Trabalho Final - Probabilidade e Estatística (2025.2)

Equipe 02

Ismael S. Silva, Paulo R. S. Menezes, Ana N. M. de Araujo Kaique D. Sousa, Wanessa R. Santos, Eros R. Simette Thiago C. S. Oliveira, Pedro H. Q. da Silva Marcos G. P. Galdino, Luiz M. R. de Souza, Adrian E. O. Azevedo

Universidade Federal do Ceará (UFC)

21 de julho de 2025

UFC

Questão 4

Considere que $X_1, \dots, X_n$ consiste em n observações de uma amostra aleatória com distribuição estatística contínua uniforme no intervalo $[0, 6]$. Considere a v.a. $\bar{X}$ derivada das v.a.'s $X_1, \dots, X_n$ da seguinte forma:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

a) Geração das amostras

a) Gere um conjunto de 1200 amostras das v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ com $n = 800$ observações cada. Para cada uma das amostras geradas anteriormente calcule os valores de $\bar{X}$.

Por que? Simular as médias amostrais de $U(0,6)$ para observar seu comportamento e fundamentar os cálculos de intervalo de confiança.

```
// Questao a - Geracao das amostras e calculo das medias
A = grand(1200, 800, "uin", 0, 6);
mediaA = mean(A, "c");
desvioA = stdev(A, "c");
```

b) Intervalos de Confiança (1/3)

b) Para cada amostra das v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ geradas no item anterior, construa o intervalo de confiança para a média populacional $\bar{X}$ com níveis de 90%, 95% e 99%.

Sabemos que cada amostra tem tamanho $n = 800$ e, para $U(0,6)$, $\mu = 3$. Desejamos

$$P\big(L \le \bar{X} \le U\big) = \lambda,$$

com $\lambda \in \{0.90, 0.95, 0.99\}$.

Pelo Teorema do Limite Central:

$$\bar{X} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \mathcal{N}\big(\mu, \sigma/\sqrt{n}\big).$$

Como n é grande, usamos $\sigma \approx s$. Normalizando:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

b) Intervalos de Confiança (2/3)

Após a normalização, temos

$$P(Z_1 \leq Z \leq Z_2) = \lambda,$$

onde

$$P(Z_1 \leq Z) = P\left(L \leq \bar{X}\right) = \tfrac{1-\lambda}{2}, \quad P(Z \leq Z_2) = P\left(\bar{X} \leq U\right) = \tfrac{1-\lambda}{2}.$$

Como $Z_2 = -Z_1 = \rho$, segue

$$P(-\rho \leq Z \leq \rho) = \lambda \implies P\left(\bar{X} - \rho\,\tfrac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \rho\,\tfrac{s}{\sqrt{n}}\right).$$

Assim, o intervalo de confiança é

$$IC = \left(\bar{X} - \rho\,\tfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \rho\,\tfrac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

com

$$\rho = \begin{cases} 1.645, & \lambda = 0.90, \\ 1.960, & \lambda = 0.95, \\ 2.576, & \lambda = 0.99. \end{cases}$$

b) Intervalos de Confiança (3/3)

```
// Questao b - Calculo dos intervalos de confianca
intervalos90 = zeros(1200, 2);
intervalos95 = zeros(1200, 2);
intervalos99 = zeros(1200, 2);

for i = 1:1200
    intervalos90(i, 1) = mediaA(i, 1) - (1.645 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));
    intervalos95(i, 1) = mediaA(i, 1) - (1.960 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));
    intervalos99(i, 1) = mediaA(i, 1) - (2.576 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));

    intervalos90(i, 2) = mediaA(i, 1) + (1.645 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));
    intervalos95(i, 2) = mediaA(i, 1) + (1.960 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));
    intervalos99(i, 2) = mediaA(i, 1) + (2.576 * desvioA(i, 1) / sqrt(800));
end
```

c) Cobertura dos Intervalos

c) Verifique o percentual dos intervalos estatísticos com grau de confiança de 90% que realmente contem o valor real da média populacional de $\bar{X}$. E para os graus de confiança de 95% e 99%?

```
acertos90 = 0;
acertos95 = 0;
acertos99 = 0;
for i = 1:1200
    if 3 > intervalos90(i, 1) & 3 < intervalos90(i, 2) then
        acertos90 = acertos90 + 1;
    end
    if 3 > intervalos95(i, 1) & 3 < intervalos95(i, 2) then
        acertos95 = acertos95 + 1;
    end
    if 3 > intervalos99(i, 1) & 3 < intervalos99(i, 2) then
        acertos99 = acertos99 + 1;
    end
end
```

Código: Verificação da Proporção de Cobertura (Parte 2)

```
porcentagem90 = acertos90 / 1200 * 100;
porcentagem95 = acertos95 / 1200 * 100;
porcentagem99 = acertos99 / 1200 * 100;

disp("Porcentagem de intervalos que contem a media real (3):");
disp("90% de confianca: " + string(porcentagem90) + "%");
disp("95% de confianca: " + string(porcentagem95) + "%");
disp("99% de confianca: " + string(porcentagem99) + "%");
```

Enunciado da Questão

Considere a função densidade de probabilidade (fdp) abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule a função de distribuição acumulada (FDA) e sua inversa.

