Вариант 0

Оскільки за завданям необхідно використати вибірки 1,2 и 3, та визначити їх статистичні характеристики, у тому числі спільні, побудуємо наступну звідну таблицю даних та обчислень:

Таблиця 1.

№ по порядку	Відхилення від номіналу на вході (1)	Відхилення від номіналу на вході (2)	Відхилення від номіналу на виході (3)				
	x_k	y_k	z_k	x_k^2	y_k^2	z_k^2	$x_k \cdot z_k$
0	**-1**	**6**	**-10**	1	36	100	10
1	**0**	**2**	**33**	0	4	1089	0
2	**-1**	**3**	**13**	1	9	169	-13
3	**2**	**5**	**10**	4	25	100	20
4	**5**	**3**	**-11**	25	9	121	-55
5	**1**	**3**	**10**	1	9	100	10
6	**3**	**-5**	**5**	9	25	25	15
7	**-2**	**2**	**-4**	4	4	16	8
8	**5**	**5**	**25**	25	25	625	125
9	**4**	**4**	**5**	16	16	25	20
10	**2**	**-2**	**-24**	4	4	576	-48
11	**-2**	**0**	**30**	4	0	900	-60
12	**-2**	**3**	**10**	4	9	100	-20
13	**4**	**-2**	**-25**	16	4	625	-100
14	**-2**	**3**	**0**	4	9	0	0
15	**-2**	**3**	**15**	4	9	225	-30
16	**2**	**1**	**18**	4	1	324	36
17	**0**	**3**	**18**	0	9	324	0
18	**-1**	**-1**	**5**	1	1	25	-5
19	**-1**	**5**	**-11**	1	25	121	11
20	**-1**	**3**	**-10**	1	9	100	10
21	**3**	**4**	**5**	9	16	25	15
22	**4**	**3**	**-1**	16	9	1	-4
23	**-1**	**2**	**18**	1	4	324	-18
24	**2**	**5**	**7**	4	25	49	14
25	**0**	**5**	**11**	0	25	121	0
26	**1**	**3**	**10**	1	9	100	10
27	**-1**	**5**	**10**	1	25	100	-10
28	**2**	**-1**	**33**	4	1	1089	66
29	**5**	**4**	**0**	25	16	0	0
30	**4**	**5**	**19**	16	25	361	76
31	**2**	**1**	**3**	4	1	9	6
32	**-1**	**3**	**-5**	1	9	25	5
33	**5**	**0**	**-10**	25	0	100	-50
34	**1**	**-2**	**11**	1	4	121	11
35	**-1**	**2**	**-14**	1	4	196	14
36	**2**	**5**	**15**	4	25	225	30
37	**3**	**3**	**-2**	9	9	4	-6
38	**-1**	**3**	**-6**	1	9	36	6
39	**1**	**-2**	**5**	1	4	25	5
40	**5**	**1**	**20**	25	1	400	100

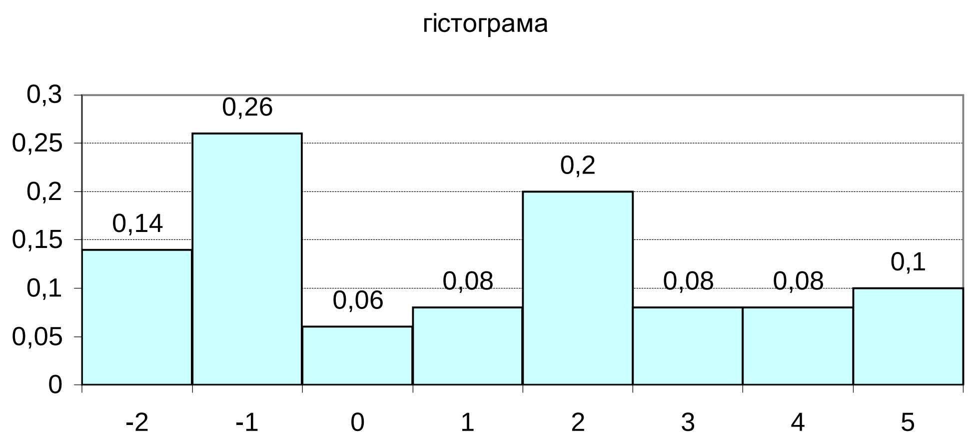
41	**3**	**3**	**-10**	9	9	100	-30
42	**2**	**5**	**19**	4	25	361	38
43	**-1**	**3**	**-2**	1	9	4	2
44	**-1**	**1**	**-5**	1	1	25	5
45	**-1**	**1**	**5**	1	1	25	-5
46	**-2**	**-1**	**5**	4	1	25	-10
47	**2**	**-2**	**-10**	4	4	100	-20
48	**-2**	**4**	**-2**	4	16	4	4
49	**2**	**3**	**5**	4	9	25	10
	50	110	236	310	538	9670	198
	$\sum x_k$	$\sum y_k$	$\sum z_k$	$\sum x_k^2$	$\sum y_k^2$	$\sum z_k^2$	$\sum x_k z_k$

