

# MAF 105 - Iniciação à Estatística

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Universidade Federal de Viçosa  
Campus UFV - Florestal

11/2018

# Sumário

- 1 Teste de hipóteses para uma média populacional
  - Teste-z
  - Teste-t
- 2 Teste de hipóteses para duas médias populacionais
  - Teste F para Comparação de Variâncias de Duas Populações
  - Variâncias populacionais conhecidas
  - Variâncias Desconhecidas e Desiguais
  - Variâncias Desconhecidas, porém iguais
- 3 Teste de hipóteses para o caso de duas amostras dependentes
- 4 Teste  $\chi^2$  para a variância

# Testes para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

Consideraremos teste de hipóteses acerca da média  $\mu$  de uma única população normal, em que a variância da população  $\sigma^2$  é conhecida. Consideraremos uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sendo retirada da população. Lembre-se, a média amostral  $\bar{X}$  é um estimador não tendencioso de  $\mu$  com variância  $\frac{\sigma^2}{n}$ .

Testamos as hipóteses  $H_0 : \mu = \mu_0$  versus  $H_1$  que pode ser unilateral ou bilateral. A estatística do teste z para uma média é:

$$z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Podemos encontrar o valor tabelado de z usando uma tabela apropriada a partir do nível de significância e da hipótese alternativa ou encontrar o valor - p e concluir de acordo com os resultados obtidos. Ao usar o valor tabelado, a regra de decisão será:

- $|z_{cal}| \geq z_{tab} \Rightarrow$  rejeitamos  $H_0$ ;
- caso contrário não rejeitamos  $H_0$ .

# Exemplo

Os sistemas de escape da tripulação de uma aeronave funcionam por causa de um propelente sólido. A taxa de queima desse propelente é uma característica importante do produto. As especificações requerem que a taxa média de queima tem de ser 50 centímetros por segundo. Sabemos que o desvio-padrão da taxa de queima é  $\sigma = 2$  centímetros por segundo. O experimentalista decide especificar uma probabilidade do erro tipo I ou nível de significância de  $\alpha = 0,05$ . Ele seleciona uma amostra aleatória de  $n = 25$  e obtém uma taxa média amostral de queima de  $\bar{x} = 51,3$  centímetros por segundo. Que conclusões poderiam ser tiradas?

# Exemplo

$$H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s}$$

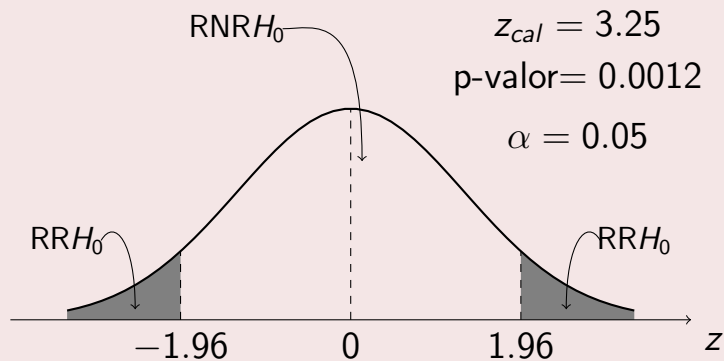
$$H_1 : \mu \neq 50 \text{ cm/s}$$

A estatística do teste z para uma média é:

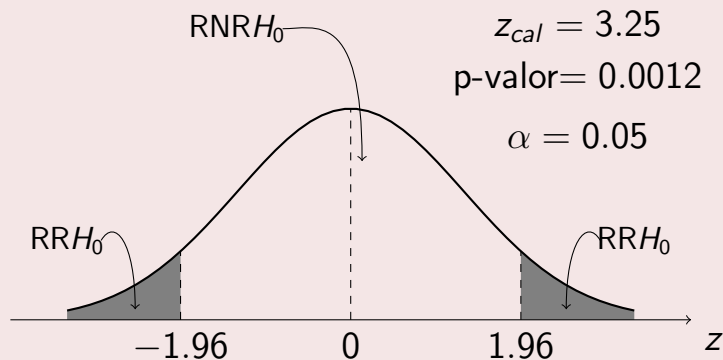
$$z_{cal} = \frac{51.3 - 50}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = 3.25$$

