MAF 261 - Estatística Experimental

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Florestal

2018

Sumário

Experimentos Fatoriais

Experimentos fatoriais são aqueles em que se estudam simultaneamente dois ou mais fatores, cada um deles com dois ou mais níveis.

Experimentos Fatoriais

Experimentos fatoriais são aqueles em que se estudam simultaneamente dois ou mais fatores, cada um deles com dois ou mais níveis.

O fatorial é um tipo de esquema, ou seja, uma das maneiras de organizar os tratamentos e não um tipo de delineamento, que representa a maneira pela qual os tratamentos são distribuídos às unidades experimentais.

Experimentos Fatoriais

Experimentos fatoriais são aqueles em que se estudam simultaneamente dois ou mais fatores, cada um deles com dois ou mais níveis.

O fatorial é um tipo de esquema, ou seja, uma das maneiras de organizar os tratamentos e não um tipo de delineamento, que representa a maneira pela qual os tratamentos são distribuídos às unidades experimentais.

Na verdade, os experimentos fatoriais são montados segundo um tipo de delineamento experimental, como por exemplo: o DIC e o DBC.

Nos experimentos fatoriais, os tratamentos são obtidos pelas combinações dos níveis dos fatores.

Nos experimentos fatoriais, os tratamentos são obtidos pelas combinações dos níveis dos fatores.

Num experimento fatorial completo, cada nível de um fator combina com todos os níveis dos outros fatores.

Nos experimentos fatoriais, os tratamentos são obtidos pelas combinações dos níveis dos fatores.

Num experimento fatorial completo, cada nível de um fator combina com todos os níveis dos outros fatores.

A principal aplicação de experimentos fatoriais é quando se quer saber sobre o efeito de diversos fatores que influenciam na variável em estudo e o relacionamento entre eles.

A simbologia comumente utilizada, para experimentos fatoriais é indicar o produto dos níveis dos fatores em teste. Por exemplo: Experimento Fatorial $2x4x6$. O produto $2x4x6$ informa que no experimento foram testados simultaneamente 3 fatores. O primeiro possui 2 níveis, o segundo 4 níveis e o terceiro 6 níveis.

A simbologia comumente utilizada, para experimentos fatoriais é indicar o produto dos níveis dos fatores em teste. Por exemplo: Experimento Fatorial $2x4x6$. O produto $2x4x6$ informa que no experimento foram testados simultaneamente 3 fatores. O primeiro possui 2 níveis, o segundo 4 níveis e o terceiro 6 níveis.

Quando o número de níveis é igual para todos os fatores, pode-se utilizar a seguinte simbologia: n^F, em que F é o número de fatores n é o número de níveis de cada fator. Por exemplo: Experimento Fatorial 4^3. A potência 4^3 informa que o experimento tem 3 fatores com 4 níveis cada um.

Tipos de efeitos avaliados em um experimento fatorial

Nos experimentos fatoriais, podem ser estudados os seguintes efeitos:

- **Efeito Principal:** é o efeito de cada fator, independente do efeito dos outros fatores;

Tipos de efeitos avaliados em um experimento fatorial

Nos experimentos fatoriais, podem ser estudados os seguintes efeitos:

- **Efeito Principal:** é o efeito de cada fator, independente do efeito dos outros fatores;
- **Efeito de Interação:** é o efeito simultâneo dos fatores sobre a variável em estudo. Dizemos que ocorre interação entre os fatores quando os efeitos dos níveis de um fator são modificados pelos níveis do outro fator.

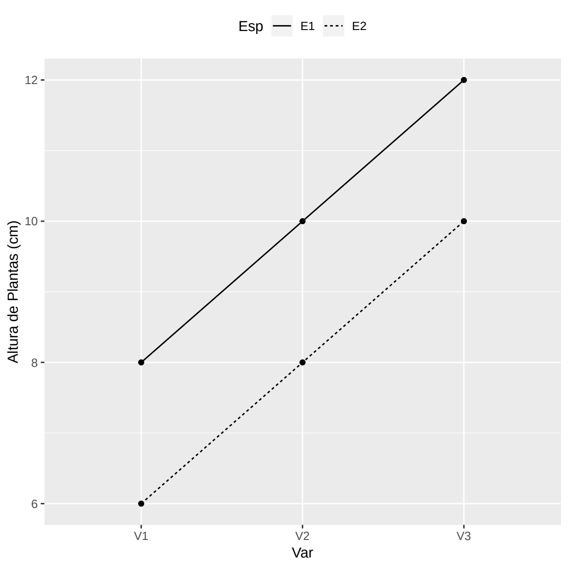
O efeito da interação pode ser mais facilmente compreendido por meio de gráficos. Para ilustrar o efeito da interação, considere um experimento fatorial $3x2$, em que os fatores em testes são Variedade (V) e Espaçamento (E). Os tratamentos para este experimento são os seguintes:

V1E1	V2E1	V3E1
V1E2	V2E2	V3E2

Suponha os seguintes resultados fictícios, para a variável altura de plantas (cm), deste experimento, nas seguintes situações:

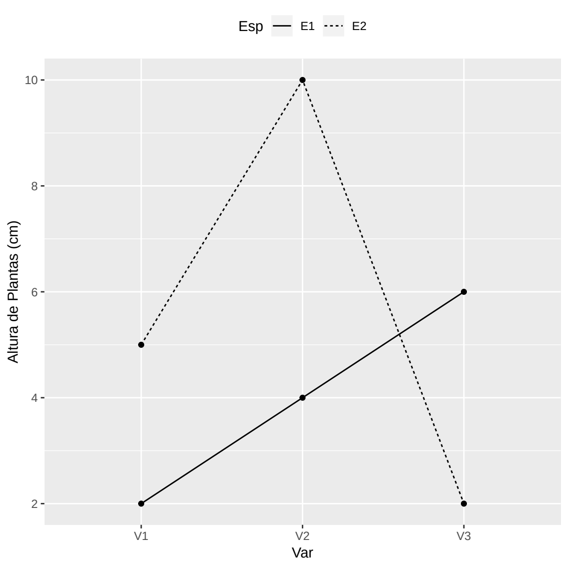
	Variedades		
Espaçamentos	$V1$	$V2$	$V3$
$E1$	8	10	12
$E2$	6	8	10

Quando não há interação as diferenças entre os resultados dos níveis de um fator são estatisticamente iguais para todos os níveis do outro fator.


Esp
E1
E2
12
10
8
6
Altura de Plantas (cm)
V1
V2
V3
Var

Espaçamentos	Variedades		
	$V1$	$V2$	$V3$
$E1$	2	4	6
$E2$	5	10	2

Quando há interação as diferenças entre os níveis de um fator dependem dos níveis do outro fator.


Esp
E1
E2
10
8
6
4
2
Altura de Plantas (cm)
V1
V2
V3
Var

Uma maneira de tabular os dados de um experimento fatorial, com dois fatores A e B, com I e níveis, respectivamente, instalados segundo o DIC, com K repetições, é fornecida a seguir:

	A1				A2					AI			
Repetição	B1	B2	...	BJ	B1	B2	...	BJ	...	B1	B2	...	BJ
1	Y_{111}	Y_{121}	...	Y_{1J1}	Y_{211}	Y_{221}	...	Y_{2J1}	...	Y_{I11}	Y_{I21}	...	Y_{IJ1}
2	Y_{112}	Y_{122}	...	Y_{1J2}	Y_{212}	Y_{222}	...	Y_{2J2}	...	Y_{I12}	Y_{I22}	...	Y_{IJ2}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
K	Y_{11K}	Y_{12K}	...	Y_{1JK}	Y_{21K}	Y_{22K}	...	Y_{2JK}	...	Y_{I1K}	Y_{I2K}	...	Y_{IJK}
Total	$Y_{11\bullet}$	$Y_{12\bullet}$	...	$Y_{1J\bullet}$	$Y_{21\bullet}$	$Y_{22\bullet}$	...	$Y_{2J\bullet}$	...	$Y_{I1\bullet}$	$Y_{I2\bullet}$	...	$Y_{IJ\bullet}$

Pode-se montar um quadro auxiliar contendo os totais de tratamentos, cujos valores são obtidos pela soma de todas as repetições para o tratamento em questão. Este quadro facilita o cálculo das somas de quadrados devido aos fatores A e B, e da interação entre eles. Para a situação citada, o quadro de totais de tratamentos é do seguinte tipo:

Fator A	Fator B				Totais
	B1	B2	...	BJ	
A1	$Y_{11.}$	$Y_{12.}$	...	$Y_{1J.}$	A_1
A2	$Y_{21.}$	$Y_{22.}$	...	$Y_{2J.}$	A_2
...	...	...	...	...	...
AI	$Y_{I1.}$	$Y_{I2.}$	...	$Y_{IJ.}$	A_I
Totais	B_1	B_2	...	B_j	G

Considere um experimento fatorial, com dois fatores: o fator A com I níveis e o fator B com J níveis, instalados segundo o DIC, com K repetições. O modelo estatístico para um experimento como este é:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}$$

em que, Y_{ijk} é o valor observado para a variável em estudo referente a k-ésima repetição da combinação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B; α_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A no valor observado Y_{ijk}; β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B no valor observado Y_{ijk}; $(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito da interação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B;

Para um experimento fatorial instalado segundo o DBC, com K blocos, o modelo estatístico seria:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \omega_k + e_{ijk}$$

em que, ω_k é o efeito do k-ésimo bloco na observação Y_{ijk}.

A análise de variância de um experimento fatorial é feita desdobrando-se a soma de quadrados de tratamentos nas partes devido aos efeitos principais de cada fator e na parte devido à interação entre os fatores.

A análise de variância de um experimento fatorial é feita desdobrando-se a soma de quadrados de tratamentos nas partes devido aos efeitos principais de cada fator e na parte devido à interação entre os fatores.

O quadro a seguir apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições, instalado segundo o DIC.

O quadro a seguir apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições, instalado segundo o DIC.

O quadro a seguir apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições, instalado segundo o DIC.

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab;\alpha}$
A	$(I-1)$	SQA	–	–	–
B	$(J-1)$	SQB	–	–	–
$A \times B$	$(I-1)(J-1)$	SQInt	$\frac{SQInt}{(I-1)(J-1)}$	$\frac{QMInt}{QMRes}$	$[(I-1)(J-1); n_2]$
(Trat)	$(IJ-1)$	(SQTrat)	–	–	–
Resíduo	$n_2 = IJ(K-1)$	SQRes	$\frac{SQRes}{IJ(K-1)}$	–	–
Total	$IJK-1$	SQTotal	–	–	–

As fórmulas para a obtenção das somas de quadrados são as seguintes:

$$SQTotal = \sum_{i=1,j=1,k=1}^{I,J,K} Y_{ijk}^2 - C \qquad C = \frac{\left(\sum_{i=1,j=1,k=1}^{I,J,K} Y_{ijk}\right)^2}{IJK}$$

$$SQTrat = \sum_{i=1,j=1}^{I,J} \frac{Y_{ij.}^2}{k} - C \qquad SQA = \sum_{i=1}^{I} \frac{A_i^2}{JK} - C$$

$$SQB = \sum_{j=1}^{J} \frac{B_j^2}{IK} - C \qquad SQInt = SQTrat - SQA - SQB$$

$$SQResduo = SQTotal - SQTrat$$

O quadro abaixo apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições (ou blocos), instalado segundo o DBC.

O quadro abaixo apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições (ou blocos), instalado segundo o DBC.

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab;\alpha}$
A	$(I-1)$	SQA	–	–	–
B	$(J-1)$	SQB	–	–	–
$A \times B$	$(I-1)(J-1)$	SQInt	$\frac{SQInt}{(I-1)(J-1)}$	$\frac{QMInt}{QMRes}$	$[(I-1)(J-1); n_2]$
(Trat)	$(IJ-1)$	(SQTrat)	–	–	–
Blocos	$k-1$	SQBlocos	–	–	–
Resíduo	$n_2 = (IJ-1)(K-1)$	SQRes	$\frac{SQRes}{(IJ-1)(K-1)}$	–	–
Total	$IJK-1$	SQTotal	–	–	–