а) У таблиці 2 приведені висхідні дані для побудови статистичного розподілу випадкової величини x. Статистичний розподіл зображено на рис.1.

Таблиця 2.

x_k	-2	-1	0	1	2	3	4	5
m_k	7	13	3	4	10	4	4	5
$F_k = \frac{m_k}{50}$	0,14	0,26	0,06	0,08	0,2	0,08	0,08	0,1

Рис.1.



Середньоарифметичне значення:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = \quad 1$$

Мода

$$x_m = \quad -1$$

Розмах

$$x_{\max} - x_{\min} = \quad 5-(-2)= \quad 7$$

Коефіцієнт варіації: $s/\bar{x} =$ 2,303502

Вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2 = \quad 5{,}306122$$

$$s = \sqrt{s^2} = \quad 2{,}303502$$

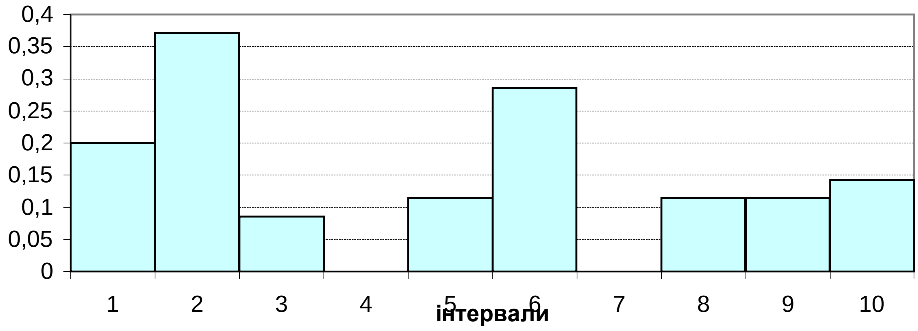
б) Розбиття інтервалу на 10 однакових підінтервалів виконано у таблиці 3. Там же обчислені дані для побудови гістограми - Рис.2.

Таблиця 3.

№ інтервалу	Границі інтервалу		m_n	$\frac{m_n}{Nh}$	$\overline{X}_n$
1	-2	-1,3	7	0,2	-1,65
2	-1,3	-0,6	13	0,371429	-0,95
3	-0,6	0,1	3	0,085714	-0,25
4	0,1	0,8	0	0	0,45
5	0,8	1,5	4	0,114286	1,15
6	1,5	2,2	10	0,285714	1,85
7	2,2	2,9	0	0	2,55
8	2,9	3,6	4	0,114286	3,25
9	3,6	4,3	4	0,114286	3,95
10	4,3	5	5	0,142857	4,65

У таблиці 3 через $\overline{X}_n$ позначені координати середини n-го інтервалу.

Рис. 2.



Означимо середню величину і вибіркову дисперсію:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{10}\overline{X}_n m_n = \quad 1{,}01$$

$$\sum_{n=1}^{N}\overline{X}_n^2 m_n = \quad 283{,}265$$

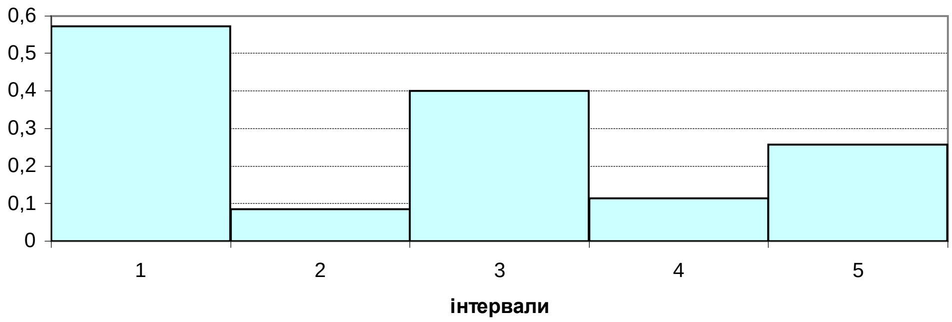
$$s = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\overline{X}_n^2 m_n - N\bar{x}^2\right) = \quad 4{,}74$$

Розбиття на 5 однакових підінтервалів виконано в таблиці 4.
Гістограма зображена на Рис. 3.

