22:31〜23:05

1 $_{n+2}C_{k+1} = 2({}_nC_{k-1} + {}_nC_{k+1})$

$$_{n+2}C_{k+1} = \frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!} \quad {}_nC_{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \quad {}_nC_{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$(右辺) = 2 \times \frac{n!\{k(k+1)+(n-k)(n-k+1)\}}{(k+1)!(n-k+1)!}$$ より.

$$(n+2)(n+1) = 2\{k(k+1)+(n-k)(n-k+1)\}$$
$$= 2\{n^2+(-2k+1)n+2k^2\}$$
$$n^2-4kn-n+4k^2-2=0.$$
$$(n-2)(n+1) = 4k(n-k) \text{ —— ⊛}.$$

n, kは自然数より. $n-2, n+1$は4の倍数である。
また, $n-2, n+1$は$(n-2)-(n+1)=-3$より偶奇が異なる。
故に$n-2, n+1$のいずれか一方のみが4の倍数。

ｱ) $n-2$が4の倍数のとき. $2 \leq n \leq 20 \wedge n \in \mathbb{N}$より
ありうる$n-2 = 4, 8, 12, 16$である。
ｲ) $n+1$が4の倍数のとき. ｱ)と同様に考えると.
ありうる$n+1 = 4, 8, 12, 16, 20$である。

以上より. nの候補は. $n = 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19$.

これらそれぞれの場合について考えてみる。

Ⓐ $n=3$のとき.
$4 = 4k \cdot (3-k)$.
$\therefore k(3-k)=1$. これを満たすkは存在しない。

Ⓑ $n=6$ のとき
$28=4k(6-k)$, $\therefore k(6-k)=7$. これを満たすkは存在しない。

Ⓒ $n=7$ のとき
$40=4k(7-k)$, $\therefore k(7-k)=10$. $\therefore k=2, 5$

Ⓓ $n=10$ のとき
$88=4k(10-k)$, $\therefore k(10-k)=22$. これを満たすkは存在しない。

Ⓔ $n=11$ のとき
$108=4k(11-k)$, $\therefore k(11-k)=27$. これを満たすkは存在しない。

Ⓕ $n=14$ のとき
$180=4k(14-k)$, $\therefore k(14-k)=45$. $\therefore k=5, 9$

Ⓖ $n=15$ のとき
$208=4k(15-k)$, $\therefore k(15-k)=52$, これを満たすkは存在しない。

Ⓗ $n=18$ のとき
$304=4k(18-k)$, $\therefore k(18-k)=76$, これを満たすkは存在しない。

Ⓘ $n=19$ のとき
$340=4k(19-k)$, $\therefore k(19-k)=85$, これを満たすkは存在しない。

以上より. $(n, k)=(7, 2), (7, 5), (14, 5), (14, 9)$ //

23:05〜23:21.

[2] $a>0$, $\begin{cases} C_1: y=x^3+2ax^2 \\ C_2: y=3ax^2-\dfrac{3}{a} \end{cases}$ に共に接する直線が

存在するaの値の範囲

C_1における接点のx座標をtとすると、この点における接線は、

$$y=(3t^2+4at)(x-t)+(t^3+2at^2)$$
$$=(3t^2+4at)x-2t^3-2at^2$$

これがC_2にも接するので、連立すると

$$3ax^2-(3t^2+4at)x-\frac{3}{a}+2t^2(t+a)=0.$$

$a>0$より 上式は2次方程式である。これが重解を持てば良い。
判別式Dとして、

$$D=(3t^2+4at)^2-4\cdot 3a\cdot\left\{-\frac{3}{a}+2t^2(t+a)\right\}$$
$$=9t^4-8a^2t^2+36=0.$$

$T=t^2\geq 0$として、上式を変形すると、$9T^2-8a^2T+36=0$.
となり、この式が$T\geq 0$で少なくとも1つの解を持つような
aを考える。

i) $T=0$のとき. $9T^2-8a^2T+36\neq 0$ より不適。

ii) $T>0$のとき. 辺々をTで割って整理すると

$$8a^2=9T+\frac{36}{T}\geq 2\sqrt{9T\cdot\frac{36}{T}}=36$$

(∵相加相乗平均)

$\therefore a^2 \geq \frac{9}{2}$ $(a>0$ より$)$ $\underline{a \geq \frac{3}{\sqrt{2}}}$ //

23:22〜23:39

$\boxed{3}$

$P(x, y, z)$ とすると、

$$\vec{PA} + 3\vec{PB} + 2\vec{PC} = (-3-x, 2-y, -z) + 3(1-x, 5-y, -z) + 2(4-x, 5-y, 1-z)$$
$$= (-6x+8, -6y+27, -6z+2)$$

$$\therefore |\vec{PA} + 3\vec{PB} + 2\vec{PC}|^2 = (-6x+8)^2 + (-6y+27)^2 + (-6z+2)^2$$
$$= 36\left\{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2\right\} \leq 36^2$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \leq 6^2$$

