

Projet 2 — *Maîtrise des effets néfastes engendrés par la fragmentation du paysage*

La fragmentation des espaces est devenue une question centrale en écologie puisqu'elle est reconnue comme étant la principale source de perte de biodiversité dans les pays industrialisés. Elle entraîne une diminution des habitats et leur éclatement en fragments disjoints, affectant ainsi les populations de nombreuses espèces : extinction des espèces rares, augmentation des espèces communes et sédentaires, mortalité lors des déplacements entre fragments, érosion génétique, etc. Une part importante de cette fragmentation est provoquée par les infrastructures routières et ferroviaires mais elle est également due au développement urbain, à l'agriculture et à l'exploitation des forêts.



Les massifs boisés ne sont plus physiquement connectés. De nombreux invertébrés seront isolés dans les boisements. Sangliers et cervidés peuvent encore facilement circuler de l'un à l'autre.

Minimisation de la fragmentation

La fragmentation du paysage, c'est-à-dire l'éclatement de grandes superficies en petites parcelles doit être évaluée et contrôlée puisqu'elle influence de nombreux processus écologiques. Elle peut être mesurée par de multiples indicateurs. Ici nous considérons, à titre d'exemple, un indicateur courants, *la distance moyenne au plus proche voisin* (DMPPV). Cet indicateur fait partie de ceux qui sont utilisés dans FRAGSTATS (Marks et McGarigal, 1994²), un logiciel bien connu en écologie du paysage. Les problèmes d'optimisation associés à cette notion de fragmentation consistent, par exemple, à sélectionner, sous certaines contraintes, un sous-ensemble de parcelles optimal vis-à-vis des indicateurs retenus. Les parcelles sélectionnées seront, par exemple, conservées ou restaurées en tant que parcelles habitats et les autres seront affectés à d'autres usages (développement urbain, zones agricoles, coupes forestières, etc.). Voyons maintenant précisément la mesure de fragmentation que nous considérons ici, pour un ensemble de parcelles $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$:

$$\text{DMPPV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min \{d_{ij} : j = 1, \dots, n; j \neq i\}$$

où d_{ij} est la distance entre les deux parcelles s_i et s_j .

De nombreuses études ont montré que les mouvements des individus d'une même espèce entre différentes parcelles affectent la dynamique de la population et il est clair que ces mouvements sont plus difficiles si les valeurs de DMPPV sont élevées. Minimiser la valeur de cet indicateur favorise le regroupement de parcelles qui ne sont pas trop éloignées les unes des autres. En revanche, la distance entre les groupes de parcelles n'est pas contrôlée. Nous considérons ici le problème suivant associé à un ensemble de parcelles $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ d'aire totale A : sélectionner un sous-ensemble de S , d'aire totale comprise entre A_{\min} et A_{\max} , de coût total inférieur ou égal à une certaine valeur B et qui minimise DMPPV.

2. Marks, B.J., McGarigal, K. (1994). Fragstats : Spatial pattern analysis program for quantifying landscape structure. Technical report, Forest Science Department, Oregon State University.

Optimisation combinatoire fractionnaire

Un problème d'optimisation combinatoire fractionnaire s'exprime sous la forme P :

$$(P) \begin{cases} \max \frac{f(x)}{g(x)} \\ \text{s.t.} \\ x \in X \subseteq [0, 1]^n \end{cases}$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions de $[0, 1]^n$ dans \mathbb{R} ; X est un sous-ensemble de $[0, 1]^n$. On suppose que $g(x) > 0$ pour tout x appartenant à X et, également, qu'il existe un x de X tel que $f(x) > 0$.

Considérons le problème

$$(Q) \begin{cases} \min \lambda \\ \text{s.t.} \\ f(x) - \lambda g(x) \leq 0 \quad \forall x \in X \subseteq [0, 1]^n \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Un couple (λ^*, x^*) appartenant à $\mathbb{R} \times X$ est une solution optimale de (Q) si et seulement si

$$\forall x \in X, f(x) - \lambda^* g(x) \leq 0 = f(x^*) - \lambda^* g(x^*)$$

Cette condition est équivalente à

$$\forall x \in X, \frac{f(x)}{g(x)} \leq \lambda^* = \frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

Cette dernière condition signifie que λ^* est la valeur optimale du problème (P) et que x^* est une solution optimale de ce problème. Soit λ un paramètre appartenant à \mathbb{R} . Beaucoup de méthodes itératives visant à résoudre le problème (P) résolvent une suite d'instances du problème paramétrique (P_λ) associé à (P) :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \max f(x) - \lambda g(x) \\ \text{s.t.} \\ x \in X \subseteq [0, 1]^n \end{cases}$$

Notons $v(\lambda)$ la valeur optimale de (P_λ) et x_λ^* une solution optimale de ce problème. On peut démontrer que $v(\lambda) = 0$ si et seulement si (λ, x_λ^*) est une solution optimale de (Q) , c'est-à-dire si et seulement si λ est la valeur optimale de (P) et x_λ^* une solution optimale de ce problème.

