Logique propositionnelle

Sylvain Salvati

La vérité...

La logique propositionnelle s'intéresse à l'articulation de la notion de vérité :

- Comment construire à partir d'*énoncés* considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ?

La vérité...

La logique propositionnelle s'intéresse à l'articulation de la notion de vérité :

- Comment construire à partir d'*énoncés* considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ?
- Quels sont les conditions de vérité d'un *énoncé* ?

La vérité...

La logique propositionnelle s'intéresse à l'articulation de la notion de vérité :

- Comment construire à partir d'*énoncés* considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ?
- Quels sont les conditions de vérité d'un *énoncé* ?
- Comment démontrer qu'un *énoncé* est toujours vrai ?

La vérité...

La logique propositionnelle s'intéresse à l'articulation de la notion de vérité :

- Comment construire à partir d'*énoncés* considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ?
- Quels sont les conditions de vérité d'un *énoncé* ?
- Comment démontrer qu'un *énoncé* est toujours vrai ?
- Qu'est-ce qu'une *démonstration* ?

Outline

1. Syntaxe
2. Sémantique
3. Formes normales

Les énoncés sont des formules

Les énoncés de la logique propositionnelle sont des termes appelés formules.

Les atomes

- $\top$ et $\bot$: la *tautologie* et l'*absurde*,
- des variables propositionnelles : a, b, c, $\ldots$, x, x_1, x_2,$\ldots$

Les énoncés sont des formules

Les énoncés de la logique propositionnelle sont des termes appelés formules.

Les atomes

- $\top$ et $\bot$: la *tautologie* et l'*absurde*,
- des variables propositionnelles : a, b, c, $\dots$, x, x_1, x_2,$\dots$

Les formules composites

Si φ et ψ sont des termes, les expressions suivantes sont des termes :

Conjonction

$$\begin{tikzcd} & \wedge \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Disjonction

$$\begin{tikzcd} & \vee \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Négation

$$\begin{tikzcd} \neg \arrow[d, dash] \\ \varphi \end{tikzcd}$$

On ajoute parfois :

Implication

$$\begin{tikzcd} & \Rightarrow \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

Équivalence

$$\begin{tikzcd} & \Leftrightarrow \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \varphi & & \psi \end{tikzcd}$$

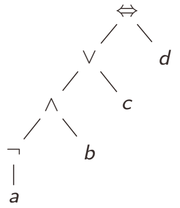
Écriture des formules : syntaxe concrète/syntaxe abstraite

Il est plus habituel et compact d'écrire les formules linéairement (on parle de syntaxe concrète). Pour éviter toute ambiguïté, on utilise des parenthèses et des règles de priorité et d'associativité :

- **Ordre de priorité** : $\neg > \wedge > \vee > \{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$$\begin{array}{c} \neg a \wedge b \vee c \Leftrightarrow d \\ (((\neg a) \wedge b) \vee c) \Leftrightarrow d \end{array}$$

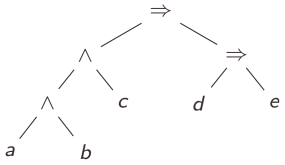
dénotent



- **Associativité** : $\wedge$, $\vee$ et $\Leftrightarrow$ associent à *gauche* et $\Rightarrow$ associe à *droite* :

$$\begin{array}{c} a \wedge b \wedge c \Rightarrow d \Rightarrow e \\ ((a \wedge b) \wedge c) \Rightarrow (d \Rightarrow e) \end{array}$$

dénotent



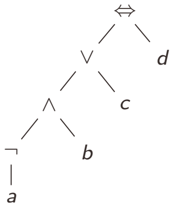
Écriture des formules : syntaxe concrète/syntaxe abstraite

Il est plus habituel et compact d'écrire les formules linéairement (on parle de syntaxe concrète). Pour éviter toute ambiguïté, on utilise des parenthèses et des règles de priorité et d'associativité :

- **Ordre de priorité** : $\neg > \wedge > \vee > \{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$$\neg a \wedge b \vee c \Leftrightarrow d$$
$$(((\neg a) \wedge b) \vee c) \Leftrightarrow d$$

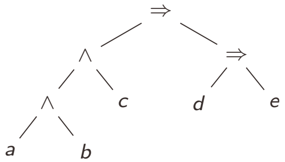
dénotent



- **Associativité** : $\wedge$, $\vee$ et $\Leftrightarrow$ associent à *gauche* et $\Rightarrow$ associe à *droite* :

$$a \wedge b \wedge c \Rightarrow d \Rightarrow e$$
$$((a \wedge b) \wedge c) \Rightarrow (d \Rightarrow e)$$

dénotent



NB : malgré leur écriture linéaire, on considère toujours que l'on a affaire à des termes (on appelle cela syntaxe abstraite).

Quelques définitions inductives (récursives)

- **Variables d'une formule** $Var(\varphi)$

$$
\begin{array}{rcll}
Var(\varphi) & = & \emptyset & \text{si } \varphi \in \{\top, \bot\} \\
Var(x) & = & \{x\} & \\
Var(\neg\varphi) & = & Var(\varphi) & \\
Var(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi) & = & Var(\varphi) \cup Var(\psi) & \text{si } \mathsf{op} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}
\end{array}
$$

Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de variables on note $\mathsf{Prop}(\mathbf{X})$ les formules φ telles que $Var(\varphi) \subseteq \mathbf{X}$.