O p-valor do teste é  $p\text{-valor} = 2 * (1 - \Phi(3.25)) = 0.0012$ . Os limites das regiões críticas são  $z_{tab} = z_{0.025} = 1.96$  e  $-z_{tab} = -z_{0.025} = -1.96$

# Exemplo



# Exemplo



**Conclusão:** Como o p-valor é menor que  $\alpha$  rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância. De outra forma, como  $|z_{cal}| > |z_{tab}|$  rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância.



# Testes para a Média de uma Distribuição Normal, Variância desconhecida

A aplicação do teste  $t$  é indicada quando o tamanho amostral é igual ou inferior a 30 elementos. Para amostras com tamanho superior a 30, recomenda-se o teste  $Z$ .

# Testes para a Média de uma Distribuição Normal, Variância desconhecida

A aplicação do teste  $t$  é indicada quando o tamanho amostral é igual ou inferior a 30 elementos. Para amostras com tamanho superior a 30, recomenda-se o teste  $Z$ .

Ressalta-se que o uso do teste  $t$  pressupõe distribuição normal com variância populacional desconhecida.

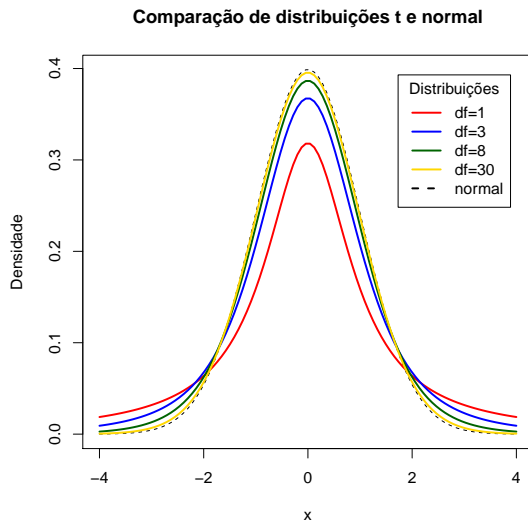
# Teste de hipóteses para uma média populacional

Este teste é usado para verificar se a média de uma característica de uma população assume um valor especificado, digamos  $\mu_0$ . Para aplicação deste teste devemos selecionar uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da população. Digamos que os elementos amostrais sejam;  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Com base nestes elementos amostrais, calculamos a sua média,  $\bar{x}$ , e seu desvio padrão,  $s$ . Estas estatísticas são então utilizadas para calcular o valor de  $t_{cal}$  usando a expressão:

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Esta estatística  $t$ , tem distribuição  $t$  de Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

# Teste de hipóteses para uma média populacional



Para decidirmos entre Rejeitar ou Não-Rejeitar  $H_0$ , comparamos o valor de  $t$  com o valor tabelado de  $t$  obtido por  $t_{tab} = t_{\alpha}(n - 1)$ . Depois de obtido o valor calculado e o valor tabelado de  $t$ , usamos a seguinte regra decisória:

- $|t_{cal}| \geq t_{tab} \Rightarrow$  rejeitamos  $H_0$ ;
- caso contrário não rejeitamos  $H_0$ .

# Exemplo

A disponibilidade crescente de materiais leves com alta resistência tem revolucionado o projeto e a fabricação de tacos de golfe, particularmente os direcionadores. Tacos com cabeças ocas e faces muito finas podem resultar em tacadas muito mais longas, especialmente para jogadores de habilidades modestas. Isso é causado parcialmente pelo “efeito mola” que a face fina impõe à bola. Bater na bola de golfe com a cabeça do taco e medir a razão entre a velocidade de saída da bola e a velocidade de chegada pode quantificar esse efeito mola. A razão de velocidades é chamada de coeficiente de restituição do taco.

