5 a)

Demostrar que

$$\|A\|_1 = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Supongamos que A es una matriz de $m\times n$. Entonces $\forall x\in\mathbb{R}^n$ tal que $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tenemos que

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$ y por lo tanto

$$\|Ax\|_1 = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right| + \cdots + \left|\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j|$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)$$

Si definimos $\alpha = \max_{j=1\ldots n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right) \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\cdot\alpha = \alpha\sum_{j=1}^{n}|x_j| = \alpha\|x\|_1$$

Por ende $\max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \alpha$

Ahora tenemos que encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^n$.
Si cogemos e_k donde e_k es un vector unitario donde k corresponde a la columna cuyos valores hacen que $\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ sea máximo. Entonces

$$\frac{\|Ae_k\|_1}{\|e_k\|_1} = \|Ae_k\|_1 = \alpha \qquad \square$$