRET.....	80
MIDDEL FORSKELLEN.....	80
VARIANS.....	80
T-TEST.....	80
KONFIDENSINTERVAL.....	81
EFTERÅR 2017.....	81
SANDSYNLIGHED EN TIME.....	81
SANDSYNLIGHED FIRE TIMER.....	82
ESTIMEREDE ANTAL ORDRER.....	82
OBSERVERET VS. ANTAGELSE.....	82
KONFIDENSINTERVAL.....	83
EFTERÅR 2018.....	83
ESTIMERET FORBEDRING.....	83
STATISTIK TEST.....	84
HYPOTESER.....	84
SAMPLE VARIANS.....	84
P-VÆRDIEN.....	84

KONFIDENSINTERVALLET	85
SIGNIFIKANSNIVEAU	85
FORÅR 2016	85
HYPOTESE	85
STATISTIK TEST	86
ESTIMERING AF VÆRDIER	86
T-TEST	86
KONFIDENSINTERVAL	86
FORÅR 2016 REEKSAMEN	87
HYPOTESER	87
PARRET VS. UPARRET	87
ESTIMERING AF MIDDELVÆRDI	87
ESTIMERING AF VARIANS	88
UPARRET T-TEST	88
KONFIDENSINTERVAL	89
FORÅR 2017	89
HYPOTESER	89
ESTIMERING AF FORSKEL I MIDDELVÆRDI	90
ESTIMERING AF VARIANSEN FOR FORSKELLEN	90
T-TEST	90
KONFIDENSINTERVAL	90
FORÅR 2017 REEKSAMEN	91
HYPOTESE	91
MIDDELVÆRDI	91
Z-TEST	92
KONFIDENSINTERVAL	92
FORÅR 2018	92
ESTIMERET SUCCESRATE - SANDSYNLIGHED	93
TEST STATISTIK	93
P-VÆRDI	93
KONFIDENSINTERVAL	94
TEST AF DATASÆT	94
NULL HYPOTESE - TEST MV	94
FORÅR 2018 REEKSAMEN	96

STOKASTISKE VARIABLE

EFTERÅR 2015

MARGINALE TÆTHEDSFUNKTIONER

Vis at de marginale tæthedsfunktioner for X og Y er givet som i tabellerne i opgavebeskrivelsen.

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y), \quad f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y)$$

```
data = [
    [0,      1/12,    0    ],
    [2/12,   0,       2/12],
    [2/12,   1/12,   2/12],
    [0,      2/12,   0    ]]
```

```
];
MarginalX = sum(data);
MarginalY = sum((data'));

TX = array2table(MarginalX, 'VariableNames',{'X1','X2','X3'}, 'RowNames',{'fX(x)'})
```

TX = 1x3 table

	X1	X2	X3
1 fX(x)	0.3333	0.3333	0.3333

```
x = sym(MarginalX)
```

```
x =
```

$$\left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right)$$

```
TY = array2table(MarginalY, 'VariableNames',{'Y5','Y6','Y7','Y8'}, 'RowNames',{'fY(y)'})
```

```
TY = 1x4 table
```

	Y5	Y6	Y7	Y8
1 fY(y)	0.0833	0.3333	0.4167	0.1667

```
y = sym(MarginalY)
```

```
y =
```

$$\left(\frac{1}{12} \ \frac{1}{3} \ \frac{5}{12} \ \frac{1}{6}\right)$$

FORVENTNINGSVÆRDI

Vis at de i opgavebeskrivelsen givet udtryk er korrekt.

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x = x_i)$$

```
estimationX = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    estimationX = estimationX + (n * MarginalX(n));
end

disp("E[X] = " + estimationX);
```

```
E[X] = 2
```

```
offset = 4;
estimationY = 0;

for n = 1:length(MarginalY)
    estimationY = estimationY + ((n + offset) * MarginalY(n));
end
```

```

disp("E[Y] = " + estimationY);
E[Y] = 6.6667

offset = 4;
estimationXY = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    for j = 1:length(MarginalY)
        estimationXY = estimationXY + ((n * (j + offset)) * data(j, n));
    end
end

disp("E[XY] = " + estimationXY);

```

E[XY] = 13.3333

```

estimationXSquared = 0;

for n = 1:length(MarginalX)
    estimationXSquared = estimationXSquared + ((n^2) * MarginalX(n));
end

disp("E[X^2] = " + estimationXSquared);

```

E[X^2] = 4.6667

```

offset = 4;
estimationYSquared = 0;

for n = 1:length(MarginalY)
    estimationYSquared = estimationYSquared + ((n + offset)^2 * MarginalY(n));
end

disp("E[Y^2] = " + estimationYSquared);

```

E[Y^2] = 45.1667

KORRELATIONS KOEFFICIENT

Hvad er korrelationskoefficienten for X og Y?

$$\rho = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2, \quad \sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$\rho = \frac{E[XY] - E[X] \cdot E[Y]}{\sqrt{E[X^2] - E[X]^2} \cdot \sqrt{E[Y^2] - E[Y]^2}}$$

```

upper = estimationXY - (estimationX * estimationY);

sigmaX = sqrt(estimationXSquared - estimationX^2);

sigmaY = sqrt(estimationYSquared - estimationY^2);

```

```

correlation = upper / (sigmaX * sigmaY);

disp("p = " + correlation);

p = 0

```

KORRELEREDE VARIABLE

Er de stokastiske variable X og Y korrelerede?

Da korrelationskoefficienten er lig med 0, er X og Y ukorrelerede.

UAFHÆNGIGHED

Er de stokastiske variable X og Y uafhængige?

```

if MarginalX(1) * MarginalY(1) == data(1, 1)
    disp("X og Y er uafhængige, da fx(x) * fy(y) er identisk med fxy(x, y)");
else
    disp("X og Y er ikke uafhængige, da fx(x) * fy(y) ikke er identisk med fxy(x, y)");
end

```

X og Y er ikke uafhængige, da $fx(x) * fy(y)$ ikke er identisk med $f_{xy}(x, y)$

BETINGET SANDSYNLIGHED

Opskriv den betinget sandsynlighed for

$$f_{X|Y}(x|y = 6)$$

Den betinget sandsynlighed kan opskrives som

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

```

for n = 1:3
    probabilityX(n) = data(6 - offset, n) / MarginalY(6 - offset);
    names(n) = cellstr(("X" + num2str(n)));
end

TP = array2table(probabilityX, 'VariableNames', names, 'RowNames', {'fX|Y(x|y)'})

```

TP = 1x3 table

	X1	X2	X3
1 fX Y(x y)	0.5000	0	0.5000

```
prob = sym(probabilityX)
```

prob =

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EFTERÅR 2015 REEKSAMEN

En kontinuært stokastisk variabel har følgende fordelingsfunktion (cdf):

$$F_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

TÆTHEDSFUNKTION

Vis at tæthedsfunktionen (pdf) er givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

Tæthedsfunktionen findes som $f_x(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$, hvorved

```
syms x k
f = k * exp(x);
diff(f, x)
```

```
ans = k e^x
```

```
f = sym('1');
diff(f)
```

```
ans = 0
```

Hvilket dermed givet, at

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot e^x & -\infty < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For hvilken værdi af k er $f_x(x)$ en gyldig tæthedsfunktion?

En PDF er gyldig når

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

og alle værdier af PDF'en er større eller lig med 0. Det vil sige, at

$$\int_{-\infty}^1 k \cdot e^x dx + \int_1^{\infty} 0 dx = 1$$

$$k[e^x]_{-\infty}^1 = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(e^1 - e^{-t}) = 1$$

$$k \cdot e = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e}$$

SANDSYNLIGHEDER

```
k = 1 / exp(1);  
  
probability = k * exp(0.4);  
  
disp("Pr(x < 0.4) = " + probability);
```

Pr(x < 0.4) = 0.54881

```
probability = probability - (k * exp(0.1));  
  
disp("Pr(0.1 <= x < 0.4) = " + probability);
```

Pr(0.1 <= x < 0.4) = 0.14224

FORVENTNINGSVÆRDI

Middelværdien / Forventningsværdien bestemmes som følgende,

$$E[X] = \bar{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^1 x \cdot f_x(x) dx = \int_{-\infty}^1 x \cdot \frac{1}{e} \cdot e^x dx$$

```
f = @(a) a.*1/exp(1).*exp(a);  
  
value.expectation = round(integral(f, -inf, 1), 10);  
  
disp("Forventningsværdien er bestemt til at være: " + value.expectation);
```

Forventningsværdien er bestemt til at være: 0

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f_X(x) dx = E[X^2] - E[X]^2$$

```
f = @(a) (a.^2).*1/exp(1).*exp(a);  
  
value.expectationsquared = round(integral(f, -inf, 1), 10);  
  
disp("Variansen er bestemt til at være: " + (value.expectationsquared - value.expectation^2));
```

Variansen er bestemt til at være: 1

EFTERÅR 2016

En diskret stokastisk variabel har følgende tæthedsfunktion (pmf):

$$\begin{Bmatrix} x & -1 & 1 & 7 \\ f_X(x) & k & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For hvilken værdi af k er $f_X(x)$ en gyldig tæthedsfunktion?

For en tæthedsfunktion gælder at summen af alle værdier tilsammen er lig 1, derved opnås at

$$\sum_x f_X(x) = 1$$

Hvormed

$$k = \sum_x f_X(x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$$

```
k = 1 - (3/4) - (1/8);
```

```
disp("For værdien af k = " + k + " er fx(x) en gyldig tæthedsfunktion");
```

For værdien af $k = 0.125$ er $fx(x)$ en gyldig tæthedsfunktion

FORDELINGSFUNKTION

For fordelingsfunktionen gælder der, at

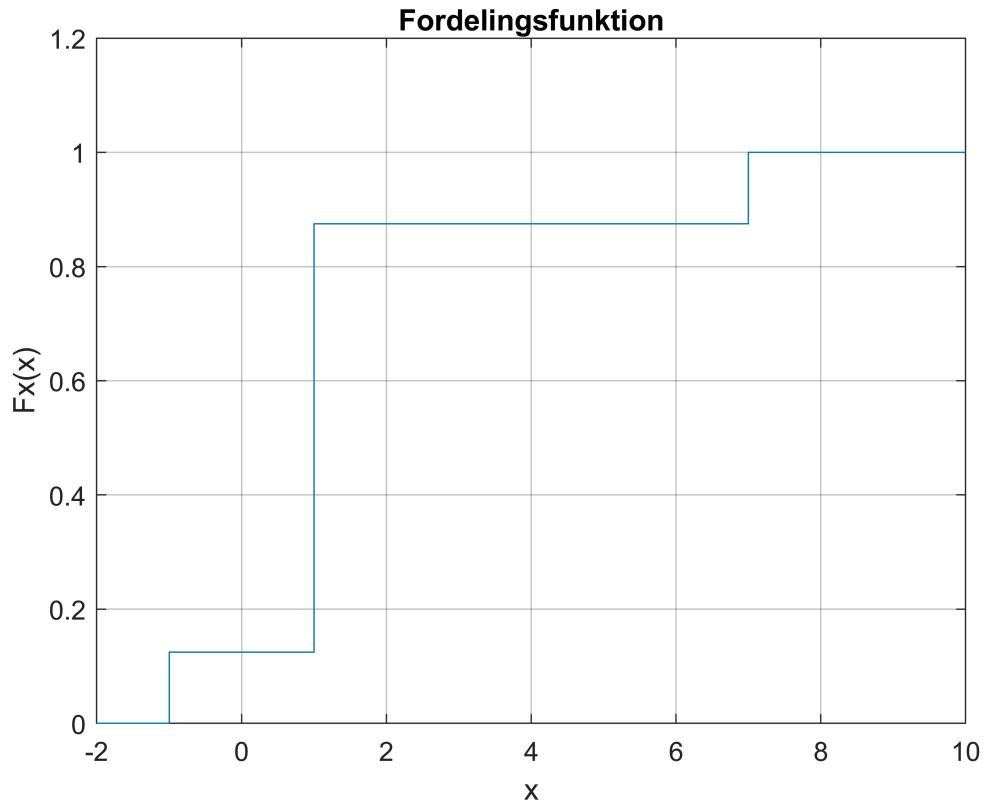
$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{i=x}^{n_x} f_X(x_i)$$

```
CumDist(1) = 0;
CumDist(2) = k;
CumDist(3) = k + (3/4);
CumDist(4) = k + (3/4) + (1/8);
CumDist(5) = 1;
```

```
X = [-2, -1, 1, 7, 10];
```

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < (-1) \\ \frac{1}{8} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} & 1 \leq x < 7 \\ 1 & 7 \leq x \end{cases}$$

```
figure(1)
stairs(X, CumDist);
grid on
title('Fordelingsfunktion')
ylabel('Fx(x)')
xlabel('x')
xlim([-2.00 10.00])
ylim([0.000 1.200])
```



FORVENTNINGSVÆRDI OG STANDARD AFVIGELSE

For forvetningsværdien gælder der, at

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

```

k = 1/8;
X = [-1, 1, 7];
Pr = [k, 3/4, 1/8];
ExpectationValue = 0;

for n = 1:length(X)
    ExpectationValue = ExpectationValue + (X(n) * Pr(n));
end

disp("Forventningsværdien er bestemt til at være " + ExpectationValue);

```

Forventningsværdien er bestemt til at være 1.5

For variansen gælder, at

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Hvormed standard afvigelsen kan findes som

$$\sigma_x = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2}$$

```

ExpectationValueSquared = 0;

for n = 1:length(X)
    ExpectationValueSquared = ExpectationValueSquared + ((X(n)^2) * Pr(n));
end

Deviation = sqrt(ExpectationValueSquared - ExpectationValue^2);

disp("Standard afvigelsen er bestemt til at være " + Deviation);

```

Standard afvigelsen er bestemt til at være 2.1794

TRANSFORMATION FORVENTNINGSVÆRDI

Da der gælder, at

$$g(X = x) = 3 \cdot x^2$$

Forventningsværdier kan da bestemmes som

$$E[g(x)] = E[3 \cdot x^2]$$

Da 3 er konstant kan følgende udtryk opnåes

$$E[g(x)] = 3 \cdot E[x^2]$$

```

GExpectedValue = 3 * ExpectationValueSquared;

disp("Forventningsværdien for x = g(x) er bestemt til at være " + GExpectedValue);

```

Forventningsværdien for $x = g(x)$ er bestemt til at være 21

VÆRDIER X KAN ANTAGE

X kan antage følgende værdier

$$-1, 1, 7$$

EFTERÅR 2016 REEKSAMEN

En kontinuert stokastisk variabel har følgende tæthedsfunktion (pmf):

$$f_X(x) = \begin{cases} A \cdot x + B & -2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For en gyldig tæthedsfunktion gælder, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

Hvor der i denne situation derfor gælder, at

$$\int_{-2}^3 f_x(x)dx = 1 = A$$

Det ses på figur 1, at fordelingsfunktionen er en trekant med en ukendt side og arealet af en retvinklet trekant bestemmes som,

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Hvor b er bredden (5) [-2;3] og h er højden. I dette tilfælde er h den ukendte og løses ved følgende.

$$h = \frac{2 \cdot A}{5}$$

```
A = 1;
b = 5;

h = (2 * A) / b;

disp("For værdien k = " + h + " til fx(-2) er det en gyldighed tæthedsfunktion");
```

For værdien $k = 0.4$ til $fx(-2)$ er det en gyldighed tæthedsfunktion

FORDELINGSFUNKTION

For fordelingsfunktionen gælder, at

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x)dx$$

```
syms A B C x

f = A * x + B;

int(f, x) + C
```

$$\text{ans} = \frac{A x^2}{2} + B x + C$$

Hvilket dermed giver, at

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < (-2) \\ \frac{1}{2} A \cdot x^2 + B \cdot x + C & -2 \leq x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

FORVENTNINGSVÆRDI OG VARIANS

For forvetningsværdien gælder, at

$$E[X] = \bar{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$$

```
clear x A B

A = (-2/25);
B = 6/25;

f = @(x) x.* (A .* x + B);

value.expectation = round(integral(f, -2, 3), 10);

disp("Forventningsværdien er bestemt til at være: " + value.expectation);
```

Forventningsværdien er bestemt til at være: -0.33333

For variansen gælder, at

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f_X(x) dx = E[X^2] - E[X]^2$$

```
f = @(x) (x.^2) .* (A .* x + B);

value.expectationsquared = round(integral(f, -2, 3), 10);

disp("Variansen er bestemt til at være: " + (value.expectationsquared - value.expectation^2));
```

Variansen er bestemt til at være: 1.3889

SANDSYNLIGHED

For sandsynligheden gælder, at

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx = P(X \leq x)$$

Hvormed der i dette tilfælde anvendes, at

$$F_X(0) = \int_{-\infty}^0 f_x(0) dx = P(X < 0)$$

Hvortil det er kendt, at

$$F_X(0) = \frac{1}{2} A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C = C$$

```
A = (-2/25);
B = 6/25;
C = 16/25;

FZero = 1/2 * A * 0^2 + B * 0 + C;
```

```
disp("Sandsynligheden er dermed bestemt til at være " + FZero);
```

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.64

EFTERÅR 2017

En diskret stokastisk variabel X kan antage værdierne

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

med følgende sandsynligheder

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = 0.15,$$

$$P(X = 4) = 0.25,$$

$$P(X = 5) = 0.10$$

SANDSYNLIGHED

Bestemt sandsynligheden for at X har værdien 0 $P(X = 0)$.

Der anvendes, at arealet for en tæthedsfunktion er lig med 1, hvormed

$$\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Da sandsynligheden for at X har værdien 0 er det sidste udfald,

kan den findes ved at trække alle andre sandsynligheder fra summen som skal give 1.

```
PZero = 1 - (3*0.15 + 0.25 + 0.10);
```

```
disp("Sandsynligheden for at X har værdien 0 er lig med " + PZero);
```

Sandsynligheden for at X har værdien 0 er lig med 0.2

TÆTHEDS- OG FORDELINGSFUNKTION

Tæthedsfunktionen er bestemt ved

$$\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Fordelingsfunktionen er bestemt ved

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

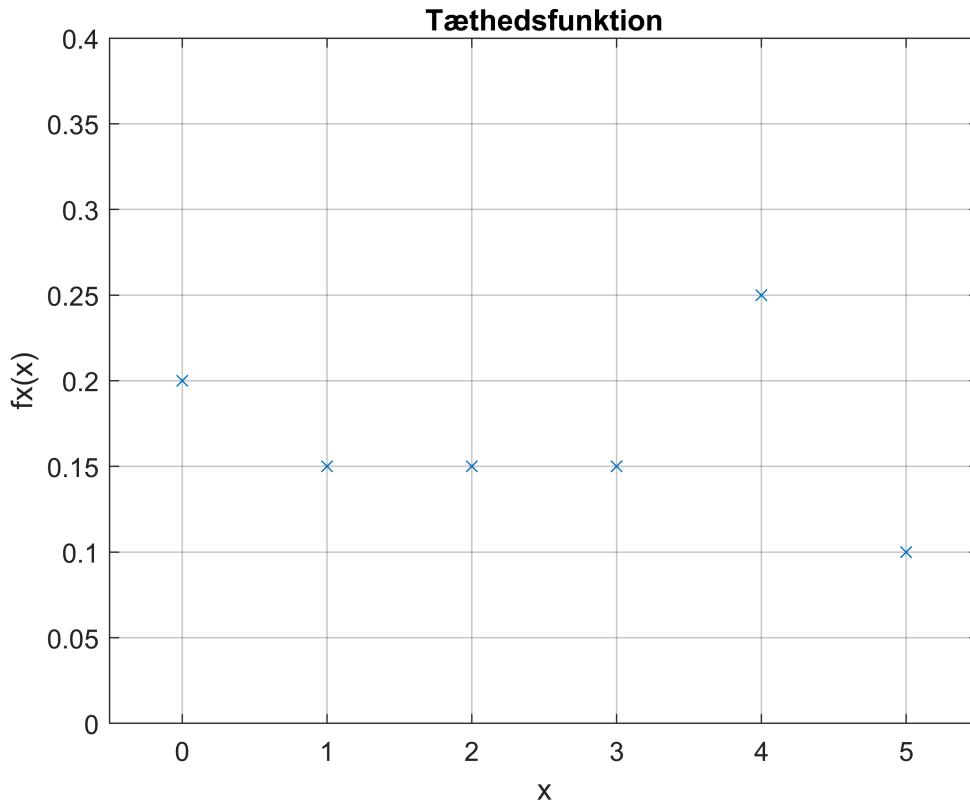
```
X = [0, 1, 2, 3, 4, 5];
P = [0.20, 0.15, 0.15, 0.15, 0.25, 0.10];
Pcdf = [0, 0, 0, 0, 0, 0];

figure(1)
stairs(X, P, 'x');
grid on
```

```

title('Tæthedsfunktion')
ylabel('fx(x)')
xlabel('x')
xlim([-0.50 5.50])
ylim([0.000 0.400])

```

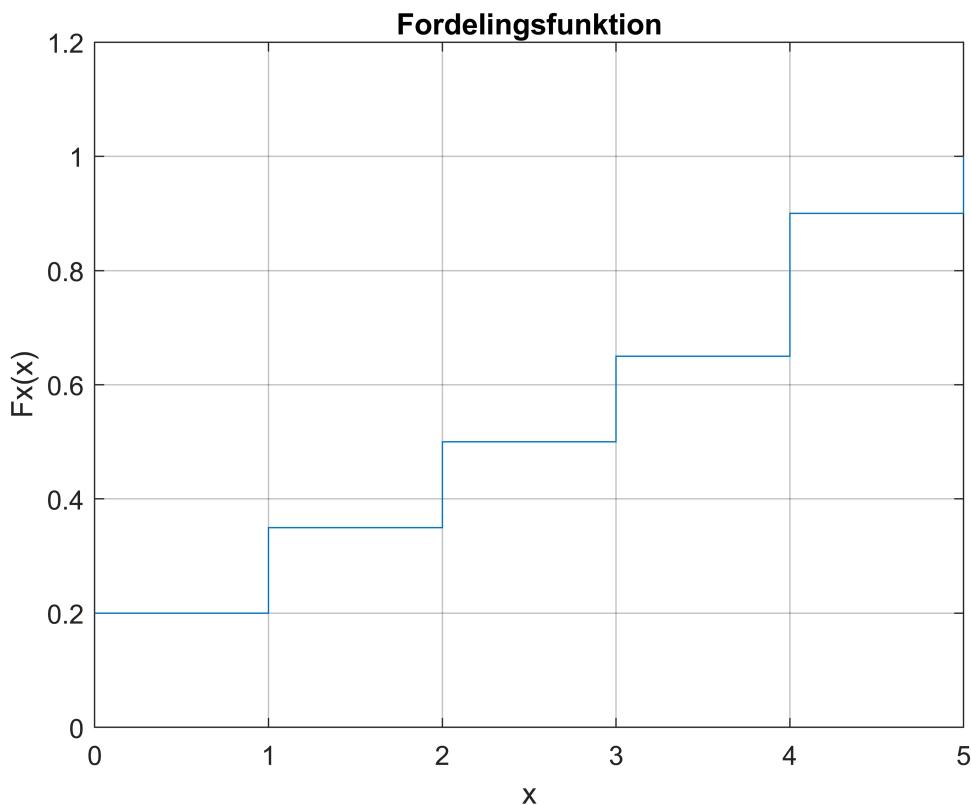


```

for n = 1:length(P)
    Pcdf(n) = sum(P(1:n));
end

figure(2)
stairs(X, Pcdf);
grid on
title('Fordelingsfunktion')
ylabel('Fx(x)')
xlabel('x')
xlim([-0.00 5.00])
ylim([0.000 1.200])

```



MIDDELVÆRDI

Bestem middelværdien $E[X]$ af den stokastiske variabel X.