# Exemplo

Um experimento foi feito, em que 15 tacos direcionadores, produzidos por determinado fabricante de tacos, foram selecionados ao acaso e seus coeficientes de restituição foram medidos. No experimento, bolas de golfe foram atiradas a partir de um canhão de ar, de modo que a velocidade de chegada e a taxa de giro da bola poderiam ser precisamente controladas. É de interesse determinar se há evidência (com  $\alpha = 0,05$ ) que suporte a afirmação de que o coeficiente médio de restituição excede 0,82. As observações seguem:

0,8411	0,8191	0,8182	0,8125	0,8750
0,8580	0,8532	0,8483	0,8276	0,7983
0,8042	0,8730	0,8282	0,8359	0,8660

A média e o desvio-padrão da amostra são  $\bar{x} = 0,83725$  e  $s = 0,02456$ .

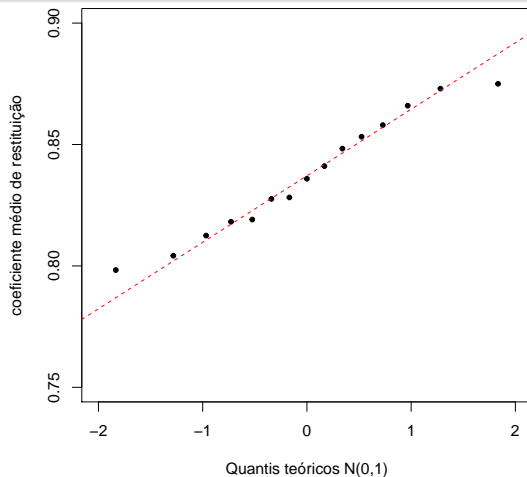
# Exemplo

```
> dados <- c(0.8411,0.8191,0.8182,0.8125,0.8750,0.8580,  
+           0.8532,0.8483,0.8276,0.7983,0.8042,0.8730,  
+           0.8282,0.8359,0.8660)  
  
> # Gráfico de probabilidade (QQ)  
> qqnorm(dados,  
+        main = "", xlab = "Quantis teóricos N(0,1)",  
+        pch = 20,  
+        ylab = "coeficiente médio de restituição",  
+        xlim=c(-2,2),  
+        ylim=c(0.75,0.9))  
> qqline(dados, lty = 2, col = "red")
```



# Exemplo

O gráfico de probabilidade normal dos dados suporta a suposição de que o coeficiente médio de restituição é normalmente distribuído.



# Exemplo

Logo, podemos utilizar o teste t:

$$H_0 : \mu = 0.82$$

$$H_1 : \mu > 0.82$$

A estatística do teste t para uma média é:

$$t_{cal} = \frac{0.83725 - 0.82}{\frac{0.02456}{\sqrt{15}}} = 2.72$$

O limite da região crítica é  $t_{tab} = t_{0.05}(14) = 1,76$

**Conclusão:** Como  $|t_{cal}| > |t_{tab}|$  rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância.

# Teste de hipóteses para duas médias populacionais

O objetivo deste teste é verificar se duas populações, digamos população 1 e população 2 apresentam um mesmo valor médio para uma determinada característica, isto é, deseja-se verificar se  $\mu_1 = \mu_2$ . Com esta finalidade é necessário obter uma amostra de cada população. Estas duas amostras podem ser relacionadas ou não, ou seja, podem ser dependentes ou independentes uma da outra. Esta distinção no relacionamento das duas amostras gera dois testes distintos. Além disso, podemos ter variâncias populacionais conhecidas, iguais ou diferentes, ou variâncias populacionais desconhecidas, que também podem ser iguais ou diferentes. Para cada caso também temos um teste. Antes de ver tais testes, precisamos conhecer o teste F de Snedecor.

