Principes fondamentaux du dénombrement 3

Maths Disc

Rappels

- Règle de la somme
- Règle du produit
- Arrangements
- Permutations
- Combinaisons

Permutations avec répétitions

Exemples

Combien existe-t-il d'anagrammes de `LILLIAD` ?

Permutations avec répétitions

Exemples

Combien existe-t-il d'anagrammes de `LILLIAD` ?

Un anagramme de `LILLIAD` contient 7 lettres.

- On choisit 3 emplacements parmi 7 pour placer les `L`,
- puis on choisit 2 emplacements parmi les 4 libres restants pour placer les `I`,
- puis on choisit 1 emplacements parmi les 2 libres restants pour placer le `A`,
- puis on « choisit » 1 emplacement parmi le dernier libre restant pour placer le `D`.

En utilisant la règle du produit, on a donc :

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!}\,\frac{4!}{(4-2)!\,2!}\,\frac{2!}{(2-1)!\,1!}\,\frac{1!}{(1-1)!\,1!} \quad (1)$$

$$= \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} \quad (2)$$

Combien existe-t-il d'anagrammes de `LILLIAD` ?

Un anagramme de `LILLIAD` contient 7 lettres.

- On choisit 1 emplacements parmi 7 pour placer le `A`,
- puis on choisit 1 emplacements parmi les 6 libres restants pour placer le `D`,
- puis on choisit 2 emplacements parmi les 5 libres restants pour placer les `I`,
- puis on « choisit » 3 emplacements parmi les 3 derniers libres restants pour placer les `L`.

En utilisant la règle du produit, on a donc :

$$\binom{7}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3} = \frac{7!}{(7-1)!\,1!}\frac{6!}{(6-1)!\,1!}\frac{5!}{(5-2)!\,2!}\frac{3!}{(3-3)!\,3!} \quad (3)$$

$$= \frac{7!}{1!\,1!\,2!\,3!} \quad (4)$$

Soit $\mathbb{A} = \{X_1, X_2, ..., X_p\}$ un alphabet de p symboles. Soit $(n_1, n_2, ..., n_p)$ un p-uplet d'entiers naturels.

Combien existe-t-il d'anagramme de $X_1^{n_1} X_1^{n_2} ... X_p^{n_p}$?

Soit $\mathbb{A} = \{X_1, X_2, ..., X_p\}$ un alphabet de p symboles. Soit $(n_1, n_2, ..., n_p)$ un p-uplet d'entiers naturels.

Combien existe-t-il d'anagramme de $X_1^{n_1} X_1^{n_2} ... X_p^{n_p}$?

Soit $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$ le nombre de lettres d'un tel anagramme.

- On choisit n_1 emplacements parmi n pour placer les X_1,
- puis on choisit n_2 emplacements parmi $n - n_1$ pour placer les X_2,
- ...
- puis on choisit n_k emplacements parmi $n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1}$ pour placer les X_k,
- ...
- puis on choisit n_p emplacements parmi les $n - n_1 - n_2 - ... - n_{p-1} = n_p$ pour placer les X_p.

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}...\binom{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}{n_k}...-\binom{n_p}{n_p} && (5)\\
&= \frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\,\frac{(n-n1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n2!}\cdots\frac{n_p!}{(n_p-n_p)!\,n_p!} && (6)\\
&= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...n_p!} && (7)
\end{aligned}
$$

On note :

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_p} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...n_p!}$$

Définitions

Soit E un ensemble, et $m : E \to \mathbb{N}$ une fonction associant à chaque élément de E un entier positif ou nul.

E est appelé **support**, et m **multiplicité**, et le couple (E, m) un **multiensemble**.

Si $E = \{a, b, c\}$ et $m(a) = 2$, $m(b) = 0$ et $m(c) = 3$, on peut noter (E, m) sous la forme :

$$\{\!\{a, a, c, c, c\}\!\}$$

Définitions

Soit E un ensemble, et $m : E \to \mathbb{N}$ une fonction associant à chaque élément de E un entier positif ou nul.

E est appelé **support**, et m **multiplicité**, et le couple (E, m) un **multiensemble**.

Si $E = \{a, b, c\}$ et $m(a) = 2$, $m(b) = 0$ et $m(c) = 3$, on peut noter (E, m) sous la forme :

$$\{\!\{a, a, c, c, c\}\!\}$$

Un *multiensemble* est une sorte d'ensemble dans lequel des éléments peuvent être répétés. La *multiplicité* est alors le dénombrement de chacun des éléments.

Soit (E, m) un multiensemble de support $E = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ fini de cardinal p. Soit $n = \sum_{x_k \in E} m(x_k)$.