(b) Gere uma amostra de 10.000 observações usando o método da FDA inversa.

(c) Esboce a fdp teórica e o histograma da amostra. Eles são semelhantes?

(d) Calcule a média e a variância populacional.

(e) Calcule a média e a variância amostral.

Item (a): Cálculo da FDA

Dada a fdp da distribuição exponencial com $\lambda = 3$:

$$f(x) = 3e^{-3x} \quad \text{para } x \geq 0$$

A função de distribuição acumulada (FDA), $F(x)$, é a integral da fdp:

$$F(x) = \int_0^x 3e^{-3t}\,dt$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\int_0^x 3e^{-3t}\,dt = \left[-e^{-3t}\right]_0^x = -e^{-3x} - (-e^0) = 1 - e^{-3x}$$

Portanto, a FDA é:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Item (a): Inversa da FDA

Para encontrar a função inversa da FDA, $F^{-1}(u)$, fazemos $u = F(x)$ e isolamos x.

$$u = 1 - e^{-3x}$$

$$e^{-3x} = 1 - u$$

$$\ln(e^{-3x}) = \ln(1-u)$$

$$-3x = \ln(1-u)$$

$$x = -\frac{1}{3}\ln(1-u)$$

A função inversa da FDA, para $0 < u < 1$, é:

$$F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{3}$$

Item (b): Geração da Amostra (Scilab)

```
// Par metros
lambda = 3;
n = 10000;

// FDA inversa da exponencial
function x = exponencial_inv(u, lambda)
    x = -log(1 - u) / lambda;
endfunction

// 1. Gerar n observaç es  de uma distribuição Uniforme(0,1)
U = rand(n, 1);

// 2. Aplicar a FDA inversa para obter a amostra exponencial
amostra_fda = exponencial_inv(U, lambda);

// Exibindo a média da amostra para verificação
printf("Média amostral: %.4f\n", mean(amostra_fda));
```

Item (b): Histograma da Amostra

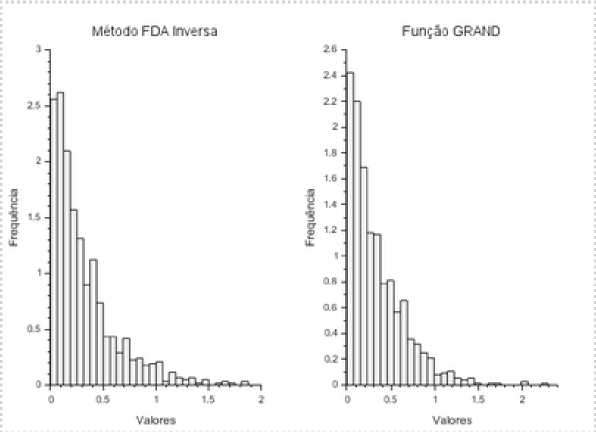
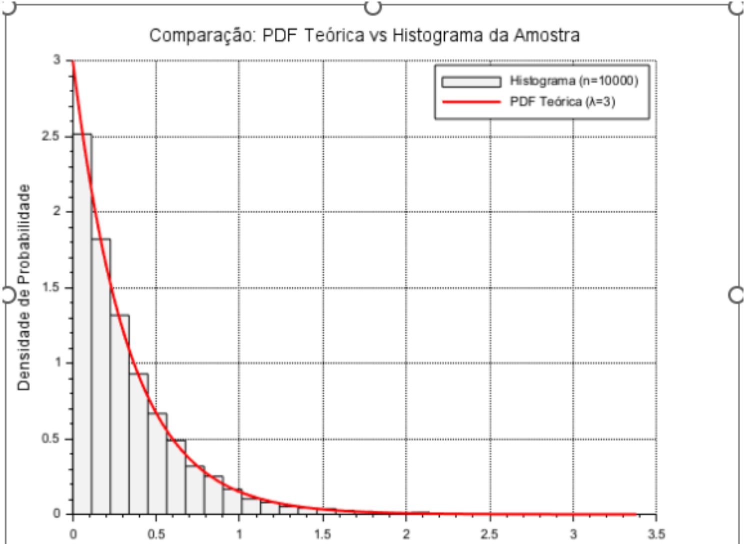


Figura 1: Histograma da amostra de 10.000 observações gerada com o método da FDA inversa.