Dertil anvendes formlen for middelværdien af en stokastisk variabel som er givet ved

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

```
EstimationX = 0;

for n = 1:length(P)
    EstimationX = EstimationX + (X(n) * P(n));
end

disp("Middelærdien er bestemt til at være " + EstimationX);
```

Middelærdien er bestemt til at være 2.4

VARIANS

Bestem variansen af den stokastiske variabel X.

Variansen er givet ved følgende udtryk.

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

```
EstimationXSquared = 0;
```

```

for n = 1:length(P)
    EstimationXSquared = EstimationXSquared + (X(n)^2 * P(n));
end

VarianceX = EstimationXSquared - EstimationX^2;

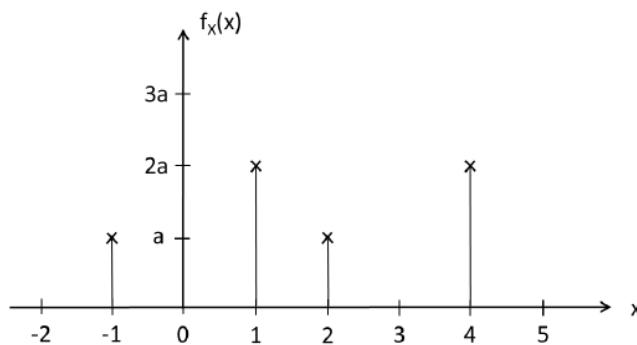
disp("Variansen er bestemt til at være " + VarianceX);

```

Variansen er bestemt til at være 2.84

EFTERÅR 2018

En diskret stokastisk variabel X har en tæthedsfunktion som vist på nedenstående figur.



GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For at bestemme a så $f_x(x)$ er en gyldig tæthedsfunktionen anvendes, at

$$\sum_{i=1}^n f_x(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

```

syms a
fx = a+2*a+a+2*a == 1;

solve(fx, a)

```

ans =

$$\frac{1}{6}$$

Dette betyder, at $f_x(x)$ er en gyldig tæthedsfunktion for $a = \frac{1}{6}$.

FORDELINGSFUNKTION

For at bestemme fordelingsfunktionen anvendes, at

$$F_x(x) = \sum_{x_i \leq x} f_x(x_i)$$

Hvilket dermed giver, at

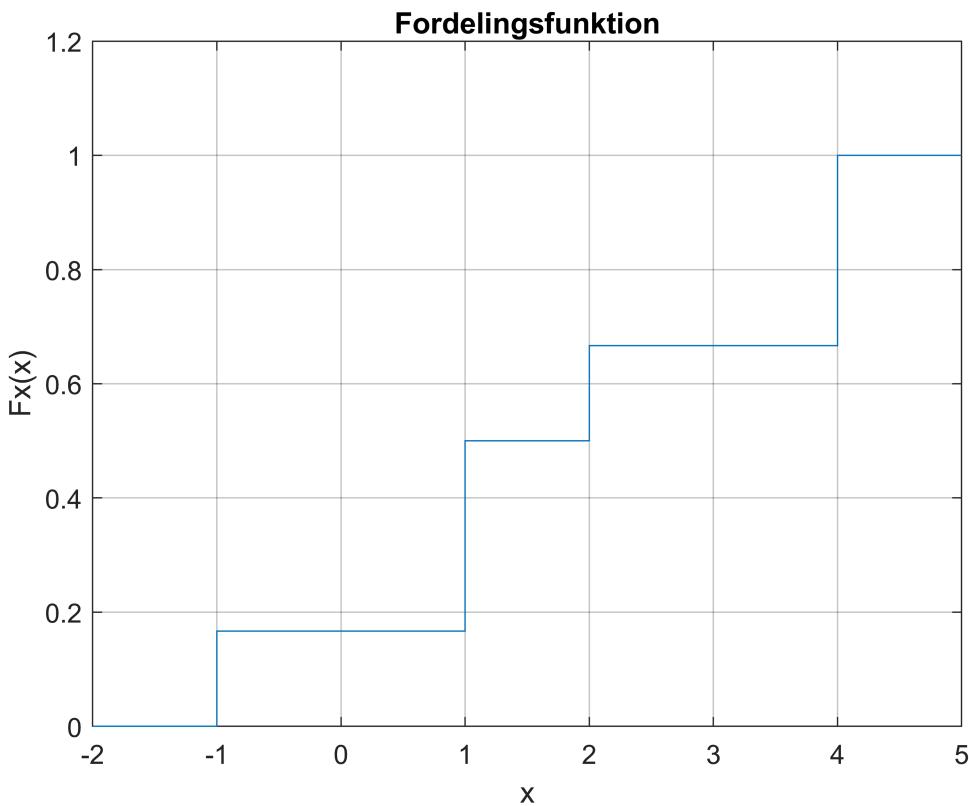
$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ a & -1 \leq x < 1 \\ 3a & 1 \leq x < 2 \\ 4a & 2 \leq x < 4 \\ 6a & x \geq 4 \end{cases}$$

```
a = 1/6;

X = [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5];
P = [0, a, 0, 2*a, a, 0, 2*a, 0];
Pcdf = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];

for n = 1:length(P)
    Pcdf(n) = sum(P(1:n));
end

figure(1)
stairs(X, Pdf);
grid on
title('Fordelingsfunktion')
ylabel('Fx(x)')
xlabel('x')
xlim([-2.00 5.00])
ylim([0.000 1.2])
```



MIDDELVÆRDI

For at finde middelværdien anvendes, at

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

```
ExpectationValue = 0;  
  
for n = 1:length(P)  
    ExpectationValue = ExpectationValue + (X(n)*P(n));  
end  
  
ExpectationValue
```

ExpectationValue = 1.8333

Middelværdien er dermed bestemt til at være 1.8333.

VARIANS

For at finde variansen anvendes, at

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

```
ExpectationValueSquare = 0;  
  
for n = 1:length(P)  
    ExpectationValueSquare = ExpectationValueSquare + (X(n)^2 * P(n));  
end  
  
Variance = ExpectationValueSquare - ExpectationValue^2
```

Variansen er dermed bestemt til at være 3.1389.

FORÅR 2016

En kontinuert stokastisk variabel X har følgende fordelingsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & 2 \geq x \\ k \cdot x - \frac{2}{3} & 2 < x \leq 5 \\ 1 & 5 < x \end{cases}$$

TÆTHEDSFUNKTION

For at vise at tæthedsfunktionen er givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2 \geq x \\ k & 2 < x \leq 5 \\ 0 & 5 < x \end{bmatrix} \end{cases}$$

Anvendes, at

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

```
syms x k

a = 0;
b = k * x - (2/3);
c = 1;

diff(a), diff(b), diff(c)
```

```
ans =
[]
ans = k
ans =
[]
```

Da [] betyder at værdien er 0 er tæthedsfunktionen $f_X(x)$ hermed eftervist at være korrekt.

GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For at bestemme for hvilken værdi af k hvor $f_X(x)$ er en gyldig tæthedsfunktionen anvendes, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Da gælder i dette tilfælde, at

$$\int_a^b f_X(x) dx = 1$$

hvor $a = 2$ og $b = 5$.

$$\int_2^5 f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_2^5 k dx = 1$$

Hvilket giver at for værdien af k lig med

$$k = \frac{1}{3}$$

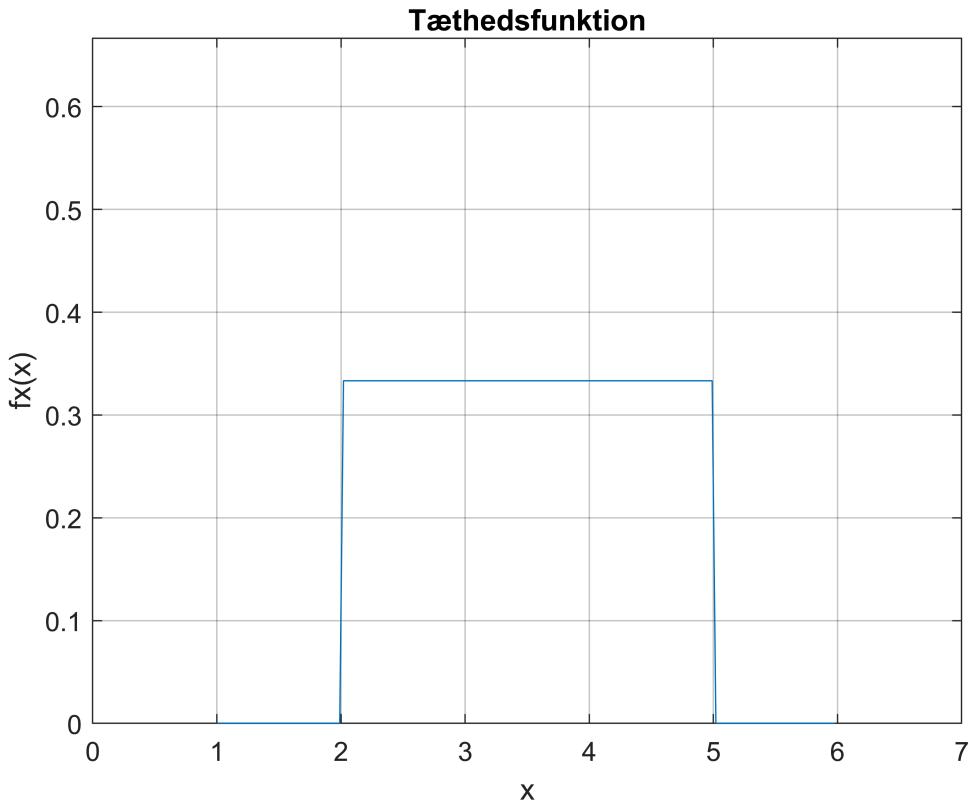
Opnåes en gyldig tæthedsfunktion.

SKITSE AF TÆTHEDSFUNKTION

En skitse af tæthedsfunktionen vises i matlab.

```
a = 2;
b = 5;
x = a-1:(b-a)/100:b+1;
fx = unifpdf(x, a, b);

figure(1)
plot(x, fx);
axis([a-2, b+2, 0, 2/(b-a)]);
grid on
title('Tæthedsfunktion')
ylabel('fx(x)')
xlabel('x')
```



SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden $P(x \geq 3)$ antages, at $k = 3$ og der anvendes følgende

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3)$$

$$P(x \geq 3) = 1 - F_X(3)$$

```
k = 1/3;
Fx = @(x) k*x-(2/3);

Probability = 1 - Fx(3)
```

Probability = 0.6667

Dermed er sandsynligheden $P(x \geq 3)$ bestemt til at være $\frac{2}{3}$.

FORVENTNINGSVÆRDI & VARIANS

For at bestemme forventningsværdien anvendes, at

$$E[X] = \bar{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \Rightarrow E[X] = \int_2^5 x \cdot k$$

hvor værdien for k antages, at være $\frac{1}{3}$.

```
k = 1/3;  
fx = @(x) x * k;  
EstimationValue = sym(integral(fx, 2, 5))
```

EstimationValue =

$$\frac{7}{2}$$

Forventningsværdien er dermed bestemt til, at være $\frac{7}{2}$. Variansen bestemmes dernæst ved følgende,

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f_X(x) dx = E[X^2] - E[X]^2$$

```
fx = @(x) x.^2 * k;  
Variance = sym(integral(fx, 2, 5)) - EstimationValue^2
```

Variance =

$$\frac{3}{4}$$

Variansen er dermed bestemt til, at være $\frac{3}{4}$.

FORÅR 2016 REEKSAMEN

En diskret stokastisk variabel X har følgende tæhedsfunktion.

x	-3	0	2	4	7	10	12
$f_X(x)$	k						

GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For at bestemme for hvilken værdi af k , hvor $f_X(x)$ er en gyldig tæthedsfunktion anvend, at

$$\sum_{i=1}^n f_x(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

```
syms k
```

```
fx = k + k + k + k + k + k + k == 1;
```

```
solve(fx, k)
```

```
ans =
```

$$\frac{1}{7}$$

For værdien af k lig med $\frac{1}{7}$ er $f_X(x)$ en gyldig tæthedsfunktion.

SKITSERING AF TÆTHEDSFUNKTION

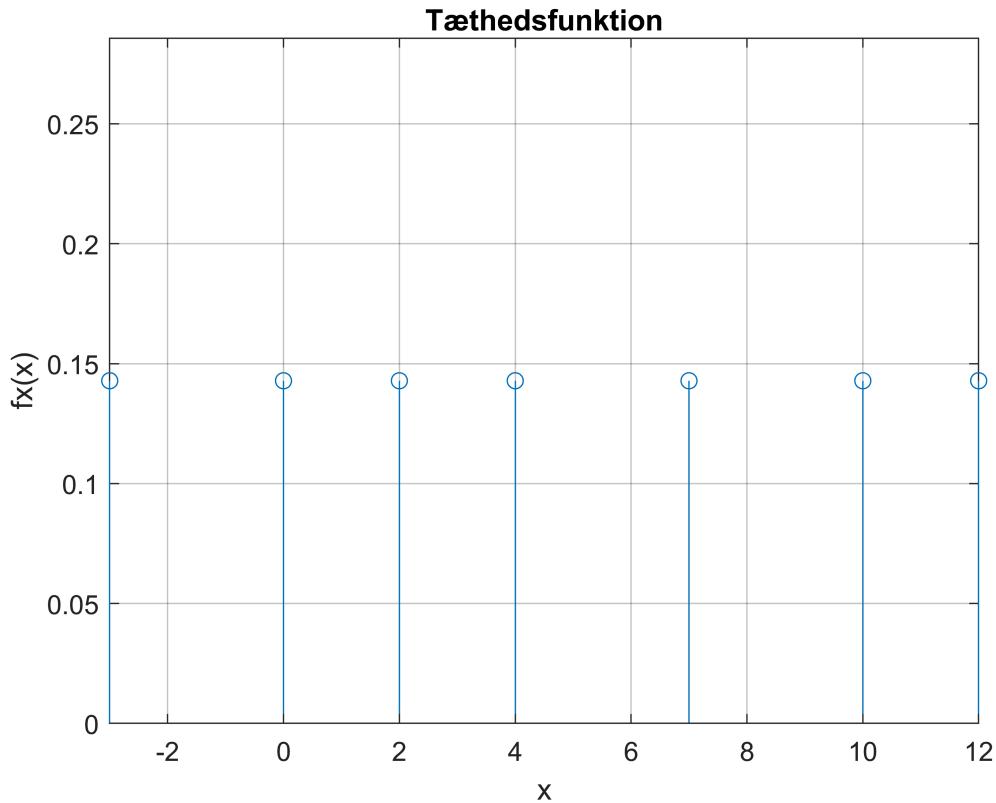
Følgende er en skitsering af tæthedsfunktionen lavet i matlab under antagelse af at k har værdien $\frac{1}{7}$.

```
k = 1/7;
```

```
X = [-3, 0, 2, 4, 7, 10, 12];
```

```
P = [k, k, k, k, k, k, k];
```

```
figure(1)
stem(X, P, 'o');
grid on
title('Tæthedsfunktion')
ylabel('fx(x)')
xlabel('x')
xlim([-3 12])
ylim([0 k*2])
```



FORVENTNINGSVÆRDI OG VARIANS

For at bestemme forventningsværdien og variansen ud fra $F_X(x)$ anvendes at der for forventningsværdien gælder, at

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

```
EstimationX = 0;

for n = 1:length(P)
    EstimationX = EstimationX + (X(n) * P(n));
end

EstimationX
```

EstimationX = 4.5714

For variansen gælder der, at

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

```
EstimationXSquared = 0;

for n = 1:length(P)
    EstimationXSquared = EstimationXSquared + (X(n)^2 * P(n));
end
```

```
VarianceX = EstimationXSquared - EstimationX^2
```

```
VarianceX = 25.1020
```

Variansen er dermed bestemt til at være 25.1.

SANDSYNLIGHEDER

For at bestemme $P(x \geq 2)$ samt $P(x > 2)$ anvendes, at arealet for en tæthedsfunktion er lig med 1, hvormed

$$\sum_{i=1}^n f_X(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Samtidig antages, at $k = \frac{1}{7}$.

```
fx = @(x) k;
```

```
ProbabilityEqualOrAbove = sym(fx(2) + fx(4) + fx(7) + fx(10) + fx(12))
```

```
ProbabilityEqualOrAbove =
```

$$\frac{5}{7}$$

Dermed er $P(x \geq 2)$ bestemt til at være $\frac{5}{7}$.

```
fx = @(x) k;
```

```
ProbabilityAbove = sym(fx(4) + fx(7) + fx(10) + fx(12))
```

```
ProbabilityAbove =
```

$$\frac{4}{7}$$

Dermed er $P(x > 2)$ bestemt til at være $\frac{4}{7}$.

FORDELINGSFUNKTION

For at bestemme fordelingsfunktionen for X anvendes, at

$$F_x(x) = \sum_{x_i \leq x} f_x(x_i) = P(X \leq x)$$

Hvor det for eksempler af mellemregninger giver, at

$$F_x(-3) = \sum_{x_i \leq -3} f_x(-3) = f_x(-3) = \frac{1}{7}$$

$$F_x(0) = \sum_{x_i \leq 0}^n f_x(0) = f_x(-3) + f_x(0) = \frac{2}{7}$$

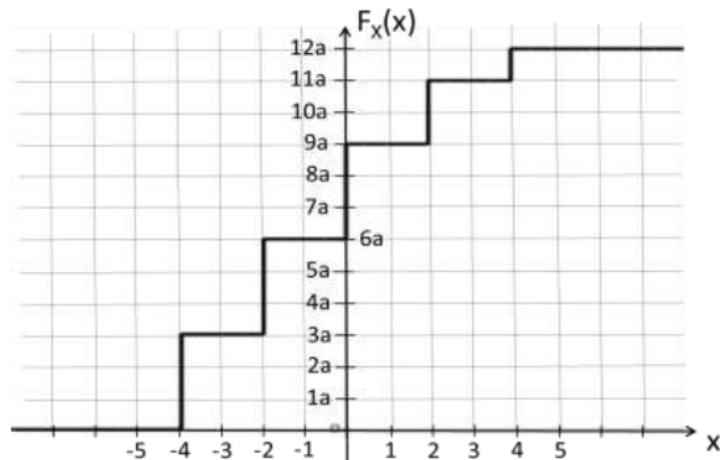
$$F_x(2) = \sum_{x_i \leq 2}^n f_x(2) = f_x(-3) + f_x(0) + f_x(2) = \frac{3}{7} \dots$$

Hvor k antages at være $\frac{1}{7}$, hvilket dermed giver, at

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < -3 \\ k & -3 \leq x < 0 \\ 2k & 0 \leq x < 2 \\ 3k & 2 \leq x < 4 \\ 4k & 4 \leq x < 7 \\ 5k & 7 \leq x < 10 \\ 6k & 10 \leq x < 12 \\ 7k & x \geq 12 \end{array} \right\}$$

FORÅR 2017

En diskret stokastisk variabel X har følgende fordelingsfunktion $F_X(x)$.



GYLDIG FORDELINGSFUNKTION

For at bestemme om $F_{X(x)}$ er en gyldig fordeligsfunktion anvendes, at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

Det antages at outputtet af fordelingsfunktionen ikke antager værdier større end $12a$, der gælder følgende.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 12a$$

Dermed givet det, at

$$a = \frac{1}{12}$$

Fordelingsfunktionen er dermed gældende for værdien af a leg med $\frac{1}{12}$.

