Principes fondamentaux du dénombrement

Maths Disc

Rappels

- $\emptyset$ ensemble vide
- $A \cap B$ intersection de deux ensembles A et B
- $\cup$ réunion de deux ensembles A et B
- $A \times B$ produit cartésien de A par B
- $Card(A)$ ou $|A|$ cardinal de A

Règle de la somme

Si une tâche peut être accomplie de m manières, et si une autre tâche peut être accomplie de n manières. et si les deux tâches ne peuvent pas être réalisées simultanément, alors la réalisation d'une ou de l'autre des deux tâches peut être accomplie de $m + n$ manières.

Règle de la somme

Si une tâche peut être accomplie de m manières, et si une autre tâche peut être accomplie de n manières. et si les deux tâches ne peuvent pas être réalisées simultanément, alors la réalisation d'une ou de l'autre des deux tâches peut être accomplie de $m + n$ manières.

La réunion de deux ensembles disjoints et finis est aussi un ensemble fini, dont le cardinal est la somme des cardinaux des deux ensembles.

Les enseignants du FIL peuvent choisir cette année des modèles d'ordinateur :

- 4 modèles avec *Windows*,
- 3 modèles avec *MacOS*.

Les enseignants du FIL peuvent choisir cette année des modèles d'ordinateur :

- 4 modèles avec *Windows*,
- 3 modèles avec *MacOS*.

Un enseignant doit donc choisir **soit** un modèle parmi 4 avec *Windows*, **soit** un modèle parmi 3 avec *MacOS*.

En utilisant la règle de la somme, un enseignant a donc le choix entre $4 + 3 = 7$ modèles d'ordinateur.

Cette règle peut bien sur être étendue à plus de deux tâches, tant qu'il n'existe pas de tâche commune.

Cette règle peut bien sur être étendue à plus de deux tâches, tant qu'il n'existe pas de tâche commune.

Les enseignants du FIL peuvent choisir cette année des modèles d'ordinateurs portables :

- 4 modèles avec *Windows*,
- 3 modèles avec *MacOS*,
- 1 modèle avec *ChromeOS*.

En utilisant la règle de la somme, un enseignant a donc le choix entre $4 + 3 + 1 = 8$ modèles d'ordinateur portable.

Règle du produit

Si une procédure peut être découpée en deux étapes, et qu'il y a m façons possibles de réaliser la première étape, et qu'il y a n façons possibles de réaliser la seconde étape, alors la procédure peut être accomplie de $n \times m$ façons.

Règle du produit

Si une procédure peut être découpée en deux étapes, et qu'il y a m façons possibles de réaliser la première étape, et qu'il y a n façons possibles de réaliser la seconde étape, alors la procédure peut être accomplie de $n \times m$ façons.

Le produit cartésien de deux ensembles finis est aussi un ensemble fini, dont le cardinal est le produit des cardinaux des deux ensembles.

$$\forall A \quad \forall B \quad card(A) = n \quad Card(B) = m \Rightarrow Card(A \times B) = n \times m$$

Un client professionnel peut faire construire un ordinateur fixe sur mesure en choisissant :

- un processeur parmi 3 modèles,
- une carte graphique parmi 4 modèles ; ces choix étant indépendants.

Un client professionnel peut faire construire un ordinateur fixe sur mesure en choisissant :

- un processeur parmi 3 modèles,
- une carte graphique parmi 4 modèles ; ces choix étant indépendants.

Le client choisit d'abord un processeur parmi 3 **puis** une carte graphique parmi 4.

En utilisant la règle du produit, on obtient donc 3×4 choix d'ordinateur fixe possibles.

Utilisation des deux règles

Il est possible de combiner les deux règles.

Un enseigant peut choisir :

- un ordinateur fixe, et dans ca cas il doit déterminer son processeur (3 choix possibles) et sa carte graphique (4 choix possibles),
- ou un ordinateur portable et dans ce cas il doit déterminer son modèle parmi 8.