Таблиця 4.

№ інтервалу	Границі інтервалу		m_n	$\frac{m_n}{Nh}$	$\overline{X}_n$
1	-2	-0,6	20	0,571429	-1,3
2	-0,6	0,8	3	0,085714	0,1
3	0,8	2,2	14	0,4	1,5
4	2,2	3,6	4	0,114286	2,9
5	3,6	5	9	0,257143	4,3

Рис. 3.



Означимо середню величину та вибіркову дисперсію:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{5}\overline{X}_n m_n = \quad 0,912$$

$$\sum_{n=1}^{N}\overline{X}_n^2 m_n = \quad 265,38$$

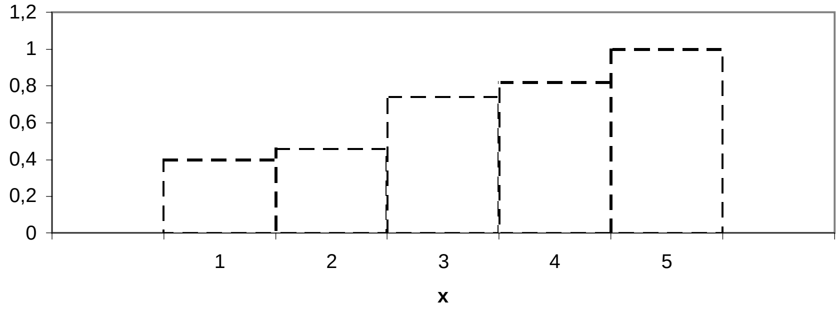
$$s = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\overline{X}_n^2 m_n - N\overline{x}^2\right) = \quad 4,4853061$$

в) Розрахункові параметри для побудови емпіричної функції розподілу містяться у таблиці 5, а сама функція побудована на Рис.4.

Таблиця 5.

№ інтервалу	Границі інтервалу		Кумул. Сума	F_n
1	-2	-0,6	20	0,4
2	-0,6	0,8	23	0,46
3	0,8	2,2	37	0,74
4	2,2	3,6	41	0,82
5	3,6	5	50	1

Рис. 4.



2) Оцінимо вірогідність гіпотези про нормальний розподіл випадкової величини x, використовуючи критерій c^2 (критерій Пірсона). Згідно цього критерія визначимо величину

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{M} \frac{(m_k - Np_k)^2}{Np_k} \qquad P = 1 - \alpha = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

та порівняємо з критичним значенням $\chi^2_{k_1^0}(P, l)$, залежнимим від довірчої ймовірності P та числа степеней волі l. Критичні значення χ^2 містяться у статистичних таблицях. У приведеній формулі M - число интервалів розбиття

$$p_k = \Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1}), \qquad t_k = \frac{X_k - \bar{x}}{s}$$

X_k – границі інтервалів; $\bar{\chi} = 1$, $s =$ 2,303502 , l=M-1-c; c - число параметрів, які визначаються за вибіркою.

У даному випадку обидва параметри нормального закону (середня та дисперсія) визначаються за вибіркою, тому c=2; Даний інтервал потрібно розбити таким чином, щоб у кожному підінтервалі були значення випадкової величини. Тому розбиття на 10 підінтервалів непридатне. Використаємо 8 підінтервалів, причому границі крайніх повинні бути відкритими. Тоді M=8; l=M-1-2=8-3=5. Табличне значення c_k^2 (0,9;5)=9,24. Якщо фактичне значення c^2 виявиться меншим числом, то з довірчою ймовірністю P=0,9 можна прийняти гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини x. Дані обчислення зведені в таблицю 6

Таблиця 6.

