

MAF 105 - Iniciação à Estatística

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Florestal

Sumário

1 Probabilidade Condicional e Independência

2 Teorema de Bayes

Para dois eventos quaisquer A e B , sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B , como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

Assim, a probabilidade de A muda após o evento B ter acontecido. Isso porque o resultado de A é uma das possibilidades de B ou de B^c .

Exemplo

Considere-se um baralho de 52 cartas. A probabilidade de ao retirar uma carta sair um rei é $4/52$, ou $1/13$. No entanto, se alguém retira uma carta e nos diz que é uma figura, então a probabilidade de a carta retirada ser um rei é $4/12 = 1/3$, ou seja, $P(\text{sair um rei} | \text{sair uma figura}) = 1/3$.

Exemplo



Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?

Exemplo



Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

b) Segunda ser preta?

Exemplo



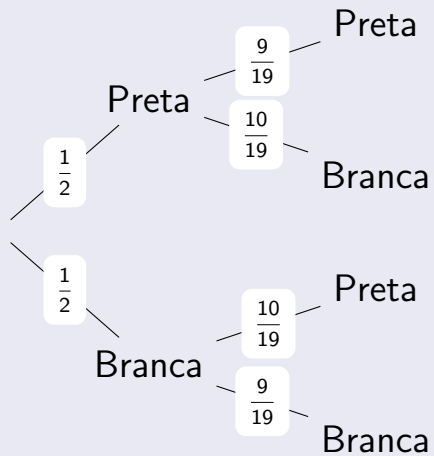
Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

- a) Ambas pretas?

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

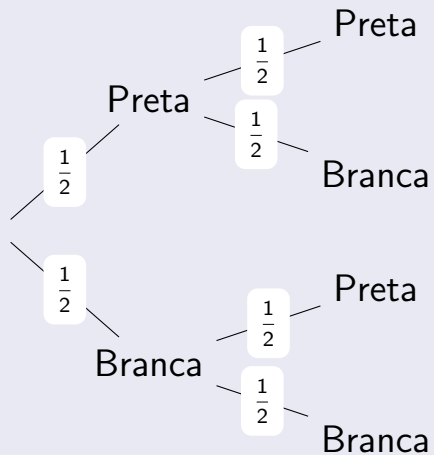
- b) Segunda ser preta?

$$P(P_2) = P[(P_1 \cap P_2) \cup (P_2 \cap P_1)]$$



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{9}{38}$
BP	$\frac{10}{38}$
PB	$\frac{10}{38}$
PP	$\frac{9}{38}$
Total	1

Figura: Com reposição



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{1}{4}$
BP	$\frac{1}{4}$
PB	$\frac{1}{4}$
PP	$\frac{1}{4}$
Total	1

Observem que, neste segundo caso, $P(B_2|B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. Ou seja,

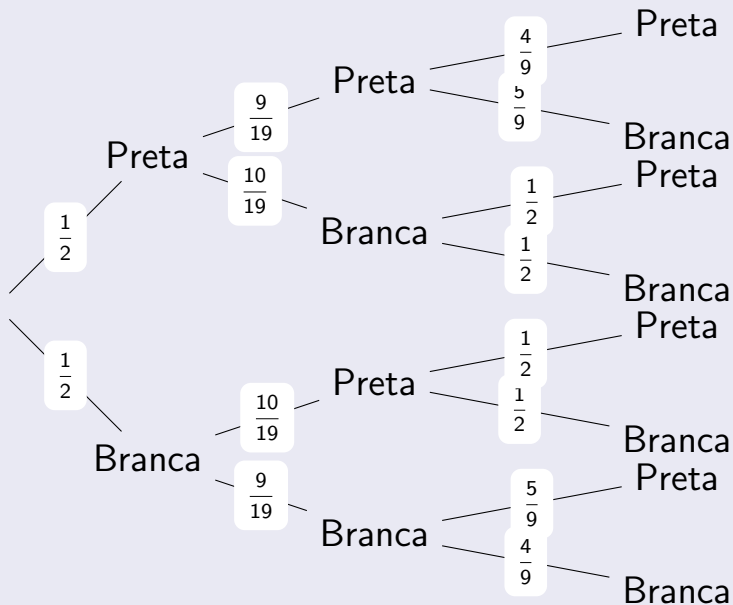
$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B).$$

Nesse caso, dizemos que o evento A independe do evento B e, usando (1), temos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2)$$

É fácil ver que se A independe de B , então B independe de A . A fórmula acima pode ser tomada como definição de independência entre dois eventos, ou seja, A e B são independentes se, e somente se, (2) for válida.

