Feuille 1 : Logique propositionnelle

Exercice 1 : Négation

Exprimez les négations des propositions suivantes sans les faire précéder de : *il est faux que*. Pour ce faire, on traduira ces propositions, exprimées en langage naturel, en formules de la logique propositionnelle, après avoir déterminé les variables propositionnelles nécessaires.

Q 1.1 Ce quadrilatère n'est ni un losange, ni un rectangle.

Q 1.2 Lentier 522 n'est pas divisible par 3, mais il est divisible par 7.

Q 1.3 S'il pleut demain ou s'il fait froid, je ne sortirai pas.

Exercice 2 : Associativité

Montrer que le connecteur d'implication $\Rightarrow$ n'est pas associatif.

Exercice 3 : Axiomes de $\equiv$

Q 3.1 Démontrer la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$, i.e. :

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Q 3.2 Démontrer les lois de de Morgan

$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b \text{ et } \neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$

Exercice 4 : Régime alimentaire

Alice mange la viande, le poisson et les légumes, mais pas les féculents.
Nous modélisons les plats à l'aide des quatre variables propositionnelles suivantes :
— v le plat contient de la viande,
— p le plat contient du poisson,
— l le plat contient des légumes,
— f le plat contient des féculents.

Q 4.1 Donner une formule utilisant ces variables qui permette de représenter les plats qu'Alice peut manger.

Q 4.2 Donner une valuation qui représente le poisson à la bordelaise qui contient est plat contenant du poisson et de légumes.

Q 4.3 Vérifier si Alice peut manger ce plat.

Exercice 5 : Tombola

Vous décidez dacheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :

(a) Si 5 est perdant, 1 est gagnant ;

(b) Si 4 est perdant, 2 est gagnant ;

(c) Si 3 est perdant, 5 aussi ;

(d) Si 1 est gagnant, 2 aussi ;

(e) Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Traduisez ces informations en formules de la logique propositionnelle. Peut-on en déduire le billet gagnant ?

Exercice 6 : Déduction

On sait que :

1. Pierre joue au golf ou fait de l'alpinisme ou pratique la plongée.
2. Si Pierre ne joue pas au golf ou ne fait pas de plongée, il fait de l'alpinisme.
3. Si Pierre fait de la plongée, il ne joue pas au golf.
4. Si Pierre fait de l'alpinisme, alors il fait aussi de la plongée.

Quel(s) sport(s) pratique Pierre ?

Exercice 7 : Logique propositionnelle : simplification de programme

Le programme C suivant a été allégé en en éliminant le code. On cherche ici à savoir quelles propriétés sont vraies à un certain point du programme.

```
while ((!a || b) && c){
  ...
 }
(1)
if(a || b){
  (2) ...
 }
 else{
   if(c && b){
     (3)...
   }
   else{
     (4)...
   }
 }
```

Les nombres entre parenthèse – (1), (2), (3), et (4) – servent à désigner des points du code. Les variables a, b, et c sont des variables à valeurs booléennes.

Q 7.1 Donner pour chaque point du code (i) une formule de la logique propositionnelle φ_i utilisant les variables a, b et c qui exprime la condition qui doit être vérifiée à ce point du code.

Q 7.2 Comment déterminer si une partie de code ne peut pas être exécutée ?

Q 7.3 Déterminer quelles parties de code ne peuvent pas être exécutées.

Q 7.4 Simplifier le programme en un programme équivalent.

Exercice 8 : Principe d'induction

Dans cet exercice, nous considérons une formule φ construite à partir des variables $x_1, \ldots, x_n$. Étant données des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ nous notons $\varphi[\psi_1/x_1, \ldots, \psi_n/x_n]$ la formule obtenue à partir de φ en remplaçant les occurrences de x_i par ψ_i pour tout i dans $[1, n]$.

Q 8.1 Étant donnée une valuation ν, démontrer, en utilisant le principe d'induction, que $[\![\varphi[\psi_1/x_1, \ldots, \psi_n/x_n]]\!]_\nu = [\![\varphi]\!]_\mu$ où μ est la valuation telle que $\mu(x_i) = [\![\psi_i]\!]_\nu$ pour tout i dans $[1, n]$.

Q 8.2 Supposons maintenant que nous disposons de formules $\theta_1, \ldots, \theta_n$ telles que pour tout i dans $[1, n]$, $\psi_i \equiv \theta_i$. Déduire de la question précédente que pour toutes formules φ_1 et φ_2 construites à partir de variables propositionnelles $x_1, \ldots, x_n$ si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors, $\varphi_1[\psi_1/x_1, \ldots, \psi_n/x_n] \equiv \varphi_2[\theta_1/x_1, \ldots, \theta_n/x_n]$.

NB :

— pour rappel, $\varphi \equiv \psi$ signifie que pour toute valuation ν $[\![\varphi]\!]_\nu = [\![\psi]\!]_\nu$,

— cet exercice démontre que $\equiv$ est une *congruence* sur les formules.