Principes fondamentaux du dénombrement 2

Maths Disc

Rappels

- Règle de la somme
- Règle du produit

Permutations

Exemples

Trois étudiants (A, B, C) font la queue. Combien d'ordres différents sont possibles ?

Permutations

Exemples

Trois étudiants (A, B, C) font la queue. Combien d'ordres différents sont possibles ?

$$\{(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$$

Permutations

Exemples

Trois étudiants (A, B, C) font la queue. Combien d'ordres différents sont possibles ?

$\{(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)\}$

On choisit le premier étudiant parmi 3, **puis** le deuxième parmi les deux restants, **puis** le troisième qui est alors imposé. On a donc, en utilisant la règle du produit, $3 \times 2 \times 1$ ordres possibles.

Une salle de TP contient 16 postes. De combien de façons peut-on attribuer à 16 étudiants ces 16 postes ?

Une salle de TP contient 16 postes. De combien de façons peut-on attribuer à 16 étudiants ces 16 postes ?

On apparie le premier poste à un des 16 étudiants, **puis** le deuxième poste à un des 15 étudiants restants, **puis** le troisième à un des 14 restants, ... **puis** le dernier poste au dernier étudiant.

En utilisant la règle du produit, on a donc $16 \times 15 \times 14 \times ... \times 1$ appariements possibles.

Combien de listes `l` vérifient `len(l) == n` et `set(l) == set(range(n))` ?

Soit deux ensembles `keys` et `values` tels que `len(keys) == len(values)`. Combien de dictionnaires distincts `d` vérifient `set(d.keys()) == keys and set(d.values()) == values` ?

Définition

Une **permutation** d'un ensemble E est une *bijection* de E dans lui-même.

Définition

Une **permutation** d'un ensemble E est une *bijection* de E dans lui-même.

Souvent, on prendra $E = \{0, 1, .., n - 1\}$ les indices d'une liste.

Une bijection des indices dans eux-même peut-être vue comme un choix d'ordre des éléments de la liste.

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des permutations de E est fini et possède $n!$ éléments.

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des permutations de E est fini et possède $n!$ éléments.

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `OISEAU` ?

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des permutations de E est fini et possède $n!$ éléments.

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot `OISEAU` ?

Toutes les lettres de `OISEAU` sont différentes. Choisir un anagramme de `OISEAU` revient donc à choisir un ordre sur les lettres. On a donc $6! = 720$ anagrammes de `OISEAU`.

Arrangements

Exemples

À la session 2020 du CAPES NSI, 1118 candidats se sont inscrits, et le jury en a retenu et classé 30. En supposant qu'il n'y ait pas d'ex æquo, combien de classements sont possibles ?

Arrangements

Exemples

À la session 2020 du CAPES NSI, 1118 candidats se sont inscrits, et le jury en a retenu et classé 30. En supposant qu'il n'y ait pas d'ex æquo, combien de classements sont possibles ?

Le jury choisit le premier classé parmi 1118, puis le deuxième parmi les 1117 candidats restants, puis le troisième parmi les 1116 restants, puis ..., puis le trentième parmi les $(1118 - 29)$ restants.

En utilisant la règle du produit, il y a donc $1118 \times 1117 \times 1116 \times ... \times (1118 - 29)$ classements possibles.

Soit deux entiers `n` et `k` tels que `k <= n`. Combien de résultats différents peuvent être renvoyés par `random.sample(range(n), k)` ?

Soit deux entiers `n` et `k` tels que `k <= n`. Combien de résultats différents peuvent être renvoyés par `random.sample(range(n), k)` ?

Soit `keys` et `values` deux ensembles, tels que `len(keys) <= len(values)`. Combien existe-t-il de dictionnaires `d` vérifiants `set(d.keys()) == keys`, `all(d[k] in values for k in d)` et `len(set(d.values())) == len(d.keys())` ?

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments et $k \leq n$ un entier naturel. Un k-**arrangement** est une injection de $\{0, 1, ..., k-1\}$ dans E.

Plus simplement, un k-arrangement de E est un k-uplet d'éléments distincts de E.

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des k-arrangements de E est aussi fini. Son cardinal, noté A_n^k, vaut alors :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)$$

DJ Timoléon doit créer une liste de lecture de 20 morceaux de musique choisis parmi 1434 pour les 50 ans de marriage de Raymond Calbuth.

Combien de listes de lecture différentes peut-il créer ?

DJ Timoléon doit créer une liste de lecture de 20 morceaux de musique choisis parmi 1434 pour les 50 ans de marriage de Raymond Calbuth.

Combien de listes de lecture différentes peut-il créer ?

Il s'agit d'un arrangement de 20 morceaux de musique parmi 1434. On a donc A_{1434}^{20} listes de lecture différentes...

DJ Timoléon doit créer une liste de lecture de 20 morceaux de musique choisis parmi 1434 pour les 50 ans de marriage de Raymond Calbuth.

Combien de listes de lecture différentes peut-il créer ?

Il s'agit d'un arrangement de 20 morceaux de musique parmi 1434. On a donc A_{1434}^{20} listes de lecture différentes...

...Mais tout le monde sait que Timoléon ne va passer que Claude François, Émile & Images, Michel Sardou et Patrick Sebastien, donc le nombre de playlists sera en fait beaucoup plus faible.

Combinaisons

Exemples

Un groupe de TD contient 32 étudiants. Le directeur des études choisit 16 de ces étudiants pour former le demi-groupe A. La liste de ces étudiants est publiée dans l'ordre lexicographique. Combien de listes différentes peut-on publier.

Comptons de deux façons le nombre de listes du demi-groupe A dans laquelle l'ordre lexicographique n'est pas imposé.

- Il s'agit d'un arrangement de 16 élèves parmi 32, on a donc A_{32}^{16} listes.
- Notons x le nombre de listes du demi-groupe A triées dans l'ordre lexicographique. Choisir une liste dans un ordre quelconque revient à choisir une liste triée **puis** à choisir un ordre sur cette liste. En utilisant la règle du produit, on a donc $x \times 16!$ listes non triées.

Alors, $A_{32}^{16} = x \times 16!$ donc $x = \frac{A_{32}^{16}}{16!}$.

On a donc $\frac{A_3 2^1 6}{16!}$ listes triées de demi-groupe A possibles.

Définition

Soit E un ensemble et k un entier naturel. Une k-**combinaison** de E est un sous-ensemble de E de cardinal k.

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des k-combinaisons de E est fini et son cardinal est $\binom{n}{k}$, avec :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Dénombrement

Si E est un ensemble fini de n éléments, alors l'ensemble des k-combinaisons de E est fini et son cardinal est $\binom{n}{k}$, avec :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Parmi 12 TP rendus, un enseignant doit choisir d'en noter 8. Il doit donc choisir une combinaison de 8 TP parmi 12, et en a donc $\binom{12}{8}$ à corriger.

Binôme de Newton

$$\forall x \quad \forall y \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$

En effet, comme $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times ... \times (a+b)$, le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ correspond au nombre de façons de choisir k des n facteurs $(a+b)$ pour y sélectionner le a dans le développement.