つまり、点Pは、中心 $\left(\frac{4}{3}, \frac{9}{2}, \frac{1}{3}\right)$、半径6の球の周及び内部。

次に O, A, B 3点を通る平面の方程式は、そのz座標が全て0であるので、$z=0$。また、四面体OABPの体積をVとすると、

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OAB \cdot |(\text{Pの}z\text{座標})|$$
$$\leq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|(-3)\cdot 5 - 2\cdot 1|\cdot\left(\frac{1}{3}+6\right)$$
$$= \underline{\frac{323}{18}} \text{ //}$$

$\left(\because \text{Pの}z\text{座標は } \frac{1}{3}-6 \leq z \leq \frac{1}{3}+6\right)$

23:40〜0:17

4 (1) 格子点 (m,n) が $x+y=k$ のどの直線上にあるかどうかを考える。このとき $k=m+n$ であり $x+y=k$ 上の $(x,y)=(1,k-1)$ は

$$f(1,k-1)=\sum_{s=1}^{k-1} s=\frac{1}{2}k(k-1)$$ である。

よって $f(1,m+n-1)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ であり

$f(m,n)$ は それよりも $m-1$ だけ小さな数より

$$f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)-(m-1)$$

同様に考えて

$$f(m+1,n+1)=f(1,m+n+1)-m=\frac{1}{2}(m+n+1)(m+n+2)-m$$

$$f(m,n+1)=f(1,m+n)-(m-1)=\frac{1}{2}(m+n+1)(m+n)-(m-1)$$

$$\therefore f(m,n)+f(m+1,n+1)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1-2)+\frac{1}{2}(m+n+2)(m+n+1)$$

$$-2m+1$$

$$=(m+n)(m+n+1)-(m+n)+(m+n+1)$$

$$-2m+1$$

$$= (m+n)(m+n+1) - 2(m-1)$$

$$2f(m, n+1) = (m+n)(m+n+1) - 2(m-1)$$

上式より $f(m,n) + f(m+1, n+1) = 2f(m, n+1)$ が示された。 //

(2). $f(m,n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1)$

$$= \{f(m,n) + f(m+1, n+1)\} + \{f(m+1, n) + f(m, n+1)\}$$

$$= f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m, n+1) + f(m, n+1) \quad (\because (1))$$

$$= f(m+1, n) + 3f(m, n+1) = 4f(m, n+1) - 1 = 2023.$$

$\therefore f(m, n+1) = 506 \qquad f(m, n+1) = \frac{1}{2}(m+n+1)(m+n) - (m-1)$

$$(m+n+1)(m+n) - 2(m-1) = 1012$$
$$(m+n)^2 - m + n + 2 = 1012$$
$$(m+n)^2 - m + n = 1010.$$

ここで, $(m+n)^2 - m + n > (m+n)^2 - (m+n) = (m+n-1)(m+n)$
$$> (m+n-1)^2,$$
さらに, $(m+n+1)^2 = (m+n)^2 + 2(m+n) + 1 > (m+n)^2 - m + n$ より.

$$(m+n-1)^2 < (m+n)^2 - m + n = 1010 < (m+n+1)^2$$

$\therefore m+n = 32$. より. $32^2 - m + n = 1024 - m + n = 1010.$

$\therefore m - n = 14$, $(m, n) = \underline{(23, 9)}$ //

0:18〜0:27 A or B or Cが投げたときに

[5] k回目で勝敗が決する場合、$i = A, B, C$が勝つ場合の確率を$P_{k,i}$とすると、

$$P_{k,A} = \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)} \cdot \frac{1}{6},\quad P_{k,B} = \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)+1} \cdot \frac{1}{6},\quad P_{k,C} = \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)+2} \cdot \frac{1}{6}$$

$1 \leq k \leq n$より、P_A, P_B, P_Cはそれぞれ、

$$P_A = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{3k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6^3}\,6^2}{6^n} \cdot \frac{6^n - 5^n}{6^3 - 5^3} = \underbrace{\frac{36}{91} \cdot \frac{6^{3n} - 5^{3n}}{6^{3n}}}_{//}$$

$$P_B = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot P_A = \underbrace{\frac{30}{91} \cdot \frac{6^{3n} - 5^{3n}}{6^{3n}}}_{//}$$

$$P_C = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{3(k-1)} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot P_A = \underbrace{\frac{25}{91} \cdot \frac{6^{3n} - 5^{3n}}{6^{3n}}}_{//}$$