TÆTHEDSFUNKTION

For at bestemme tæthedsfunktionen $f_X(x)$ anvendes, at størrelse af trinene i fordelingsfunktionen er tæthedsfunktionen. Dermed opnåes, at

$$f_X(x) = \begin{cases} 3a & x = -4 \\ 3a & x = -2 \\ 3a & x = 0 \\ 2a & x = 2 \\ 1a & x = 4 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

MIDDELVÆRDI

For at bestemme middelværdien anvendes, at

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

```
a = 1/12;
X = [-4, -2, 0, 2, 4];
P = [3*a, 3*a, 3*a, 2*a, 1*a];
EstimationX = 0;
for n = 1:length(P)
    EstimationX = EstimationX + (X(n) * P(n));
end
sym(EstimationX)
```

ans =

$$-\frac{5}{6}$$

Middelværdien er dermed bestemt til at være $-\frac{5}{6}$.

VARIANS

For at bestemme variansen anvendes, at

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

```

EstimationXSquared = 0;
for n = 1:length(P)
    EstimationXSquared = EstimationXSquared + (X(n)^2 * P(n));
end

VarianceX = EstimationXSquared - EstimationX^2

```

VarianceX = 6.3056

Variansen er dermed bestemt til at være 6.3056.

FORÅR 2017 REEKSAMEN

En kontinuert stokastisk variabel X har følgende fordelingsfunktion $F_X(x)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ a \cdot x^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

GYLDIG FORDELINGSFUNKTION

For at bestemme om $F_X(x)$ er en gyldig fordelingsfunktion anvendes, at for $x > 2$ er $F_X(x) = 1$, hvormed

$$a \cdot x^2 = 1, \text{ hvor } x = 2$$

```

syms Fx(x) a
Fx(x) = piecewise(x<0, 0, (0<=x) & (x<=2), a*x^2, x>2, 1);
Eq = int(diff(Fx(x)), -inf, inf) == 1

```

$$Eq = 4a = 1$$

```
solve(Eq, a)
```

ans =

$$\frac{1}{4}$$

$F_X(x)$ er en gyldig tæthedsfunktion for værdien af a lig med $\frac{1}{4}$.

TÆTHEDSFUNKTION

For at finde tæthedsfunktionen anvendes, at

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

```

syms Fx(x)
a = 1/4;
Fx(x) = piecewise(x<0, 0, (0<=x) & (x<=2), a*x^2, x>2, 1)

```

$$F(x) =$$

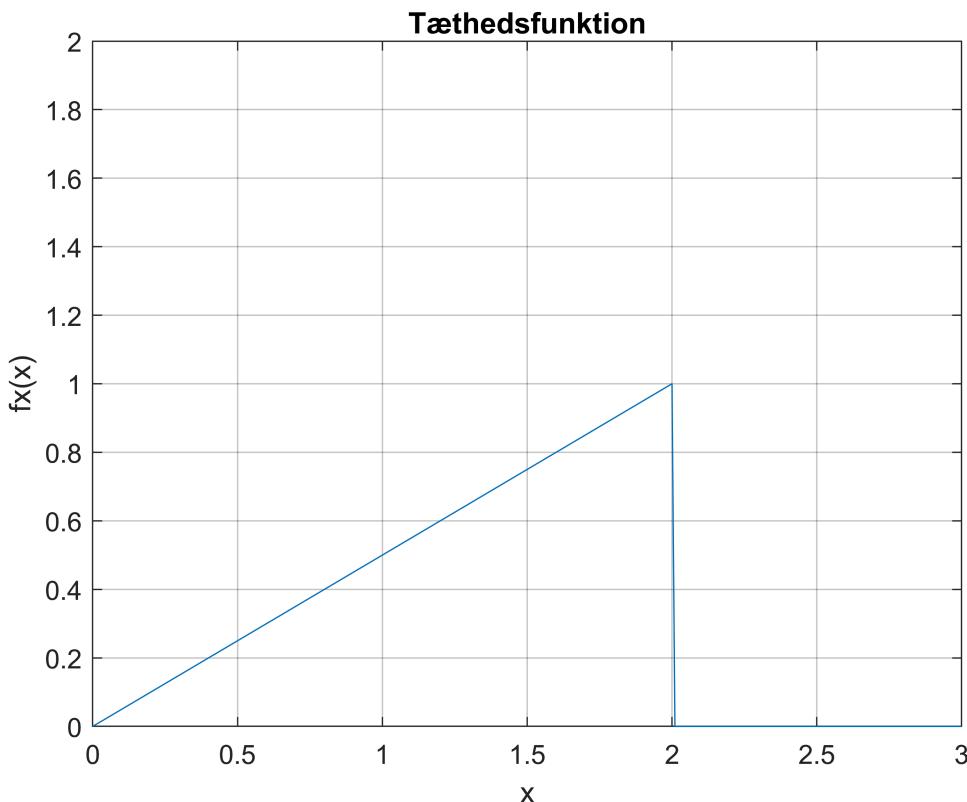
$$\begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{if } x \in [0, 2] \\ 1 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

Tæthedsfunktionen $f_X(x)$ hermed bestemt til at være

$$f_X(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

```
syms fx(x)
fx(x) = piecewise(x<0, 0, (0<=x) & (x<=2), 1/2*x, x>2, 0);
x = 0:0.01:3;

figure(1)
plot(x, fx(x));
grid on
title('Tæthedsfunktion')
ylabel('fx(x)')
xlabel('x')
axis([0, 3, 0, 2]);
```



SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for $1 \leq X \leq 2$ anvendes, at

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

$$Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$$Pr(X > x) = 1 - Pr(X \leq x) = 1 - F_X(x)$$

Da $f_X(x)$ i intervallet fra 1 til 2 er lig med $\frac{1}{2}x$, vides at

$$\int_1^2 f_X(x)dx$$

```
clear x
xpdf = @(x) 1/2*x;

integral(xpdf, 1, 2)
```

ans = 0.7500

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.75 altså 75%.

MIDDELVÆRDI OG VARIANS

For at bestemme forventningsværdien anvendes, at

$$E[X] = \bar{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot x dx$$

hvor værdien for a antages, at være $\frac{1}{4}$.

```
a = 1/4;
xpdf = @(x) x .* 1/2.*x;
EstimationValue = sym(integral(xpdf, 0, 2))
```

EstimationValue =

$\frac{4}{3}$

Forventningsværdien er dermed bestemt til, at være $\frac{4}{3}$. Variansen bestemmes dernæst ved følgende,

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f_X(x)dx = E[X^2] - E[X]^2$$

```
fx = @(x) x.^2 * 1/2.*x;
Variance = sym(integral(fx, 0, 2)) - EstimationValue^2
```

Variance =

$$\frac{2}{9}$$

Variansen er dermed bestemt til, at være $\frac{2}{9}$.

FORÅR 2018

En tæthedsfunktion for en stokastisk variabel er defineret til at være

$$f_X(x) = \begin{cases} K \cdot (x^2 + 7) & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

2.1 GYLDIG TÆTHEDSFUNKTION

For en gyldig tæthedsfunktion gælder, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Hvor k kan isoleres og beregnes som følgende i matlab.

```
syms fx(x) k
fx(x) = piecewise(-1<x<1, k*(x^2 + 7), 0);
k = solve(int(fx(x), -inf, inf) == 1, k)
```

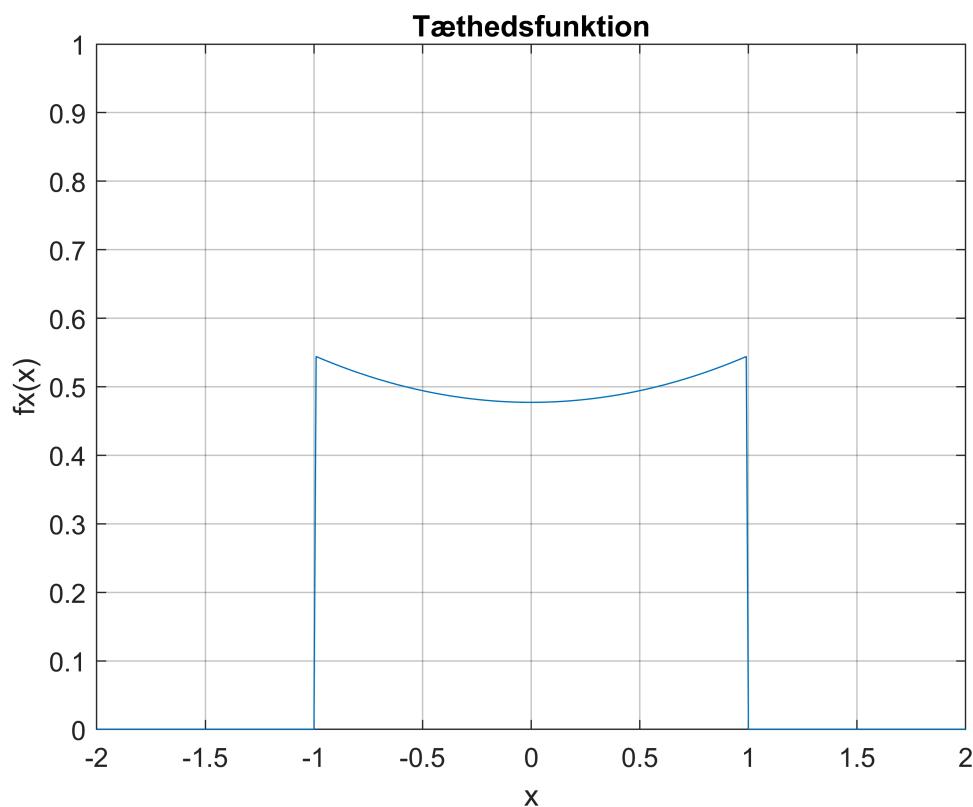
$k =$

$$\frac{3}{44}$$

Dermed er k bestemt til at være lig med $\frac{3}{44}$ for at $f_X(x)$ er en gyldig tæthedsfunktion.

```
syms fx(x)
fx(x) = piecewise(-1<x<1, (3/44)*(x^2 + 7), 0);
x = -2:0.01:2;

figure(1)
plot(x, fx(x));
grid on
title('Tæthedsfunktion')
ylabel('fx(x)')
xlabel('x')
axis([-2, 2, 0, 1]);
```



2.2 MIDDELVÆRDI

For at bestemme middelværiden anvendes, at

$$\bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_X(x_i)$$

$$E[X] = \bar{X} = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx$$

```
syms xfx(x)
xfx(x) = piecewise(-1< x < 1, x*((3/44)*(x^2 + 7)), 0);

MeanValue = int(xfx(x), -inf, inf)

MeanValue = 0
```

Dermed middelværiden bestemt til at være 0.

2.3 VARIANS

For at bestemme standard afvigelsen benyttes, at

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f_X(x) dx = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

```
syms xfx(x)
xfx(x) = piecewise(-1< x < 1, x^2*((3/44)*(x^2 + 7)), 0);

MeanSquareValue = int(xfx(x), -inf, inf);

Variance = MeanSquareValue - MeanValue^2;
StandardDeviation = sqrt(Variance)
```

StandardDeviation =

$$\frac{\sqrt{19} \sqrt{55}}{55}$$

$$(\sqrt{19} * \sqrt{55}) / 55$$

$$\text{ans} = 0.5878$$

Standard afvigelsen er dermed bestemt til at være 0.5878.

2.4 FORDELINGSFUNKTION

For at finde fordelingsfunktionen anvendes, at

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

```
syms fx(x) k
fx(x) = piecewise(-1 < x < 1, (3/44)*(x^2 + 7), 0);

int(fx(x), -inf, x)
```

$$\begin{aligned} \text{ans} = \\ \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq x \\ 0 & \text{if } x \leq -1 \\ \frac{x^3}{44} + \frac{21x}{44} + \frac{1}{2} & \text{if } x \in (-1, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

FORÅR 2018 REEKSAMEN

STOKASTISKE PROCESSER

EFTERÅR 2015

En diskret process er givet ved $X(n) = w(n)$, $w(n)$ angives desuden til at være i.i.d efter en uniform fordeling med $w(n) \sim U(0, 10)$.

SKITSERING AF REALISATION

Skitser 10 samples af en realisation af processen $X(n)$ for $n = 1..10$.

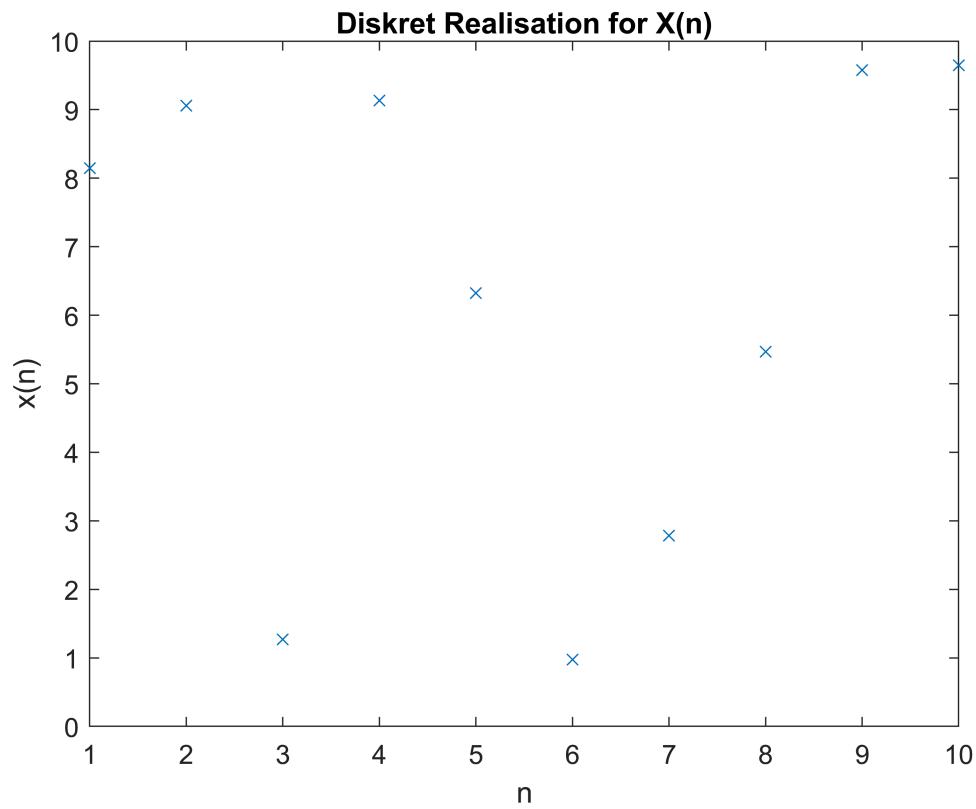
```

mu = 0;
sigma = 10;

realisation = sigma * rand(1, 10) + mu;

figure(1)
plot(1:length(realisation), realisation, 'x');
title('Diskret Realisation for X(n)')
xlabel('n')
ylabel('x(n)')

```



MIDDELVÆRDI OG VARIANS

Bestem ensemble middelværdien og variansen for processen $X(n)$.

$$E[X(n)] = E[w(n)]$$

da processen er uniform fordelt gælder følgende for $w = \mu(a, b)$

$$E[X(n)] = \frac{a+b}{2}$$

Som omskrevet bliver til

$$E[X(n)] = \frac{1}{2}(a+b)$$

```
ensembleMean = (1/2) * (mu + sigma);
```

```
disp("Ensemble middelværdien for processen er " + ensembleMean);
```

Ensemble middelværdien for processen er 5

for variansen af en uniform fordeling gælder følgende for $w = \mu(a, b)$

$$\text{var}(w) = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

```
ensembleVariance = (1/12) * (sigma - mu)^2;
```

```
disp("Ensemble variansen for processen er " + ensembleVariance);
```

Ensemble variansen for processen er 8.3333

```
sym(ensembleVariance)
```

ans =

$$\frac{25}{3}$$

AUTOKORRELATION

Bestem autokorrelationsfunktionen $R_{XX}(t)$ for processen $X(n)$ for $t = 0..3$.

For korrelationen til $n = 0$ gælder der, at

$$R_{XX}(n) = E[X(n) \cdot X(n)]$$

Da der for variansen gældet, at

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Kan korrelation omskrives til følgende

$$R_{XX}(n) = \text{var}(X) + E[X]^2$$

```
n = 0;
```

```
correlation(n + 1) = ensembleVariance + ensembleMean^2;
```

Hvor der for autokorrelationen til $n > 0$ gælder, at

$$R_{XX}(n) = E[X(n) \cdot X(n + 1)], n > 1$$

Kan omskrives til

$$R_{XX}(n) = E[X(n)] \cdot E[X(n + 1)]$$

da processen er uniform fordelt gælder følgende for $w = \mu(a, b)$

$$E[X(n)] = \frac{a + b}{2}$$

således bliver det til følgende

$$R_{XX}(n) = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

w(n) og w(n + 1) er uafhængige grundet i.i.d.

```
for n = 1:3
    correlation(n + 1) = ((mu + sigma) / 2)^2;
end

correlation = sym(correlation)

correlation =  


$$\left(\frac{100}{3} \ 25 \ 25 \ 25\right)$$

```

PROCESSEN

Angiv om processen er WSS (stationær i den bredde forstand) og om den er ergodisk.

Da middelværdien $E[X(n)]$ er uafhængig af n og konstant samt variansen er uafhængig af n og konstant, kan processen siges at være stationær i den bredde forstand. Samtidig er processen ergodisk da den ikke er tidsahængig samt middelværdien og variansen for ensemble ikke ændres. Disse værdier kan opnås ved en enkelt realisering og vil for flere realiseringer være den samme.

EFTERÅR 2015 REEKSAMEN

En diskret stokastisk process er givet ved

$$X(n) = w(n) + 4$$

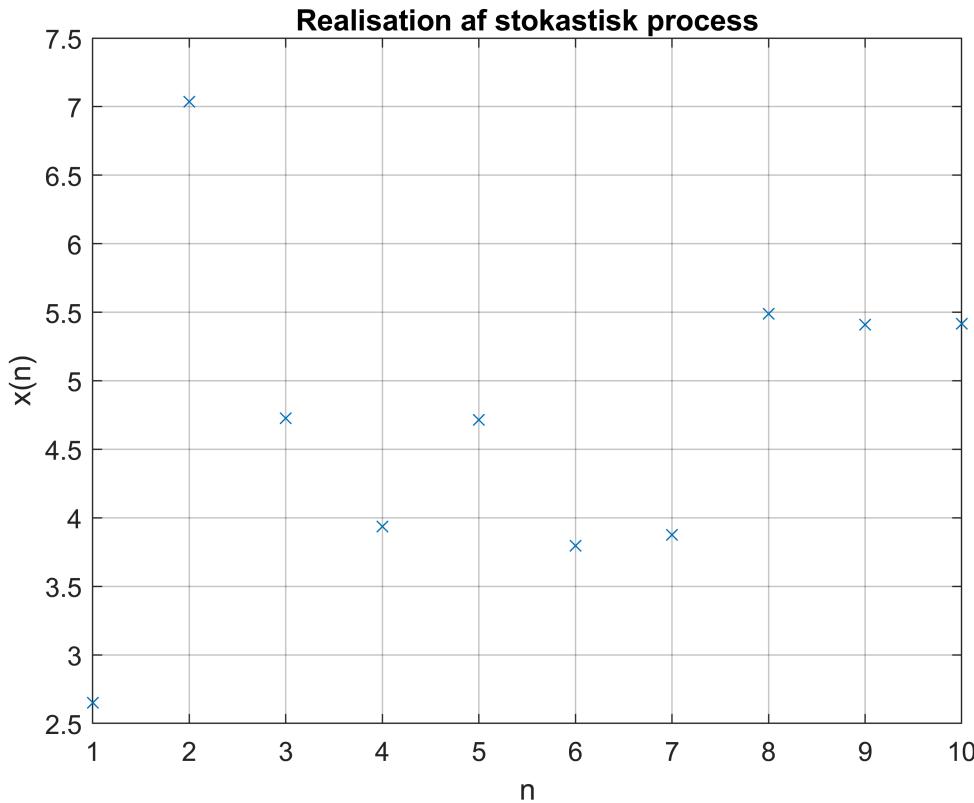
Hvor hver sample n af w er i.i.d Gaussisk fordelte stokastiske variable $w(n) \sim N(0,1)$.

SKITSERING AF REALISATION

```
mu = 0;
sigma = 1;

realisation = (sigma * randn(1, 10) + mu) + 4;

figure(1)
plot(1:length(realisation), realisation, 'x');
title('Realisation af stokastisk process');
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
grid on
```



MIDDELVÆRDI OG VARIANS

$$E[X(n)] = E[w(n) + 4]$$

$$E[X(n)] = E[w(n)] + E[4]$$

```
Ensemble.Mean = mu + 4;
disp("Ensemble middelværdien er: " + Ensemble.Mean);
```

Ensemble middelværdien er: 4

$$\text{var}[X(n)] = E[X(n)^2] - E[X(n)]^2$$

$$\text{var}[X(n)] = E[w(n)^2] + E[4^2] - 4^2$$

$$\text{var}[X(n)] = E[w(n)^2] = \text{var}(w(n)) = 1$$

```
Ensemble.Variance = 1;
disp("Ensemble variansen er : "+ Ensemble.Variance);
```

Ensemble variansen er : 1

PROCESSEN

Processen er wide state stationary da middelværdien og varians ikke er tidsafhængige. Processen er ergodisk, da middelværdi og varians kan bestemmes ud fra en realisation.

