

# MAF 105 - Iniciação à Estatística

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Universidade Federal de Viçosa  
Campus UFV - Florestal

2018

# Sumário

1 Probabilidade Condicional e Independência

2 Teorema de Bayes

Para dois eventos quaisquer  $A$  e  $B$ , sendo  $P(B) > 0$ , definimos a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

Assim, a probabilidade de  $A$  muda após o evento  $B$  ter acontecido. Isso porque o resultado de  $A$  é uma das possibilidades de  $B$  ou de  $B^c$ .

# Exemplo

Considere-se um baralho de 52 cartas. A probabilidade de ao retirar uma carta sair um rei é  $4/52$ , ou  $1/13$ . No entanto, se alguém retira uma carta e nos diz que é uma figura, então a probabilidade de a carta retirada ser um rei é  $4/12 = 1/3$ , ou seja,  $P(\text{sair um rei} | \text{sair uma figura}) = 1/3$ .

# Exemplo



Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?

# Exemplo



Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

b) Segunda ser preta?

# Exemplo



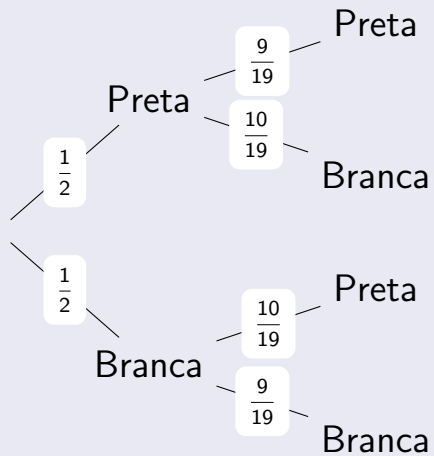
Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

- a) Ambas pretas?

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

- b) Segunda ser preta?

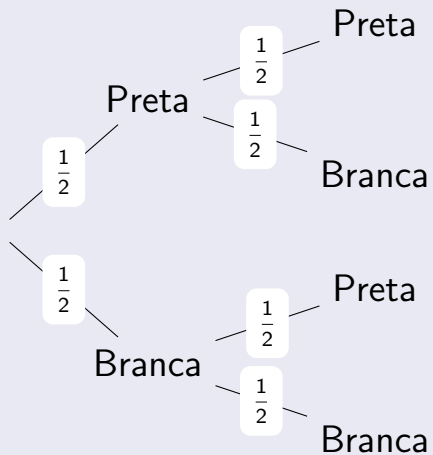
$$P(P_2) = P[(P_1 \cap P_2) \cup (P_2 \cap P_1)]$$





Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{9}{38}$
BP	$\frac{10}{38}$
PB	$\frac{10}{38}$
PP	$\frac{9}{38}$
Total	1

**Figura:** Com reposição



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{1}{4}$
BP	$\frac{1}{4}$
PB	$\frac{1}{4}$
PP	$\frac{1}{4}$
Total	1

Observem que, neste segundo caso,  $P(B_2|B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ . Ou seja,

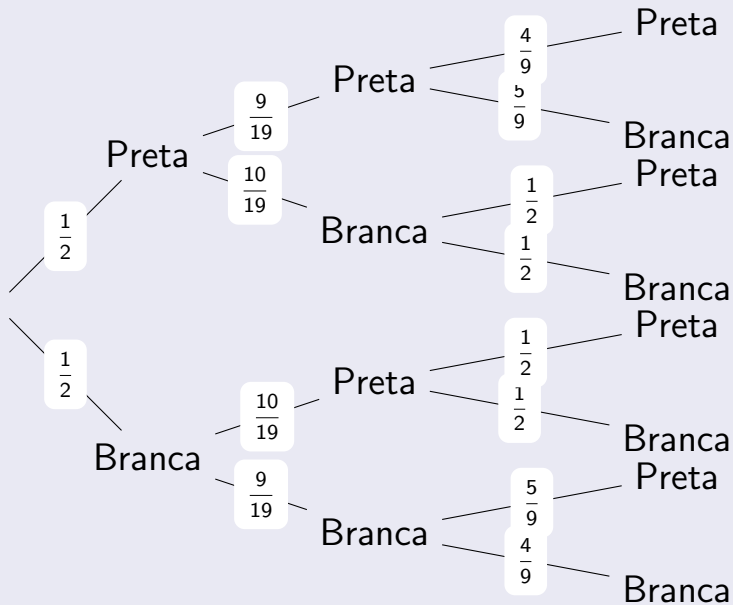
$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B).$$

Nesse caso, dizemos que o evento  $A$  independe do evento  $B$  e, usando (1), temos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2)$$

É fácil ver que se  $A$  independe de  $B$ , então  $B$  independe de  $A$ . A fórmula acima pode ser tomada como definição de independência entre dois eventos, ou seja,  $A$  e  $B$  são independentes se, e somente se, (2) for válida.

