MAF 105 - Iniciação à Estatística

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas Universidade Federal de Viçosa Campus UFV - Florestal

Sumário

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Variância e Covariância

Valor Médio - Esperança - Expectância

Definição para v.a.d.: Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(x_i)$. A esperança de X é definida por:

$$E(X) = \mu_X = \mu = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

A esperança de X também é chamada média de X, ou valor esperado de X. Notemos que E(X) é uma média ponderada, onde os pesos são as probabilidades $p(x_i)$.

Observação: Se X é uma v.a.d. com função de probabilidade $p(x_i)$, então para qualquer função g(X) temos:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i)p(x_i).$$

Exemplo

Um jogador erra 10% dos seus chutes a gol e acerta 90% deles. Cada erro é punido com R\$ 100 enquanto cada acerto é premiado com R\$ 500 no salário. Considere a v.a. $X = \{ \text{lucro líquido por jogo} \}$. Calcular a média de lucro líquido por jogo.

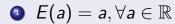
Definição para v.a.c.: Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). A esperança de X é definida por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Exemplo: Uma v.a.c. X possui a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} & x < 0; \\ \frac{x}{2}, & \text{se} & 0 \le x \le 2; \\ 0, & \text{se} & x > 2. \end{cases}$$

Calcular E(X).



- E[X E(X)] = 0

- E[X E(X)] = 0

- $E(a) = a, \forall a \in \mathbb{R}$
- E[X E(X)] = 0
- \bullet Se X e Y são v.a. independentes, então E(XY) = E(X)E(Y)

Observação: Se E(XY) = E(X)E(Y), não podemos afirmar que X e Y são v.a. independentes. Vejamos:

Suponha que
$$X=0$$
 ou $X=\frac{\pi}{2}$ ou $X=\pi$, em que $P(X=0)=P(\frac{\pi}{2})=0$

$$P(\pi) = \frac{1}{3}$$
, considere $Y = senX$, $Z = cosX$.

Obviamente Y e Z não são independentes, uma vez que, $Y^2 + Z^2 = 1$.

Porém,
$$E(Y) = \frac{1}{3}$$
, $E(Z) = 0$, $E(YZ) = 0$, logo $E(YZ) = E(Y)E(Z)$.

Variância e Covariância

Definição:

ullet Sejam X e Y v.a., definimos a covariância entre X e Y,

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

A covariância mede o grau de dispersão conjunta de duas variáveis aleatórias.

Variância e Covariância

Definição:

ullet Sejam X e Y v.a., definimos a covariância entre X e Y,

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

A covariância mede o grau de dispersão conjunta de duas variáveis aleatórias.

Seja X v.a., definimos a variância de X como,

$$var(X) = cov(X, X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X - \mu]^2.$$

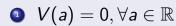
Observações:

• $var(X) = V(X) = \sigma_X^2$;

Observações:

- $var(X) = V(X) = \sigma_X^2$;
- Desvio padrão de X é a raiz quadrada da variância de X, denotada por:

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)}$$
.



- $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(aX) = a^2V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X \pm a) = V(X), \forall a \in \mathbb{R}$

- $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(aX) = a^2V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X \pm a) = V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X \pm Y) = V(X) \pm V(Y)$, se X e Y forem independentes.

- $V(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(aX) = a^2V(X), \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(X \pm Y) = V(X) \pm V(Y)$, se X e Y forem independentes.
- $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm cov(X, Y)$, para quaisquer duas variáveis aleatórias $X \in Y$.

Definição: O coeficiente de correlação entre as v.a. X e Y é definido como:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Referências Bibliográficas