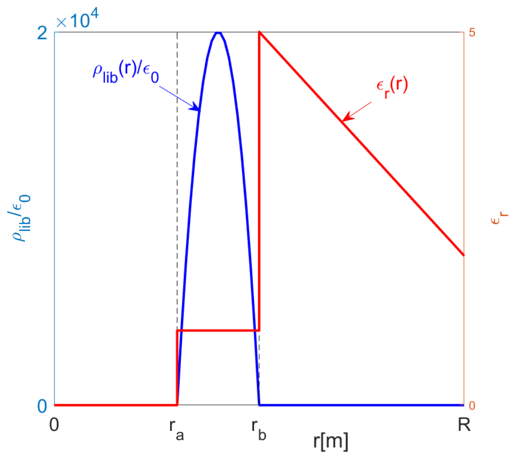
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE 15 mars 2023
Semestre de Printemps 2023
Prof. Laurent Villard, Francesco Pastore

Physique Numérique II – Exercice 6

à rendre jusqu'au Mardi 4 avril 2023 sur le site https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174657

6 Électrostatique : cylindre coaxial avec diélectrique variable et charges libres. Éléments finis.

Soit un diélectrique occupant un volume Ω, avec un bord $\partial\Omega$ au potentiel $V_0(\vec{x})$ donné $\forall x \in \partial\Omega$. Le milieu est de constante diélectrique variable $\epsilon_r(\vec{x})$ et contient des charges d'espace libres $\rho_{\text{lib}}(\vec{x})$.
Par la suite, on considèrera, pour le volume Ω, un cylindre coaxial de rayon intérieur $r = r_a$ et de rayon extérieur $r = R$. Mais pour les points 6.1 (a) et (b) ci-dessous, on restera dans une formulation générale.



6.1 Équation différentielle et forme variationnelle

(a)(b)(c) : [15pts]

(a) Écrire l'équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$.
(b) Écrire la forme variationnelle du problème. *Indication : suivre la démarche formelle de la section 3.2.4 des notes de cours.*
(c) Expliciter cette forme variationnelle dans le cas d'un cylindre coaxial de rayon intérieur r_a, de rayon extérieur R et longueur L_z, avec $\epsilon_r(r)$ et $\rho_{\text{lib}}(r)$ donnés, et les conditions aux limites $\phi(r_a) = V_a$ donné et $\phi(R) = 0$. (On considérera le cylindre suffisament long pour négliger les effets aux extrémités.)
(d) Obtenir la solution analytique de l'équation différentielle dans le cas simple d'un cylindre coaxial dans le vide, $\epsilon_r = 1$, $\rho_{lib} = 0$, avec les conditions aux limites $\phi(r_a) = V_a$ donné et $\phi(R) = 0$.

6.2 Éléments finis : programmation et simulations

(a)(b) : [5pts], (c) : [10pts], (d) (i) : [8pts], (d) (ii) : [7pts]

On discrétise le problème 1-D avec la méthode des éléments finis linéaires (Sections 3.2.4 et 3.2.5 des notes de cours) avec N_1 intervalles équidistants entre $r = r_a$ et $r = r_b$, et N_2 intervalles équidistants entre $r = r_b$ et $r = R$.
(a) Écrire les éléments de matrice et du membre de droite. *Indication : suivre la méthode des notes de cours en s'inspirant des équations (3.52) à (3.59).*

(b) Programmer l'implémentation de 6.2 (a) à partir du squelette de code C++ `Exercice6.cpp`. Noter que la matrice, tridiagonale, est stockée sous la forme de l'Eq.(3.65) des notes de cours. Implémenter la condition au bord. (La fonction pour résoudre le système d'équations algébriques linéaires est déja implémentée.) On choisira la règle des trapèzes pour les intégrales sur les intervalles [Annexe B, Eq. (B.3)]. *Attention à prendre la bonne valeur de $\epsilon_r(r)$ dans la limite $r \to r_b$ selon l'intervalle considéré (à gauche, respectivement à droite, de $r = r_b$).* On implémentera aussi le calcul du champ électrique E_r (*en utilisant la représentation en éléments finis*) et du champ de déplacement D_r aux points milieux des intervalles.

(c) On prend $V_a = 1.5$V, $r_a = 0.03$m, $r_b = 0.05$m, $R = 0.10$ m et $N_1 = N_2$. Tester votre algorithme pour le cas du vide, $\rho_{\text{lib}}(r) = 0$ et $\epsilon_r(r) = 1$. Comparer votre résultat numérique pour le potentiel avec le résultat analytique. Faire une étude de convergence de $\phi(r_b)$ en fonction de $N_1 (= N_2)$.

(d) Maintenant on choisira

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} 1 & (r_a \le r < r_b), \\ \epsilon_{r,b} + (\epsilon_{r,R} - \epsilon_{r,b})\ \frac{r - r_b}{R - r_b} & (r_b \le r \le R). \end{cases} \tag{1}$$

et $\rho_{\text{lib}}(r)$ tel que

$$\rho_{\text{lib}}(r)/\epsilon_0 = \begin{cases} 4A(r - r_a)(r_b - r)/(r_b - r_a)^2 & (r_a \le r < r_b), \\ 0 & (r_b \le r \le R), \end{cases} \tag{2}$$

avec $\epsilon_{r,b} = 5$, $\epsilon_{r,R} = 2$ et $A = 2 \times 10^4$ V/m^2.

(i) Obtenir et discuter la solution numérique pour $\phi(r)$ et $E_r(r)$ pour diverses valeurs de N_1 et N_2. On examinera par exemple la convergence de $\phi(r = r_b)$ avec N_2 propotionnel à N_1.

(ii) Vérifier que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho_{\text{lib}}(\vec{x})$ *en utilisant les différences finies pour l'opérateur* d/dr. Calculer la densité de charges de polarisation, $\rho_{\text{pol}}(r)$. Quelle est la charge de polarisation en $r = r_b$?

(e) **Facultatif**

— Choisir d'autres fonctions pour $\rho_{\text{lib}}(r)$ et $\epsilon_r(r)$ et/ou changer les dimensions du système.

— Changer la géométrie du problème en considérant un cylindre simple : pas de conducteur en $r = r_a$, $r_a \to 0$, et donc potentiel V_a en $r = 0$ inconnu (c'est le calcul qui va nous donner la réponse).

— Changer la géométrie du problème de cylindrique en cartésien ou en sphérique.

— Implémenter l'intégrale mixte trapèze-point milieu, Eq.(3.48), pour la construction de la matrice et du membre de droite.

6.3 Rédaction du rapport en LaTeX

Avec tous ces résultats en main, on passe à la rédaction du rapport.

(a) Télécharger le fichier source en `tex` (SqueletteRapport.tex) sur "Moodle", ou partir d'un rapport précédent.

(b) Rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentés et discutés en détail.

N.B. On trouve plusieurs documents LaTeX (introduction, examples, références) dans un dossier spécifique sur notre site "Moodle" (Dossier LaTeX).

6.4 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

(a) Préparer le fichier source LaTeXdu rapport :`RapportExercice6_Nom1_Nom2.tex`

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` : `RapportExercice6_Nom1_Nom2.pdf`

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice6_Nom1_Nom2.cpp`.

(d) Préparer le fichier script Matlab `Analyse_Nom1_Nom2.m`

(e) Déposer les fichiers sur Moodle avec ce lien.