Quelques définitions inductives (récursives)

- **Variables d'une formule** $Var(\varphi)$ Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de variables on note $\mathrm{Prop}(\mathbf{X})$ les formules φ telles que $Var(\varphi) \subseteq \mathbf{X}$.
- **Hauteur d'une formule** $h(\varphi)$

$$
\begin{array}{rcll}
h(\varphi) & = & 0 & \text{si } \varphi \in \{\top, \bot\} \\
h(x) & = & 0 & \\
h(\neg\varphi) & = & h(\varphi) + 1 & \\
h(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi) & = & \mathsf{max}(h(\varphi), h(\psi)) + 1 & \text{si } \mathsf{op} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}
\end{array}
$$

Quelques définitions inductives (récursives)

- **Variables d'une formule** $\mathit{Var}(\varphi)$ Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de variables on note $\mathsf{Prop}(\mathbf{X})$ les formules φ telles que $\mathit{Var}(\varphi) \subseteq \mathbf{X}$.
- **Hauteur d'une formule** $h(\varphi)$
- **Substitution de formules** soit σ une fonction qui associe des formules aux variables, $\mathit{subs}(\varphi, \sigma)$

$$
\begin{array}{rcll}
\mathit{subst}(\varphi, \sigma) & = & \varphi & \text{si } \varphi \in \{\top, \bot\} \\
\mathit{subst}(x, \sigma) & = & \sigma(x) & \\
\mathit{subst}(\neg\varphi, \sigma) & = & \neg\mathit{subst}(\varphi, \sigma) & \\
\mathit{subst}(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi, \sigma) & = & \mathit{subst}(\varphi, \sigma) \,\mathsf{op}\, \mathit{subst}(\psi, \sigma) & \text{si } \mathsf{op} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}
\end{array}
$$

Quelques définitions inductives (récursives)

- **Variables d'une formule** $Var(\varphi)$ Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de variables on note $\mathsf{Prop}(\mathbf{X})$ les formules φ telles que $Var(\varphi) \subseteq \mathbf{X}$.
- **Hauteur d'une formule** $h(\varphi)$
- **Substitution de formules** soit σ une fonction qui associe des formules aux variables, $subs(\varphi, \sigma)$

$$
\begin{array}{rcll}
subst(\varphi, \sigma) & = & \varphi & \text{si } \varphi \in \{\top, \bot\} \\
subst(x, \sigma) & = & \sigma(x) & \\
subst(\neg\varphi, \sigma) & = & \neg subst(\varphi, \sigma) & \\
subst(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi, \sigma) & = & subst(\varphi, \sigma) \,\mathsf{op}\, subst(\psi, \sigma) & \text{si } \mathsf{op} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}
\end{array}
$$

Toutes ces définitions sont des homomorphismes : ils construisent des valeurs en se basant sur la structure de la formule.

Quelques définitions inductives (récursives)

- **Variables d'une formule** $\mathit{Var}(\varphi)$ Si $\mathbf{X}$ est un ensemble de variables on note $\mathsf{Prop}(\mathbf{X})$ les formules φ telles que $\mathit{Var}(\varphi) \subseteq \mathbf{X}$.
- **Hauteur d'une formule** $h(\varphi)$
- **Substitution de formules** soit σ une fonction qui associe des formules aux variables, $\mathit{subs}(\varphi, \sigma)$

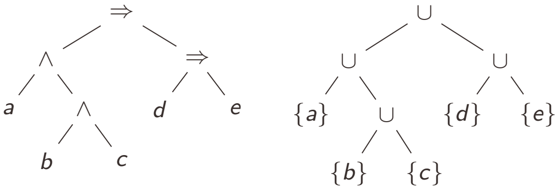
$$
\begin{array}{rcll}
\mathit{subst}(\varphi, \sigma) & = & \varphi & \text{si } \varphi \in \{\top, \bot\} \\
\mathit{subst}(x, \sigma) & = & \sigma(x) & \\
\mathit{subst}(\neg\varphi, \sigma) & = & \neg\mathit{subst}(\varphi, \sigma) & \\
\mathit{subst}(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi, \sigma) & = & \mathit{subst}(\varphi, \sigma) \,\mathsf{op}\, \mathit{subst}(\psi, \sigma) & \text{si } \mathsf{op} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}
\end{array}
$$

Toutes ces définitions sont des homomorphismes : ils construisent des valeurs en se basant sur la structure de la formule.
Les homomorphismes sont présents en programmation : patron *visiteur* en programmation objet, fonction *fold* en programmation fonctionnelle...

Exemples

Homomorphisme : ce qui préserve la forme.

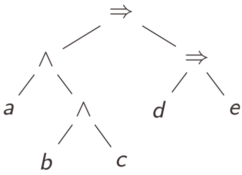
Variables

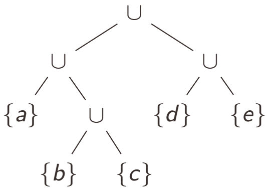


Exemples

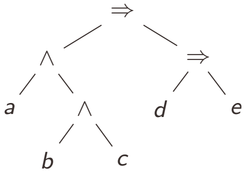
Homomorphisme : ce qui préserve la forme.

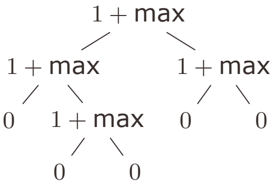
Variables





Hauteur





Le principe d'induction

Pour démontrer des propriétés P sur les formules, on utilise le principe d'induction structurelle. Pour déduire que pour tout φ, $P(\varphi)$ est vraie, il suffit de montrer :

- $P(\bot)$, $P(\top)$, $P(x)$,
- si $P(\varphi)$ alors, $P(\neg\varphi)$,
- si $P(\varphi)$ et $P(\psi)$ alors $P(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi)$ pour tout op dans $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Le principe d'induction

Pour démontrer des propriétés P sur les formules, on utilise le principe d'induction structurelle. Pour déduire que pour tout φ, $P(\varphi)$ est vraie, il suffit de montrer :

- $P(\bot)$, $P(\top)$, $P(x)$,
- si $P(\varphi)$ alors, $P(\neg\varphi)$,
- si $P(\varphi)$ et $P(\psi)$ alors $P(\varphi \,\mathsf{op}\, \psi)$ pour tout op dans $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Un cas particulier de récurrence

Le principe d'induction peut être vu comme une utilisation particulière de la récurrence. Démontrer une propriété sur toutes les formules φ revient à la démontrer pour tout n et pour toutes les formules de hauteur inférieure à n :

- Le montrer pour les formules de hauteur 0 revient à le montrer pour $\bot$, $\top$ et x,
- Le montrer pour les formules de hauteur $n+1$ revient à le montrer pour les formules de la forme $\neg\varphi$, ou $\varphi \,\mathsf{op}\, \psi$ avec op dans $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ en supposant que pour toute formule de taille inférieure à n la formule est vraie, soit, en particulier, pour φ et ψ.

