$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,\text{ev}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}}}{\Gamma, n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,\delta}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,W$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N} \qquad \Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + n) : \mathbb{N}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathit{TODO}\ m \qquad \mathit{TODO}\ n}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash (m+n) : \mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}n) : \mathbb{N}}$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + n) : \mathbb{N} \qquad \Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}n) : \mathbb{N}}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m+n))\ \text{type}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathit{TODO}'\ m}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash m{+}0 \equiv m : \mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash m \equiv m{+}0 : \mathbb{N}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,\text{ev}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) \equiv \mathrm{s}(m){+}0 : \mathbb{N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,\text{ev}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)} : \mathrm{s}(m) = \mathrm{s}(m)}}{\Gamma,\ m : \mathbb{N} \vdash \mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)} : \mathrm{s}(m) + 0 = \mathrm{s}(m)}$$

$$\dfrac{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash m \equiv m{+}0 : \mathbb{N} \qquad \Gamma,\ m : \mathbb{N} \vdash \mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)} : \mathrm{s}(m) + 0 = \mathrm{s}(m)}{\Gamma,\ m : \mathbb{N} \vdash \mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)} : \mathrm{s}(m) + 0 = \mathrm{s}(m + 0)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathit{TODO}\ \mathrm{s}(m) \qquad \mathit{TODO}\ \mathrm{s}(n)}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m){+}\mathrm{s}(n)) : \mathbb{N}} \qquad \dfrac{\mathit{TODO}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}\mathrm{s}(n)) : \mathbb{N}}}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n)))\ \text{type}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathit{TODO}\ m \qquad \mathit{TODO}\ n}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash m + \mathrm{s}(n) \equiv \mathrm{s}(m{+}n) : \mathbb{N}}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}n) \equiv m + \mathrm{s}(n) : \mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N}, a : \mathrm{s}(m){+}n = \mathrm{s}(m{+}n) \vdash \mathrm{s}(m{+}n) \equiv m{+}\mathrm{s}(n) : \mathbb{N}}\,W$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,\text{ev}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}}}{\Gamma, n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,\delta}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,W}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) \equiv \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) : \mathbb{N}}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) \equiv \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) : \mathbb{N}}$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) \equiv \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) : \mathbb{N}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N}, a : \mathrm{s}(m){+}n = \mathrm{s}(m{+}n) \vdash \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) \equiv \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) : \mathbb{N}}\,W$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,\text{ev}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m) : \mathbb{N}}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}}}{\Gamma, n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,\delta}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,W}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m){+}n) : \mathbb{N}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}}}{\Gamma, n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,\delta}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash n{:}\mathbb{N}}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathbb{N}\ \text{type}}}{\Gamma, n{:}\mathbb{N} \vdash m{:}\mathbb{N}}\,\delta}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash m{:}\mathbb{N}}\,W}{\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash (m{+}n) : \mathbb{N}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}n) : \mathbb{N}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}\,W}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}}\,W}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}} : \Pi_{(x:\mathbb{N})}\Pi_{(y:\mathbb{N})}(x{=}y \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(y))}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N},\ x{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(x) : \Pi_{(y:\mathbb{N})}(x{=}y \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(y))}\,\text{ev}}{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N},\ x{:}\mathbb{N},\ y{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(x, y) : x{=}y \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(y)}\,\text{ev}$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{s}(m{+}n) : \mathbb{N} \qquad \Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N},\ x{:}\mathbb{N},\ y{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(x, y) : x{=}y \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(y)}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N},\ x{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(x, \mathrm{s}(m{+}n)) : x{=}\mathrm{s}(m{+}n) \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}\,S$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m){+}n) : \mathbb{N} \qquad \Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N},\ x{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(x, \mathrm{s}(m{+}n)) : x{=}\mathrm{s}(m{+}n) \to \mathrm{s}(x){=}\mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) : \mathrm{s}(m){+}n{=}\mathrm{s}(m{+}n) \to \mathrm{s}(\mathrm{s}(m){+}n){=}\mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}\,S$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N} \vdash \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) : \mathrm{s}(m){+}n{=}\mathrm{s}(m{+}n) \to \mathrm{s}(\mathrm{s}(m){+}n){=}\mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}{\Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) : \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}\,\text{ev}$$

$$\dfrac{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N}, a : \mathrm{s}(m){+}n = \mathrm{s}(m{+}n) \vdash \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) \equiv \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) : \mathbb{N} \qquad \Gamma,\ m{:}\mathbb{N},\ n{:}\mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) : \mathrm{s}(\mathrm{s}(m) + n) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}\,\mathit{TODO}$$

$$\dfrac{\Gamma, m{:}\mathbb{N}, n{:}\mathbb{N}, a : \mathrm{s}(m){+}n = \mathrm{s}(m{+}n) \vdash \mathrm{s}(m{+}n) \equiv m{+}\mathrm{s}(n) : \mathbb{N} \qquad \Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(m + n))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}\,\mathit{TODO}$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n)))\ \text{type} \qquad \Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N},\ a : \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \ \vdash\ \lambda a \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}\,\lambda$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \ \vdash\ \lambda a \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n))(a) \ :\ \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) \ :\ \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}\,\eta$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \ \vdash\ \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) \ :\ \mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N} \ \vdash\ \lambda n \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) \ :\ \Pi_{(n:\mathbb{N})}\,(\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n)))}\,\lambda$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N},\ n : \mathbb{N} \vdash (\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m+n))\ \text{type} \qquad \Gamma,\ m : \mathbb{N} \vdash \mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)} : \mathrm{s}(m) + 0 = \mathrm{s}(m + 0) \qquad \Gamma,\ m : \mathbb{N} \ \vdash\ \lambda n \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m){+}n, \mathrm{s}(m{+}n)) \ :\ \Pi_{(n:\mathbb{N})}\,(\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n) \to \mathrm{s}(m) + \mathrm{s}(n) = \mathrm{s}(m + \mathrm{s}(n)))}{\Gamma,\ m : \mathbb{N} \ \vdash\ \mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(\mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)}, \lambda n \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m) + n, \mathrm{s}(m + n))) \ :\ \Pi_{(n:\mathbb{N})}(\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n))}\,\mathbb{N}\text{-ind}$$

$$\dfrac{\Gamma,\ m : \mathbb{N} \ \vdash\ \mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(\mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)}, \lambda n \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m) + n, \mathrm{s}(m + n))) \ :\ \Pi_{(n:\mathbb{N})}(\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n))}{\Gamma \ \vdash\ \lambda m \,.\, \mathrm{ind}_{\mathbb{N}}(\mathrm{refl}_{\mathrm{s}(m)}, \lambda n \,.\, \mathrm{ap}_{\mathrm{s}}(\mathrm{s}(m) + n, \mathrm{s}(m + n))) \ :\ \Pi_{(m:\mathbb{N})}\Pi_{(n:\mathbb{N})}(\mathrm{s}(m) + n = \mathrm{s}(m + n))}\,\lambda$$