Item (c): Código da Comparação (Scilab)

```
// Vetor de pontos para a PDF teórica
x_teorico = linspace(0, max(amostra_fda), 200);
pdf_teorica = lambda * exp(-lambda * x_teorico);

// Plotar histograma normalizado e PDF teórica
scf();
histplot(30, amostra_fda, normalization=%t); // Normalizado
plot(x_teorico, pdf_teorica, 'r-', 'LineWidth', 2);

// Configuraç es  do gráfico
title('Comparação: PDF Teórica vs Histograma da Amostra');
xlabel('Valores');
ylabel('Densidade de Probabilidade');
legend(['Histograma (n=10000)'; 'PDF Teórica (  =3)']);
```

Comparação: PDF Teórica vs Histograma



Item (d): Média e Variância Populacional

A **média** (ou esperança) $\mathbb{E}(X)$ de uma exponencial com parâmetro λ é:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Com $\lambda = 3$, temos:

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

A **variância** $\mathrm{Var}(X)$ de uma exponencial com parâmetro λ é:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Com $\lambda = 3$, temos:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3^2} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Item (e): Média e Variância Amostral

Usando o Scilab para calcular as estatísticas da amostra gerada:

```
// 'amostra_fda' é o vetor com 10.000 observaç es

media_amostral = mean(amostra_fda);
variancia_amostral = variance(amostra_fda);

printf("Média Teórica: %.4f\n", 1/3);
printf("Média Amostral: %.4f\n\n", media_amostral);

printf("Vari ncia Teórica: %.4f\n", 1/9);
printf("Vari ncia Amostral: %.4f\n", variancia_amostral);
```

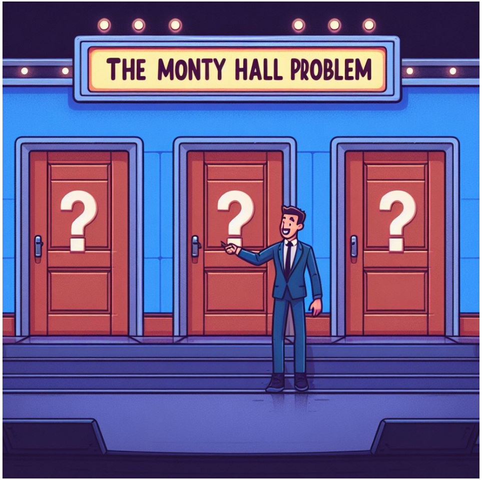
Resultado esperado: Os valores da média e variância amostral devem ser muito próximos dos valores teóricos ($1/3 \approx 0.3333$ e $1/9 \approx 0.1111$).

Questão 17

Considere um programa de TV em que um participante deve escolher uma de três portas. Atrás de uma das portas existe um carro, enquanto nada existe atrás das outras duas.

A produção coloca o prêmio de forma aleatória atrás de uma das portas. Após a escolha de uma porta, o apresentador abre uma das outras portas que não contém o prêmio, e pergunta ao participante se ele deseja trocar sua escolha.

Qual porta escolher?



Simulação

```
// --- Simulação do Problema de Monty Hall com Registro de Convergência ---

// 1. Definição dos parâmetros
num_simulacoes = 50000;
nome_arquivo = "monty_hall_convergence.csv";

// 2. Inicialização dos contadores e da matriz para armazenar os resultados
vitorias_mantendo = 0;
vitorias_trocando = 0;
resultados_convergencia = zeros(num_simulacoes, 3);

// 3. Loop principal da simulação
for i = 1:num_simulacoes
    porta_premiada = grand(1, 1, 'uin', 1, 3);      // Porta com o prêmio
    escolha_inicial = grand(1, 1, 'uin', 1, 3);     // Escolha do participante

    // Verifica se ganharíamos mantendo ou trocando a escolha
    if escolha_inicial == porta_premiada then
        vitorias_mantendo = vitorias_mantendo + 1;
```

