École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre de printemps 2023
Prof. Laurent Villard, Dr. Giovanni Di Giannatale

5 avril 2023

Physique Numérique I-II – Exercice 7

à rendre jusqu'au mardi 9 mai 2023 sur le site
https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174659

7 Équation d'onde dans un milieu inhomogène : propagation d'une vague dans un océan de profondeur non uniforme

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable. On donne trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\text{Équation A : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
\text{Équation B : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
\text{Équation C : } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2 f\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Dans le cas de vagues en eaux peu profondes, par exemple, on a

$$u^2(x) = g h_0(x) \tag{2}$$

avec $g = 9.81\text{m}^2/\text{s}$ l'accélération de la pesanteur et $h_0(x)$ la profondeur de l'eau au repos. Le champ scalaire $f(x,t)$ représente alors la hauteur de la vague. Le domaine est tel que $x \in [x_L, x_R]$. Diverses conditions aux bords seront considérées.

Indication : dans le schéma numérique, on considèrera une fonction $u^2(x)$ et non pas une fonction $u(x)$ (par exemple, il ne faut pas développer $du^2(x)/dx$ en $2u(x)du(x)/dx$.)

7.1 Implémentation [5pts]

(a) On écrira et implémentera le schéma explicite à 3 niveaux (section 4.2.1 du cours), en l'adaptant : pour les dérivées en x, utiliser les différences finies centrées aux points de maillage :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1})}{2h}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2}$$

où g est soit f, soit u^2, et $h = x_{i+1} - x_i$ (maillage régulier). Programmer les trois cas A, B et C à partir du squelette de code Exercice7.zip.

(b) Implémenter les conditions aux bords fixe, libre, harmonique et sortie de l'onde, à gauche et à droite. Une condition au bord "harmonique" signifie une perturbation sinusoïdale d'amplitude A donnée et de fréquence angulaire ω donnée :

$$f(x_L, t) = A\sin(\omega t), \quad \text{respectivement} \quad f(x_R, t) = A\sin(\omega t)\ . \tag{3}$$

(c) On programmera aussi le calcul de la quantité $E(t)$, définie par

$$E(t) = \int_{x_L}^{x_R} f^2(x,t)dx. \tag{4}$$

7.2 Vitesse de propagation constante [15pts]

On considère le cas d'un bassin de 12m de long ($x_L = 0, x_r = L = 12$), de profondeur $h_0 = 2$m constante. (On a donc $u^2(x) = const$ et les équations A, B et C sont alors identiques.)

(a) Réflexion aux bords :
On simule une condition harmonique au bord gauche : $f(0,t) = A\sin(\omega t)$, avec $\omega = 7.5\text{s}^{-1}$.
L'état initial du système est au repos non perturbé : $f(x, t \leq 0) = 0\ \forall x$.
Illustrer le phénomène de réflexion au bord droit pour les conditions fixes $f(L,t) = 0, \forall t$ et libres, $\partial f/\partial x(L,t) = 0, \forall t$. (Simuler un temps t_{fin} qui corresponde à 1 aller-retour de l'onde.)
Illustrer également le cas de la condition au bord droite "sortie de l'onde".

(b) Limite de stabilité :
Prendre une des cas de la partie précédente, avec un nombre d'intervalles n_x donné. Vérifier et illuster que la solution devient instable dès que $|\beta_{\text{CFL}}| > 1$.

(c) Modes propres, calcul analytique :
On considère les conditions aux limites fixes à gauche et à droite : $f(x_L,t) = 0, f(x_R,t) = 0 \forall t$.
Calculer analytiquement les fréquences propres, ω_n, et modes propres, $f_n(x)$, du système.

(d) Modes propres, vérification numérique :
Pour ces mêmes conditions aux limites, initialiser un des modes propres calculés analytiquement, avec une amplitude arbitraire (mais non-nulle !), $f(x, t \leq 0) = f_n(x)\ \forall x$. Comparer ensuite la solution numérique après une période d'oscillation avec la solution analytique.

(e) Excitation résonante de modes propres :
On considère maintenant une condition au bord gauche donnée par l'Eq.(3), avec une amplitude $A = 0.1$m. On garde la condition au bord droite fixe. La condition initiale est au repos non perturbé. Effetuer une série de simulations de longue durée (simuler un temps t_{fin} égal à plusieurs dizaines de temps de transit de l'onde à travers le système), à des fréquences ω différentes. Pour chacune de ces simulations, noter le maximum de la quantité $E(t)$, voir Eq.(4) :

$$\hat{E}(\omega) = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t)\ .$$

Représenter $\hat{E}(\omega)$ pour une plage de fréquences appropriée. Que se passe-t-il aux voisinages de $\omega \approx \omega_n$?. Comparer la solution $f(x, t = t_{fin})$ pour $\omega \approx \omega_n$ avec un mode propre analytique.