Soit il choisit un portable, et alors il choisit un processeur **puis** une carte graphique, **soit** il choisit un portable, et alors il choisit un des huit modèles.

En utilisant la règle de la somme et la règle du produit, on obtient donc $3 \times 4 + 8 = 20$ choix.

Un numéro de téléphonie mobile métropolitain est composé de dix chiffres, les deux premiers étant soit 06, soit 07. Combien existe-t-il potentiellement de numéros de téléphonie mobile différents ?

Un numéro de téléphonie mobile métropolitain est composé de dix chiffres, les deux premiers étant soit 06, soit 07. Combien existe-t-il potentiellement de numéros de téléphonie mobile différents ?

- On choisit le premier chiffre (0), on a donc un seul choix possible.
- **Puis** on choisit, le deuxième chiffre, qui est **soit** 6, **soit** 7.
- **Puis** on choisit le troisième chiffre, parmi 10.
- ...
- **Puis** on choisit le dixième chiffre, parmi 10.

On a donc $1 \times 2 \times 10 \times ... \times 10 = 2 \times 10^8$ numéros différents.

La table ASCII contient 95 caractères imprimables. Calculez le nombre de chaînes ASCII d'exactement 5 caractères (avec éventuellement des répétitions).

La table ASCII contient 95 caractères imprimables. Calculez le nombre de chaînes ASCII d'exactement 5 caractères (avec éventuellement des répétitions).

- On choisit le premier caractère parmi les 95 possibles ;
- **puis** on choisit le deuxième caractère parmi les 95 possibles ;
- **puis** ...
- **puis** on choisit le cinquième caractère parmi les 95 possibles.

En utilisant la règle du produit, on a donc $95 \times 95 \times 95 \times 95 \times 95 = 7737809375$ chaînes.

La table ASCII contient 95 caractères imprimables. Calculez le nombre de chaînes ASCII d'exactement 5 caractères (avec éventuellement des répétitions).

- On choisit le premier caractère parmi les 95 possibles ;
- **puis** on choisit le deuxième caractère parmi les 95 possibles ;
- **puis** ...
- **puis** on choisit le cinquième caractère parmi les 95 possibles.

En utilisant la règle du produit, on a donc
$95 \times 95 \times 95 \times 95 \times 95 = 7737809375$ chaînes.

ou...

On choisit une séquence de 5 symboles sur un alphabet de 95 symboles, il y a donc 95^5 chaînes différentes.

Sous-ensembles

Combien y a-t-il de sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$?

Sous-ensembles

Combien y a-t-il de sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$?

Pour construire un sous-ensemble :

- on choisit si ce sous-ensemble contient 1, on a alors 2 choix (oui ou non),
- **puis** on choisit si ce sous-ensemble contient 2, on a alors 2 choix (oui ou non),
- **puis** on choisit si ce sous-ensemble contient 3, on a alors 2 choix (oui ou non),

En utilisant la règle du produit, on a donc $2 \times 2 \times 2$ choix.

Sous-ensembles

Combien y a-t-il de sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$?

Pour construire un sous-ensemble :

- on choisit si ce sous-ensemble contient 1, on a alors 2 choix (oui ou non),
- **puis** on choisit si ce sous-ensemble contient 2, on a alors 2 choix (oui ou non),
- **puis** on choisit si ce sous-ensemble contient 3, on a alors 2 choix (oui ou non),

En utilisant la règle du produit, on a donc $2 \times 2 \times 2$ choix.

Plus généralement, si un ensemble E est fini et a pour cardinal n, alors E possède 2^n sous-ensembles. On note parfois 2^E l'ensemble des sous-ensembles de E.

Questions ?

Avez-vous des questions ?

Dans le prochain épisode

- Cinq étudiants font la course, combien dénombre-t-on de podiums différents ?
- Combien y a-t-il d'ensembles de 5 entiers, tous compris entre 0 et 9 ? de listes ?