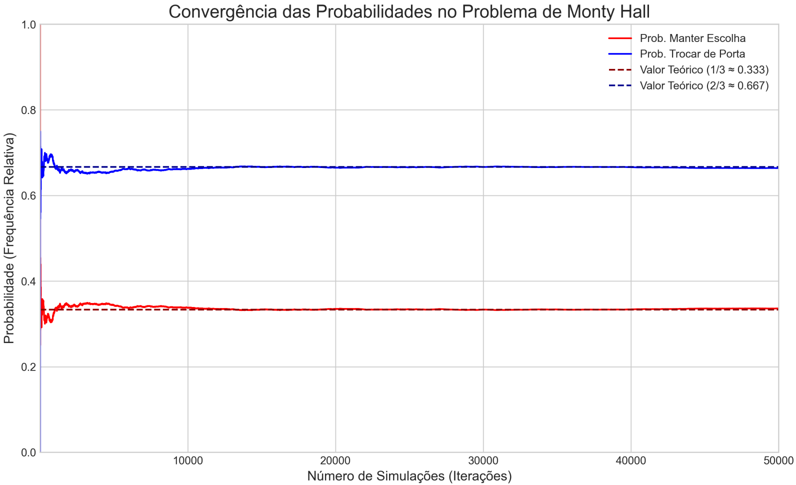
Simulação

```
        // Calcula as probabilidades acumuladas até o momento
        prob_manter_atual = vitorias_mantendo / i;
        prob_trocar_atual = vitorias_trocando / i;

        // Armazena os dados de convergência
        resultados_convergencia(i, :) = [i, prob_manter_atual, prob_trocar_atual];
    end

    // 4. Salvamento dos resultados em arquivo CSV
    fid = mopen(nome_arquivo, 'w');
    if fid == -1 then
        error("ERRO: Não foi possível criar ou abrir o arquivo para escrita: " + nome_arquivo);
    end

    // Escreve o cabeçalho do CSV
    mfprintf(fid, 'Iteracao,Prob_Manter,Prob_Trocar\n');

    // Grava os dados linha por linha
    for k = 1:size(resultados_convergencia, 1)
        mfprintf(fid, '%d,%.6f,%.6f\n', resultados_convergencia(k, 1), resultados_convergencia(k, 2), resultados_convergencia(k, 3));
    end

    // Fecha o arquivo
    mclose(fid);

    // 5. Exibição dos resultados finais
```

Simulação

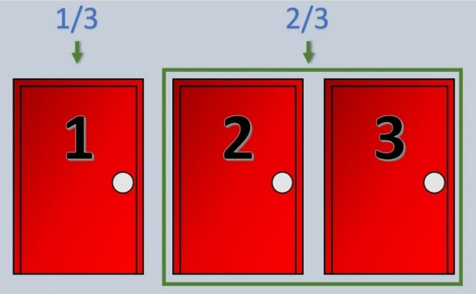
```
// 5. Exibição dos resultados finais
clc;
printf("Simulação concluída.\n");
printf("Resultados salvos em: %s (%d registros)\n", nome_arquivo, num_simulacoes);

// Calcula e exibe as probabilidades finais
prob_final_manter = vitorias_mantendo / num_simulacoes;
prob_final_trocar = vitorias_trocando / num_simulacoes;
printf("\n--- Resultados Finais ---\n");
printf("Probabilidade final ao manter a escolha: %.4f (%.2f%%)\n", prob_final_manter, prob_final_manter * 100);
printf("Probabilidade final ao trocar de porta: %.4f (%.2f%%)\n", prob_final_trocar, prob_final_trocar * 100);
```

Convergência



Sempre trocando de porta

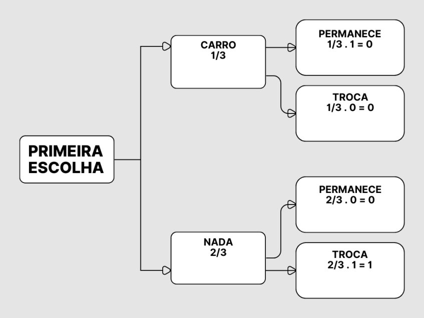
A resposta intuitiva ao problema é a que quando o apresentador revelou uma das portas não premiadas, o participante passaria a ter um novo dilema com duas portas e um prêmio. Portanto, a chance do prêmio estar em uma das portas seria 1/2.
A resposta contra-intuitiva e certa é que é mais vantajoso trocar, pois a chance de ganhar trocando é o dobro da chance de ganhar sem trocar



Solução

Resposta correta: é melhor trocar de porta!

- Probabilidade de ganhar sem trocar: **1/3**
- Probabilidade de ganhar trocando: **2/3**



Referências Bibliográficas I

- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 6ª ed. LTC, 2016.
- ROSS, S. M. *Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências*. 9ª ed. Elsevier, 2018.
- WASSERMAN, L. *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 2002.
- GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 3ª ed., 2001.

Obrigado pela atenção!