Considere ainda a urna dos exemplos anteriores, mas vamos fazer três extrações sem reposição. Indiquemos por P_i ou B_i a obtenção de bola preta ou branca na i -ésima extração, respectivamente, $i = 1, 2, 3$.



Resultados	Probabilidades
BBB	0,105263158
BBP	0,131578947
BPB	0,131578947
PBB	0,131578947
BPP	0,131578947
PBP	0,131578947
PPB	0,131578947
PPP	0,105263158
Total	1

Observem que:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 \cap B_2) \quad (3)$$

$$= \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{19} \times \frac{4}{9} \quad (5)$$

$$= 0,105263158 \quad (6)$$

De modo geral, dados três eventos A , B e C , temos que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

Essa relação pode ser estendida para um número finito qualquer de eventos.

Dizemos que os eventos A , B e C são independentes se, e somente se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (7)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Se apenas as três primeiras relações de (7) estiverem satisfeitas, dizemos que os eventos A , B e C são mutuamente independentes. É possível que três eventos sejam mutuamente independentes, mas não sejam completamente independentes.

Teorema de Bayes

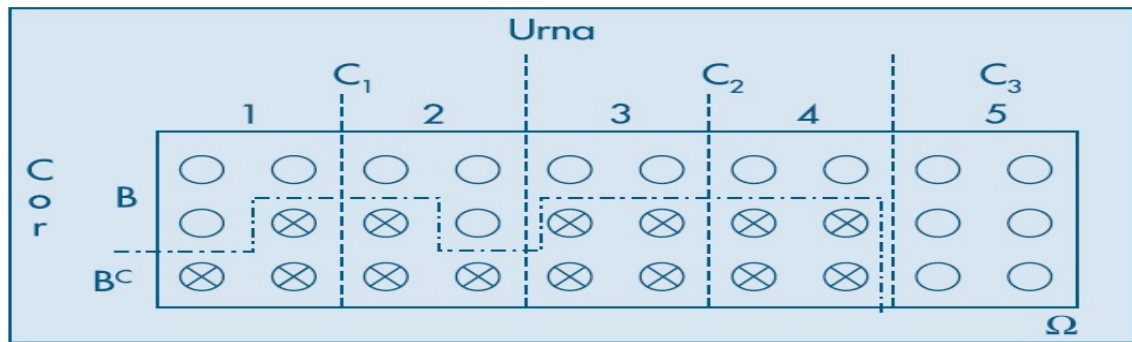
Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes. A versão mais simples desse teorema é dada pela fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad (8)$$

Observe que $P(A|B) > P(A)$ se $P(B|A) > P(B)$.

Exemplo 5.14 (Morettin e Bussab (2009))

Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo C_1) têm 3 bolas brancas, duas outras (tipo C_2) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo C_3) tem 6 bolas brancas. Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo C_3 , sabendo-se que a bola sorteada é branca?



Queremos encontrar $P(C_3|B)$, sabendo que

$$P(C_1) = 2/5, \quad P(B|C_1) = 1/2$$

$$P(C_2) = 2/5, \quad P(B|C_2) = 1/3$$

$$P(C_3) = 1/5, \quad P(B|C_3) = 1$$

Da definição de probabilidade condicional, temos

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)}$$

Precisamos encontrar o valor de $P(B)$, já que o numerador é conhecido. Como C_1 , C_2 e C_3 são eventos mutuamente exclusivos, e reunidos formam o espaço amostral completo, podemos decompor o evento B na reunião de três outros, também mutuamente exclusivos, como $B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B)$, então:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C_1 \cap B) + P(C_2 \cap B) + P(C_3 \cap B) \\ &= P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) + P(C_3)P(B|C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Logo,

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)} \quad (9)$$

$$= \frac{1/5 \times 1}{8/15} \quad (10)$$

$$= \frac{3}{8} \quad (11)$$

Referências Bibliográficas

P. Morettin e W. Bussab. *Estatística básica*. Editora Saraiva, São Paulo, 6 edition, 2009.