

**Feuille 2 : Programmation avec SAT**

**NB :** Dans tous les exercices qui suivent, à chaque fois que l'on vous demande d'exprimer une contrainte, celle-ci doit être sous forme normale conjonctive.

**Exercice 1 : Les chevaliers de la table ronde**

Le roi Arthur doit réunir les chevaliers autour de la table ronde. Certains d'entre eux entretiennent une très forte rivalité. Arthur craint que si deux rivaux sont assis côte à côte la réunion ne tourne à l'affrontement. Il souhaite trouver un plan de table qui permette une réunion pacifique.

On suppose que  $C$  est l'ensemble des chevaliers et  $R$  est l'ensemble des paires de chevaliers en rivalité. La rivalité entre chevalier est symétrique, c'est-à-dire que si un chevalier, Gauvain par exemple, est en rivalité avec un autre, disons Yvain, alors Yvain est aussi en rivalité avec Gauvain.

Nous allons aider Arthur à établir un plan pour la table ronde. Pour cela utilisons une réduction à SAT pour plus tard profiter d'un solveur SAT.

Nous supposons qu'il y a  $n$  chevaliers et que les places autour de la table sont numérotées de 1 à  $n$ .

**Q 1.1** Identifier les variables à utiliser pour modéliser le problème avec SAT.

**Q 1.2** Exprimer la contrainte que chaque chevalier doit occuper au moins un siège.

**Q 1.3** Exprimer la contrainte qu'un chevalier ne peut occuper au plus qu'un siège.

**Q 1.4** Exprimer la contrainte que chaque place est occupée par au moins un chevalier.

**Q 1.5** Exprimer la contrainte que deux chevaliers ne peuvent occuper la même place.

**Q 1.6** La contrainte précédente est-elle nécessaire ? Pourquoi ?

**Q 1.7** Exprimer la contrainte que deux rivaux ne peuvent pas être assis côte à côte. Faites attention au fait que la place numérotée 1 et celle numérotée  $n$  sont voisines.

**Exercice 2 : La tournée de Jules**

Jules Alagérard est livreur de colis à vélo. Pour sa sécurité, son employeur lui impose d'emprunter toujours des pistes cyclables. Jules se prépare pour des compétitions cyclistes et il lui importe peu d'emprunter le chemin le plus court. En revanche, nouveau venu sur Lille, il souhaite profiter de son travail pour découvrir la métropole. Ainsi chaque jour, Jules organise sa tournée en faisant en sorte de ne jamais repasser par le même endroit. Pour cela, il essaie de trouver sur le réseau cyclable un trajet qui lui permette de partir de l'entrepôt où il prend les colis à livrer de passer par chaque point de livraison puis de revenir à l'entrepôt (où il doit laisser son vélo de tournée) sans jamais repasser par le même lieu.

Nous allons aider Jules en utilisant un solveur SAT pour établir sa tournée du jour. Nous notons  $P$  l'ensemble des points de livraison – l'entrepôt  $e$  fait partie de l'ensemble  $P$  –,  $C$  les paires de ces points reliés par une piste cyclable. Jules a choisi les pistes cyclables de reliant les paires  $C$  de sorte qu'elles ne passent pas par les mêmes endroits.

**Q 2.1** Quelles variables utiliser pour modéliser le problème ?

**Q 2.2** Exprimer que l'entrepôt est le point de départ du circuit.

**Q 2.3** Exprimer que chaque point de livraison est visité exactement au moins une fois.

**Q 2.4** Exprimer que tous les points de livraison sont visités à des moments différents pendant la tournée de Jules.

**Q 2.5** Exprimer que chaque point de la tournée est relié au suivant par une piste cyclable. **NB :** ne pas oublier que les premier et dernier points de la tournée doivent être reliés à l'entrepôt.

### Exercice 3 : Sudoku

Le sudoku est un casse-tête où il faut remplir une grille en respectant des contraintes suivantes :

- Il faut remplir chaque case avec un entier entre 1 et 9,
- Chaque entier doit apparaître exactement une fois par colonne, par ligne et par carré délimité par une ligne plus épaisse (voir la grille d'exemple ci-dessous).

				2			1	7
	3				7			8
				9		6		
	8		9		2		6	
4		6				3		2
	2		6		3		7	
		7		6				
8			7				5	
2	5			3				

Le but de cet exercice est de modéliser les contraintes de résolution d'un Sudoku afin de pouvoir les résoudre avec un solveur SAT.

**Q 3.1** Identifier les variables propositionnelles à utiliser pour cette modélisation.

**Q 3.2** Expliquer comment vous pourriez modifier votre modèle afin de représenter une grille à résoudre.

**Q 3.3** Exprimer la contrainte que chaque case contient exactement un chiffre.

**Q 3.4** Exprimer les deux contraintes que chaque colonne contient exactement une occurrence de chaque chiffre et que chaque ligne également.

**Q 3.5** Exprimer la contrainte qui concerne les carrés.