# Teste F para Comparação de Variâncias de Duas Populações

Este teste é indicado para verificar se duas populações, digamos 1 e 2, apresentam igual valor para o parâmetro variância. Em termos de hipóteses estatísticas teríamos:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

A estatística  $F$  usada para decidir entre Rejeitar ou Não-Rejeitar  $H_0$  é dada pelo quociente entre as duas estimativas de variância, ou seja:

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Sob a hipótese de nulidade, este quociente tem distribuição  $F$ , de Fisher-Snedecor, com  $n_1$  e  $n_2$  graus de liberdade, ou seja a distribuição de probabilidades da estatística  $F$  depende dos números de graus de liberdade  $n_1$  e  $n_2$ . A conclusão do teste é feita mediante a comparação do valor de  $F_{cal}$  com o valor de  $F_{tab} = F_{\alpha}(n_1, n_2)$ . Se  $F_{cal} > F_{tab}$  Rejeita-se  $H_0$  ao nível  $\alpha$  de probabilidade. Caso contrário Não-Rejeita-se  $H_0$ .

# Exemplo

Com o intuito de controlar a homogeneidade da produção de certas partes ao longo do tempo, amostras semanais são retiradas da produção corrente. Uma primeira amostra, de dez elementos, forneceu média  $\bar{x} = 284.55$  e desvio padrão  $s_1 = 0.320$ , ao passo que, numa segunda amostra, forneceu, nas mesmas unidades, os seguintes valores:

284.6   283.9   284.8   285.2   284.3   283.7   284.0

Ao nível de 5% de significância, podemos concluir que a semana 2 apresentou maior variabilidade que a semana 1?

# Exemplo

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0,289}{0,1024} = 2,82 \quad (2)$$

O limite da região crítica é  $F_{tab} = F_{6,9}(0,05) = 3,37$

**Conclusão:** Como  $F_{cal} < F_{tab}$  não rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância.

# Variâncias populacionais conhecidas

Suponha  $P_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $P_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Queremos testar a hipótese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ . Se as variâncias populacionais são conhecidas (iguais ou diferentes), a estatística

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

tem distribuição normal padrão, sob a hipótese nula  $H_0$ , e poderia ser usada para testar  $H_0$  contra  $H_1$ .



Contudo, nas situações de interesse prático, as variâncias não são conhecidas, devendo ser substituídas por estimativas convenientes. Aqui, a distribuição  $t$  de Student desempenha papel importante. Vejamos os próximos slides!

# Variâncias Desconhecidas e Desiguais

Quando a hipótese de igualdade de variâncias for rejeitada pelo teste F, devemos usar a estatística

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

o número de graus de liberdade é dado aproximadamente por:

$$df = \frac{(A + B)^2}{\frac{A^2}{n-1} + \frac{B^2}{m-1}}, \quad A = \frac{S_1^2}{n}, \quad B = \frac{S_2^2}{m}$$

# Variâncias Desconhecidas e Desiguais

Quando a hipótese de igualdade de variâncias for rejeitada pelo teste F, devemos usar a estatística

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}}$$

o número de graus de liberdade é dado aproximadamente por:

$$df = \frac{(A + B)^2}{\frac{A^2}{n-1} + \frac{B^2}{m-1}}, \quad A = \frac{S_1^2}{n}, \quad B = \frac{S_2^2}{m}$$

Como esse valor é geralmente fracionário, arredonde para o inteiro mais próximo para obter o número de graus de liberdade.

# Teste de hipóteses para o caso de duas amostras independentes

Duas amostras são ditas serem independentes quando não existe nada que as relacione. Nesta situação, os valores amostrais foram obtidos em conjuntos amostrais distintos, ou seja, os elementos amostrais que originaram os valores de uma amostra são distintos dos elementos amostrais que originaram a segunda amostra.