Nesta situação,

$$SQBlocos = \sum_{k=1}^{K} \frac{\omega_k^2}{IJ} - C$$

em que, $\omega_k = \sum_{i=1,j=1}^{I,J} Y_{ijk} = Y_{..k}$

Conforme apresentado nas duas tabelas anteriores, na análise dos dados oriundos de um experimento fatorial, para os dois tipos de delineamentos, deve-se inicialmente proceder ao teste F para a interação entre os fatores. As hipóteses para o teste F da interação são:

Conforme apresentado nas duas tabelas anteriores, na análise dos dados oriundos de um experimento fatorial, para os dois tipos de delineamentos, deve-se inicialmente proceder ao teste F para a interação entre os fatores. As hipóteses para o teste F da interação são:

H_0 : Os fatores A e B atuam independentemente sobre a variável resposta em estudo.
H_1 : Os fatores A e B não atuam independentemente sobre a variável resposta em estudo.

O resultado deste teste F para a interação indica como as comparações dos níveis de um fator devem ser realizadas. Temos dois resultados possíveis para o teste F da interação os quais serão apresentados a seguir.

Interação não-significativa

Este caso ocorre quando a hipótese H_0 para a interação entre os fatores não é rejeitada. Este resultado implica que os efeitos dos fatores atuam de forma independente.

Interação não-significativa

Este caso ocorre quando a hipótese H_0 para a interação entre os fatores não é rejeitada. Este resultado implica que os efeitos dos fatores atuam de forma independente.

Portanto recomenda-se que as comparações dos níveis de um fator sejam feitas de forma geral em relação ao outro fator, ou seja, independente dos níveis outro fator. O passo seguinte na análise estatística dos dados experimentais é proceder ao teste F para cada fator como ilustrado na tabela apresentada a seguir para o caso do DBC.

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab;\alpha}$
A	$(I-1)$	SQA	$\frac{SQA}{(I-1)}$	$\frac{QMA}{QMRes}$	$[(I-1), n_2]$
B	$(J-1)$	SQB	$\frac{SQB}{(J-1)}$	$\frac{QMB}{QMRes}$	$[(J-1), n_2]$
$A \times B$	$(I-1)(J-1)$	SQInt	$\frac{SQInt}{(I-1)(J-1)}$	Não-Significativo	$-$
(Trat)	$(IJ-1)$	(SQTrat)	$-$	$-$	$-$
Blocos	$k-1$	SQBlocos	$-$	$-$	$-$
Resíduo	$n_2=(IJ-1)(K-1)$	SQRes	$\frac{SQRes}{(IJ-1)(K-1)}$	$-$	$-$
Total	$IJK-1$	SQTotal	$-$	$-$	$-$

As hipóteses para realizar o teste F para os efeitos principais são:

Fator A

$H_0 : \mu_{A_1} = \cdots = \mu_{A_I}$, ou seja, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator A, são estatisticamente nulos, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.
H_1 : Não H_0. Ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator A, que é estatisticamente diferente de zero, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

As hipóteses para realizar o teste F para os efeitos principais são:

Fator A

$H_0 : \mu_{A_1} = \cdots = \mu_{A_I}$, ou seja, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator A, são estatisticamente nulos, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.
H_1 : Não H_0. Ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator A, que é estatisticamente diferente de zero, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

Fator B

$H_0 : \mu_{B_1} = \cdots = \mu_{B_J}$.
H_1 : Não H_0. Ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator B, que é estatisticamente diferente de zero, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

Se os fatores A e B forem qualitativos, e o teste F para A e/ou B, for não significativo, a aplicação do teste de médias é desnecessária. Se o teste F for significativo, para A e/ou B, aplica-se um teste de médias para comparar os níveis do fator. As estimativas das médias dos níveis dos fatores são obtidas por:

$$\hat{\mu}_{A_i} = \frac{A_i}{JK} \quad \hat{\mu}_{B_j} = \frac{B_j}{IK}$$

Interação significativa

Este caso ocorre quando a hipótese H_0 para a interação entre os fatores é rejeitada. Este resultado implica que os efeitos dos fatores atuam de forma dependente. Neste caso as comparações entre os níveis de um fator levam em consideração o nível do outro fator, pois o resultado significativo para a interação indica que o efeito de um fator depende do nível do outro fator.