Considere ainda a urna dos exemplos anteriores, mas vamos fazer três extrações sem reposição. Indiquemos por  $P_i$  ou  $B_i$  a obtenção de bola preta ou branca na  $i$ -ésima extração, respectivamente,  $i = 1, 2, 3$ .



Resultados	Probabilidades
BBB	0,105263158
BBP	0,131578947
BPB	0,131578947
PBB	0,131578947
BPP	0,131578947
PBP	0,131578947
PPB	0,131578947
PPP	0,105263158
Total	1

Observem que:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 \cap B_2) \quad (3)$$

$$= \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{19} \times \frac{4}{9} \quad (5)$$

$$= 0,105263158 \quad (6)$$

De modo geral, dados três eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , temos que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

Essa relação pode ser estendida para um número finito qualquer de eventos.



Dizemos que os eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são independentes se, e somente se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (7)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Se apenas as três primeiras relações de (7) estiverem satisfeitas, dizemos que os eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são mutuamente independentes. É possível que três eventos sejam mutuamente independentes, mas não sejam completamente independentes.

# Teorema de Bayes

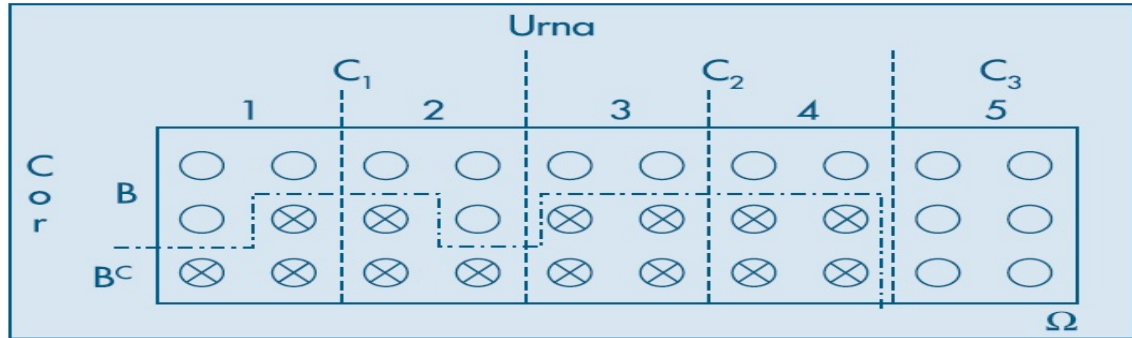
Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes. A versão mais simples desse teorema é dada pela fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad (8)$$

Observe que  $P(A|B) > P(A)$  se  $P(B|A) > P(B)$ .

## Exemplo 5.14 (Morettin e Bussab (2009))

Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo  $C_1$ ) têm 3 bolas brancas, duas outras (tipo  $C_2$ ) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo  $C_3$ ) tem 6 bolas brancas. Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo  $C_3$ , sabendo-se que a bola sorteada é branca?



Queremos encontrar  $P(C_3|B)$ , sabendo que

$$P(C_1) = 2/5, P(B|C_1) = 1/2$$

$$P(C_1) = 2/5, P(B|C_2) = 1/3$$

$$P(C_1) = 1/5, P(B|C_3) = 1$$

Da definição de probabilidade condicional, temos

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)}$$

Precisamos encontrar o valor de  $P(B)$ , já que o numerador é conhecido. Como  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são eventos mutuamente exclusivos, e reunidos formam o espaço amostral completo, podemos decompor o evento  $B$  na reunião de três outros, também mutuamente exclusivos, como  $B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B)$ , então:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C_1 \cap B) + P(C_2 \cap B) + P(C_3 \cap B) \\ &= P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) + P(C_3)P(B|C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Logo,

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)} \quad (9)$$

$$= \frac{1/5 \times 1}{8/15} \quad (10)$$

$$= \frac{3}{8} \quad (11)$$

# Referências Bibliográficas

P. Morettin e W. Bussab. *Estatística básica*. Editora Saraiva, São Paulo, 6 edition, 2009.