Conforme mencionado anteriormente, para comparar as médias das duas populações, toma-se uma amostra de cada população. Suponha que as amostras geradas sejam  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$  e  $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2m}$ , onde o tamanho das amostras podem ser diferentes, ou seja,  $n$  pode ser diferente de  $m$ . Para cada amostra, então calcula-se a sua média e variância. Se as variâncias populacionais são iguais (faça um teste  $f$  para verificar isso), um estimador comum para a variância é obtido tomando-se uma média ponderada das estimativas de variância obtidas para as duas amostras. O tamanho da amostra é utilizado como um peso para o cálculo desta variância média ponderada.

A obtenção de um estimador comum para a variância pressupõe que a variância das duas populações sejam idênticas, ou seja  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . A fórmula do estimador comum é:

$$s_c^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

em que  $s_1^2$  e  $s_2^2$  são as variâncias amostrais das populações 1 e 2, respectivamente.

Uma vez obtidas estas estimativas, calcula-se o valor da estatística  $t$  dada por:

$$t_{cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_c^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Esta estatística tem distribuição  $t$  de Student com  $(n_1 + n_2 - 2)$  graus de liberdade. Faz-se então a comparação do valor calculado de  $t$  com o valor tabelado dado por  $t_{tab} = t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ , usando a regra:

- $|t_{cal}| \geq t_{tab} \Rightarrow$  rejeitamos  $H_0$ ;
- caso contrário não rejeitamos  $H_0$ .

# Exemplo

Os dados que seguem referem-se a cinco determinações da resistência de dois tipos de concreto. Ao nível de 5% de significância, há evidência de que o concreto 1 seja mais resistente que o concreto 2?

Concreto 1	54	55	58	51	57
Concreto 2	50	54	56	52	53



# Exemplo

\*Procedemos o teste F e não rejeitamos  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$t_{cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_c^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{(55 - 53)}{\sqrt{6.25 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)}} = 1.265$$

O limite da região crítica é  $t_{tab} = t_{0.05}(8) = 1,86$

**Conclusão:** Como  $|t_{cal}| < |t_{tab}|$  não rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância.

# Teste de hipóteses para o caso de duas amostras dependentes

Duas amostras de elementos são ditas serem dependentes quando existe algo que as relacione. Por exemplo, se os valores de duas amostras foram obtidos de um mesmo conjunto de elementos amostrais, podemos dizer que as duas amostras de valores são dependentes uma vez que foram tomados de um conjunto de elementos amostrais comum.

# Teste de hipóteses para o caso de duas amostras dependentes

Duas amostras de elementos são ditas serem dependentes quando existe algo que as relacione. Por exemplo, se os valores de duas amostras foram obtidos de um mesmo conjunto de elementos amostrais, podemos dizer que as duas amostras de valores são dependentes uma vez que foram tomados de um conjunto de elementos amostrais comum.

O objetivo neste caso é verificar se houve alteração na média de uma população quando a mesma é avaliada sob duas condições diferentes. Cada condição representa uma população distinta, embora se suponha que os elementos populacionais sejam os mesmos nas duas condições.

Para verificar se houve alteração na média, avalia-se uma característica de interesse do pesquisador num conjunto de elementos amostrais tomados ao acaso na população quando a mesma esteja sob a condição 1. Digamos que a avaliação da característica resulte nos seguintes valores amostrais  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ .

Depois de feita esta avaliação, os elementos amostrais que originaram a primeira amostra, sejam submetidos à condição 2. Os mesmos elementos amostrais são novamente avaliados para a mesma característica na nova condição 2. Digamos que esta nova avaliação resulte nos seguintes valores amostrais  $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}$ . Se a condição 2 não tiver nenhum efeito, espera-se que em média os valores observados nas duas condições sejam iguais.

Em termos de desvios, se a alteração das condições não resultasse em nenhum efeito significativo, poderíamos dizer que a diferença entre os valores observados na primeira condição e na segunda condição seria em média igual a zero. Portanto para verificar se houve alteração na média de uma população avaliada em duas condições diferentes, pode-se testar a hipótese de que o desvio médio ser estatisticamente igual a zero.

Portanto, a partir de duas amostras obtém-se uma outra baseada nos desvios, conforme é mostrado a seguir.

