TD 2 - 03 Février 2021

2) a) $n = 1$, $X \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^X x e^{-x} \, dx$$

IPP : $u = x$ $\quad v' = e^{-x}$

$u' = 1$ $\quad v = -e^{-x}$

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$

$$\int_0^X x e^{-x} \, dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^X + \int_0^X e^{-x} \, dx$$

$$= -X e^{-X} + \left(1 - e^{-X} \right)$$

$$= 1 - e^{-X} (X + 1)$$

$m = 2, \; x \geq 0$

$$\int_0^x x^2 e^{-x} \, dx$$

IPP : $u = x^2 \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 2x \qquad v = -e^{-x}$

$$\int_0^x x^2 e^{-x} \, dx = \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^x + \int_0^x 2x e^{-x} \, dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int_0^x x e^{-x} \, dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left(1 - e^{-x}(1+x)\right)$$

$$= 2 - e^{-x}\left(x^2 + 2x + 1\right)$$

2)b) Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

si la limite, lorsque x tend vers $+\infty$ de la

primitive $\int_a^{x} f(t)\,dt$ existe et est finie

Dans ce cas, on pose $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale

diverge.

Pour calculer $\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$

* on calcule $\alpha \int_0^{X} e^{-\alpha x}\, dx$, avec $X \in \mathbb{R}^+$
* on calcule $\lim\limits_{X \to +\infty} \alpha \int_0^{X} e^{-\alpha x}\, dx$

Soit $X \in \mathbb{R}^+$

$$\alpha \int_0^{X} e^{-\alpha x}\, dx = \int_0^{X} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \left[\alpha \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right)\right]_0^{X}$$

Rq : $(e^{-\alpha x})' = -\alpha e^{-\alpha x}$

ainsi $\left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right)' = -\frac{1}{\alpha}\left(-\alpha e^{-\alpha x}\right) = e^{-\alpha x}$

$$\alpha \int_0^{X} e^{-\alpha x}\, dx = \left[-e^{-\alpha x}\right]_0^{X} = -e^{-\alpha X} - \left(-e^{-\alpha 0}\right)$$

$$= 1 - e^{-\alpha X}$$

On sait que $\alpha > 0$, donc $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-\alpha X} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{X \to +\infty} \alpha \int_0^{X} e^{-\alpha x}\, dx = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(1 - e^{-\alpha X}\right) = 1$

Ccl : $\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = 1$.

$$\alpha\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,dx$$

Soit $X \in \mathbb{R}^+$

$$\alpha\int_0^{X} x e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^{X} x\left(\alpha e^{-\alpha x}\right)dx$$

IPP : on pose $u = x$ $\quad v' = \alpha e^{-\alpha x}$

$u' = 1$ $\quad v = -e^{-\alpha x}$

$$\text{Donc } \alpha\int_0^{X} x e^{-\alpha x}\,dx = \left[-x e^{-\alpha x}\right]_0^X + \int_0^X e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -Xe^{-\alpha X} + \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^X$$

$$= -Xe^{-\alpha X} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}$$

$$-Xe^{-\alpha X} = -\frac{X}{e^{\alpha X}} \qquad \lim_{X\to+\infty}\frac{e^{\alpha X}}{X} = +\infty$$

$$\lim_{Y\to+\infty}\frac{e^Y}{Y} = +\infty, \text{ posons } \alpha X = Y, \quad \frac{e^{\alpha X}}{X} = \alpha\frac{e^Y}{Y}$$

$$\text{donc } \lim_{Y\to+\infty}\alpha\frac{e^Y}{Y} = +\infty \quad \text{car } \alpha > 0$$

on a $\frac{Y}{\alpha e^Y} = Xe^{-\alpha X}$ ainsi $\lim_{Y\to+\infty}\frac{Y}{\alpha e^Y} = 0 = \lim_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-\alpha X}\right)$

ne change pas la limite

$$\text{Ainsi } \lim_{X\to+\infty}\alpha\int_0^X xe^{-\alpha x}\,dx = 0 - 0 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Donc $\alpha\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x}\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha}$

$I = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx$

$\to$ La fonction $x \mapsto x^2 e^{-\alpha x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$\to$ Soit $X \geq 0$, alors :

$$I_X = \alpha \int_0^X x^2 e^{-\alpha x} dx = \int_0^X x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx$$

IPP : on pose $u = x^2$ $\quad v' = \alpha e^{-\alpha x}$

$u' = 2x$ $\quad v = -e^{-\alpha x}$

$$I_X = \left[-x^2 e^{-\alpha x}\right]_0^X + 2\int_0^X x e^{-\alpha x} dx$$

$$= -X^2 e^{-\alpha X} + 2 \times \frac{1}{\alpha} \times \alpha \int_0^X x e^{-\alpha x} dx$$

$$= -X^2 e^{-\alpha X} + \frac{2}{\alpha}\left(-X e^{-\alpha X} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}\right)$$ d'après ce qui précède

Par $\nearrow$ comparées, $\lim_{X \to +\infty} -X^2 e^{-\alpha X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X^2}{e^{\alpha X}}$

on pose $Y = \alpha X$ $= \lim_{Y \to +\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{Y^2}{e^Y}$

Or $\lim_{Y \to +\infty} \frac{e^Y}{Y^2} = +\infty$ $\left(\lim_{Y \to +\infty} \frac{e^Y}{Y^n} = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

donc $\lim_{Y \to +\infty} \frac{Y^2}{e^Y} = 0$ et $-\frac{1}{\alpha^2}$ est une constante

Ainsi $\lim_{Y \to +\infty} -\frac{1}{\alpha^2} \frac{Y^2}{e^Y} = 0 = \lim_{X \to +\infty} -X^2 e^{-\alpha X}$

Donc $\lim_{X \to +\infty} I_X = 0 + \frac{2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$

Ainsi $\alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx$ converge et vaut $\frac{2}{\alpha^2}$.

Echantillons et histogrammes

Exo 1 :

test d'aptitude médiane = 520

moyenne = 540

→ Comment moyenne > médiane ?

90^e centile = 660 ?

→ Signification ?

mon résultat = 94^e centile

→ Signification ?

→ médiane empirique : réel m tq l'on ait autant de valeurs dans l'échantillon qui soient ⊕ gdes que ⊕ petites

→ moyenne $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ échantillon $x_1, \dots, x_N$

Exemples : $\bar{x} = m = 520$

500 505 515 525 530 545

$\bar{x} = 540 > m = 520$

500 505 515 525 570 625

Pour que $\bar{x} > m$, il suffit que certaines valeurs de l'échantillon soient très grandes pour que la moyenne soit propulsée vers le haut

90^e centile à 660 : 90 % des valeurs obtenues au test sont inférieures (ou égales) à 660

valeur au 94^e centile : 94 % des résultats au test sont inférieurs au votre

Exo 2 :

moyennes : $\bar{x}_1 = 12$ | $\bar{x}_2 = 10$

médianes : $m_1 = 9$ | $m_2 = 11$

↑ objectif : avoir une très bonne note

plus de 50 % des élèves ne valident pas le module (note < 10)

mais qques bonnes notes font que $\bar{x}_1 > m$

↑ objectif : valider le module

plus de 50 % des élèves ont plus de 10

et $\bar{x}_2 \simeq m_2$

les notes sont assez « équilibrées »