EFTERÅR 2016

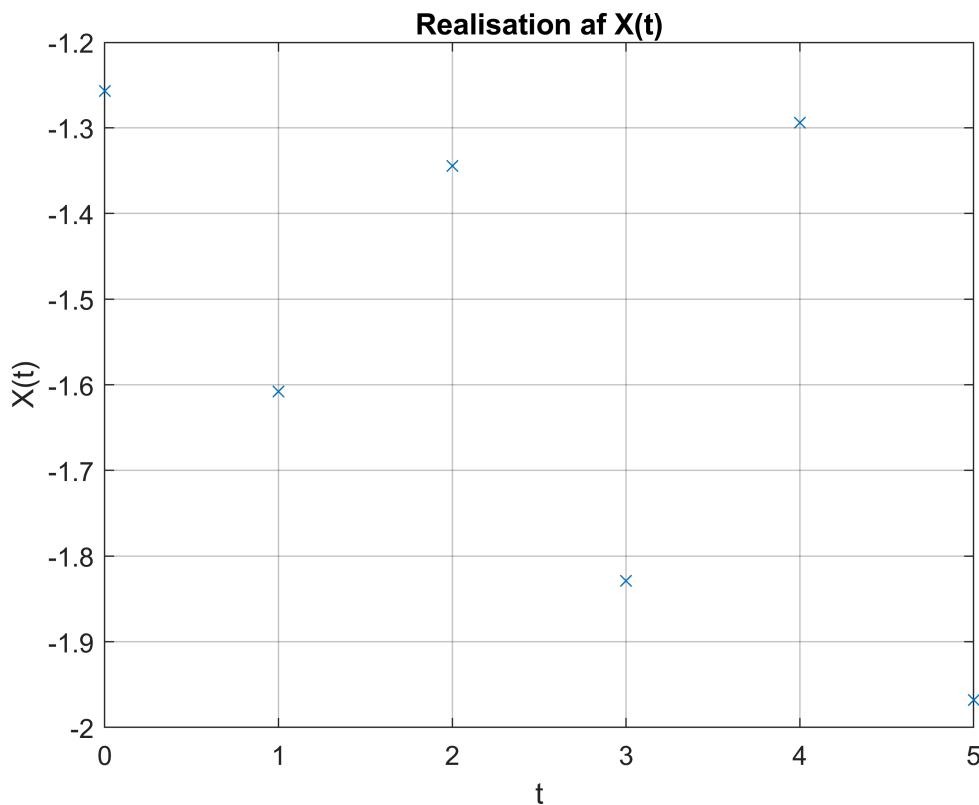
En kontinuær stokastisk process er givet ved

$$X(t) = w(t)$$

Hvor $w(t)$ er i.i.d uniformt fordelt efter $w(t) \sim U(-2, -1)$.

SKITSERING AF SAMPLES

```
a = -2;  
b = -1;  
  
Realisation = rand(1,6) + a;  
Time = 0:1:5;  
  
figure(2)  
plot(Time, Realisation, 'x');  
grid on  
title('Realisation af X(t)');  
ylabel('X(t)');  
xlabel('t');
```



ENSEMBLE MIDDELVÆRDI OG VARIANS

Middelværdien for ensemblen kan bestemms som

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot f_{X(t)}(x(t)) dx(t)$$

hvor $f_{X(t)}(x(t))$ er tæthedsfunktionen for processen $x(t)$ til tiden t . Da $x(t) = w(t)$ og $w(t) \sim U(-2, -1)$

$$E[X(t)] = \int_a^b w(t) \cdot 1 dw = \left[\frac{1}{2} w^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{-3}{2}$$

Integration af en uniform fordeling tæthedsfunktion er arealet hvilket er lig med 1.

```
f = @(w) w.*1;
ensemble.expectation = round(integral(f, a, b), 10);
disp("Forventningsværdien er bestemt til at være " + ensemble.expectation);
```

Forventningsværdien er bestemt til at være -1.5

```
f = @(w) (w.^2).*1;
ensemble.expectationsquared = round(integral(f, a, b), 10);
disp("Variansen er bestemt til at være: " + (ensemble.expectationsquared - ensemble.expectation));
```

Variansen er bestemt til at være: 0.083333

TIDSLIGE MIDDLELVÆRDI

Formlen for den tidslige middelværdi er som følgende.

$$\langle \mu_x \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

PROCESSEN

Processen $x(t)$ er stationær i den bredde forstand da ensemble middelværdi og varians ikke er tidsafhængige. Processen er ergodisk da ensemble tæthedsfunktionen kan findes ud fra en realisation.

EFTERÅR 2016 REEKSAMEN

En diskret stokastisk process er givet for den n'te ved

$$X(n) = w(n) + 0.7$$

Hvor $w(n)$ er i.i.d fordelte efter den angivet tabel.

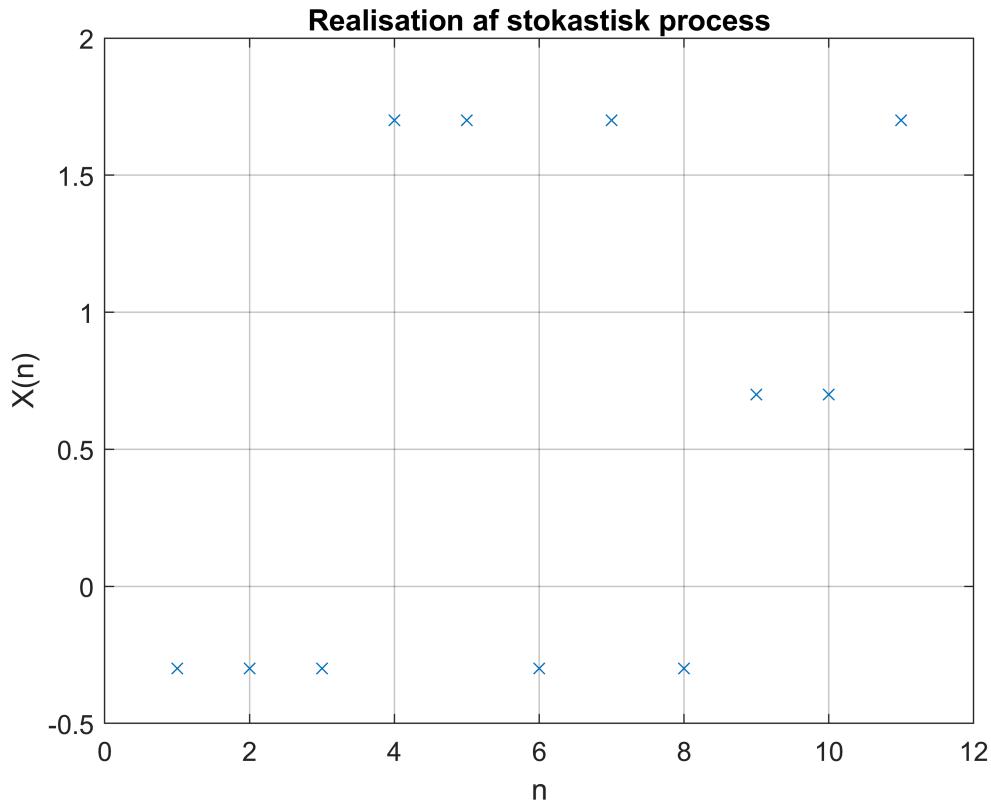
SKITSERING AF SAMPLES

```
n = 0:10;
realisation = unidrnd(3, 1, 11) - 2 + 0.7;
```

```

figure(1)
plot(1:length(realisation), realisation, 'x');
title('Realisation af stokastisk process');
xlabel('n')
ylabel('X(n)')
grid on

```



MIDDELVÆRDI OG VARIANS

$$E[X(n)] = E[w(n) + 0.7]$$

$$E[X(n)] = E[w(n)] + 0.7$$

$$E[w(n)] = \sum_w w(n) \cdot f_{w(n)}(w(n))$$

```

ExpectationValueW = -1 * (1/3) + 0 * (1/3) + 1 * (1/3);
MeanValue = ExpectationValueW + 0.7;
disp("Ensemble middelværdien er bestemt til at være " + MeanValue);

```

Ensemble middelværdien er bestemt til at være 0.7

For variansen gælder, at

$$\sigma_{x(n)}^2 = E[X(n)^2] - E[X(n)]^2 = E[(w(n) + 0.7)^2] - E[w(n) + 0.7]^2$$

$$\sigma_{x(n)}^2 = E[w(n)^2] - E[w(n)]^2 = E[w(n)^2]$$

```
Variance = (-1)^2 * (1/3) + 0^2 * (1/3) + 1^2 * (1/3);
disp("Ensemble variansen er bestemt til at være " + Variance);
```

Ensemble variansen er bestemt til at være 0.66667

AUTOKORRELATION

Formlen til at bestemme autokorrelationen for $X(n)$ er som følgende.

$$R_{XX}(\tau) = \sum_n x(n) \cdot x(n - \tau) \cdot f_x(x)$$

hvor $f_x(x) = f_w(w + 0.7)$.

PROCESSEN

Processen er wss da middelværdien og autokorrelationen ikke er tidsafhængige. Processen er ergodisk da pmf kan bestemmes ud fra en realisation.

EFTERÅR 2017

En stokastisk process er givet ved

$$X(n) = \alpha \cdot t \text{ for } t \geq 0$$

Hvor $\alpha \sim N\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

REALISATION

En skitsering af den stokastiske process $X(t)$ i intervallet $t = [0; 10]$ er bestemt som følgende.

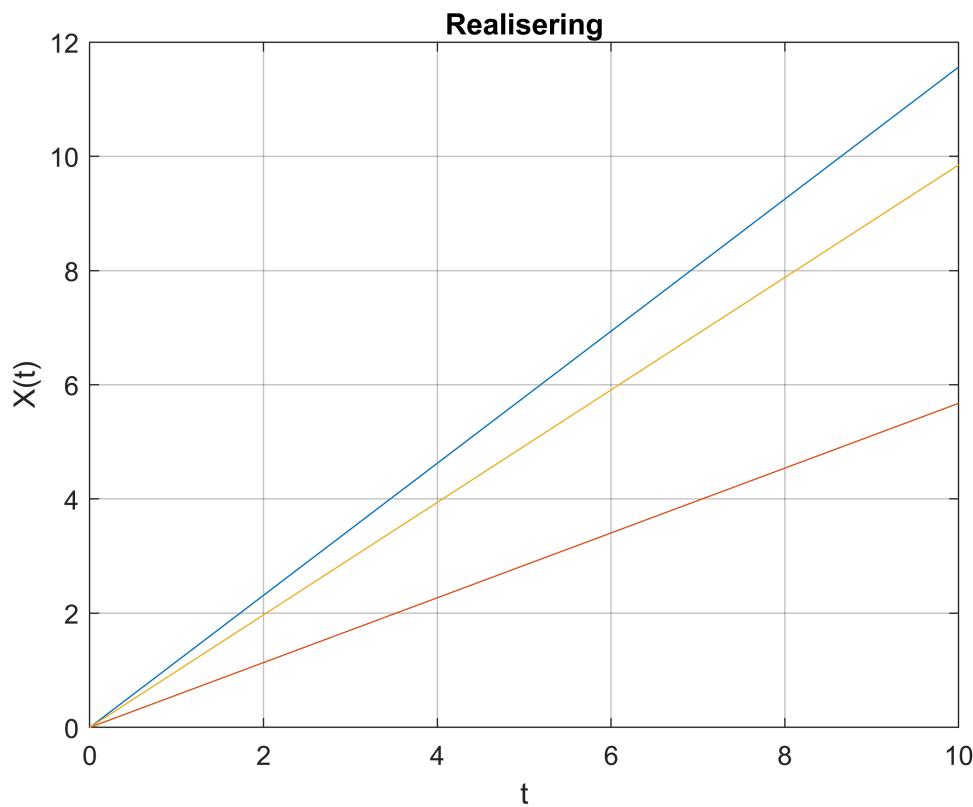
```
mu = 1;
sigma = sqrt(1/4);
t = 0:1:10;

Realisation = [[],[],[]];

for n = 1:3
    Realisation(n, :) = (ones(1, 11) * (sigma * randn + mu)) .* t;
end

figure(3)
plot(t, Realisation(1, :));
hold on
plot(t, Realisation(2, :));
plot(t, Realisation(3, :));
grid on
title('Realisering')
ylabel('X(t)')
```

```
xlabel('t')
hold off
```



ENSEMBLE

Linear function: $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$
 $\text{Var}[aX + b] = a^2(E[X^2] - E[X]^2) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

Da forventningsværdien til alpha, som er normalfordelt, er lig med 1 kan middelværdien bestemmes som

$$E[X] = E[\alpha \cdot t] = E[\alpha] \cdot t = 1 \cdot t = t$$

Dertil er også anvendt at $X(t)$ er en lineær funktion, hvilket også betyder at variansen kan bestemmes som følgende.

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\alpha \cdot t] = t^2 \cdot \text{Var}(\alpha) = \frac{1}{4}t^2$$

PROCESSEN

Den stokastiske process er ikke WSS da både ensemble mean og ensemble variansen er afhængig af tiden.

Da processen ikke er WSS er den heller ikke ergodisk.

EFTERÅR 2018

En diskret stokastisk process $X[n]$ er givet ved

$$X[n] = 2 \cdot Y[n] + W$$

Hvor

$$Y[n] \sim N(5, 2)$$

Samt

$$W \sim U(-2, 2)$$

Som er kontinuært uniform fordelte. Det antages, at Y og W er uafhængige.

REALISERING

Realiseringen er lavet i matlab.

```
Y = sqrt(2) * randn(1, 11) + 5;
W = 2 * rand - 2;
X = 2 * Y + W;

n = linspace(0, 10, 11);

figure(2)
plot(n, X, 'x', 'Color', Color.DeepCleret);
grid on
title('Realisering af X(n)')
axis([0, 10, 0, 20])
ylabel('X(n)')
xlabel('n')
```

ENSEMBLE

For at bestemme middelværdien anvendes, at

$$E[X(n)] = E[2 \cdot Y + W]$$

$$E[X(n)] = 2 \cdot E[Y] + E[W]$$

hvor

$$E[W] = \mu = \frac{a+b}{2}, \quad U(a, b)$$

$$E[W] = \frac{-2+2}{2} = 0$$

Samt

$$E[Y] = 5, \quad N(5, 2)$$

Dermed kan det bestemmes at middelværdien er som følgende

$$E[X] = 2 \cdot 5 + 0 = 10$$

For at bestemme variansen anvendes, at

$$\text{Var}[aX + b] = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Hvormed der i dette tilfælde gælder, at

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[2 \cdot Y + W]$$

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[2 \cdot Y] + \text{Var}[W]$$

$$\text{Var}[X] = 2^2 \cdot \text{Var}[Y] + \text{Var}[W]$$

hvor variansen til Y findes ved normalfordelingen som er opgivet og bestemt til 2 og variansen for W bestemmes for en uniform fordeling ved følgende udtryk.

$$\text{Var}[W] = \sigma^2 = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

```
EnsembleVariance = 2^2 * 2 + (1/12 * (2 - (-2))^2)
```

Variansen er dermed bestemt til at være 9.3333.

PROCESSEN

Processen er stationær i den bredde forstand da middelværdien og variansen er konstant og uafhængig af tid. Da W er forskellig for de enkelte realisationer er processen ikke ergodisk.

FORÅR 2016

En kontinuer stokastisk process er givet ved

$$X(t) = w + 4$$

Hvor w er normalfordelt efter $N(5, 1)$.

REALISERING

For at skitse en realisering af den kontinuere process vides det, at

$$\sigma^2 = 1, \mu = 5$$

Dertil kan realiseringen laves ved brug af matlab.

```
t = 0:1:7;
mu = 5;
sigma = sqrt(1);

Realisation = [[],[],[],[],[]];

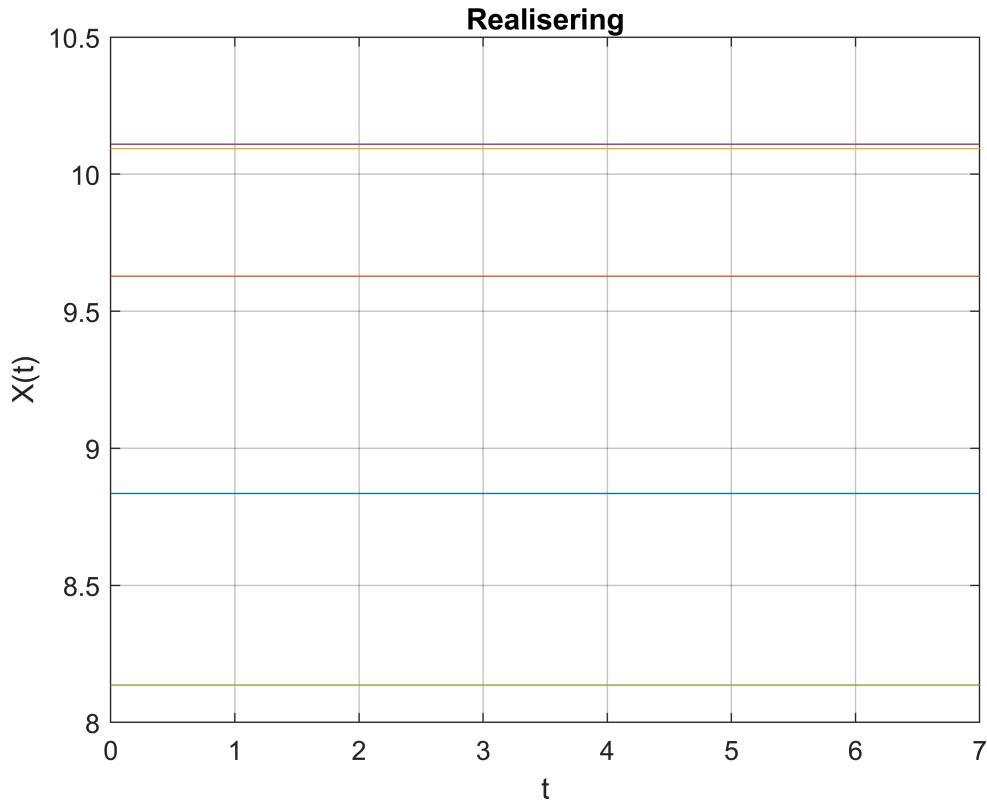
for n = 1:5
    Realisation(n, :) = (ones(1, 8) * (sigma * randn + mu)) + 4;
end

figure(3)
```

```

plot(t, Realisation(1, :));
hold on
plot(t, Realisation(2, :));
plot(t, Realisation(3, :));
plot(t, Realisation(4, :));
plot(t, Realisation(5, :));
grid on
title('Realisering')
ylabel('X(t)')
xlabel('t')
hold off

```



MIDDELVÆRDI OG VARIANS

For at bestemme middelværdien for ensemble anvendes, at

$$E[X(t)] = E[w + 4] = E[w] + E[4]$$

```
Ensemble.MeanValue = mu + 4;
```

Variansen kan bestemmes som

$$\text{Var}(X(t)) = \text{Var}[w + 4] = \text{Var}[w] + \text{Var}[4]$$

```
Ensemble.Variance = sigma^2 + 0;
```

```
Ensemble
```

```
Ensemble = struct with fields:
```

```
Mean: 4
Variance: 1
MeanValue: 9
```

Dermed er middelværdien bestemt til at være 9 og variansen bestemt til at være 1.

REALISERINGS MIDDLELVÆRDI OG VARIANS

```
Real.Mean = mean(Realisation(1, :));
Real.Variance = round(var(Realisation(1, :)), 10);

Real
```

```
Real = struct with fields:
    Mean: 8.8351
    Variance: 0
```

Middelværdi og variansen for en udvalgt realisering er bestemt til at være værdierne vist ovenfor.

PROCESSEN

Da ensemble middelværdi og varianse er uafhængig af tiden og samtidig konstant er processen WSS.
Processen er ikke ergodisk da middelværdien og variansen af en realisering ikke siger noget om en middelværdi og varians for hele processen.

FORÅR 2016 REEKSAMEN

En kontinuer stokastisk process er givet ved

$$X(t) = w(t)$$

Hvor $w(t)$ er i.i.d (uafhængig og ens fordele) og normalfordelt efter $w(t) \sim N(t, 1)$.