7.3 Vitesse de propagation non uniforme : analyse WKB [10pts]

On considère maintenant le cas général $u^2(x)$ non uniforme. En s'inspirant de la dérivation faite dans les Notes de Cours, Section 4.2.4, pour le cas de l'équation B, faire l'analyse WKB des équations A et C.

7.4 Application à une vague de tsunami [15pts]

On représente la profondeur de l'océan par le profil suivant :

$$h_0(x) = \begin{cases} h_L & (x_L \leq x \leq x_a), \\ \frac{1}{2}(h_L + h_R) + \frac{1}{2}(h_L - h_R)\cos\left(\frac{\pi(x-x_a)}{x_b-x_a}\right) & (x_a < x < x_b) \\ h_R & (x_b \leq x \leq x_R) \end{cases} \tag{5}$$

On prendra $h_L = 7500$m, $h_R = 20$m, $x_L = 0$, $x_R = 1000$km, $x_a = 500$km et $x_b = 950$km. Simuler l'évolution d'une vague arrivant de la gauche, d'une période de 15 minutes, en utilisant la condition au bord gauche Eq.(3) avec $A = 1$m et la condition au bord droit “sortie de l'onde”. Considérer et illuster les cas des équations A, B et C.

Indications pratiques : Attention de prendre une résolution spatiale suffisante. D'autre part, pour éviter d'obtenir des fichiers de sortie trop volumineux, on peut n'écrire $f(x, t)$ que tous les n_{stride} pas de temps. Simuler un temps t_{fin} de l'ordre de 3 heures, soit environ 10000*s. Choisir* Δt *de telle sorte que* $\max(\beta_{\text{CFL}}) = 1$.

(a) Quelle hauteur atteint la vague au lorsqu'elle arrive proche de la côte ($x_b < x < x_R$) ? Comparer les cas des équations A, B et C.

(b) Pour cette partie, on n'imposera la perturbation au bord gauche que pendant une période. Plus précisément, on prendra

$$f(x_L, t) = \begin{cases} A\sin(\omega t) & (0 \leq t < 2\pi/\omega) \\ 0 & (t > 2\pi/\omega) \end{cases} \tag{6}$$

Vérifier que la vitesse de propagation est bien donnée par $\sqrt{gh_0(x)}$ dans les cas A, B et C, et que l'amplitude est proportionnelle à $h_0(x)^{1/4}$ dans le cas A, $h_0(x)^{-1/4}$ dans le cas B, et $h_0(x)^{-3/4}$ dans le cas C.

Indication : Pour calculer la vitesse de propagation et l'amplitude, on peut par exemple trouver le premier temps pour lequel f est maximum pour $x = x_i$ fixé (un point de la grille spatiale), afin d'obtenir le mouvement de la crête de la vague. Attention, il faut faire une interpolation quadratique de $f(x_i, t)$, à $x = x_i$ fixé , au voisinage du maximum sur la grille temporelle, pour éviter des sauts brusques. On obtient ainsi un ensemble de valeurs $(x_i, t_{crete,i})$. L'amplitude est alors la valeur de $f(x_i, t_{crete,i})$. Et on obtient la vitesse de propagation par différences finies $v = (x_{i+k} - x_{i-k})/(t_{crete,i+k} - t_{crete,i-k})$, avec $k \geq 1$ un nombre entier, choisi pour minimiser les oscillations de v.

(c) Dans le cas de l'équation B, étudier et illustrer ce qui se passe avec des fonds océaniques de plus en plus raides, en rapprochant le point x_b du point x_a. Comparer avec WKB.

7.5 Supplément facultatif

— Considérer le cas à deux dimensions d'espace, $h_0 = h_0(x, y)$, avec un maillage en x et en y. Choisir différentes formes pour la profondeur de l'océan : essayer d'obtenir une focalisation des ondes.

7.6 Rédaction du rapport en LaTeX

Avec tous ces résultats en main, on passe à la rédaction du rapport.

(a) Télécharger le fichier source en `tex` (SqueletteRapport.tex) sur Moodle, ou partir d'un rapport précédent.

(b) Rédiger un rapport dans lequel les calculs analytiques et les résultats des simulations numériques des questions ci-dessus sont présentés et discutés.

N.B. On trouve plusieurs documents LaTeX (introduction, examples, références) dans un dossier spécifique sur Moodle (Dossier LaTeX).

7.7 Soumission du rapport en format pdf et du fichier source C++

(a) Préparer le fichier source LaTeX du rapport `RapportExercice7_Nom1_Nom2.tex`

(b) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` `RapportExercice7_Nom1_Nom2.pdf`

(c) Préparer le fichier source C++ `Exercice7_Nom1_Nom2.cpp`

(d) Préparer le fichier source Matlab ou Python `Analyse_Nom1_Nom2.m ou .py`

(e) Déposer les fichiers sur Moodle avec ce lien.

En plus des points énoncés ci-dessus, on attribue [**5pts**] pour la qualité générale du rapport.