

Compte rendu du TP2

Modélisation de la distance moyenne au plus proche voisin (DMPPV)

Groupe : *Maël Verbois, Jules Onée, Reyen Selmi*

Cours : ROB

11 octobre 2025

1 Compte Rendu

L'objectif de ce travail est de modéliser et de résoudre le problème d'optimisation combinatoire associé à la fragmentation du paysage. L'indicateur utilisé pour la mesure de la fragmentation est la distance moyenne au plus proche voisin (DMPPV). On modélisera le problème sous la forme d'un problème d'optimisation combinatoire fractionnaire avec pour fonction objectif une fraction rationnelle. On résoudra ce problème à l'aide de l'algorithme de Dinkelbach implémentée en Julia en utilisant Gurobi comme solveur de PLNE. Finalement on étudiera le complexité temporelle sur des instances de tailles variables.

Question 1 - Modéliser le problème de la sélection d'un ensemble de parcelles d'aire totale comprise entre A_{\min} et A_{\max} , de coût total inférieur ou égal à B et qui minimise dmppv.

On cherche à modéliser le problème de sélection d'un ensemble de parcelles de sorte que :

- l'aire totale des parcelles sélectionnées soit comprise entre A_{\min} et A_{\max} ,
- le coût total ne dépasse pas un budget B ,
- et la distance moyenne au plus proche voisin (dmppv) soit minimisée.

On introduit pour cela les variables binaires de décision :

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la parcelle } (i, j) \text{ est sélectionnée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note :

- c_{ij} : le coût associé à la parcelle (i, j) .

La fonction objectif vise à minimiser la distance moyenne au plus proche voisin (DMPPV), qui sera définie dans la question suivante. Le modèle général s'écrit donc :

$$\begin{array}{ll} \min & DMPPV(s) \\ \text{sous contraintes} & \left\{ \begin{array}{l} A_{\min} \leq \sum_{i,j} a_{ij} s_{ij} \leq A_{\max}, \\ \sum_{i,j} c_{ij} s_{ij} \leq B, \\ s_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j). \end{array} \right. \end{array}$$

1.1 Question 2 - Écrire le modèle sous la forme d'un programme d'optimisation combinatoire fractionnaire, où les fractions sont des ratios de deux fonctions linéaires.

On a facilement par la définition

$$DMPPV = \frac{1}{\sum_{i,j} s_{ij}} \cdot \sum_{i,j} \min \{ d_{(i,j),(k,l)} \mid (i,j) \neq (k,l) \},$$

avec $d_{(i,j),(k,l)}$ la distance euclidienne entre la parcelle (i,j) et la parcelle (k,l) .

La difficulté réside dans l'expression de la distance du voisin le plus proche d'une parcelle s_{ij} . Pour exprimer cette quantité comme une fonction linéaire on introduit :

- $d(i,j,k,l)$ la distance entre la parcelle (i,j) et la parcelle (k,l)
- $m(i,j,k,l) = \begin{cases} 1 & \text{si les parcelles } (i,j), (k,l) \text{ sont leurs voisines les plus} \\ & \text{proches respectives} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ce qui nous donne l'expression suivante

$$DMPPV = \frac{1}{\sum_{i,j} s_{ij}} \cdot \sum_{i,j,k,l \mid (i,j) \neq (k,l)} m(i,j,k,l) \cdot d(i,j,k,l)$$

Il faut aussi modéliser les contraintes suivantes pour garantir les propriétés des $m(i,j,k,l)$

- Chaque parcelle (i,j) n'a qu'un seul voisin considéré comme le plus proche pour éviter les doubles comptages
- Deux parcelles (i,j) et (k,l) ne peuvent être considérées comme plus proches que si elles sont sélectionnées

Finalement, on obtient le modèle global suivant :

$$\min \quad DMPPV(s, m) = \frac{\sum_{i,j,k,l \mid (i,j) \neq (k,l)} m(i,j,k,l) \cdot d(i,j,k,l)}{\sum_{i,j} s_{ij}}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} A_{\min} \leq \sum_{i,j} s_{ij} \leq A_{\max}, \\ \sum_{i,j} c_{ij} s_{ij} \leq B, \\ \sum_{k,l \mid (i,j) \neq (k,l)} m(i,j,k,l) = 1, \quad \forall (i,j), \\ m(i,j,k,l) \leq s_{ij}, \quad m(i,j,k,l) \leq s_{k,l}, \quad \forall (i,j) \neq (k,l), \\ s_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j), \\ m(i,j,k,l) \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

2 Résolution du problème

3 Conclusion

Ce TP a permis de modéliser le problème de sélection optimale de parcelles en considérant à la fois des contraintes d'aire, de budget et de proximité spatiale. Les prochaines étapes consistent

à implémenter le modèle dans un solveur d'optimisation et à analyser la sensibilité des résultats en fonction des paramètres A_{\min} , A_{\max} et B .