7

1. Si $d: X\times X \to \mathbb{R}$ es una métrica, entonces

$$\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$ también es una

métrica.

Demostremos que $\bar{d}(x,y) \geq 0$

Sabemos que $d(x,y) \geq 0$ y que

$1 + d(x,y) \geq 1$. Por ende:

$\frac{1}{(1+d(x,y))^2} > 0$ y si multiplicamos

esta desigualdad con $d(x,y) \geq 0$ nos

queda que $\frac{1}{(1+d(x,y))^2} \cdot d(x,y) = \bar{d}(x,y) \geq 0$

Si $x=y \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow \bar{d}(x,y) = 0$

Para demostrar que $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$ comenzamos diciendo que

$$\bar{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}$$

$$= \bar{d}(y,x)$$

Para demostrar la desigualdad triangular podemos decir que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

y

$$1 + d(x,y) \leq 2 + d(x,z) + d(z,y)$$

$$= (1+d(x,z)) + (1+d(z,y))$$

$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{(1+d(x,z))+(1+d(z,y))}$$

$$= \frac{d(x,z)}{(1+d(x,z))+(1+d(z,y))} + \frac{d(z,y)}{(1+d(x,z))+(1+d(z,y))}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$\square$