Elemento amostral $i$	1	2	$\dots$	$n$
amostra 1	$X_{11}$	$X_{12}$	$\dots$	$X_{1n}$
amostra 2	$X_{21}$	$X_{22}$	$\dots$	$X_{2n}$
$d_i = X_{1i} - X_{2i}$	$d_1$	$d_2$	$\dots$	$d_n$

Apresentado desta forma, o teste t para duas amostras dependentes reduz-se teste t para uma média populacional, visto anteriormente. No presente caso, deseja-se testar se a média dos desvios é igual por exemplo a um valor  $\mu_0$ .

Para decidir entre Rejeitar ou Não-Rejeitar a hipótese de nulidade, deve-se calcular o valor da estatística  $t$  dada por

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{em que} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \quad \text{e} \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n d_i)^2}{n}}{n-1}$$

Sob  $H_0$ , esta estatística  $t$  tem distribuição  $t$  de Student com  $n - 1$  graus de liberdade. A comparação deste valor calculado com o valor de  $t_{tab}$  dado por  $t_{tab} = t_{\alpha}(n - 1)$  nos leva a conclusão do teste.



# Exemplo

Com o objetivo de avaliar se determinado produto químico é eficiente para repelir insetos domésticos, foi realizada uma contagem do número de insetos, antes e após a aplicação deste produto químico, em 7 residências. O número de insetos observado em cada residência foi

Residência	1	2	3	4	5	6	7
Antes da aplicação	8	6	7	8	9	6	7
Após a aplicação	4	0	3	5	3	4	2
Diferença ( $d_i$ )	4	6	4	3	6	2	5

Por meio destes dados e ao nível de 5% de probabilidade, é possível concluir, em termos médios, que o produto utilizado é eficiente para repelir insetos?

# Exemplo

$$H_0 : \mu_d = 0$$

$$H_1 : \mu_d > 0$$

$$t_{cal} = \frac{(4.286 - 0)}{\sqrt{\frac{2.24}{7}}} = 7.58$$

O limite da região crítica é  $t_{tab} = t_{0.05}(6) = 1,94$

**Conclusão:** Como  $|t_{cal}| > |t_{tab}|$  rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância.

# Teste $\chi^2$ para a variância

Suponha que desejamos testar a hipótese de que a variância de uma população normal  $\sigma^2$  seja igual a um valor específico, como  $\sigma_0^2$ , ou equivalentemente, que o desvio-padrão  $\sigma$  seja igual a  $\sigma_0$ . Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de  $n$  observações, proveniente dessa população. Para testar

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

usaremos a estatística de teste:

$$\chi_{cal}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad (3)$$

# Teste $\chi^2$ para a variância

Se a hipótese nula  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  for verdadeira, então a estatística de teste  $\chi^2$ , definida na Equação (3), segue a distribuição qui-quadrado, com  $n - 1$  graus de liberdade.

# Exemplo

Uma máquina de enchimento automático é usada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância amostral de volume de enchimento de  $s^2 = 0,0153 \text{ ml}^2$ . Se a variância do volume de enchimento exceder 0,01, existirá uma proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia. Há evidência nos dados da amostra sugerindo que o fabricante tenha um problema com garrafas cheias com falta e excesso de detergente? Use  $\alpha = 0,05$  e considere que o volume de enchimento tenha uma distribuição normal.

# Exemplo

$$H_0 : \sigma^2 = 0.01$$

$$H_1 : \sigma^2 > 0.01$$

$$\chi_{cal}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \times 0.0153}{0.01} = 29.07 \quad (4)$$

O limite da região crítica é  $\chi_{tab} = \chi_{0.05}(19) = 30, 14$

**Conclusão:** Como  $|\chi_{cal}| < |\chi_{tab}|$  não rejeita-se  $H_0$  ao nível de  $\alpha = 5\%$  de significância. Logo, não há forte evidência de um problema com garrafas preenchidas incorretamente.