REALISERING

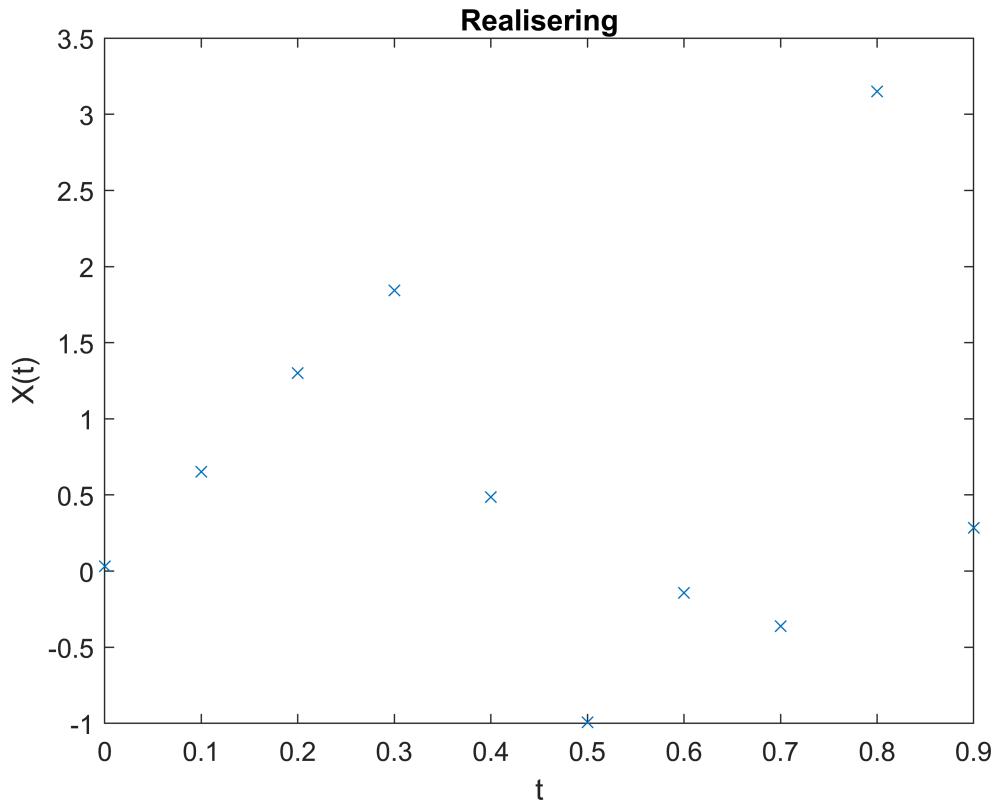
Realiseringen laves ved brug af matlab.

```
t = 0:0.1:0.9;

mu = t;
sigma = sqrt(1);

Realisation = randn(1, length(t)) + t;

figure(2)
plot(t, Realisation(1, :), 'x');
title('Realisering')
ylabel('X(t)')
xlabel('t')
hold off
```



ENSEMBLE

For at bestemme middelværdien for ensemble anvendes, at

$$E[X(t)] = E[w(t)] = t$$

```
Ensemble.MeanValue = t;
```

Variansen kan bestemmes som

$$\text{Var}(X(t)) = \text{Var}[w(t)] = 1$$

```
Ensemble.Variance = sigma^2;
```

```
Ensemble
```

```
Ensemble = struct with fields:
    Mean: 4
    Variance: 1
    MeanValue: [0 0.1000 0.2000 0.3000 0.4000 0.5000 0.6000 0.7000 0.8000 0.9000]
```

Dermed er middelværdien bestemt til at være t og variansen bestemt til at være 1.

TEMPORAL MEAN

Den tidslige middelværdi kan bestemmes som

$$\mu_{X(t)}(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f_{X(t)}(x(t))dx(t)$$

Hvor den forventede tidslige middelværdi i en intervallet kan bestemmes som gennemsnittet i intervallet bestem som følgende.

$$\frac{1}{n} \cdot \int_0^{100} E[X(t)]dt$$

```
t = 0:1:100;
TemporalMeanEstimate = sum(t) / length(t)
```

TemporalMeanEstimate = 50

PROCESSEN

Da middelværiden er afhængig af tiden er processen ikke WSS. Da processen ikke er WSS kan processen heller ikke være ergodisk.

AUTOKORRELATION

Ligningen til at bestemme autokorrelationen er som følgende

$$R_{x(t_1)x(t_2)}(t_1 = 1, t_2 = 2) = \int_{x(t_1)}^{\cdot} \int_{x(t_2)}^{\cdot} x(t_1)x(t_2) \cdot f_{X(t_1), X(t_2)}(x(t_1), x(t_2)) dx(t_1)dx(t_2)$$

Da $x(t_1)$ og $x(t_2)$ er uafhængige gælder, at

$$R_{x(t_1)x(t_2)}(t_1 = 1, t_2 = 2) = E[x(t_1)] \cdot E[x(t_2)]$$

```
Rx = @(x, y) t(x + 1) * t(y + 1);
AutoCorrelationValue = Rx(1, 2)
```

AutoCorrelationValue = 2

Værdien for autokorrelation er dermed bestemt til at være 2.

FORÅR 2017

En kontinuert stokastisk process $X(t)$ givet ved

$$X(t) = (-1)^n + W$$

hvor W er i.i.d. Gaussisk fordelte stokastiske variable $W \sim N(0, 0.25)$ og n uafhængigt kan antage værdierne 0 og 1 med lige stor sandsynlighed. $\diamond(0; 0.25)$, og n uafhængigt kan .

REALISERING

Skitsering af realiseringen laves i matlab.

```

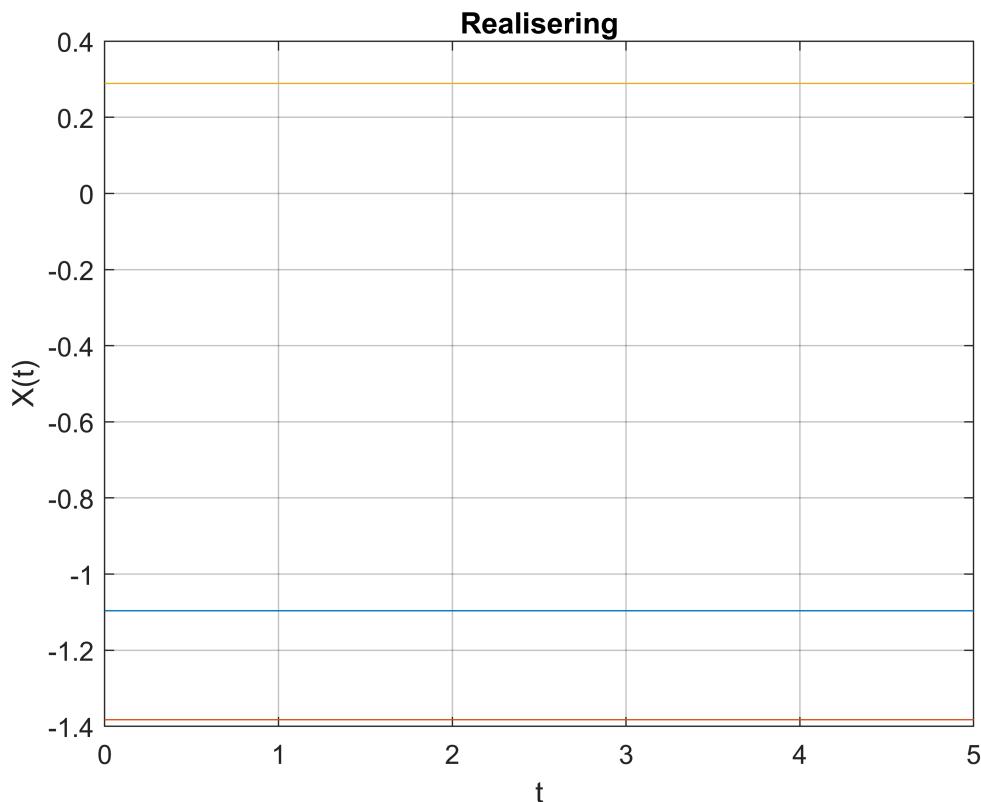
t = 0:1:5;
mu = 0;
sigma = sqrt(0.25);

Realisation = [[],[],[]];

for n = 1:3
    Realisation(n, :) = (-1)^(randi([0, 1])) + (ones(1, length(t)) * (sigma * randn + mu));
end

figure(1)
plot(t, Realisation(1, :));
hold on
plot(t, Realisation(2, :));
plot(t, Realisation(3, :));
grid on
title('Realisering')
ylabel('X(t)')
xlabel('t')
hold off

```



MIDDEL OG VARIANS AF REALISERING

```

Real.Mean = mean(Realisation(1, :));
Real.Variance = round(var(Realisation(1, :)), 10);

```

Real

```
Real = struct with fields:  
    Mean: -1.0962  
    Variance: 0
```

Middelværdi og variansen for en udvalgt realisering er bestemt til at være værdierne vist ovenfor.

ENSEMBLE MIDDLEVÆRDI OG VARIANS

For at bestemme middelværdien for ensemble anvendes, at

$$E[X(t)] = E[(-1)^n + W] = E[(-1)^n] + E[W]$$

$$E[X(t)] = (-1)^0 \cdot P(n=0) + (-1)^1 \cdot P(n=1) + E[W]$$

$$P(n=0) = P(n=1) = \frac{1}{2}$$

```
Ensemble.MeanValue = ((-1)^0) * 1/2 + ((-1)^1) * 1/2 + mu;
```

Variansen kan bestemmes som

$$\text{Var}(X(t)) = \text{Var}[(-1)^n + W] = \text{Var}[(-1)^n] + \text{Var}[W]$$

$$\text{Var}[X(t)] = E[((-1)^n)^2] - E[(-1)^n]^2 + \text{Var}[W]$$

```
Ensemble.Variance = (((-1)^0)^2 * 1/2 + ((-1)^1)^2 * 1/2) ...  
+ (((-1)^0) * 1/2 + ((-1)^1) * 1/2)^2 + sigma^2;
```

Ensemble

```
Ensemble = struct with fields:  
    Mean: 4  
    Variance: 1.2500  
    MeanValue: 0
```

Dermed er middelværdien bestemt til at være 0 og variansen bestemt til at være 1.25.

PROCESSEN

Processen er WSS da middelværdien og variansen er uafhængig af tiden. Dog er processen ikke ergodisk da den temporale middelværdi samt varians er forskellige fra ensemble værdierne.

FORÅR 2017 REEKSAMEN

En diskret stokastisk process $X(n)$ er givet ved

$$X(n) = 2 \cdot W(n) - 1$$

hvor $W(n)$ er i.i.d fordelte efter

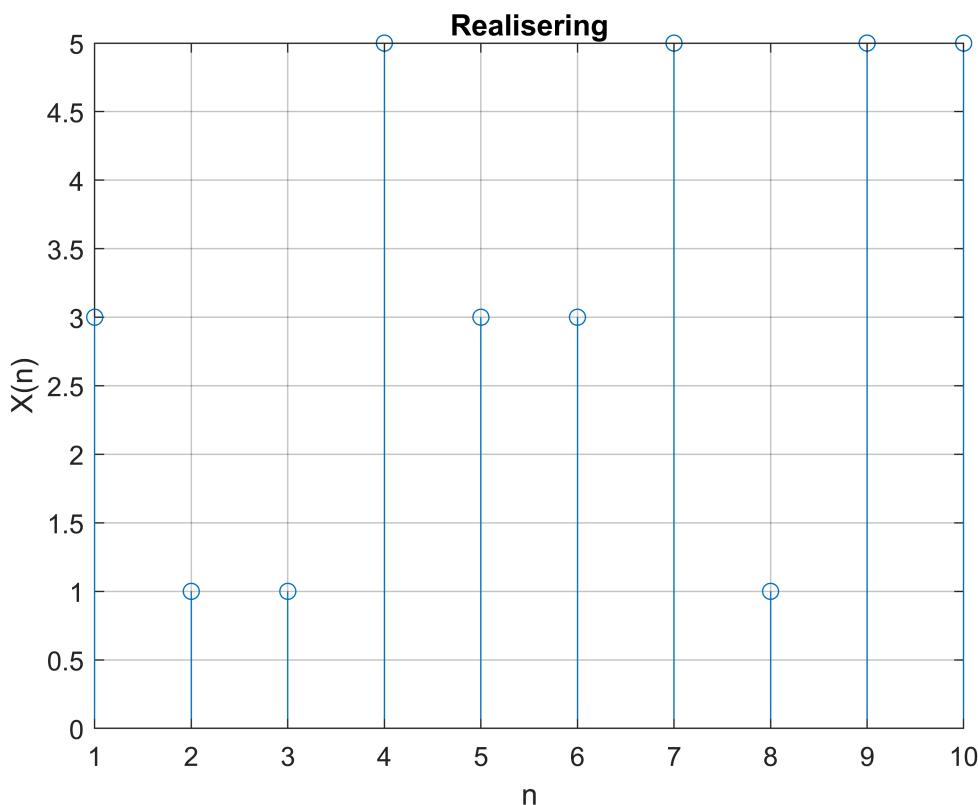
$w(n)$	0	1	2	3
$f_{w(n)}(w(n))$	1/4	1/4	1/4	1/4

REALISERING

Realisering af den diskrete process er lavet i Matlab.

```
X = 2 * (unidrnd(4, 1, 10) - 1) - 1;
n = 1:1:10;

figure(1)
stem(n, X, 'o');
grid on
title('Realisering')
ylabel('X(n)')
xlabel('n')
hold off
```



REALISERING MIDDELVÆRDI OG VARIANS

```
Real.Mean = mean(X);
```

```
Real.Variance = round(var(X), 10);
```

```
Real
```

```
Real = struct with fields:
```

```
Mean: 3.2000
```

Variance: 3.0667

MIDDELVÆRDI OG VARIANS

For at bestemme middelværdien for processen anvendes, at

$$E[X(n)] = E[2 \cdot W(n) - 1] = 2 \cdot E[W(n)] - 1$$

Hvor $W(n)$ er uniform og dermed gælder, at

$$E[W(n)] = \frac{a+b}{2}$$

hvor $a = 0$ og $b = 3$

```
a = 0;  
b = 3;
```

```
MeanValue = 2 * ((a+b)/2) - 1
```

```
MeanValue = 2
```

Middelværdien er dermed bestemt til at være 2. For variansen gælder, at

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

$$\text{Var}[aX + b] = a^2(E[X^2] - E[X]^2) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}[X(n)] = \text{Var}[2 \cdot W(n) - 1] = 2^2 \cdot \text{Var}[W(n)]$$

$$\text{Var}[W(n)] = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

```
Variance = 2^2 * ((1/12)*((b-a+1)^2 - 1))
```

```
Variance = 5
```

PROCESSEN

Processen er WSS da middelværdi og varians er uafhængig af tiden. Da Middelværdi og varians kan bestemmes ud fra en realisering er processen ergodisk.

FORÅR 2018

En kontinuert stokastisk process er givet ved

$$y(t) = x(t) + w$$

hvor $x(t) \sim N(0, t^2)$ og $w \sim N(0, 1)$. x og w er uafhængige.

REALISERING

Realiseringen af lavet i matlab.

```
t = 0:1:10;
```

```

nmu = 3;
nvariance = 1;

xmu = 0;
xvariance = t.^2;

y = [[],[],[]];

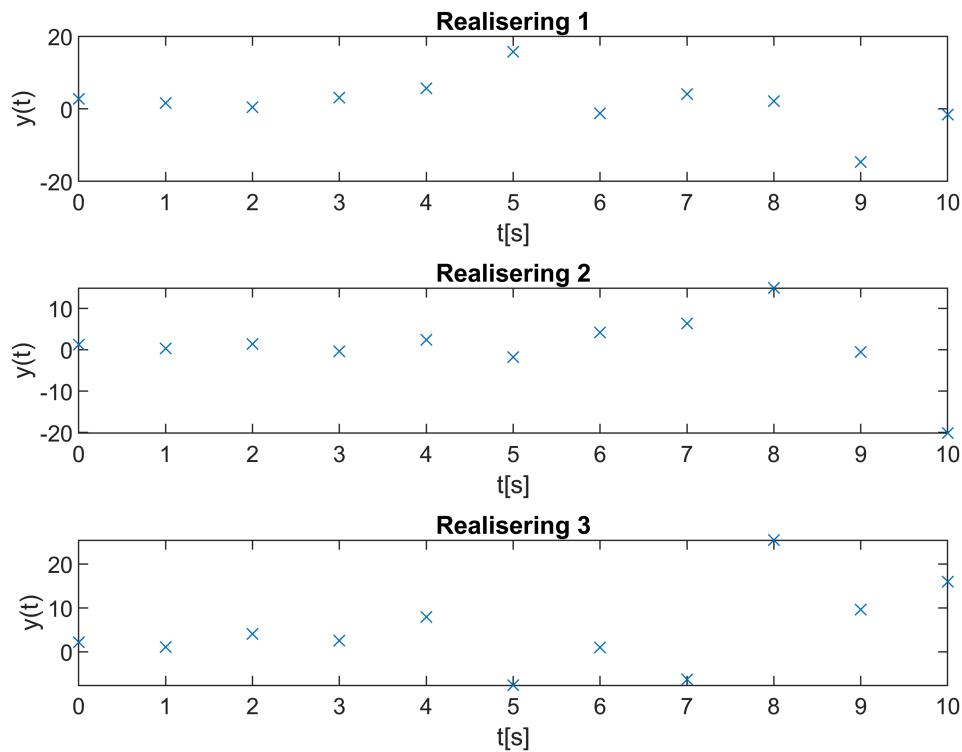
for n = 1:3
    w = sqrt(nvariance) * randn + nmu;
    x = sqrt(xvariance) .* randn(1, 11) + xmu;
    y(n, :) = x + w;
end

figure(2)
subplot(3,1,1,gca)
plot(t, y(1, :), 'x');
title('Realisering 1');
xlabel('t[s]');
ylabel('y(t)');

subplot(3,1,2)
plot(t, y(2, :), 'x');
title('Realisering 2');
xlabel('t[s]');
ylabel('y(t)');

subplot(3,1,3)
plot(t, y(3, :), 'x');
title('Realisering 3');
xlabel('t[s]');
ylabel('y(t)');
hold off

```



ENSEMBLE MIDDELVÆRDI

For at bestemme middelværdien anvendes, at

$$E[y(t)] = E[x(t) + w] = E[x(t)] + E[w]$$

```
EnsembleMean = xmu + nmu
```

```
EnsembleMean = 3
```

Middelværdien for ensemble er dermed bestemt til at være 3.

3.3 ENSEMBLE VARIANS

For at bestemme variansen anvendes, at

$$\text{Var}[y(t)] = \text{Var}(x(t) + w) = \text{Var}[x(t)] + \text{Var}[w]$$

```
syms t
EnsembleVariance = t^2 + nvariance
```

```
EnsembleVariance = t^2 + 1
```

Variansen for ensemble er dermed bestemt til at være $t^2 + 1$.

TIDSLIG MIDDELVÆRDI

For at bestemme den tidslige middelværdi og varians for en realisation af processen kan følgende anvendes.

$$\hat{\mu}_{X_i} = \langle X_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt$$

$$\hat{\sigma}_{X_i}^2 = \langle X_i^2 \rangle_T - \langle X_i \rangle_T^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_i(t)^2 - \hat{\mu}_{X_i}^2) dt$$

For middelværdien gælder, at

$$\hat{\mu}_{Y_1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (y_1(n \cdot T)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (x_1(n) + w_1) = 0 + w_1 = w_1$$

For variansen gælder, at

$$\hat{\sigma}_{Y_1}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (y_1^2(n \cdot T) - \hat{\mu}_{Y_1}^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (x_1(n) + w_1)^2 - w_1^2 = \infty = (t^2)$$

PROCESSEN

Da den tidslige varians er forskellige fra ensemble varians er processen ikke WSS. Da processen ikke er WSS er processen heller ikke ergodisk.

FORÅR 2018 REEKSAMEN

SANDSYNLIGHED

EFTERÅR 2015

TOTAL SANDSYNLIGHED

Event A: Laktoseintolerent

Event B: Positiv Test

$$P(A) = 0.2, \quad P(B|A) = 0.9, \quad P(B|\bar{A}) = 0.3$$

Den totale sandsynlighed kan findes udtryk som følgende:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$

```
Intolerant = 0.2;
IntolerantPositiveTest = 0.9;
```

```
NoIntolerantPositiveTest = 0.3;
NotIntolerant = 1 - Intolerant;

PositiveTest = (IntolerantPositiveTest * Intolerant) + (NoIntolerantPositiveTest * NotIntolerant);

PositiveTest = 0.4200
```

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.42 altså 42%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at finde sandsynligheden for at have en positiv test same også at have sygdommen kan findes ved at anvende bayes formel som nedenstående:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

```
IntolerantGivenPositiveTest = (IntolerantPositiveTest * Intolerant) / PositiveTest
```

```
IntolerantGivenPositiveTest = 0.4286
```

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.4286 altså 42.86%.

EFTERÅR 2015 REEKSAMEN

RELATIVE FREKVENS

EVENT A: HJERTER KONGE

EVENT B: SPAR ES

Sandsynligheden for at trækker hjerte konge blandt de syv kort er som følgende. Der vil være syv muligheder blandt de allerede trukket kort for at finde en hjerter konge.

```
Cards = 52;
Drawings = 7;

A = Drawings / Cards
```

```
A = 0.1346
```

Sandsynligheden er dermed 0.1346 altså 13.46%.

FÆLLESMÆNGDE

$$P(B) = P(A) = 0.13462$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

```
B = Drawings / Cards;
AGivenB = (Drawings - 1) / (Cards - 1);
AAndB = AGivenB * B
```

AAndB = 0.0158

Sandsynligheden er dermed 0.0158 altså 1.58%.

UAFHÆNGIGHED

For at tjekke om der er uafhængig gælder følgende udtryk for uafhængighed

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

```
if A * B == AAndB
    disp("A og B er uafhængige");
else
    disp("A og B er ikke uafhængige");
end
```

A og B er ikke uafhængige

Det er dermed bestemt at de to hændelser A og B ikke er uafhængige.

