現代数理統計学の基礎　確認テスト　発展編　解説

問 1 解説

(1) 確率関数の条件より、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-1}^{1} C(1-|x|)dx \\
&= 2\int_{0}^{1} C(1-x) \quad (\because \text{偶関数}) \\
&= 2C\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= C = 1 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

より $C = 1$ である。また、分布関数 $F_X(x)$ は $f_X(x)$ の範囲に注意すると、

- $x \leq -1$ のとき $F_X(x) = 0$
- $-1 < x \leq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-1}^{x} (1-|t|)dt \\
&= \int_{-1}^{x} (1+t)dt \\
&= \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} \\
&= x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

- $0 < x < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{-1}^{x} (1-|t|)dt \\
&= \int_{-1}^{0} (1+t)dt + \int_{0}^{x} (1-t)dt \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} \\
&= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- $x \geq 1$ のとき $F_X(x) = 1$

(2) $Y = |X|$ とおくと、Y の分布関数 $F_Y(y)$ は、

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) \\
&= P(-y \leq X \leq y) \\
&= F_X(y) - F_X(-y)
\end{aligned}
$$

ここで、$Y = |X|$ であることから、$y \geq 0$ に注意して、(1) から

- $0 \leq y < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= F_X(y) - F_X(-y) \\
&= \int_{-y}^{y} (1-|t|)dt \\
&= 2\int_{0}^{y} (1-t)dt \\
&= 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{y} \\
&= 2y - y^2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

- $y \geq 1$ のとき $F_Y(y) = 1$

これらを y で微分することで Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めることができ、

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \qquad (5)
$$

(3) $Z = X^2$ とおくと、Z の分布関数 $F_Z(z)$ は、

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\
&= P(X^2 \leq z) \\
&= P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) \\
&= \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_X(x)dx \quad (z \geq 0)
\end{aligned} \tag{6}
$$

であることから、(2) と同様に z の範囲で場合分けすることで

- $0 \leq z < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F_Z z &= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_X(x)dx \\
&= \int_{-\sqrt{z}}^{0} (1 + |x|)dx + \int_{0}^{\sqrt{z}} (1 - |x|)dx \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{z}} (1 + x)dx
\end{aligned}
$$

- $z \geq 1$ のとき、$F_Z(z) = 1$

これらを z で微分することで Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めることができる。