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $Prop(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(subst(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $Prop(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(subst(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ :

- **Cas $\varphi = \perp$ ou $\varphi = \top$**

  Si φ est $\perp$ ou $\top$, alors $subst(\varphi, \sigma) = \varphi$ et bien évidemment $h(subst(\varphi, \sigma)) = h(\varphi) \leq h(\varphi) + N$.

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $Prop(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(subst(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ :

- **Cas** $\varphi = \perp$ **ou** $\varphi = \top$
- **Cas** $\varphi = x$
  Si $\varphi = x$ alors $subst(\varphi, \sigma) = \sigma(x)$ et $h(subst(\varphi, \sigma)) = h(\sigma(x)) \leq N = h(\varphi) + N$.

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $Prop(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(subst(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ :

- **Cas** $\varphi = \bot$ **ou** $\varphi = \top$
- **Cas** $\varphi = x$
- **Cas** $\varphi = \neg\psi$

  Si $\varphi = \neg\psi$, alors

$$\begin{array}{rcll} h(subst(\neg\psi, \sigma)) & = & h(\neg(subst(\psi, \sigma))) & \\ & = & h(subst(\psi, \sigma)) + 1 & \\ & \leq & h(\psi) + 1 + N & \text{hyp. ind.} \\ & = & h(\neg\psi) + N & \\ & = & h(\varphi) + N & \end{array}$$

.

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $Prop(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(subst(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ :

- **Cas** $\varphi = \bot$ **ou** $\varphi = \top$
- **Cas** $\varphi = x$
- **Cas** $\varphi = \neg\psi$
- **Cas** $\varphi = \psi_1 \operatorname{op} \psi_2$

$$\begin{array}{rcll}
h(subst(\psi_1 \operatorname{op} \psi_2, \sigma)) & = & h(subst(\psi_1, \sigma) \operatorname{op} subst(\psi_2, \sigma)) & \\
& = & 1 + \max(h(subst(\psi_1, \sigma)), h(subst(\psi_2, \sigma))) & \\
& \leq & 1 + \max(h(\psi_1) + N, h(\psi_2) + N) & \text{hyp. ind.} \\
& = & 1 + \max(h(\psi_1), h(\psi_2)) + N & \\
& = & h(\psi_1 \operatorname{op} \psi_2) + N & \\
& = & h(\varphi) + N &
\end{array}$$

Exemple d'induction

Théorème

Pour toute formule φ dans $\mathit{Prop}(\mathbf{X})$ et toute substitution σ si pour tout x dans $\mathbf{X}$, $h(\sigma(x)) \leq N$, alors

$$h(\mathit{subst}(\varphi, \sigma)) \leq h(\varphi) + N \ .$$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ :

- **Cas** $\varphi = \bot$ **ou** $\varphi = \top$
- **Cas** $\varphi = x$
- **Cas** $\varphi = \neg\psi$
- **Cas** $\varphi = \psi_1 \, \mathrm{op} \, \psi_2$

Par induction, on déduit que la propriété est vraie pour toute formule.

Outline

1. Syntaxe
2. Sémantique
3. Formes normales

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses
- $\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *conjonction* représente une formule qui est vraie ssi φ est vraie et ψ est vraie,

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses
- $\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *conjonction* représente une formule qui est vraie ssi φ est vraie et ψ est vraie,
- $\begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *disjonction* représente une formule qui est vraie ssi soit φ est vraie, soit ψ est vraie,

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses
- $\begin{array}{c} \wedge \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \qquad \psi \end{array}$: la *conjonction* représente une formule qui est vraie ssi φ est vraie et ψ est vraie,
- $\begin{array}{c} \vee \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi \qquad \psi \end{array}$: la *disjonction* représente une formule qui est vraie ssi soit φ est vraie, soit ψ est vraie,
- $\begin{array}{c} \neg \\ | \\ \varphi \end{array}$: la *négation* est vraie ssi φ est fausse.

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses
- $\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *conjonction* représente une formule qui est vraie ssi φ est vraie et ψ est vraie,
- $\begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *disjonction* représente une formule qui est vraie ssi soit φ est vraie, soit ψ est vraie,
- $\begin{array}{c} \neg \\ | \\ \varphi \end{array}$: la *négation* est vraie ssi φ est fausse.

Les variables ?

A priori les variables ne sont ni vraie ni fausse. Cela dépend des *situations*. Pour décrire ces situations, on utilise des valuations.

Sémantique intuitive des connecteurs

- $\top$: la *tautologie* représente les propositions vraies
- $\bot$: l'*absurde* représente les propositions fausses
- $\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *conjonction* représente une formule qui est vraie ssi φ est vraie et ψ est vraie,
- $\begin{array}{ccc} & \vee & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array}$: la *disjonction* représente une formule qui est vraie ssi soit φ est vraie, soit ψ est vraie,
- $\begin{array}{c} \neg \\ | \\ \varphi \end{array}$: la *négation* est vraie ssi φ est fausse.

Les variables ?

A priori les variables ne sont ni vraie ni fausse. Cela dépend des *situations*. Pour décrire ces situations, on utilise des valuations.

Valuation

Une valuation est une fonction des variables propositionnelles dans $\{0, 1\}$, 0 dénote l'absurdité et 1 dénote la vérité.
On note les valuations comme suit : $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
La valuation $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ décrit la situation où la variable x est vraie, et les variables y et z sont fausses.

Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\
[\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\
[\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\
[\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!])
\end{array}
$$

Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
[\![\top,\nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot,\nu]\!] & = & 0 \\
[\![x,\nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi,\nu]\!] & = & 1-[\![\varphi,\nu]\!] \\
[\![\varphi\wedge\psi,\nu]\!] & = & \min([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!]) \\
[\![\varphi\vee\psi,\nu]\!] & = & \max([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!])
\end{array}$$

σ est la valuation suivante $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=1$.
L'évaluation de $[\![a\wedge b\wedge c\vee\neg d\wedge e,\sigma]\!]$ est un homomorphisme :

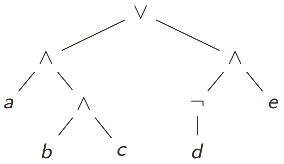
Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} [\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\ [\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\ [\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\ [\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\ [\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \min([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\ [\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \max([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \end{array}$$

σ est la valuation suivante $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$.
L'évaluation de $[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!]$ est un homomorphisme :



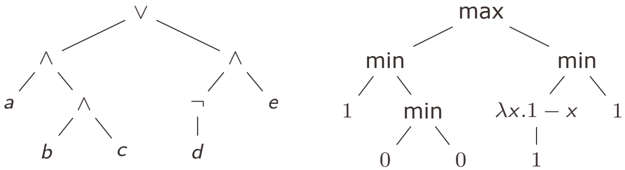
Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\
[\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\
[\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\
[\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!])
\end{array}
$$

σ est la valuation suivante $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$.
L'évaluation de $[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!]$ est un homomorphisme :



Sémantique formelle des connecteurs

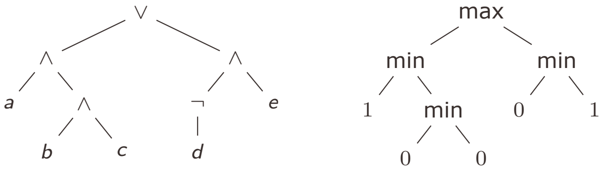
Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\
[\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\
[\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\
[\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!])
\end{array}
$$

σ est la valuation suivante $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$.

L'évaluation de $[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!]$ est un homomorphisme :



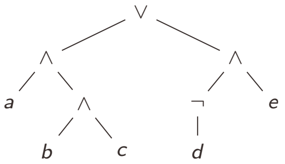
Sémantique formelle des connecteurs

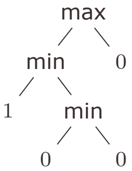
Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} [\![\top,\nu]\!] & = & 1 \\ [\![\bot,\nu]\!] & = & 0 \\ [\![x,\nu]\!] & = & \nu(x) \\ [\![\neg\varphi,\nu]\!] & = & 1-[\![\varphi,\nu]\!] \\ [\![\varphi\wedge\psi,\nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!]) \\ [\![\varphi\vee\psi,\nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!]) \end{array}$$

σ est la valuation suivante $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=1$.
L'évaluation de $[\![a\wedge b\wedge c\vee\neg d\wedge e,\sigma]\!]$ est un homomorphisme :





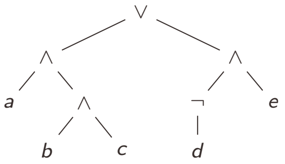
Sémantique formelle des connecteurs

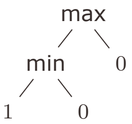
Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top,\nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot,\nu]\!] & = & 0 \\
[\![x,\nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi,\nu]\!] & = & 1-[\![\varphi,\nu]\!] \\
[\![\varphi\wedge\psi,\nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!]) \\
[\![\varphi\vee\psi,\nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!])
\end{array}
$$

σ est la valuation suivante $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=1$.
L'évaluation de $[\![a\wedge b\wedge c\vee\neg d\wedge e,\sigma]\!]$ est un homomorphisme :





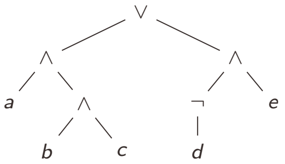
Sémantique formelle des connecteurs

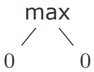
Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
[\![\top,\nu]\!] &= 1\\
[\![\bot,\nu]\!] &= 0\\
[\![x,\nu]\!] &= \nu(x)\\
[\![\neg\varphi,\nu]\!] &= 1-[\![\varphi,\nu]\!]\\
[\![\varphi\wedge\psi,\nu]\!] &= \mathsf{min}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!])\\
[\![\varphi\vee\psi,\nu]\!] &= \mathsf{max}([\![\varphi,\nu]\!],[\![\psi,\nu]\!])
\end{aligned}$$

σ est la valuation suivante $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=1$.
L'évaluation de $[\![a\wedge b\wedge c\vee\neg d\wedge e,\sigma]\!]$ est un homomorphisme :





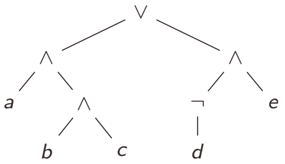
Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\
[\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\
[\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \min([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\
[\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \max([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!])
\end{array}
$$

σ est la valuation suivante $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$.
L'évaluation de $[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!]$ est un homomorphisme :



0

Sémantique formelle des connecteurs

Évaluation d'une formule

Étant donnée une valuation ν, on évalue une formule de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
[\![\top, \nu]\!] & = & 1 \\
[\![\bot, \nu]\!] & = & 0 \\
[\![x, \nu]\!] & = & \nu(x) \\
[\![\neg\varphi, \nu]\!] & = & 1 - [\![\varphi, \nu]\!] \\
[\![\varphi \wedge \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{min}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!]) \\
[\![\varphi \vee \psi, \nu]\!] & = & \mathsf{max}([\![\varphi, \nu]\!], [\![\psi, \nu]\!])
\end{array}$$