KOMBINATIONER

Det antages at eksperimentet ikke er i orden og er uden tilbagelægning, derved gælder, at (k objects out of collection of n objects)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
n = 52;
k = 7;
```

```
Combinations = factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n-k))
```

Combinations = 133784560

Dermed er antallet af kombinationer bestemt til at være 133784560.

EFTERÅR 2016

FÆLLESMÆNGDE

$$P(B|A) = 0.92, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.98, \quad P(A) = 0.001$$

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

```
BGivenA = 0.92;
NotBGivenNotA = 0.98;
```

```
A = 0.001;
```

```
AAndB = BGivenA * A
```

AAAndB = 9.2000e-04

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.00092 altså 0.092%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

Der anvendes, at

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A})$$

```
NotA = 1 - A;
```

```
B = AAndB + ((1 - NotBGivenNotA) * NotA)
```

B = 0.0209

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.0209 altså 2.09%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

Der anvendes, at

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

```
AGivenB = AAndB / B
```

AGivenB = 0.0440

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.0440 altså 4.40%.

UAFHÆNGIGHED

```
if A * B == AAndB
    disp("A og B er uafhængige");
else
    disp("A og B er ikke uafhængige");
end
```

A og B er ikke uafhængige

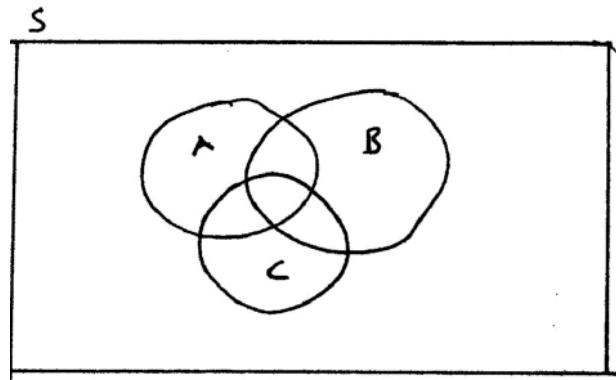
Det er dermed bestemt at de to hændelser A og B ikke er uafhængige.

EFTERÅR 2016 REEKSAMEN

VENN DIAGRAM

Hændelserne er ikke disjunkte,
 dvs: $\Pr(A \cap B) \neq \emptyset$ $\Pr(B \cap C) \neq \emptyset$
 og $\Pr(A \cap C) \neq \emptyset$

Ikke delmængder, dvs. $A \not\subset B, B \not\subset A$
 $A \not\subset C, C \not\subset A$
 $B \not\subset C, C \not\subset B$



FÆLLESMÆNGDE

Find sandsynligheden for, at der både er blade på skinnerne og signalfejl.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

da begivenhederne er uafhængige ses følgende

$$P(A|B) = P(A)$$

hvorved

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

```
A = 1/4;
B = 1/2;
C = 1/4;
```

```
LeavesAndSignal = A * B
```

```
LeavesAndSignal = 0.1250
```

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.1250 altså 12.5%.

FORENINGSMÆNGDE

Find sandsynligheden for, at der enten er blade på skinnerne eller signalfejl.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

```
LeavesOrSignal = A + B - LeavesAndSignal
```

```
LeavesOrSignal = 0.6250
```

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.6250 altså 62.5%.

SAMLET FORENINGSMÆNGDE

Find sandsynligheden for, at en forsinkelse på toget skyldes blade på skinnerne, signalfejl eller personalemangel.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

da A, B og C er uafhængige gælder, at

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

```
LeavesSignalPersonal = A + B + C - (A * B) - (A * C) - (B * C) + (A * B * C)
```

```
LeavesSignalPersonal = 0.7188
```

Sansynligheden er dermed bestemt til at være 0.7188 altså 71.88%.

EFTERÅR 2017

MARGINALE MASSEFUNKTION

For de marginale tæthedsfunktioner gælder, at

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y), \quad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y)$$

Der gælder, at

$$\sum_{x=1}^4 \sum_{y=1}^3 f_{X,Y}(x, y) = 1$$

```
BatEgg = [2/25, 2/25, 1/25, 1/25];
```

```
BarnEgg = [2/25, 3/25, 3/25, 2/25];
```

```
EcoEgg = [1/25, 2/25, 3/25, 0];
```

```
EcoEgg(4) = 1 - (sum(BatEgg) + sum(BarnEgg) + sum(EcoEgg));
```

```
disp("Sandsynligheden for et økoæg af størrelsen 4 er " + EcoEgg(4));
```

Sandsynligheden for et økoæg af størrelsen 4 er 0.12

MARGINALE MASSEFUNKTION

Sandsynligheden for at et tilfældigt øg er af størrelsen 3, kan findes ved følgende udtryk.

$$f_X(x = 3) = \sum_y f_{X,Y}(x = 3, y)$$

```
Egg = [
    [2/25, 2/25, 1/25, 1/25]
    [2/25, 3/25, 3/25, 2/25]]
```

```
[1/25, 2/25, 3/25, 3/25]
];
SizeThree = sum(Egg(:,3));
disp("Sandsynligheden for et tilfældigt æg med størrelse 3 er lig med " + SizeThree);
```

Sandsynligheden for et tilfældigt æg med størrelse 3 er lig med 0.28

MARGINALE MASSEFUNKTION

Sandsynligheden for at et tilfældigt æg er et buræg, kan findes ved følgende udtryk.

$$f_Y(y = 1) = \sum_x f_{X,Y}(x, y = 1)$$

```
BatEgg = sum(Egg(1, :));
disp("Sandsynligheden for et tilfældigt buræg er lig med " + BatEgg);
```

Sandsynligheden for et tilfældigt buræg er lig med 0.24

BETINGET MASSEFUNKTION

Sandsynligheden for at det tilfældige udtagne æg er et skrabeæg givet,

at det er af størrelsen 2 kan beregnes ud fra følgende udtryk.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = P(Y = y, X = x)$$

hvor $x = 2$ og y er = 2.

```
BarnEggGivenSizeTwo = Egg(2, 2) / sum(Egg(:, 2));
disp("Sandsynligheden for at ægget er et" + ...
      " skrabeæg givet at størrelsen er 2, er lig med " + BarnEggGivenSizeTwo);
```

Sandsynligheden for at ægget er et skrabeæg givet at størrelsen er 2, er lig med 0.42857

EFTERÅR 2018

TOTAL SANDSYNLIGHED

For at bestemme I hvor stor en del af situationerne der var alarm opstilles to hændelse givet ved A og B som følgende.

A : ALARM

B : RØG

$$P(B) = 0.33$$

$$P(A \cap B) = 0.32$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.07$$

```
B = 0.33;  
AAndB = 0.32;  
ANotB = 0.07;
```

Dertil anvendes den totale sandsynlighed for A som er giver ved

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

```
A = AAndB + ANotB
```

$$A = 0.3900$$

Dette betyder, at der i 39% af tilfældene var alarm.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for situationer uden røgudvikling, at der alligevel vil være alarm anvendes følgende.

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

```
NotB = 1 - B;  
AGivenNotB = ANotB / NotB
```

$$AGivenNotB = 0.1045$$

Dette betyder, at der i 10.45% af tilfældene uden røgudvikling vil være alarm.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for situationer med røgudvikling, at der ikke vil være alarm anvendes følgende.

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

```
NotAGivenB = 1 - (AAndB / B)
```

$$NotAGivenB = 0.0303$$

Dette betyder, at der i 3% af tilfældene med røgudvikling ikke vil være alarm.

FORÅR 2016

RELATIVE FREKVENS

For at bestemme hvad sandsynligheden er for hændelse A, vides det, at der blev født 29.785 drenge og 28.131 piger i 2012. Da anvendes den relative frekvens som er bestemt ved følgende udtryk.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{28.131}{28.131 + 29.785}$$

```
Boys = 29785;  
Girls = 28131;
```

```
A = Girls / (Girls + Boys)
```

```
A = 0.4857
```

Sandsynligheden for hændelse **A** er dermed bestemt til at være 48.57%.

TOTAL SANDSYNLIGHED

Den totale sandsynlighed for hændelse **C** kan bestemmes ved, at anvende følgende.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

Der antages i dette tilfælde for opgaven, at $P(B) = 1 - P(A)$ da den modsatte hændelse at få en pige vil være at få en dreng.

```
B = 1 - A;  
CGivenB = 0.202;  
CGivenA = 0.128;
```

```
C = CGivenA * A + CGivenB * B
```

```
C = 0.1661
```

Den totale sandsynlighed for hændelse **C** er dermed bestemt til at være 16.61%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme hvad sandsynligheden for at den fødende fik en pige, hvis det oplyses, at hendes barn vejede over 4000g ved fødslen anvendes, at

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

```
AGivenC = (CGivenA * A) / C
```

```
AGivenC = 0.3744
```

Dermed er sandsynligheden for, at den fødende fik en pige givet at barnet vejde over 4000g ved fødslen, bestemt til at være 37.44%.

FORÅR 2016 REEKSAMEN

TOTAL SANDSYNLIGHED

Den totale sandsynlighed for hændelse **B** kan bestemmes ved, at anvende følgende.

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

```
BGivenA = 0.06;  
BGivenNotA = 0.03;  
A = 0.31;  
  
NotA = 1 - A;  
  
B = BGivenA * A + BGivenNotA * NotA
```

$$B = 0.0393$$

Sandsynligheden for hændelse B er dermed bestemt til at være 0.0393 altså 3.93%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for om et barn tilhørte gruppen der havde flyttet mere end en gang, hvis det havde begået kriminalitet anvendes, at

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

```
AGivenB = (BGivenA * A) / B
```

$$AGivenB = 0.4733$$

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.4733 altså 47.33%.

FORÅR 2017

TOTAL SANDSYNLIGHED

Først findes den totale sandsynlighed for A, givet ved

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

```
DaysInMonth = 30;  
  
AGivenB = 0.2;  
AGivenNotB = 0.3;  
B = 0.5;  
  
NotB = 0.5;  
  
A = AGivenB * B + AGivenNotB * NotB;  
DaysWithRain = A * 30
```

```
DaysWithRain = 7.5000
```

Dermed er det bestemt at der regner i gennemsnit 7.5 i juni måned.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for at være i den sidste del af måneden givet at der er regnvejr anvendes, at

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{P(A)}$$

```
NotBGivenA = (AGivenNotB * B) / A
```

```
NotBGivenA = 0.6000
```

Dermed er sandsynligheden bestemt til at være 0.6 altså 60%.

KOMBINATORIK

For at bestemme sandsynligheden for højst en dag med regn observeres, at

$$P(\text{dage} \leq 1|B) = P(0 \text{ dage} | B) + P(1 \text{ dag} | B)$$

Dertil anvendes ikke sorteret rækkefølge uden tilbagelægning. Succes ses som

$$P(A|B) = p = 0.2$$

hvor fiasko ses som

$$P(\bar{A}|B) = 1 - p = 0.8$$

Sandsynligheden kan bestemmes som

$$P(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k}$$

```
DaysWithinHalfMonth = DaysInMonth / 2;
```

```
Bernoulli = @(k, n) (factorial(n) / (factorial(k) * factorial(n-k))) * (AGivenB^k) * ((1-AGivenB)^(n-k))
```

```
Bernoulli(1, 15) + Bernoulli(0, 15)
```

```
ans = 0.1671
```

Dermed er sandsynligheden for regn højst en dag bestemt til at være 0.1671 altså 16.71%.

FORÅR 2017 REEKSAMEN

En leverance af modstande indeholder

1000 stk. 1 kΩ; 800 stk. 10 kΩ; 400 stk. 100 kΩ

Modstandene leveres både som 5% modstande og 1% modstande. 1% modstandene udgør $\frac{1}{4}$ af 1 k Ω , $\frac{1}{2}$ af 10 k Ω og $\frac{3}{4}$ af 100 k Ω modstandene. Modstandene er desværre blevet blandet sammen og leveres i én blandet pose.

$A_1 : 1k\Omega \quad A_{10} : 10k\Omega \quad A_{100} : 100k\Omega$

$B_1 : 1\% \quad B_5 : 5\%$

$$P(B_1|A_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(B_1|A_{10}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B_1|A_{100}) = \frac{3}{4}$$

```
BOneGivenAOne = 1/4;
BOneGivenATen = 1/2;
BOneGivenAHundred = 3/4;

ROne = 1000;
RTen = 800;
RHundred = 400;

Resistors = ROne + RTen + RHundred;
```

RELATIVE FREKVENS

For at bestemme sandsynlighede for hvilken modstand der trækkes anvendes, at

$$P(A) = \frac{N_s}{N}$$

```
Resistor.One = ROne / Resistors;
Resistor.Ten = RTen / Resistors;
Resistor.Hundred = RHundred / Resistors;
```

Resistor

```
Resistor = struct with fields:
  One: 0.4545
  Ten: 0.3636
  Hundred: 0.1818
```

Sandsynligheden for at trække hhv. 1, 10 eller 100 kilohms modstand er vist i ovenstående.

FÆLLESMÆNGDE

For at bestemme sandsynligheden for, at modstanden er både 10k Ω og 1% anvendes, at

$$P(A_{10} \cap B_1) = P(B_1|A_{10}) \cdot P(A_{10})$$

```
ATenAndBOne = BOneGivenATen * Resistor.Ten
```

ATenAndBOne = 0.1818

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.1818 altså 18.18%.

TOTAL SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for at den udtagne modstand er 1% anvendes, at

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

```
BOne = BOneGivenAOne * Resistor.One + BOneGivenATen * Resistor.Ten + BOneGivenAHundred * Resist
```

BOne = 0.4318

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.4318 altså 43.18%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for at modstanden er $100k\Omega$ givet at den er 5% anvendes, at

$$P(A_{100}|B_5) = \frac{P(B_5|A_{100}) \cdot P(A_{100})}{P(B_5)}$$

```
BFive = 1 - BOne;
```

```
BFiveGivenAHundred = 1 - BOneGivenAHundred;
```

```
AHundredGivenFive = (BFiveGivenAHundred * Resistor.Hundred) / BFive
```

AHundredGivenFive = 0.0800

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.08 altså 8.00%.

FORÅR 2018

Et system er udviklet til at registrere om RFID tags er defekte. En undersøgelse viser, at givet et RFID tag ikke er defekt, er sandsynligheden for, at systemet registrerer, at det ikke er defekt lig med 0.4. Givet et RFID tag er defekt, er sandsynligheden for, at systemet registrerer, at det er defekt lig med 0.999. Det vides, at 1 ud af 100 RFID tags er defekte.

A : RFID DEFEKT

B : REGISTRER DEFECT

$$P(A) = \frac{1}{100}$$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.4$$

$$P(B|A) = 0.999$$

```
A = 1/100;
```

```
NotBGivenNotA = 0.4;
```

```
BGivenA = 0.999;
```

TOTAL SANDSYNLIGHED

For at bestemme sandsynligheden for at RFID tag ikke er defekt anvendes, at

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

```
NotA = 1 - A
```

NotA = 0.9900

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.99.

TOTAL SANDSYNLIGHED

For at bestemme den totale sandsynligheden for at systemet registerer et RFID tag som er defekt anvendes, at

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A})$$

```
BGivenNotA = 1 - NotBGivenNotA;
```

```
B = BGivenA * A + BGivenNotA * NotA
```

B = 0.6040

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.6040 altså 60.40%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme hvad sandsynligheden for at et RFID tag er defekt givet at det er registreret som defekt anvendes, at

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

```
AGivenB = (BGivenA * A) / B
```

AGivenB = 0.0165

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 0.0165 altså 1.65%.

BETINGET SANDSYNLIGHED

For at bestemme hvad sandsynligheden for at et RFID tag ikke er defekt givet at det er registreret som defekt anvendes, at

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)}$$

```
%NoAGivenB = 1 - AGivenB
```

```
NotAGivenB = (BGivenNotA * NotA) / B
```

NotAGivenB = 0.9835

Sandsynlighen er dermed bestemt til at være 0.9835 altså 98.35%.

FORÅR 2018 REEKSAMEN

STATISTIK

EFTERÅR 2015

PLOT

Plot data fra tabellen, og optegn den bedste rette linie gennem punkterne ved at bestemme skæringen med y-aksen og hældningen af den lineære model. Angiv hvilken metode, der er anvendt til at finde den lineære model.

```
Year = [1901, 1911, 1921, 1931, 1941, 1951, 1961, 1971, 1981, 1991];
Amount = [5562, 4357, 3471, 3078, 2309, 1285, 969, 602, 238, 268];

SampleMean = mean(Amount);
YearMean = mean(Year);

beta = sum((Amount - SampleMean) .* (Year - YearMean)) / sum((Year - YearMean).^2);

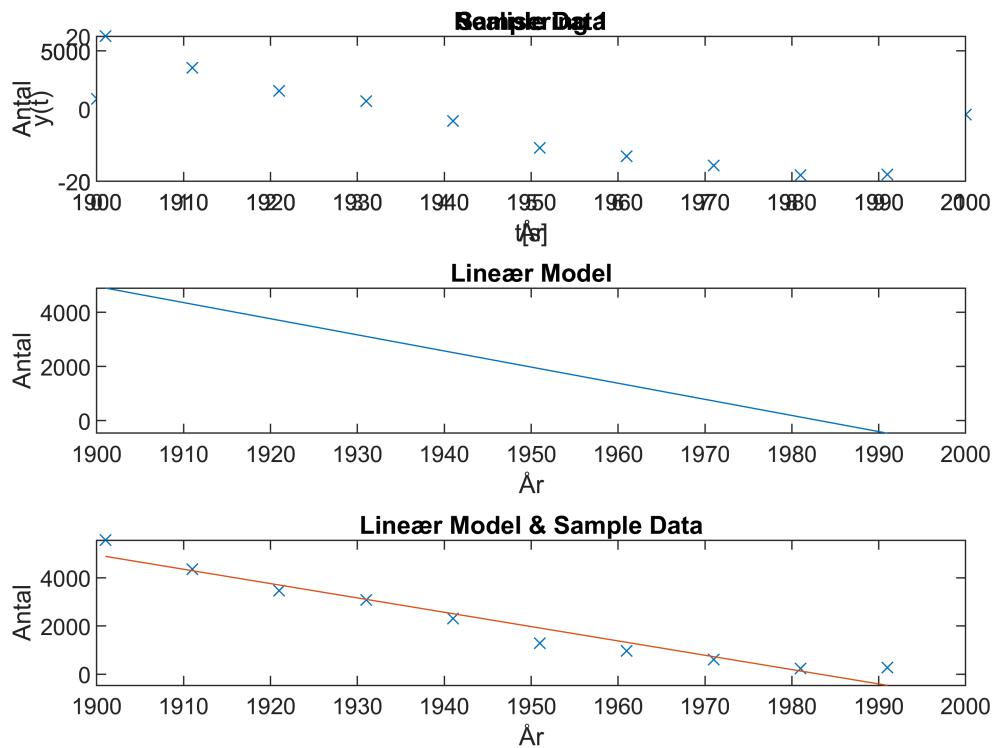
alpha = SampleMean - beta * YearMean;

Fitting = beta * Year + alpha;

figure(2)
subplot(3,1,1,gca)
plot(Year, Amount, 'x');
title('Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Antal');

subplot(3,1,2)
plot(Year, Fitting);
title('Lineær Model');
xlabel('År');
ylabel('Antal');

subplot(3,1,3)
plot(Year, Amount, 'x');
hold on
plot(Year, Fitting);
title('Lineær Model & Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Antal');
hold off
```

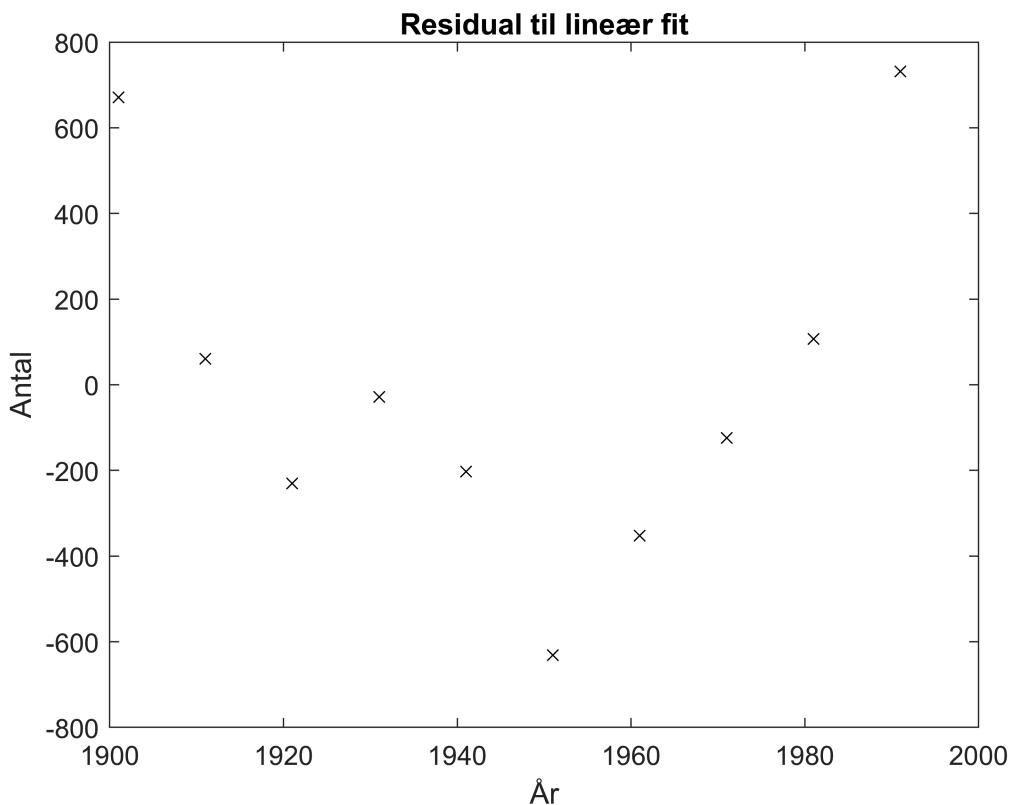


RESIDUAL TEGNING

$$\text{res}(t) = X(t) - (\alpha + \beta \cdot t)$$

```
Residuals = Amount - (alpha + beta * Year);
```

```
figure(5)
plot(Year, Residuals, 'kx');
title('Residual til lineær fit');
xlabel('År');
ylabel('Antal');
```



KONFIDENSINTERVAL

Beregn et 95% konfidensinterval for hældningen.

invers student t fordeling med frihedsgraden $n - 2 = 8$, og 95% konfidensinterval bestemmes t_0 til at være som følgende.