On obtient ainsi une autre formulation du problème (P) :

Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(\lambda) = 0$, où, $v(\lambda) = \max \{ f(x) - \lambda g(x) : x \in X \subseteq [0, 1]^n \}$

A partir de cette formulation, on va pouvoir construire des algorithmes, pour résoudre le problème (P) , fondés sur des méthodes classiques permettant de déterminer la racine d'une fonction (méthode de Newton). Les propriétés suivantes de la fonction v découlent du fait que v correspond au maximum d'un nombre fini de fonctions linéaires décroissantes :

- (i) la fonction v est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et strictement décroissante de $-\infty$ à $+\infty$.
- (ii) $v(0) > 0$, c'est une conséquence du fait qu'il existe un x de X tel que $f(x) > 0$.
- (iii) la fonction v a une et une seule racine λ^* et $\lambda^* > 0$.

- (iv) si $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q$ désignent toutes les valeurs de λ pour lesquelles deux droites de $\left\{ f(x) - \lambda g(x) : x \in X \subseteq [0, 1]^n \right\}$ se coupent, alors la fonction v est linéaire sur les intervalles $] -\infty, \lambda_1]$, $[\lambda_i, +\lambda_{i+1}]$, ($i = 1, 2, \dots, q-1$) et $[\lambda_q, +\infty[$.
- (v) la fonction v est une fonction convexe.

Algorithme de Dinkelbach

1. $\lambda = \lambda_0$
2. calculer $v(\lambda) = \max \left\{ f(x) - \lambda g(x) : x \in X \subseteq [0, 1]^n \right\}$
3. soit x_λ tel que $v(\lambda) = f(x_\lambda) - \lambda g(x_\lambda)$
4. si $v(\lambda) > 0$ alors $\lambda \leftarrow \frac{f(x_\lambda)}{g(x_\lambda)}$ et **retour en 2**
sinon x_λ est une solution optimale de (P)

Dans le cas particulier où les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont linéaires, c'est-à-dire $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ et $g(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$ (problème d'optimisation combinatoire fractionnaire linéaire) on a le théorème suivant :

Théorème³

Le nombre d'itération de l'algorithme de Dinkelbach appliqué à (P) lorsque $f(x)$ et $g(x)$ sont linéaires est en $\mathcal{O}(n^2 \log(n)^2)$ ou $\mathcal{O}(n^3 \log(n))$.

Il est clair que, dans ce cas, le problème d'optimisation de l'étape 2 de l'algorithme consiste à résoudre un programme linéaire en nombres entiers.

Travail demandé

- i) Modéliser le problème de la sélection d'un ensemble de parcelles d'aire totale comprise entre A_{min} et A_{max} , de coût total inférieur ou égal à B et qui minimise DMPPV.
- ii) Écrire le modèle sous la forme d'un programme d'optimisation combinatoire fractionnaire, où les fractions sont des ratios de deux fonctions linéaires.
- iii) Résoudre l'instance présentée ci-dessous par l'algorithme de Dinkelbach pour les contraintes d'aire et de budget suivantes :
 - $A_{min} = 30$, $A_{max} = 35$, $B = 920$,
 - $A_{min} = 20$, $A_{max} = 21$, $B = 520$,
 - $A_{min} = 70$, $A_{max} = 75$, $B = 3500$.
- iv) Pour chacune des 3 instances, donner le temps de calcul total, le nombre total de noeuds développés dans l'arbre de recherche, le nombre d'itérations de l'algorithme de Dinkelbach, la valeur de la solution (valeur de DMPPV) et les parcelles retenues.
- v) Étudier le comportement de la méthode proposée en fonction de la taille des instances. Pour cela, on engendrera aléatoirement des jeux d'essai.

Description des instances et solutions

Instance

1	7	3	10	10	2	8	6	4	5	5
2	7	7	10	5	2	8	6	3	9	9
3	7	3	4	6	3	2	4	9	7	8
4	6	2	7	6	4	7	5	10	7	8
5	2	4	3	4	9	6	4	9	8	4
6	7	5	2	9	8	9	5	6	10	10
7	5	2	3	7	9	9	4	9	6	3
8	5	2	9	4	2	8	6	9	3	4
9	9	6	5	4	5	6	8	9	6	6
10	8	8	7	7	3	5	8	3	9	9

Zone représentée par une matrice de 10×10 parcelles carrées de 1 km de côté; coût de sélection de de chaque parcelle en dizaine d'unités de coût

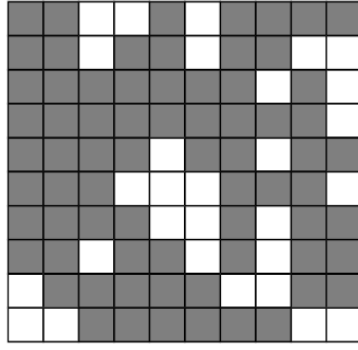
Solutions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Solution de la première instance : $A_{min} = 30$, $A_{max} = 35$, $B = 920$:
Nb itérations = 2, nb noeuds = 0, nb parcelles sélectionnées = 30, DMPPV = 1.15501

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Solution de la deuxième instance : $A_{min} = 20$, $A_{max} = 21$, $B = 520$:
Nbitérations = 2, nb noeuds = 0, nbparcelles sélectionnées = 20, DMPPV = 1.27394



Solution de la troisième instance : $A_{min} = 70$, $A_{max} = 75$, $B = 3500$:
 Nb itérations = 2, nb noeuds = 0, nb parcelles sélectionnées = 71, DMPPV = 1