On appelle **permutation avec répétitions** de (E, m) un n-uplet contenant $m(x_1)$ fois l'élément x_1, $m(x_2)$ fois l'élément x_2, ..., et $m(x_k)$ fois l'élément x_k.

Soit (E, m) un multiensemble de support $E = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ fini de cardinal p. Soit $n = \sum_{x_k \in E} m(x_k)$.

On appelle **permutation avec répétitions** de (E, m) un n-uplet contenant $m(x_1)$ fois l'élément x_1, $m(x_2)$ fois l'élément x_2, ..., et $m(x_k)$ fois l'élément x_k.

Une *permutation avec répétitions* est une permutation, mais avec répétitions...

Permutation avec répétitions = anagramme.

Dénombrement

Soit (E, m) un multiensemble de support $E = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ fini de cardinal p.

L'ensemble des permutations avec répétitions de (E, m) est fini, et son cardinal vaut :

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_p} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_p!}$$

avec $n_k = m(x_k)$ la multiplicité de x_k, et $n = \sum_{k=1}^{p} n_k$.

Multinôme de Newton

$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_p}$ est appelé un coefficient multinomial.

Formule du **multinôme** :

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_p)$$

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum_{k_1 + k_2 + ... + k_p = n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_p} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_p^{k_p}$$

Combinaisons avec répétitions

Exemples

Soit $E = \{a, b, c\}$. Combien existe-il de multiensembles (E, m) tels que $m(a) + m(b) + m(c) = 2$?

Combinaisons avec répétitions

Exemples

Soit $E = \{a, b, c\}$. Combien existe-il de multiensembles (E, m) tels que $m(a) + m(b) + m(c) = 2$?

$\{\!\{a, a\}\!\}$, $\{\!\{b, b\}\!\}$, $\{\!\{c, c\}\!\}$, $\{\!\{a, b\}\!\}$, $\{\!\{a, c\}\!\}$, $\{\!\{b, c\}\!\}$, Un restaurant propose quatre plats. À une table, dix convives choisissent de prendre chacun exactement un plat. Pour prendre leur commande, le serveur note pour chacun des quatre plats le nombre de convives l'ayant demandé.

Combien existe-t-il de commandes différentes ?

Un restaurant propose quatre plats. À une table, dix convives choisissent de prendre chacun exactement un plat. Pour prendre leur commande, le serveur note pour chacun des quatre plats le nombre de convives l'ayant demandé.

Combien existe-t-il de commandes différentes ?

Pour noter les commandes, le serveur dessine dans cet ordre :

- autant de bâtons que de commandes du plat 1, puis une croix,
- autant de bâtons que de commandes du plat 2, puis une croix,
- autant de bâtons que de commandes du plat 3, puis une croix,
- autant de bâtons que de commandes du plat 4.

Par exemple si 3 convives ont commandé le plat 1, aucun le plat 2, 5 le plat 3 et 2 le plat 4, il note |||++|||||+||.

Une commande est donc assimilable à une permutation avec répétitions de $\{\!\{|,|,|,|,|,|,|,|,|,|,+,+,+\}\!\}$, c'est à dire un anagramme d'un mot avec 10 | et 3 +.

Il y en a $\binom{13}{10,3} = \binom{13}{10}$.

Combien existe-il de quadruplets $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 10?$$

On peut écrire une des solutions de cette équation (par exemple $(3, 0, 5, 2)$) en base 1 sous la forme :

111++11111+11=1111111111

Pour chacun des quadruplets solutions, la partie à droite du = ne change pas. Par contre la partie à gauche du égal peut varier parmi toutes les permutations avec répétitions du multiensemble $\{\!\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, +, +, +\}\!\}$.

Il y en a $\binom{13}{10,3} = \binom{13}{10}$.

Définition

Soit E un ensemble, et $n \in \mathbb{N}$.

Une n-**combinaison avec répétitions** est une fonction $m : E \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{x \in E} m(x) = n$$

Définition

Soit E un ensemble, et $n \in \mathbb{N}$.

Une n-**combinaison avec répétitions** est une fonction $m : E \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{x \in E} m(x) = n$$

Une n-combinaison avec répétitions d'un ensemble E permet de créer un multiensemble (E, m) dans lequel la somme des multiplicités est n.

Dénombrement

Soit E un ensemble fini de cardinal p et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des n-combinaisons avec répétitions de E est fini et son cardinal est

$$\binom{n+p-1}{n}$$

Dénombrement

Soit E un ensemble fini de cardinal p et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des n-combinaisons avec répétitions de E est fini et son cardinal est

$$\binom{n+p-1}{n}$$

L'ensemble des solutions $(x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $\forall k \in \{1, ..., p\}, x_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$ est fini et est de cardinal

$$\binom{n+p-1}{n}$$