```
Tzero = tinv(0.975, 8);
EmpiricalVariance = (1 / (10 - 2)) * sum((Amount - (alpha + beta * Year)).^2);

interval = Tzero * (sqrt(EmpiricalVariance) / sqrt(sum((Year - YearMean).^2)));

BetaMinus = beta - interval;
BetaPlus = beta + interval;
```

LINEARITET

Ud fra svaret i opgave 2 og 3, vil du konkludere at antagelsen om linearitet mellem dødelighed og årstal er rimelig?

Der er umiddelbart for få målepunkter til at kunne konkludere noget generelt. Derimod er der en lineær tendens, men residual plottet viser at residualerne systematisk ligger under 0 mellem år 1920 - 1970, desuden vil data forvente at afvige mere efter år 1991, da dødeligheder ikke kan være negative. Linearitet er ikke en god antagelse.

EFTERÅR 2015 REEKSAMEN

Den gennemsnitlige alder for 1. gangs viede mænd i Danmark er angivet ved følgende tabel

Alder	25.2	26.5	27.9	29.2	30.2	31.7	32.8	34.0	34.3
År	1971	1976	1981	1986	1991	1996	2001	2006	2011

PLOT DATA

Til denne opgave anvendes lineær tilnærmelse, hvor

$$\hat{x} = \beta \cdot t + \alpha$$

Dertil anvendes, at

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x}$$

Samt at der for middelværdien gælder, at

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

```
Year = [1971, 1976, 1981, 1986, 1991, 1996, 2001, 2006, 2011];
Age = [25.2, 26.5, 27.9, 29.2, 30.2, 31.7, 32.8, 34.0, 34.3];
```

```
AgeMean = mean(Age);
YearMean = mean(Year);
```

```
beta = sum((Age - AgeMean) .* (Year - YearMean)) / sum((Year - YearMean).^2);
alpha = AgeMean - beta * YearMean;
Fitting = beta * Year + alpha;
```

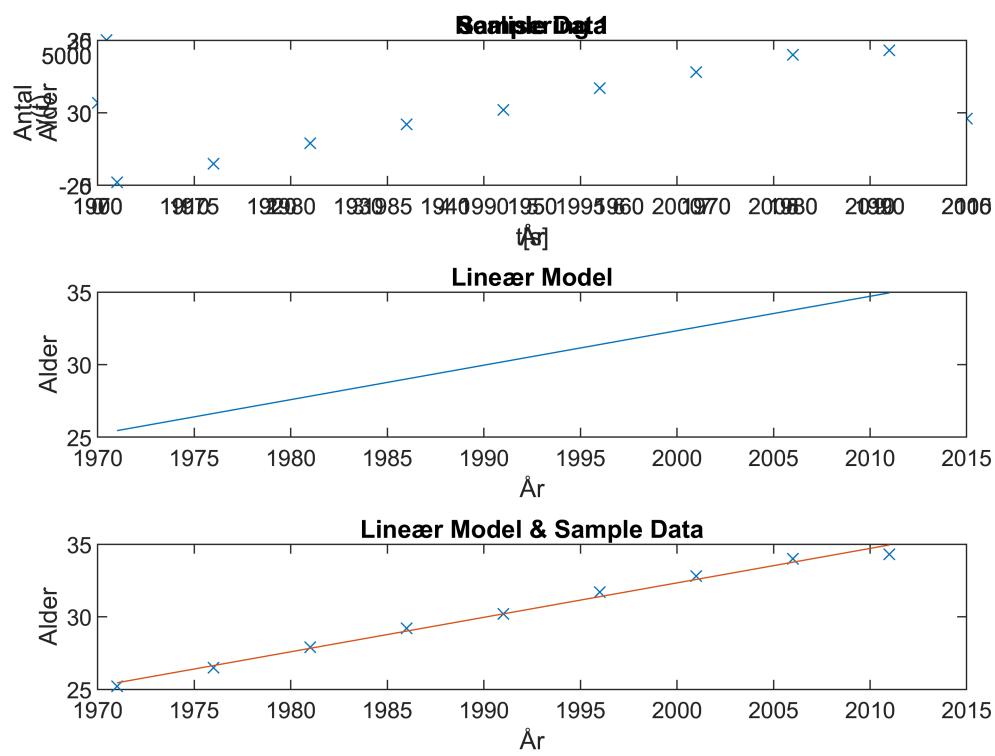
```
figure(2)
subplot(3,1,1,gca)
plot(Year, Age, 'x');
title('Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Alder');
```

```

subplot(3,1,2)
plot(Year, Fitting);
title('Lineær Model');
xlabel('År');
ylabel('Alder');

subplot(3,1,3)
plot(Year, Age, 'x');
hold on
plot(Year, Fitting);
title('Lineær Model & Sample Data');
xlabel('År');
ylabel('Alder');
hold off

```



RESIDUALTEGNING

Til at tegne residualer og beregne disse anvendes følgende udtryk.

$$\epsilon_i = y_i - (\alpha + \beta \cdot x_i)$$

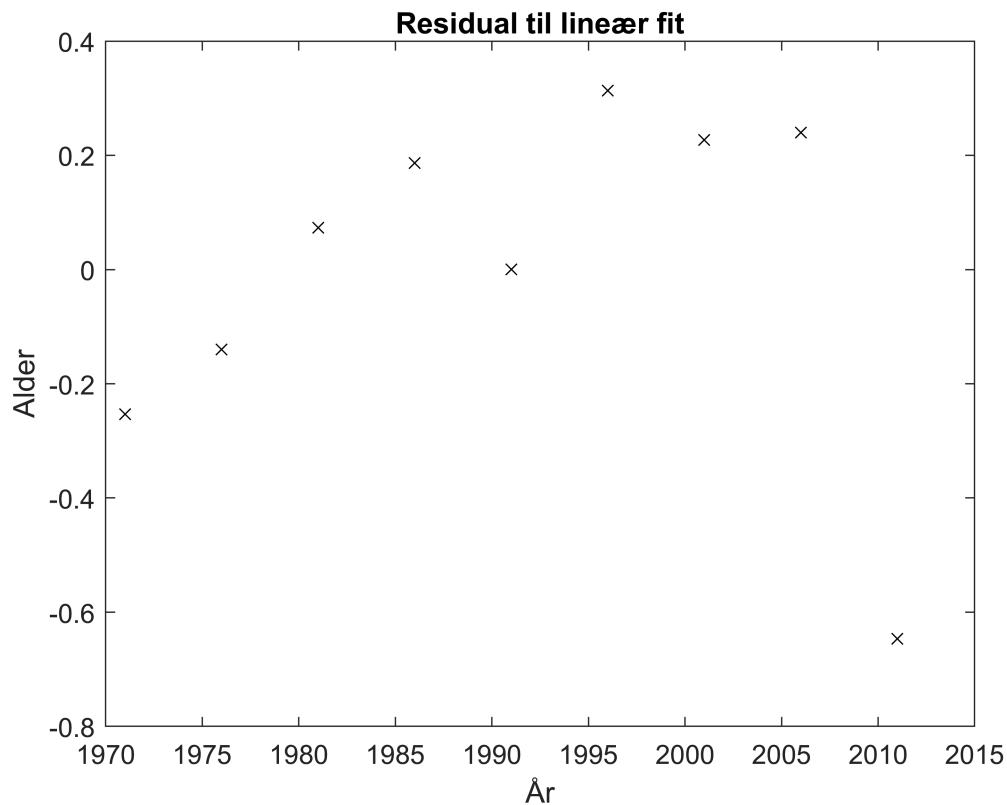
```

Residuals = Age - (alpha + beta * Year);

figure(6)
plot(Year, Residuals, 'kx');
title('Residual til lineær fit');
xlabel('År');

```

```
ylabel('Alder');
```



STATISTISK TEST

Da variansen er ukendt og data er gaussiske og ikke parret, benyttes en t-test for sammenligning af middelværdier.

EFTERÅR 2016

Antal patienter døde af AIDS i DK mellem 1985 - 1994 er angivet ved tabellen. Antal døde er angivet ved Antal og årstalet er angivet ved År.

MIDDELVÆRDI OG VARIANS

For middelværdien gælder, at

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

```
Amount = [28, 46, 44, 63, 104, 148, 172, 187, 223, 236];
```

```
Year = [1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994];
```

```
AmountMean = mean(Amount);
```

```
disp("Middelværdien for antallet af døde AIDS patienter er " + AmountMean);
```

Middelværdien for antallet af døde AIDS patienter er 125.1

For variansen gælder, at

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

```
n = 10;  
variance = (1/(n -1)) * sum((Amount-AmountMean).^2);  
disp("Variansen for antaller af døde AIDS patienter er " + variance);
```

Variansen for antaller af døde AIDS patienter er 6111.4333

LINEÆR REGRESSION

Til denne opgave anvendes lineær tilnærmelse, hvor

$$\hat{x} = \beta \cdot t + \alpha$$

Dertil anvendes, at

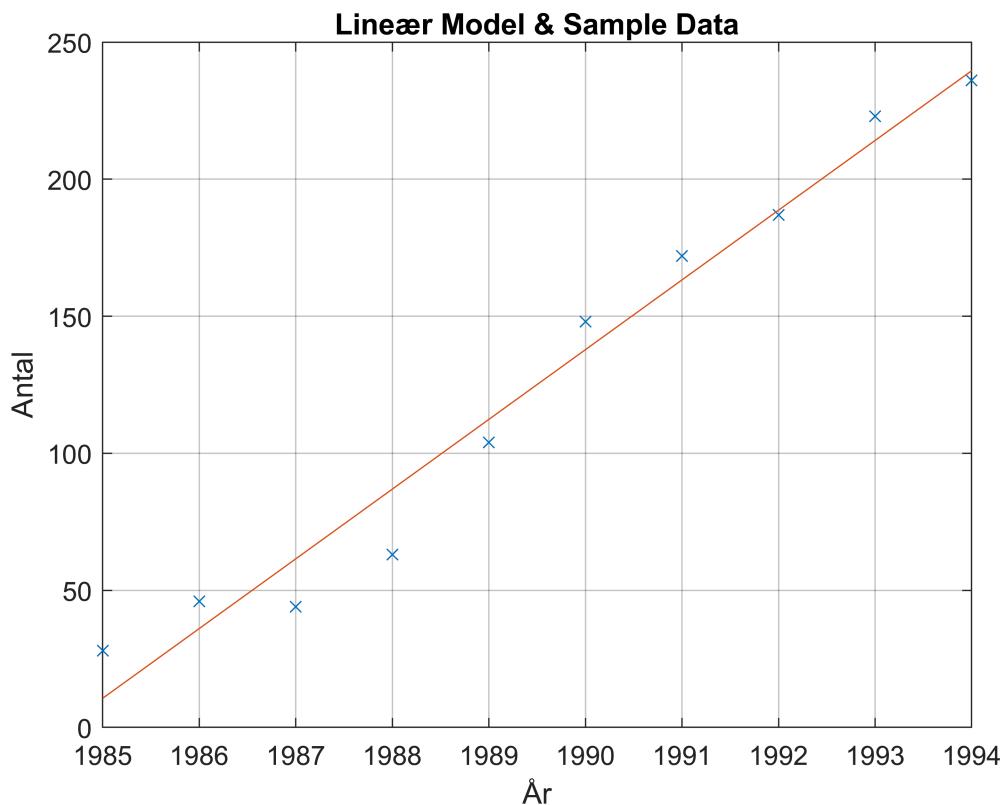
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x}$$

```
AmountMean = mean(Amount);  
YearMean = mean(Year);
```

```
beta = sum((Amount - AmountMean) .* (Year - YearMean)) / sum((Year - YearMean).^2);  
alpha = AmountMean - beta * YearMean;  
Fitting = beta * Year + alpha;
```

```
figure(3)  
plot(Year, Amount, 'x');  
hold on  
grid on  
plot(Year, Fitting);  
title('Lineær Model & Sample Data');  
xlabel('År');  
ylabel('Antal');  
hold off
```



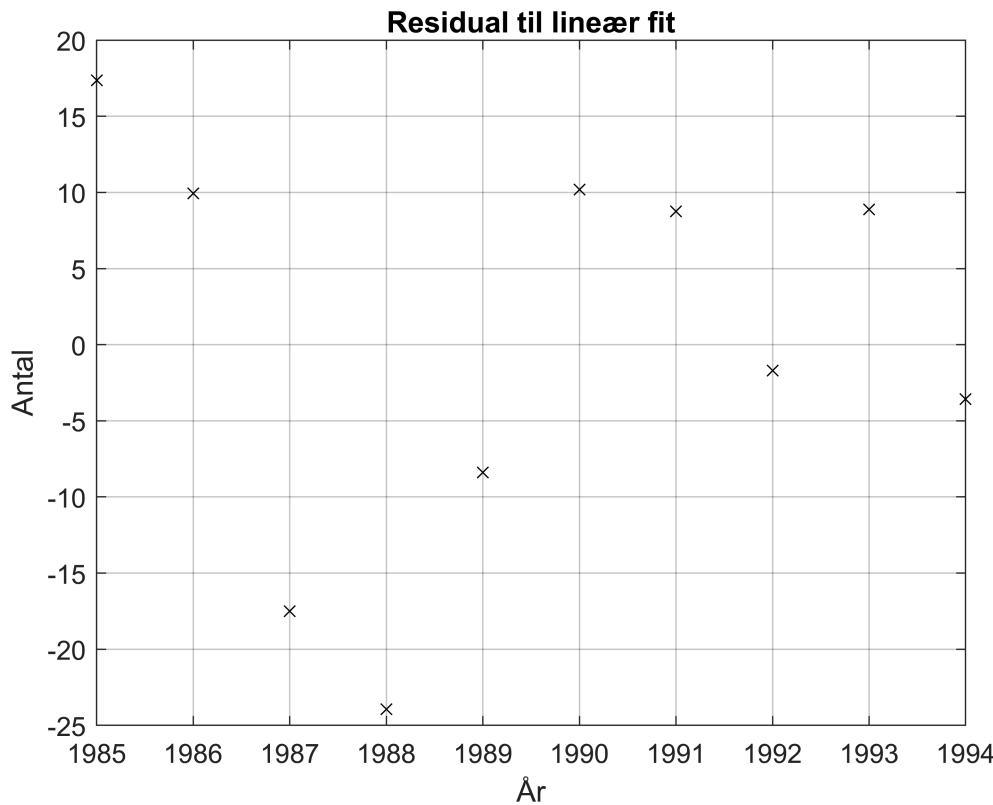
RESIDUAL TEGNING

Til at tegne residualer og beregne disse anvendes følgende udtryk.

$$\epsilon_i = y_i - (\alpha + \beta \cdot x_i)$$

```
Residuals = Amount - (alpha + beta * Year);
```

```
figure(6)
plot(Year, Residuals, 'kx');
grid on
title('Residual til lineær fit');
xlabel('År');
ylabel('Antal');
```



KONFIDENSINTERVAL FOR HÆLDNINGEN

invers student t fordeling med frihedsgraden $n - 2 = 8$, og 95% konfidensinterval bestemms t_0 til at være som følgende.

```
Tzero = tinv(0.975, 8);
EmpiricalVariance = (1 / (10 - 2)) * sum((Amount - (alpha + beta * Year)).^2);

interval = Tzero * (sqrt(EmpiricalVariance) / sqrt(sum((Year - YearMean).^2)));

BetaMinus = beta - interval;
BetaPlus = beta + interval;

disp("Konfidensintervallet for hældningen er b+ = " + BetaPlus + " og b- = " + BetaMinus);
```

Konfidensintervallet for hældningen er $b+ = 29.0544$ og $b- = 21.8183$

LINEARITET

Set ud fra residual plottet er residualerne fordelt pænt omkring 0. Der er altså ikke et tydeligt mønster. Desuden ligger konfidensintervallet mellem 21.82 og 29.05 og altså tæt på antagelsen om linearitet virker derfor rimelig.

LINEÆRE MODEL

Modellen kan ikke bruges hvor årstallet er negativ.

EFTERÅR 2016 REEKSAMEN

I et studie af en anerkendt metode til vægttab undersøges 10 patienter før behandling, og ét år efter behandling.

NULL HYPOTESE

Opstil en null hypotese og alternativ hypotese for at bestemme, om behandlingen har ændret patienternes vægt.

$$H_0 : \text{forventet vægtændring } (\delta) = 0$$

$$H_1 : \text{forventet vægtændring } (\delta) \neq 0$$

PARRET EL. UPARRET

Testen bør være parret da det drejer sig om samme patient før og efter behandling. Hvert punkt i datasættet er tilsvarende et punkt i det andet datasæt.

MIDDEL FORSKELLEN

Estimering af middeforskellen på patienternes vægt før og efter behandling kan findes som.

$$\hat{\delta} = \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i})$$

```
WeightBefore = [140, 138, 110, 154, 125, 169, 142, 162, 131, 122];  
WeightAfter = [130, 121, 127, 101, 92, 170, 143, 170, 134, 85];
```

```
MaximumLikelihood = 1/10 * sum(WeightAfter - WeightBefore);
```

```
disp("Estimering af middelforskellen af patienternes vægt før og efter behandling er bestemt til at være " + num2str(d))
```

Estimering af middelforskellen af patienternes vægt før og efter behandling er bestemt til at være -12

VARIANS

Sample variansen kan findes som

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i} - \bar{d})^2$$

```
SampleVariance = (1/(10-1)) * sum((WeightAfter - WeightBefore) - MaximumLikelihood).^2;
```

T-TEST

Anvendt en parret t-test til hypotesetest. Kan null hypotesen afvises med et signifikansniveau på 0.05?

$$t = \frac{\bar{d} - \delta}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d} - \delta}{\frac{\sqrt{s_d^2}}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{pvalue} = 2 \cdot (1 - t_{\text{cdf}}(|t|, n - 1))$$

```

t = (MaximumLikelihood - 0) / (sqrt(SampleVariance) / sqrt(10));

pValue = 2 * (1 - tcdf(abs(t), 10-1));

if pValue > 0.05
    disp("Da p-værdien: " + pValue + " er større end 0.05 kan null hypotesen ikke afvises");
else
    disp("Da p-værdien: " + pValue + " er større end 0.05 kan null hypotesen afvises");
end

```

Da p-værdien: 0.12683 er større end 0.05 kan null hypotesen ikke afvises

KONFIDENSINTERVAL

For at bestemmes konfidensintervallet anvendes, at

$$\delta_{\pm} = \bar{d} \pm t_0 \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

```

TNull = tinv(0.975, 10 -1);

ConfidenceInterval.Plus = MaximumLikelihood + TNull * (sqrt(SampleVariance)/sqrt(10));

ConfidenceInterval.Minus = MaximumLikelihood - TNull * (sqrt(SampleVariance)/sqrt(10));

disp("Konfidensintervallet for vægtforskellen før og efter behandlingen er: " + ConfidenceInter

```

Konfidensintervallet for vægtforskellen før og efter behandlingen er: -28.1374, 4.1374

EFTERÅR 2017

En nyåbnet webshop forventer, at antallet af ordrer vil være poissonfordelt med et gennemsnit på 25 ordrer i timen.

Tidspunkterne for de enkelte ordrer antages at være uafhængige af hinanden.

$$\Pr(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = \frac{(\gamma)^x}{x!} e^{-\gamma}$$

SANDSYNLIGHED EN TIME

For en poission fordeling gælder, at

$$P(X = x) = \frac{\gamma^x}{x!} e^{-\gamma}$$

hvor $\gamma = \lambda \cdot t$. Dertil kan sandsynligheden for noget mindre eller lig med x findes som

$$P(X \leq x) = \text{poisscdf}(x, \gamma)$$

altså ved brug af poission fordelingsfunktionen. Da der ønskes en sandsynlighed

for mere end 30 ordrer anvendes, at

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$$

```
lambda = 25;
hours = 1;
orders = 30;

ProbabilityOverThirty = 1 - poisscdf(orders, hours * lambda);

disp("Sandsynligheden for at der indkommer mere end 30 ordrer på en time er " ...
+ ProbabilityOverThirty);
```

SANDSYNLIGHED FIRE TIMER

```
lambda = 25;
hours = 4;
orders = 80;

ProbabilityEightyOrLess = poisscdf(orders, hours * lambda);

disp("Sandsynligheden for at der indkommer 80 eller færre ordrer på en time er " ...
+ ProbabilityEightyOrLess);
```

Over en periode på 24 timer registreres 653 ordrer på webshoppen.

ESTIMEREDE ANTAL ORDRER

Forventningsværdien for en poissionfordeling kan bestemmes som

$$E[X] = t \cdot \lambda = \gamma$$

$$\lambda = \frac{E[X]}{t} = \frac{\gamma}{t}$$

```
hours = 24;
orders = 653;

obs = orders / hours;

disp("Det estimerede antal ordre pr. time er nu " + obs + " ordre pr. time");
```

OBSERVERET VS. ANTAGELSE

For at tjekke om det observerede antal ordrer stemmer overens med antagelsen om et gennemsnit på 25 ordrer i timen benyttes p-værdien.

Den bestemmes ved først at beregne en Z-score.

$$E[X] = t \cdot \lambda = \gamma$$
$$Var(X) = t \cdot \lambda = \gamma$$

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - t \cdot \lambda}{\sqrt{t \cdot \lambda}} = \frac{X - \gamma}{\sqrt{\gamma}}$$

Dernæst kan p-værdien beregnes som

$$p = 2 \cdot |1 - \Phi(|z|)|$$

Der opstilles to hypoteser i forbindelse med denne opgave hvor null hypotesen antager, at antallet af ordre pr. time er 25. Samt en alternativ hypotese der antager, at antallet af order pr. time er forskellig fra 25.

$$H_0 : \lambda = 25$$

$$H_1 : \lambda \neq 25$$

Z antages at være normalfordelt $Z \sim N(0, 1)$.

