Problema 5

b) Demostrar que

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Sea $A_{m \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

entonces

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\}$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \right\} = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|x\|_\infty \right\}$$

$$= \|x\|_\infty \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Por ende

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Llamemos α a $\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$, ahora construiremos un vector que cumpla con la igualdad.

Si tomamos $x = (\text{sgn}(a_{k1}), \text{sgn}(a_{k2}), \dots, \text{sgn}(a_{kn})\}$ donde $k = \arg \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$ donde $\text{sgn}(a_{kj}) = 1$ si $a_{kj} \geq 0$ y $\text{sgn}(a_{kj}) = -1$ si $a_{kj} < 0$, entonces $\|x\|_\infty = 1$ y también tenemos que $\|Ax\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}(a_{kj})\, a_{ij}$

$$= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \alpha$$

Por ende $\max\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \alpha$