σ est la valuation suivante $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 1$.
L'évaluation de $[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!]$ est un homomorphisme :

$$\begin{array}{rcl}
[\![a \wedge b \wedge c \vee \neg d \wedge e, \sigma]\!] & = & \mathsf{max}([\![a \wedge b \wedge c, \sigma]\!],\ [\![\neg d \wedge e, \sigma]\!]) \\
& = & \mathsf{max}(\mathsf{min}([\![a, \sigma]\!],\ [\![b \wedge c, \sigma]\!]),\ \mathsf{min}([\![\neg d, \sigma]\!],\ [\![e, \sigma]\!])) \\
& = & \mathsf{max}(\mathsf{min}(\sigma(a),\ \mathsf{min}([\![b, \sigma]\!],\ [\![c, \sigma]\!])),\ \mathsf{min}(1 - [\![d, \sigma]\!],\ \sigma(e))) \\
& = & \mathsf{max}(\mathsf{min}(1,\ \mathsf{min}(\sigma(b),\ \sigma(c))),\ \mathsf{min}(1 - \sigma(d),\ 1)) \\
& = & \mathsf{max}(\mathsf{min}(1,\ \mathsf{min}(0,\ 0)),\ \mathsf{min}(1 - 1,\ 1)) \\
& = & \mathsf{max}(\mathsf{min}(1,\ 0),\ \mathsf{min}(0,\ 1)) \\
& = & \mathsf{max}(0,\ 0) \\
& = & 0
\end{array}$$

Sémantique par table de vérité

Afin de connaître les valuations (on parle parfois de conditions de vérité) qui rendent des formules vraies. On construit un tableau qui associe leurs valeurs aux formules considérées pour toutes les valuations possibles.

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Sémantique par table de vérité

Afin de connaître les valuations (on parle parfois de conditions de vérité) qui rendent des formules vraies. On construit un tableau qui associe leurs valeurs aux formules considérées pour toutes les valuations possibles.

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

On observe bien que le résultat obtenu par chaque colonne correspond bien au calcul des opérateurs (min pour $\wedge$, max pour $\vee$ et $\lambda x.1 - x$ pour $\neg$).

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ *(est vraie) alors* ψ *(est vraie)*

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ (est vraie) alors ψ (est vraie)

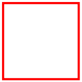
Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

bord bleu
intérieur blanc

bord bleu
intérieur gris



bord rouge
intérieur blanc

bord rouge
intérieur gris

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ (est vraie) alors ψ (est vraie)

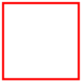
Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

bord bleu
intérieur blanc

bord bleu
intérieur gris



bord rouge
intérieur blanc

bord rouge
intérieur gris

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ (est vraie) alors ψ (est vraie)

Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

	bord bleu intérieur blanc	vrai
	bord bleu intérieur gris	
	bord rouge intérieur blanc	
	bord rouge intérieur gris	

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ *(est vraie) alors* ψ *(est vraie)*

Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

	bord bleu intérieur blanc	vrai
	bord bleu intérieur gris	vrai
	bord rouge intérieur blanc	
	bord rouge intérieur gris	

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ *(est vraie) alors* ψ *(est vraie)*

Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

	bord bleu intérieur blanc	vrai
	bord bleu intérieur gris	vrai
	bord rouge intérieur blanc	faux
	bord rouge intérieur gris	

Sémantique intuitive de $\Rightarrow$

La formule $\varphi \Rightarrow \psi$ signifie intuitivement :

Si φ (est vraie) alors ψ (est vraie)

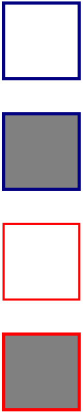
Prenons par exemple la phrase

Si le bord du carré est rouge alors son intérieur est gris.

et voyons sur des situtations concrètes quand cet énoncé est vrai :

	bord bleu intérieur blanc	vrai
	bord bleu intérieur gris	vrai
	bord rouge intérieur blanc	faux
	bord rouge intérieur gris	vrai

Table de vérité de $\Rightarrow$



bord bleu intérieur blanc	vrai
bord bleu intérieur gris	vrai
bord rouge intérieur blanc	faux
bord rouge intérieur gris	vrai

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de $\Leftrightarrow$

La définition de $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) est :

$$\varphi \Leftrightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$$

Table de vérité de $\Leftrightarrow$

La définition de $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) est :

$$\varphi \Leftrightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$$

Construisons la table de vérité de $\Leftrightarrow$:

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Table de vérité de $\Leftrightarrow$

La définition de $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) est :

$$\varphi \Leftrightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$$

Construisons la table de vérité de $\Leftrightarrow$:

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

En résumé, nous avons :

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de $\Leftrightarrow$

La définition de $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) est :

$$\varphi \Leftrightarrow \psi = \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$$

Construisons la table de vérité de $\Leftrightarrow$:

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

En résumé, nous avons :

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarque : $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est vrai ssi φ et ψ prennent les mêmes valeurs de vérité ; $\Leftrightarrow$ permet de tester l'*égalité* des valeurs de vérité.

Résumé des tables de vérité des opérateurs

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,

a	b	c					

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1				
0	0	1	1				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	1	0				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1	0			
0	0	1	1	1			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	1			
1	0	0	0	0			
1	0	1	0	0			
1	1	0	1	0			
1	1	1	1	1			

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1	0	1		
0	0	1	1	1	1		
0	1	0	1	0	1		
0	1	1	1	1	1		
1	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	0	0		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	0		

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	0	0	

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Construction de la table de vérité d'une formule

Prenons la formule, $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$ et déterminons ses conditions de vérité à l'aide d'une table de vérité :

- on place les variables propositionnelles en début de tableau,
- on complète l'en-tête avec les *sous-formules* de la formule,
- on donne toutes les valeurs de vérité possibles aux variables,
- on remplit les colonnes (ou les lignes) pour donner leurs valeurs de vérités à chaque sous-formule.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \wedge c$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee \neg a \wedge b$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1

NB : le nombre de lignes de la table de vérité est 2^n lorsque n est le nombre de variables.