```
Z = (orders - hours * lambda) / sqrt(hours * lambda);
PValue = 2 * (1 - normcdf(Z, 0, 1));
disp("p værdien er bestemt til at være lig med " ...
+ PValue + " og dermed kan null hypotesen forkastes.");
disp("Det antal observerede antal ordre stemmer altså ikke overens med antagelsen");
```

KONFIDENSINTERVAL

konfidensintervallet for antallet af ordre i timen ud fra observationen kan bestemmes som

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{t} \left[x + \frac{1.96^2}{2} \pm 1.96 \cdot \sqrt{x + \frac{1.96^2}{4}} \right]$$

```
a = orders + (1.96^2)/2;
b = 1.96 * sqrt(orders + (1.96^2)/4);

Lambda.min = 1/hours * (a-b);
Lambda.max = 1/hours * (a+b);

disp("95% konfidensinterval er bestemt til at være [" + Lambda.min + ";" + Lambda.max + "]");
```

EFTERÅR 2018

Test af software for en virksomhed viser følgende resultater for det gamle software og det nye. Tiden er angivet i sekunder.

Billede nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gl. SW	253	302	241	187	265	313	468	192	226	316	225	172
Ny SW	189	165	254	187	132	190	343	105	203	188	105	99

ESTIMERET FORBEDRING

For at finde den estimeret forbedring tages differencen mellem gammel og ny værdi og gennemsnittet af dette. Det gøres ved, at anvende følgende udtryk.

$$\hat{\delta} = \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i})$$

```
measurements = 12;
OldData = [253, 302, 241, 187, 265, 313, 468, 192, 226, 316, 225, 172];
NewData = [189, 165, 254, 187, 132, 190, 343, 105, 203, 188, 105, 99];

Delta = 1 / measurements * sum(OldData - NewData)
```

Delta = 83.3333

Den estimeret forbedring er bestemt til at være 83.3333 sekunder.

STATISTIK TEST

Der bør anvendes en parret t-test som oftest anvendes til at teste på data fra før og efter målinger.

HYPOTESER

Der opstilles en null hypotese hvor den forventede tidsændring er lig med 2 minutter, altså 120 sekunder. Alternativ er den forskellig fra de 120 sekunder.

$$H_0 : \text{forventet tidsændring } (\delta) = 120$$

$$H_1 : \text{forventet tidsændring } (\delta) \neq 120$$

SAMPLE VARIANS

For at bestemme sample variansen anvendes, at

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{1i} - X_{2i} - \bar{d})^2$$

```
SampleVariance = (1 / (measurements - 1)) * ...
sum(((OldData - NewData) - Delta).^2)
```

Sample variansen er dermed bestemt til at være 2941.3.

P-VÆRDIEN

For at bestemme p værdien anvendes, at

$$p = 2 \cdot (1 - t_{\text{cdf}}(|t|, n - 1))$$

hvor

$$t = \frac{\bar{d} - \delta}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

```
t = (Delta - 120) / (sqrt(SampleVariance) / sqrt(measurements));
PValue = 2 * (1 - tcdf(abs(t), measurements -1))
```

P værdien er dermed bestemt til at være 0.039.

KONFIDENSINTERVALLET

For at bestemme konfidensintervallet anvendes, at

$$\delta_{\pm} = \bar{d} \pm t_0 \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

```
TZero = tinv(0.975, measurements - 1);
Confidens.Min = Delta - TZero * (sqrt(SampleVariance) / sqrt(measurements));
Confidens.Max = Delta + TZero * (sqrt(SampleVariance) / sqrt(measurements));
```

Confidens

```
Confidens = struct with fields:
    Min: 48.8747
    Max: 117.7920
```

Dermed er konfidensintervallet bestemt til at være [48.8747; 117.7920].

SIGNIFIKANSNIVEAU

Da p værdien er under et 5% signifikansniveau vist som følgende

$$p < 0.05$$

må antagelsen om en forbedring på 2 minutter forkastes.

FORÅR 2016

Der måles højden på studerende i en klasse, der består af 19 kvinder og 35 mænd. Højderne antages at være normalfordelt. Middelværdien for kvinder i klassen er $\hat{\mu}_1 = 1.68m$, med en estimeret varians på $\sigma_1^2 = 0.10$.

Middelværdien for mænd i klassen er $\hat{\mu}_1 = 1.78m$, med en estimeret varians på $\sigma_1^2 = 0.20$.

```
Women.Sigma = 0.1;
Women.Mu = 1.68;
Women.Amount = 19;

Men.Sigma = 0.20;
Men.Mu = 1.78;
Men.Amount = 35;
```

HYPOTESE

Der opstilles en hypotese test for at bestemme om middelværdien af mænd og kvinder i klassen er den samme.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

STATISTIK TEST

Da varianserne er ukendte og data er normal-fordelt anvendes en t-test på forskellen af middelværdierne.

ESTIMERING AF VÆRDIER

Estimeringen af forskellen i middelværdierne kan bestemmes som følgende.

$$\hat{\delta} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

```
Delta = abs(Women.Mu - Men.Mu)
```

```
Delta = 0.1000
```

Forskellen i middelværdierne er bestemt til at være 0.1. Dernæst til at bestemme forskellen i standard afvigelsen og dertil anvendes, at

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2]$$

```
PooledVariance = sqrt((1 / (Women.Amount + Men.Amount - 2)) ...
    * ((Women.Amount - 1)*Women.Sigma + (Men.Amount - 1)*Men.Sigma))
```

```
PooledVariance = 0.4067
```

Forskellen i standard afvigelsen er dermed bestemt til at være 0.4067.

T-TEST

Der anvendes nu en t-test til test af hypotesen. For at undersøge om NULL hypotesen kan afvises med et signifikansniveau på 0.05 anvendes, at

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad p = 2 \cdot (1 - t_{\text{cdf}}(|t|, n_1 + n_2 - 2))$$

```
t = (Delta - 0) / (PooledVariance * sqrt(1/Women.Amount + 1/Men.Amount));
p = 2 * (1 - tcdf(abs(t), Women.Amount + Men.Amount - 2))
```

```
p = 0.3921
```

NULL hypotesen kan ikke afvises da $p > 0.05$.

KONFIDENSINTERVAL

For at finde 95% konfidens intervallet for δ anvendes, at

$$\delta_{\pm} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_0 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

```
TZero = tinv(0.975, Women.Amount + Men.Amount - 2)
```

```
TZero = 2.0066
```

```
Step = TZero * PooledVariance * sqrt(1/Women.Amount + 1/Men.Amount);
```

```
Interval.Min = Delta - Step;  
Interval.Max = Delta + Step;
```

```
Interval
```

```
Interval = struct with fields:
```

```
Min: -0.1325  
Max: 0.3325
```

Konfidensintervallet for δ er dermed bestemt til at være [-0.1325; 0.3325].

FORÅR 2016 REEKSAMEN

I et studie af tandhvalers forventede levetid, registrerede man dødsalderen på individuelle tandhvaler. Der blev i studiet registreret 10 hvaler, der var døde i fangenskab, og 10 hvaler, der var døde i det fri.

Død i det fri (alder i år)	Død i Fangenskab (alder i år)
50	7
43	2
11	1
35	3
7	15
62	6
70	14
67	1
25	5
1	9

HYPOTESER

Der opstilles en hypotese test for at bestemme om middelværdien af de to grupper er den samme.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

PARRET VS. UPARRET

Da data ikke opfylder samme betingelser, altså eventuelle forhold vil det være optimalt at anvende en uparret test. Dette er vurderet på baggrund af dyr i det fri og i fangenskab som ikke har samme vilkår.

ESTIMERING AF MIDDLELVÆRDI

Den estimerede middelværdi for de to sample set kan bestemmes som følgende.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

```
Free.Data = [50, 43, 11, 35, 7, 62, 70, 67, 25, 1];
Captivity.Data = [7, 2, 1, 3, 15, 6, 14, 1, 5, 9];
Free.EstimatedMean = mean(Free.Data)
```

```
Free = struct with fields:
    Data: [50 43 11 35 7 62 70 67 25 1]
    EstimatedMean: 37.1000
```

```
Captivity.EstimatedMean = mean(Captivity.Data)
```

```
Captivity = struct with fields:
    Data: [7 2 1 3 15 6 14 1 5 9]
    EstimatedMean: 6.3000
```

De to estimerede middelværdier er dermed bestemt til at være 37.1 samt 6.3.

ESTIMERING AF VARIANS

Den estimerede varians kan bestemmes ud fra de to varianse fra de to sample set givet ved

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

```
Free.Variance = (1/(length(Free.Data) - 1)) * ...
sum((Free.Data - Free.EstimatedMean).^2);

Captivity.Variance = (1/(length(Captivity.Data) - 1)) * ...
sum((Captivity.Data - Captivity.EstimatedMean).^2);
```

Den estimerede varians bestemmes nu som følgende.

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2]$$

```
Lead = (1 / (length(Free.Data) + length(Captivity.Data) - 2));
Back = (length(Free.Data) - 1) * Free.Variance + ...
(length(Captivity.Data) - 1) * Captivity.Variance;
PooledVariance = Lead * Back
```

```
PooledVariance = 337.1667
```

Dermed er den estimerede varians bestemt til at være 337.1667.

UPARRET T-TEST

Der anvendes nu en t-test til test af hypotesen. For at undersøge om NULL hypotesen kan afvises med et signifikansniveau på 0.05 anvendes, at

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad p = 2 \cdot (1 - t_{\text{cdf}}(|t|, n_1 + n_2 - 2))$$

```
t = (Free.EstimatedMean - Captivity.EstimatedMean) / (sqrt(PooledVariance) * ...
sqrt(1/length(Free.Data) + 1/length(Captivity.Data)));
```

```
p = 2 * (1 - tcdf(abs(t), length(Free.Data) + length(Captivity.Data) - 2))
```

$p = 0.0015$

NULL hypotesen kan afvises da $p < 0.05$.

KONFIDENSINTERVAL

For at finde 95% konfidens intervallet for δ anvendes, at

$$\delta_{\pm} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_0 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

```
TZero = tinv(0.975, length(Free.Data) + length(Captivity.Data) - 2);
Step = TZero * sqrt(PooledVariance) * sqrt(1/length(Free.Data) + 1/length(Captivity.Data));
Interval.Min = (Free.EstimatedMean - Captivity.EstimatedMean) - Step;
Interval.Max = (Free.EstimatedMean - Captivity.EstimatedMean) + Step;
```

Interval

```
Interval = struct with fields:
Min: 13.5477
Max: 48.0523
```

Konfidensintervallet for δ er dermed bestemt til at være [13.5477; 48.0523].

FORÅR 2017

En kvalitetskontrol mäter præcisionen af to forskellige typer gps'er. For begge typer blev målt afvigelsen mellem deres faktiske position d_{faktisk} og gps'ens angivelse d_{gps} .

$$d_i = |d_{i,\text{gps}} - d_{i,\text{faktisk}}|$$

Det kan antages at afvigelserne er normalfordelte. Der er testet 10 gps enheder af type 1 og 12 gps enheder af type 2. For type 1 var middelafvigelsen $\hat{\mu}_1 = 5.21m$ med en estimeret varians $s_1^2 = 1.33m^2$. For type 2 var middelafvigelsen $\hat{\mu}_2 = 4.18m$ med en estimeret varians $s_2^2 = 0.89m^2$.

```
TypeOne = struct('Mean', 5.21, 'Variance', 1.33, 'Amount', 10);
TypeTwo = struct('Mean', 4.18, 'Variance', 0.89, 'Amount', 12);
```

HYPOTESER

Der opstilles en hypotese test for at bestemme om middelværdien af de to grupper er den samme.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

ESTIMERING AF FORSKEL I MIDDLELVÆRDI

Estimeringen af forskellen i middelværdierne kan bestemmes som følgende.

$$\hat{\delta} = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$$

```
Delta = abs(TypeOne.Mean - TypeTwo.Mean)
```

```
Delta = 1.0300
```

Forskellen i middelværdierne er bestemt til at være 1.03.

ESTIMERING AF VARIANSEN FOR FORSKELLEN

For at bestemme forskellen i variansen anvendes, at

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2]$$

```
PooledVariance = (1 / (TypeOne.Amount + TypeTwo.Amount - 2)) ...
* ((TypeOne.Amount - 1)*TypeOne.Variance + (TypeTwo.Amount - 1)*TypeTwo.Variance)
```

```
PooledVariance = 1.0880
```

Forskellen i variansen er dermed bestemt til at være 1.088.

T-TEST

Der anvendes nu en t-test til test af hypotesen. For at undersøge om NULL hypotesen kan afvises med et signifikansniveau på 0.05 anvendes, at

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad p = 2 \cdot (1 - t_{\text{cdf}}(|t|, n_1 + n_2 - 2))$$

```
t = (Delta - 0) / (sqrt(PooledVariance) * sqrt(1/TypeOne.Amount + 1/TypeTwo.Amount));
p = 2 * (1 - tcdf(abs(t), TypeOne.Amount + TypeTwo.Amount - 2))
```

```
p = 0.0319
```

NULL hypotesen kan afvises da $p < 0.05$.

KONFIDENSINTERVAL

For at finde 95% konfidens intervallet for δ anvendes, at

$$\delta_{\pm} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_0 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

```
TZero = tinv(0.975, TypeOne.Amount + TypeTwo.Amount - 2);
Step = TZero * sqrt(PooledVariance) * sqrt(1/TypeOne.Amount + 1/TypeTwo.Amount);
Interval.Min = Delta - Step;
Interval.Max = Delta + Step;
```

Interval

```
Interval = struct with fields:
Min: 0.0984
Max: 1.9616
```

Konfidensintervallet for δ er dermed bestemt til at være [0.0984; 1.9616].

FORÅR 2017 REEKSAMEN

For en bestemt type batterier angives i specifikationen fra leverandøren, at levetiden T for batterierne er normalfordelt med en middellevetid på 3000 timer med en standard afvigelse på 100 timer: $T \sim N(3000, 100^2)$. Der udtages tilfældigt 12 batterier af pågældende type. Ved en test måles levetiden af disse til:

Batteri nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Levetid T (timer)	3148	2956	2803	2933	2869	3111	2789	2995	2909	2929	3148	2867

HYPOTESE

Der opstilles en hypotese test for at bestemme om middelværdien af levettiden er lig med middel af de målte levetid.

$$H_0: \mu_T = T = 3000$$

$$H_1: \mu_t \neq T = 3000$$

MIDDELVÆRDI

For at bestemme den estimerede middelværdi af batteri levetiden anvendes, at

$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

```
Battery = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12];
Lifetime = [3148, 2956, 2803, 2933, 2869, 3111, 2789, 2995, 2909, 2929, 3148, 2867];
MeanLifeTime = (1 / length(Battery)) * sum(Lifetime)
```

```
MeanLifeTime = 2.9548e+03
```

Den estimerede middellevetid for et batteri er bestemt til at være 2453.5.

Z-TEST

Der laves en z-test hvor der gælder, at

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

```
sigma = 100;  
  
Z = (MeanLifeTime - 3000) / (sigma / sqrt(length(Battery)))
```

Z = -1.5675

Z er dermed bestemt til at være -1.5675. For at bestemme om NULL hypotesen kan afvises findes p-værdien.

```
p = 2 * abs(1 - normcdf(abs(Z), 0, 1))  
  
p = 0.1170
```

Da p værdien er større end 0.05 kan null hypotesen ikke afvises.

KONFIDENSINTERVAL

For at bestemme 95% konfidensintervallet anvendes, at

$$\mu_{\pm} = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

```
clear mu  
delta = 1.96 * (sigma / sqrt(length(Battery)));  
  
mu.min = MeanLifeTime - delta;  
mu.max = MeanLifeTime + delta;  
  
mu
```



```
mu = struct with fields:  
min: 2.8982e+03  
max: 3.0113e+03
```

Konfidensintervallet for μ er dermed bestemt til at være [2898.2; 3011.3].

FORÅR 2018

Til kvalitetssikring af en produktion er udviklet et automatisk overvågningssystem, der skal registrere om en komponent er monteret korrekt. Overvågningssystemet skal i 95% af tilfældene registrere komponenterne korrekt, dvs. fejl-monterede komponenter registreres som fejl og korrekt-monterede komponenter registreres som korrekte.

For at undersøge om systemet overholder dette krav laves en række måleserier på et produkt A, hvor der testes om overvågningssystemets succesrate er præcis 95%. Testen består af i alt 15 måleserier. Hver serie består af 100 enheder, hvor antallet af korrekte registreringer (successer) noteres.

Måleserie A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antal korrekte registreringer	98	98	93	96	95	92	99	95	95	94	98	93	99	94	98

ESTIMERET SUCCESRATE - SANDSYNLIGHED

```
ProductA = [98, 98, 93, 96, 95, 92, 99, 95, 95, 94, 98, 93, 99, 94, 98];
Length = length(ProductA);
```

```
ProductsInSeries = 100;
Measurements = Length * ProductsInSeries;

SuccesRate = sum(ProductA) / Measurements;
```

Den estimerede succesrate er bestemt til at være 0.9580.

TEST STATISTIK

Da testen er baseret på succes eller fiasko anvendes en binomialfordeling hvor følgende betingelser skal være opfyldt.

$$np > 5 \text{ og } n(1 - p) > 5$$

hvor

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n B_i\right] = \sum_{i=1}^n E[B_i] = \sum_{i=1}^n p = np$$

```
N = Measurements; P = SuccesRate;
```

```
N * P
```

```
ans = 1437
```

```
N*(1-P)
```

```
ans = 63.0000
```

Der opstilles en null hypoteser samt en alternativ hypotese som følgende.

$$H_0 : p = 0.95$$

$$H_1 : p \neq 0.95$$

P-VÆRDI

For at bestemme p værdien anvendes først, at

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

```
Z = (sum(ProductA) - Measurements * 0.95) / sqrt(Measurements * 0.95*(1-0.95))
```

Z = 1.4216

Z er dermed bestemt til at være 1.4216. For at bestemme om NULL hypotesen kan afvises findes p-værdien.

```
p = 2 * abs(1 - normcdf(abs(Z), 0, 1))
```

p = 0.1551

Null hypotesen kan altså ikke afvises da p værdien er større end 0.05.

KONFIDENSINTERVAL

For at bestemme konfidensintervallet anvendes, at

$$p_{\pm} = \frac{1}{n + 1.96^2} \left[x + \frac{1.96^2}{2} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x(n-x)}{n} + \frac{1.96^2}{4}} \right]$$

```
x = sum(ProductA);
n = Measurements;

step = (1/(n+1.96^2));

clear delta Interval
delta.one = x + (1.96^2 / 2);
delta.two = 1.96 * sqrt( ((x*(n-x))/n) + ((1.96^2)/4));

Interval.min = step * (delta.one - delta.two);
Interval.max = step * (delta.one + delta.two);
```

Interval

```
Interval = struct with fields:
min: 0.9466
max: 0.9670
```

TEST AF DATASÆT

For at undersøge om de to datasæt er forskellige anvendes en uparret samneligningstest af to populationer med ukendt varians også bekendt som uparret t-test. Testen skal være uparret der der ikke er en relation mellem en enhed fra det ene produkt til en enhed fra det andet produkt. Desuden er det et antal forskellige målinger. De to populationer antages at have ens men ukendt varians.

NUL HYPOTESE - TEST MV.

Måleserie B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antal korrekte registreringer	99	94	89	92	90	91	92	96	92	90	90	95

Der opstilles en hypotese test for at bestemme om middelværdien af de to grupper er den samme. Altså om det gennemsnitslige antal korrekt monitorerede enheder pr. måling er ens for de to produkter.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Det gennemsnitslige antal korrekte enheder pr. måling estimeres som følgendes.

$$n_A = \frac{N_{\text{Akorrekte}}}{15}$$

$$n_B = \frac{N_{\text{Bkorrekte}}}{12}$$

```
ProductB = [99, 94, 89, 92, 90, 91, 92, 96, 92, 90, 90, 95];
```

```
Na = sum(ProductA) / 15;
Nb = sum(ProductB) / 12;
```

Den poolede varians bestemmes ud fra de to sample varianser hvilke beregnes som følgende.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

$$s_p^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} [(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2]$$

```
clear SampleVariance
SampleVariance.A = (1 / (15 - 1)) * sum((ProductA - Na).^2);
SampleVariance.B = (1 / (12 - 1)) * sum((ProductB - Nb).^2);

PooledVariance = (1 / (15 + 12 - 2)) * (((15-1)*SampleVariance.A) + ((12-1)*SampleVariance.B))

PooledVariance = 7.0160
```

Dernæst anvendes t-værdi som bestemmes ud fra følgende.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

```
t = (Na - Nb) / (sqrt(PooledVariance) * sqrt(1/15 + 1/12));
p = 2 * (1 - tcdf(abs(t), 15 + 12 - 2))
p = 0.0036
```

Da p værdien er under 0.05 kan null hypotesen afvises og overvågningssystemet virker forskelligt på de to typer produkter.

FORÅR 2018 REEKSAMEN