Gpe 1 - TD de probas stats (L2 info - 2021 S4)

→ 12 séances sur 6 semaines

→ Discord

Zoom

→ Email : imane.akjouj@univ-lille.fr

IMANE.AKJOUJ

→ 2 IE : * IE1 (sur moodle)

* IE2 (présentiel) : 22 mars

TD 1 - Sommes, séries et intégrales

Exo 1 :

a) $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \quad \text{(on a } (n+1) \text{ termes)}$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0$$

$$n \qquad n \qquad n \qquad \qquad n \qquad n$$

$$S_n + S_n = 2S_n = (0+n) + (1+n-1) + (2+n-2) + \dots + (n-1+1) + (n+0)$$

$$= n + n + n + \dots + n + n$$

$$= (n+1) \times n$$

Ainsi $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

* On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \underbrace{r^0}_{1} + \underbrace{r^1}_{r} + r^2 + \dots + r^n$

→ Si $r = 1$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = \overbrace{1+1+\dots+1}^{n+1 \text{ fois}} = n+1$

→ Si $r \neq 1$, calculer $(1-r)P_n$ (astuce)

$$(1-r)P_n = (1-r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n)$$

$$= 1 - \cancel{r} + \cancel{r} - \cancel{r^2} + \cancel{r^2} - r^3 + \dots - \cancel{r^n} + \cancel{r^n} - r^{n+1}$$

$$(1-r)P_n = 1 - r^{n+1}$$

Déf : Une somme télescopique est une série de la forme

$$\sum_{k \geq 0} (a_{k+1} - a_k)$$

Finalement, si $r \neq 1$, on a $P_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$

$\rightarrow \times \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} k\, r^k$

$\rightarrow$ Si $r = 1$, $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k \times 1^k = \sum_{k=0}^{n} k = S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\rightarrow$ Sinon, 2 méthodes :

Méthode 1 : on pose $f(r) = \sum_{k=0}^{n} r^k = P_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$= 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ (polynôme)

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (polynôme)

$f'(r) = \cancel{0} + 1 + 2r + 3r^2 + \dots + n r^{n-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} k\, r^{k-1}$

$r f'(r) = \sum_{k=1}^{n} k\, r^k = \sum_{k=0}^{n} k\, r^k = Q_n$

dérivons $f(r) = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$$f(r) = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$f'(r) = \frac{-(n+1) r^{n} (1 - r) - (1 - r^{n+1}) \times (-1)}{(1 - r)^2}$$

$$= \frac{-n r^{n} - r^{n} + n r^{n+1} + \cancel{r^{n+1}} + 1 - \cancel{r^{n+1}}}{(1 - r)^2}$$

$$= \frac{n r^{n+1} - (n+1) r^{n} + 1}{(1 - r)^2}$$

On a $Q_n = r f'(r) = \dfrac{n r^{n+2} - (n+1) r^{n+1} + r}{(1 - r)^2}$

Méthode 2 :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} k r^k = \sum_{k=1}^{n} k r^k$$

$$= r \sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} = r \sum_{k=1}^{n} \left(r^{k-1} + (k-1) r^{k-1} \right)$$

$$= r \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} + r \sum_{k=1}^{n} (k-1) r^{k-1}$$

on pose $l = k-1$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r^k}_{} + r \sum_{l=0}^{n-1} l r^l$$

$$Q_{n-1} = Q_n - n r^n$$

$$= P_n - r^0 + r Q_{n-1}$$

$$= P_n - 1 + r Q_n - n r^{n+1}$$

donc $(1-r) Q_n = P_n - 1 - n r^{n+1}$

$$= \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} - 1 - n r^{n+1}$$

$$Q_n = \frac{1}{1-r} \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - 1 - n r^{n+1} \right)$$ cqfd.

b) Pour $|r|<1$

$$* \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \quad , \text{ on a } P_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Déf : Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de nb réels (ou complexes)

On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la série de terme général u_k.

Si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Si elle existe, calculons $\lim_{n\to+\infty} P_n$ où $P_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

On a $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{1-r}$

où $|r|<1$ i.e. (id est) $-1<r<1$

Ainsi $P := \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{1-r}$

$\ast \sum_{k=0}^{+\infty} k r^k$ où $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k r^k = \frac{n r^{n+2} - (n+1) r^{n+1} + r}{(1-r)^2}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} r^{n+2} = \lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$ car $|r|<1$

mais $\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

on a des formes indéterminées...

Posons $Q := \sum_{k=0}^{+\infty} k r^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k r^k = r \sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1}$

$= r \sum_{k=1}^{+\infty} \left(r^{k-1} + (k-1) r^{k-1} \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} r^k} + r \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) r^{k-1}$

$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} r^k}_{P} \underbrace{- r^0}_{-1} + \underbrace{r \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell r^\ell}_{rQ}$ où $\ell = k-1$

Donc $(1-r)Q = P - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$ pour $|r|<1$

Ainsi $Q = \frac{r}{(1-r)^2}$

Exo 2 :

a) $a \leq b \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2$

$$* \int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{a,\ x=a}^{b,\ x=b} = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

variable

$$* \ n = 0, \int_0^X x^0 e^{-x} dx = \int_0^X e^{-x} dx \quad \text{car } x^0 = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=X} = -e^{-X} + \underbrace{e^{-0}}_{=1} = 1 - e^{-X}$$

$$* \ n = 1, \int_0^X x e^{-x} dx$$ Pas de primitive directe

IPP : $u = x \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u v' = [u v] - \int u' v$$