Satisfiabilité et tautologie

Satisfiabilité

Une formule φ est satisfiable si **il existe** une valuation ν telle que $[\![\varphi, \nu]\!] = 1$.
On dit que ν satisfait φ.

Satisfiabilité et tautologie

Satisfiabilité

Une formule φ est satisfiable si **il existe** une valuation ν telle que $[\![\varphi, \nu]\!] = 1$.
On dit que ν satisfait φ.

Tautologie

Une formule φ est une tautologie, si **pour toute** valuation ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = 1$.
On note $\models \varphi$ le fait que φ soit une tautologie.

Satisfiabilité et tautologie

Satisfiabilité

Une formule φ est satisfiable si **il existe** une valuation ν telle que $[\![\varphi, \nu]\!] = 1$.
On dit que ν satisfait φ.

Tautologie

Une formule φ est une tautologie, si **pour toute** valuation ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = 1$.
On note $\models \varphi$ le fait que φ soit une tautologie.
Si Γ est un ensemble de formules, φ est une conséquence sémantique de Γ (ce que l'on note $\Gamma \models \varphi$) lorsque pour toute valuation ν, si ν satifait toute formule de Γ alors ν satisfait φ.

Équivalence et conséquence sémantique

Deux formules φ et ψ sont équivalentes sémantiquement, noté $\varphi \equiv \psi$ lorsque **pour toute** valuation ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$.

Équivalence et conséquence sémantique

Deux formules φ et ψ sont équivalentes sémantiquement, noté $\varphi \equiv \psi$ lorsque **pour toute** valuation ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$.
On peut *internaliser* dans la logique l'équivalence sémantique :

$$\varphi \equiv \psi \text{ ssi } \models \varphi \Leftrightarrow \psi$$

Équivalence et conséquence sémantique

Deux formules φ et ψ sont équivalentes sémantiquement, noté $\varphi \equiv \psi$ lorsque **pour toute** valuation ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$.
On peut *internaliser* dans la logique l'équivalence sémantique :

$$\varphi \equiv \psi \text{ ssi } \models \varphi \Leftrightarrow \psi$$

On peut faire quelque chose de similaire avec la conséquence sémantique :

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \text{ ssi } \models \varphi_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \psi$$

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.
En effet, pour tout ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\varphi, \nu]\!]$,

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.

Symétrie $\varphi \equiv \psi$ implique $\psi \equiv \varphi$.
En effet, si pour tout ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$, alors $[\![\psi, \nu]\!] = [\![\varphi, \nu]\!]$,

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.

Symétrie $\varphi \equiv \psi$ implique $\psi \equiv \varphi$.

Transitivité $\varphi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ implique $\varphi \equiv \theta$.
En effet, si pour tout ν, $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$ et $[\![\psi, \nu]\!] = [\![\theta, \nu]\!]$ alors $[\![\varphi, \nu]\!] = [\![\psi, \nu]\!]$.

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.
Symétrie $\varphi \equiv \psi$ implique $\psi \equiv \varphi$.
Transitivité $\varphi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ implique $\varphi \equiv \theta$.

- Elle commute avec les connecteurs :

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.
Symétrie $\varphi \equiv \psi$ implique $\psi \equiv \varphi$.
Transitivité $\varphi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ implique $\varphi \equiv \theta$.

- Elle commute avec les connecteurs :
  - si $\varphi \equiv \psi$, alors $\neg\varphi \equiv \neg\psi$,

Congruence

La relation $\equiv$ est une congruence sur les formules :

- C'est une relation d'équivalence :

Reflexivité $\varphi \equiv \varphi$.
Symétrie $\varphi \equiv \psi$ implique $\psi \equiv \varphi$.
Transitivité $\varphi \equiv \psi$ et $\psi \equiv \theta$ implique $\varphi \equiv \theta$.

- Elle commute avec les connecteurs :
  - si $\varphi \equiv \psi$, alors $\neg\varphi \equiv \neg\psi$,
  - si $\varphi_1 \equiv \psi_1$ et $\varphi_2 \equiv \psi_2$, alors $\varphi_1 \,\mathsf{op}\, \varphi_2 \equiv \psi_1 \,\mathsf{op}\, \psi_2$ pour tout op dans $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

En conséquence, si $\varphi \equiv \psi$ alors on peut remplacer les occurrences de φ par ψ et vice-versa dans une formule et obtenir une formule sémantiquement équivalente.

Propriétés algébriques

En utilisant les tables de vérités on peut montrer les propriétés suivantes :

Commutativité	$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
Associativité	$(\varphi \vee \psi) \vee \theta \equiv \varphi \vee (\psi \vee \theta)$, $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$
Distributivité	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$, $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
Identité	$\varphi \vee \bot \equiv \varphi$, $\psi \wedge \top \equiv \psi$
Zéro	$\varphi \vee \top \equiv \top$, $\varphi \wedge \bot \equiv \bot$
Itempotence	$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
Absorption	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$, $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$
Complémentation	$\varphi \vee \neg\varphi \equiv \top$, $\varphi \wedge \neg\varphi \equiv \bot$
Double négation	$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
de Morgan	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
Définition	$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv \varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$

Complétude équationnelle

Les équations du système précédent donnent une axiomatisation complète de la relation $\equiv$:

- $\varphi \equiv \psi$ ssi on peut réécrire φ en ψ en utilisant les équations données dans l'axiomatisation.