№интер.	Границі інтерв.		t_k	$\Phi(t_k)$	P_k	NP_k	m_k	$\frac{(m_k - Np_k)^2}{Np_k}$
1	$-\infty$	-1,5	-1,085304	-0,360887	0,139113	6,955662	7	0,000282624
2	-1,5	-0,5	-0,651182	-0,242533	0,118353	5,917675	13	8,476189916
3	-0,5	0,5	-0,217061	-0,08592	0,156614	7,830688	3	2,980011912
4	0,5	1,5	0,2170608	0,0859195	0,171839	8,591951	4	2,454159297
5	1,5	2,5	0,6511824	0,2425333	0,156614	7,830688	10	0,600958281
6	2,5	3,5	1,0853039	0,3608868	0,118353	5,917675	4	0,621439336
7	3,5	4,5	1,5194255	0,4314971	0,07061	3,530517	4	0,062431289
8	4,5	$+\infty$	$+\infty$	0,5	0,068503	3,425146	5	0,724105337
$\sum$						50	50	15,91957799

Одержане значення критерію склало $\chi^2 = 15{,}91958$

Тому гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини х при заданому рівні значущості приймати не можна.

д) Довірчий інтервал для среднього значення Мх за середньоарифметичним Р та вибірковою дисперсією з надійністю визначається формулою

$$\left| Mx - \bar{x} \right| < t(\mathrm{P}, N-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

так як відношення $\dfrac{Mx - \bar{x}}{s / \sqrt{N}}$ має розподіл Стюдента с N-1 степенями волі.

По таблиці цього розподілу

$$t(\mathrm{P}, N-1) = t(\mathrm{P}, 49) = t(0{,}9; 49) = \quad 1{,}68$$

Звідси

$$\left| Mx - \bar{x} \right| < \quad 0{,}5472842$$

тобто

$$0{,}452715796 < Mx < \quad 1{,}5472842$$

Довірчий інтервал для невідомого параметру Р за вибірковою дисперсією σ з надійністю визначається формулою

$$s \cdot z_4 < \sigma < s \cdot z_8$$

де

$$z_8 = \sqrt{\frac{N-1}{v_1}}; \qquad z_4 = \sqrt{\frac{N-1}{v_2}}$$

v_1, v_2 – квантилі розподілу χ^2, такі, що

$$\int_0^{v_1} p_{\chi^2}(v)dv = \int_{v_2}^{\infty} p_{\chi^2}(v)dv = \frac{\alpha}{2}.$$

оскільки відношення $s^2(N-1)/\sigma^2$ має χ^2- розподіл з (N-1) степенями

волі. Коефіцієнти z_4 та $z_8 =$ табульовані, зокрема для $\alpha = 0{,}1$ та N-1=49

$z_4 = 0{,}86$ $\quad z_8 = \quad 1{,}2$

Звідси одержимо

$$1{,}981011904 < \sigma < \quad 2{,}7642027$$

2. За таблицею 1 визначимо параметри вибірки 2:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k = \quad 2{,}2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (y_k - \bar{y})^2 = \quad 6{,}0408163$$

Для перевірки гіпотезы про рівність двох середніх необхідно обчислити відношення

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{s \cdot \sqrt{\frac{N_2 + N_1}{N_2 \cdot N_1}}}$$

де

$$s = \sqrt{\frac{(N_1 - 1)S_x^2 + (N_2 - 1)S_y^2}{(N_1 - 1) + (N_2 - 1)}}$$

$N_1 -$ число значень x;

$N_2 -$ число значень y;

та порівняти с величиною $t(\mathrm{P}, l)$ з статистичних таблиць за заданою ймовір-

ністю P та числом степеней волі. $l = N_1 + N_2 - 2.$

У даному випадку l=98.

$$s = \sqrt{\frac{s_x^2 + s_y^2}{2}}$$

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \cdot \sqrt{N} = \quad 2{,}5189926$$

За таблицями $t(0{,}99;98) =$ 2,62

Оскільки знайдена величина не більша табличної, то розбіжність середніх значень можна вважати випадковою.

3. Використовуючи таблицю 1, знайдемо параметри вибірки 3

$\bar{z} =$ 4,72

$s_z^2 =$ 174,6138776

та коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k z_k - N \cdot \bar{x} \cdot \bar{z}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - N \cdot \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{N} z_k^2 - N \cdot \bar{z}}} = \qquad -0{,}02548$$

Коефіцієнт кореляції є мірою лінійної залежності випадкових величин. Його мале значення | r | << 1 свідчить про відсутстність такої залежності.

Відношення

$$t = \sqrt{N-2}\,\frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}}$$

має розподіл Стюдента с N-2 степенями волі. У даному випадку

t= 0,1765717

Табличне значення t(0,9;48)=1,67 .

Тому з довірчою ймовірністю 90% між вибірками 1 та 3 нема лінійної залежності (точніше гіпотезу r=0 відкинути не можна).