Système complet de connecteurs

Étant donné un ensemble C de connecteurs logiques, on dit que celui-ci est un système complet si pour toute formule φ, il existe une formule ψ telle que :

- ψ n'est construite qu'avec les connecteurs de C, et
- $\varphi \equiv \psi$

Système complet de connecteurs

Étant donné un ensemble C de connecteurs logiques, on dit que celui-ci est un système complet si pour toute formule φ, il existe une formule ψ telle que :

- ψ n'est construite qu'avec les connecteurs de C, et
- $\varphi \equiv \psi$

Exemple de système complets

Les ensembles suivants sont des systèmes complets : $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \bot\}$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\perp} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Démonstration

Par induction sur la structure de φ, on montre que :

- $\overline{\varphi}$ ne contient que les connecteurs $\neg$ et $\vee$,
- $\varphi \equiv \overline{\varphi}$.

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \bot$

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$ ne contient que $\vee$ et $\neg$,
- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x) \equiv \neg\top \equiv \bot$.

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \top$

- $\overline{\top} = x \vee \neg x$ ne contient que $\vee$ et $\neg$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x \equiv \top$.

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = x$

- $\overline{x} = x$ ne contient aucun connecteur,
- $\overline{x} = x \equiv x$.

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$

- $\overline{\psi_1 \vee \psi_2} = \overline{\psi_1} \vee \overline{\psi_2}$, par induction $\overline{\psi_1}$ et $\overline{\psi_2}$ ne contiennent que les connecteurs $\vee$ et $\neg$, c'est ainsi également le cas pour $\overline{\psi_1 \vee \psi_2}$,
- $$\begin{aligned} \overline{\psi_1 \vee \psi_2} &= \overline{\psi_1} \vee \overline{\psi_2} \\ &\equiv \psi_1 \vee \psi_2 \qquad \text{car par H.I. } \psi_1 \equiv \overline{\psi_1},\ \psi_2 \equiv \overline{\psi_2} \end{aligned}$$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

- $\overline{\psi_1 \wedge \psi_2} = \neg(\neg\overline{\psi_1} \vee \neg\overline{\psi_2})$, par induction $\overline{\psi_1}$ et $\overline{\psi_2}$ ne contiennent que les connecteurs $\vee$ et $\neg$, c'est ainsi également le cas pour $\overline{\psi_1 \wedge \psi_2}$,
- $$\begin{array}{rcll} \overline{\psi_1 \wedge \psi_2} & = & \neg(\neg\overline{\psi_1} \vee \neg\overline{\psi_2}) & \\ & \equiv & \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2) & \text{car par H.I. } \psi_1 \equiv \overline{\psi_1},\ \psi_2 \equiv \overline{\psi_2} \\ & \equiv & \psi_1 \wedge \psi_2 & \text{par de Morgan et double négation} \end{array}$$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

- $\overline{\psi_1 \Rightarrow \psi_2} = \neg\overline{\psi_1} \vee \overline{\psi_2}$, par induction $\overline{\psi_1}$ et $\overline{\psi_2}$ ne contiennent que les connecteurs $\vee$ et $\neg$, c'est ainsi également le cas pour $\overline{\psi_1 \Rightarrow \psi_2}$,
- $$\begin{array}{rcll} \overline{\psi_1 \Rightarrow \psi_2} & = & \neg\overline{\psi_1} \vee \neg\overline{\psi_2} & \\ & \equiv & \neg\psi_1 \vee \psi_2 & \text{car par H.I. } \psi_1 \equiv \overline{\psi_1},\ \psi_2 \equiv \overline{\psi_2} \\ & \equiv & \psi_1 \Rightarrow \psi_2 & \text{par définition} \end{array}$$

Exemple : $\{\neg, \vee\}$

On utilise une transformation $\overline{\cdot}$ (encore un homomorphisme) qui élimine les connecteurs différents de $\neg$ et $\vee$:

- $\overline{\bot} = \neg(x \vee \neg x)$,
- $\overline{\top} = x \vee \neg x$,
- $\overline{x} = x$
- $\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \wedge \psi} = \neg(\neg\overline{\varphi} \vee \neg\overline{\psi})$,
- $\overline{\varphi \Rightarrow \psi} = \neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$,
- $\overline{\varphi \Leftrightarrow \psi} = \neg(\neg(\neg\overline{\varphi} \vee \overline{\psi}) \vee \neg(\neg\overline{\psi} \vee \overline{\varphi}))$

Cas $\varphi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$

- $\overline{\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2} = \neg(\neg(\neg\overline{\psi_1} \vee \overline{\psi_2}) \vee \neg(\neg\overline{\psi_2} \vee \overline{\psi_1}))$, par induction $\overline{\psi_1}$ et $\overline{\psi_2}$ ne contiennent que les connecteurs $\vee$ et $\neg$, c'est ainsi également le cas pour $\overline{\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2}$,
- $$\begin{array}{rcll} \overline{\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2} & = & \neg(\neg(\neg\overline{\psi_1} \vee \overline{\psi_2}) \vee \neg(\neg\overline{\psi_2} \vee \overline{\psi_1})) & \\ & \equiv & \neg(\neg(\neg\psi_1 \vee \psi_2) \vee \neg(\neg\psi_2 \vee \psi_1)) & \text{car par H.I. } \psi_1 \equiv \overline{\psi_1},\ \psi_2 \equiv \overline{\psi_2} \\ & \equiv & (\neg\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\neg\psi_2 \vee \psi_1) & \text{par de Morgan} \\ & \equiv & (\psi_1 \Rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \Rightarrow \psi_1) & \text{par définition} \\ & \equiv & \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2 & \text{par définition} \end{array}$$

Outline

1 Syntaxe

2 Sémantique

3 Formes normales

Quelques notions

On appelle :

- littéral toute formule de la forme x ou $\neg x$ où x est une variable propositionnelle ;

Quelques notions

On appelle :

- littéral toute formule de la forme x ou $\neg x$ où x est une variable propositionnelle ;
- formule conjontive toute formule de la forme $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$;

Quelques notions

On appelle :

- littéral toute formule de la forme x ou $\neg x$ où x est une variable propositionnelle ;
- formule conjontive toute formule de la forme $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$;
- formule disjonctive toute formule de la forme $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$;

Forme Normale Disjonctive (FND)

Une formule est sous forme normale disjonctive lorsqu'elle est une disjonction de conjonctions de litéraux :

$$(l_{1,1} \wedge \cdots \wedge l_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (l_{p,1} \wedge \cdots \wedge l_{p,n_p})$$

ce que l'on note également par :

$$\bigvee_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \ .$$

Valuation et forme normale disjonctive

Les formes normales disjonctives permettent de rendre **explicite** dans la syntaxe les conditions de vérités d'une formule.
En effet, si ν est une valuation sur les variables $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ la formule :

$$[\nu, \mathbf{X}] = \bigwedge_{i \mid \nu(x_i)=1} x_i \wedge \bigwedge_{i \mid \nu(x_i)=0} \neg x_i$$

n'est satisfaite que par ν.
Si une formule φ sur le variables $\mathbf{X}$ est satisfaite exactement par les valuations ν_1, ..., ν_k alors :

$$\varphi \equiv \bigvee_{i=1}^{k} [\nu_i, \mathbf{X}] = [\nu_1, \mathbf{X}] \vee \cdots \vee [\nu_k, \mathbf{X}]$$

Exemple

On pose $\varphi = a \wedge (b \vee \neg c)$:

a	b	c	$b \vee \neg c$	$a \wedge (b \vee \neg c)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Exemple

On pose $\varphi = a \wedge (b \vee \neg c)$:

a	b	c	$b \vee \neg c$	$a \wedge (b \vee \neg c)$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge b \wedge \neg c$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge b \wedge c$

Exemple

On pose $\varphi = a \wedge (b \vee \neg c)$:

a	b	c	$b \vee \neg c$	$a \wedge (b \vee \neg c)$	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge b \wedge \neg c$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow \quad a \wedge b \wedge c$

Ainsi $a \wedge (b \vee \neg c) \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

Mise sous forme normale disjonctive avec l'axiomatisation de $\equiv$

En utilisant :

- la définition de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$:
$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$$
- on pousse les négations au niveau des variables :
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,\ \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,\ \neg\neg\varphi \equiv \varphi$$
- la distributivité de $\wedge$ par rapport au $\vee$ permet de terminer :
$$(\varphi \vee \psi) \wedge \theta \equiv (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a))$$
$$\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$
$$(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a))
\end{array}$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable
- Utiliser la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$.

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable
- Utiliser la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$.

$$\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a))
\end{array}$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable
- Utiliser la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$.

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee ((\neg c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge a))
\end{array}
$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable
- Utiliser la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$.

$$\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee ((\neg c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge a))) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge a)
\end{array}$$

Exemple de mis sous FND

- Éliminer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec leur définition,
- Pousser les négations jusqu'au variable
- Utiliser la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$.

$$
\begin{array}{l}
\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg(c \vee \neg(d \Rightarrow a)) \\
\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee \neg(c \vee \neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg\neg(\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee a)) \\
(a \wedge \neg b) \vee ((\neg c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge a))) \\
(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge a)
\end{array}
$$

NB : Ce processus peut donner une formule exponentiellement plus grande que celle d'origine.

A propos de la complétude axiomatique

À partir de la FND obtenue en utilisant :

- l'associativité et la commutativité de $\vee$ et $\wedge$,
- l'idempotence, l'identité, le zéro et la complémentation,

On peut obtenir une FND qui explicite les valuations satisfaisant la formule.

A propos de la complétude axiomatique

À partir de la FND obtenue en utilisant :

- l'associativité et la commutativité de $\vee$ et $\wedge$,
- l'idempotence, l'identité, le zéro et la complémentation,

On peut obtenir une FND qui explicite les valuations satisfaisant la formule.
Ainsi si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, l'utilisation de l'axiomatisation de $\equiv$ permet de mettre sous une FND qui explicite les valuation satisfaisant chaque formule et ainsi de montrer l'équivalence. C'est une méthode pour démontrer la complétude de l'axiomatisation.

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Une formule est sous forme normale conjontive lorsqu'elle est une conjonction de disjonction de litéraux :

$$(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{p,1} \vee \cdots \vee l_{p,n_p})$$

ce que l'on note également par :

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \ .$$

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Une formule est sous forme normale conjontive lorsqu'elle est une conjonction de disjonction de litéraux :

$$(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{p,1} \vee \cdots \vee l_{p,n_p})$$

ce que l'on note également par :

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \ .$$

On peut mettre toute formule sous FNC en utilisant :

- la définition de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$,
- les lois de de Morgan, la double négation,
- la distributivité de $\wedge$ par rapport au $\vee$,

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Une formule est sous forme normale conjontive lorsqu'elle est une conjonction de disjonction de litéraux :

$$(l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{p,1} \vee \cdots \vee l_{p,n_p})$$

ce que l'on note également par :

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \ .$$

On peut mettre toute formule sous FNC en utilisant :

- la définition de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$,
- les lois de de Morgan, la double négation,
- la distributivité de $\wedge$ par rapport au $\vee$,

Les formules sous FNC permettent de voir une formule comme un ensemble de contraintes à satisfaire.

Mise sous forme normale conjonctive avec l'axiomatisation de $\equiv$

En utilisant :

- la définition de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$:
$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$$
- on pousse les négations au niveau des variables :
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,\ \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,\ \neg\neg\varphi \equiv \varphi$$
- la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$ permet de terminer :
$$(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\varphi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$$

Mise sous forme normale conjonctive avec l'axiomatisation de $\equiv$

En utilisant :

- la définition de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$:
$$\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$$
- on pousse les négations au niveau des variables :
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,\ \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,\ \neg\neg\varphi \equiv \varphi$$
- la distributivité de $\vee$ par rapport au $\wedge$ permet de terminer :
$$(\varphi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\varphi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$$

La technique de calcul est la même que pour la mise sous FND, à la différence que l'on utilise l'autre distributivité.