Portanto, não é recomendado realizar o teste F para cada fator isoladamente tal como foi apresentado para o caso da interação não significativa. O procedimento recomendado é realizar o desdobramento do efeito da interação.

Para realizar este desdobramento deve-se fazer uma nova análise de variância em que os níveis de um fator são comparados dentro de cada nível do outro fator, tal como apresentado nas tabelas a seguir.

Desdobramento para comparar os níveis de A dentro de cada nível de B, ou seja, estudar A/B :

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab,\alpha}$
A/B1	(I-1)	SQA/B1	$\frac{SQA/B1}{(I-1)}$	$\frac{QMA/B1}{QMRes}$	$[(I-1);n_2]$
A/B2	(I-1)	SQA/B2	$\frac{SQA/B2}{(I-1)}$	$\frac{QMA/B2}{QMRes}$	$[(I-1);n_2]$
...	...	...	...	...	...
A/BJ	(I-1)	SQA/BJ	$\frac{SQA/BJ}{(I-1)}$	$\frac{QMA/BJ}{QMRes}$	$[(I-1);n_2]$
Resíduo	n_2		QMRes	-	
Total	IJK - 1	SQTotal	-	-	-

As hipóteses para testar as fontes de variação da tabela acima, para $j = 1, 2, 3, \cdots, J$, são:
$H_0 : \mu_{A_1/B_j} = \mu_{A_2/B_j} = \cdots = \mu_{A_I/B_j}$
H_1 : Não H_0

Desdobramento para comparar os níveis de B dentro de cada nível de A, ou seja estudar B/A

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab,\,\alpha}$
B/A1	(J-1)	SQB/A1	$\frac{SQB/A1}{(J-1)}$	$\frac{QMB/A1}{QMRes}$	$[(J-1);n_2]$
B/A2	(J-1)	SQB/A2	$\frac{SQB/A2}{(J-1)}$	$\frac{QMB/A2}{QMRes}$	$[(J-1);n_2]$
...	...	...	...	...	...
B/AI	(J-1)	SQB/AI	$\frac{SQB/AI}{(J-1)}$	$\frac{QMB/AI}{QMRes}$	$[(J-1);n_2]$
Resíduo	n_2		QMRes	-	
Total	IJK - 1	SQTotal	-	-	-

As hipóteses para testar as fontes de variação da tabela acima, para $i = 1, 2, 3, \cdots, I$, são:

$H_0 : \mu_{B_1/B_i} = \mu_{B_2/A_i} = \cdots = \mu_{B_J/A_i}$

H_1 : Não H_0

Se os fatores forem qualitativos, procede-se ao teste F para cada fonte de variação do desdobramento. Nas fontes de variação em que o teste F foi significativo e o fator tem mais de dois níveis, recomenda-se a aplicação de um teste de médias. As estimativas das médias dos níveis dos fatores são obtidas por

$$\hat{\mu}_{A_i} = \frac{A_i}{K} \quad \hat{\mu}_{B_j} = \frac{B_j}{K}$$

Vantagens e desvantagem de um experimento fatorial

Vantagens

- Permite o estudo dos efeitos principais e o efeito da interação entre os fatores.

Vantagens e desvantagem de um experimento fatorial

Vantagens

- Permite o estudo dos efeitos principais e o efeito da interação entre os fatores.
- O número de graus de liberdade associado ao resíduo é alto quando comparado com os experimentos simples dos mesmos fatores, o que contribui para diminuir a variância residual, aumentando a precisão do experimento.

Vantagens e desvantagem de um experimento fatorial

Vantagens

- Permite o estudo dos efeitos principais e o efeito da interação entre os fatores.
- O número de graus de liberdade associado ao resíduo é alto quando comparado com os experimentos simples dos mesmos fatores, o que contribui para diminuir a variância residual, aumentando a precisão do experimento.

Desvantagem

- Requer maior número de unidades experimentais em relação aos experimentos simples.

Exemplo 8.1

Seja um experimento fatorial instalado no DIC, com dois fatores: Irrigação (A) e Calagem (B), cada um deles com dois níveis: presença (A_1, B_1) e ausência (A_0, B_0). Os dados obtidos (kg de planta/parcela) para cada tratamento são fornecidos abaixo. Pede-se realizar a ANOVA e obter as conclusões sobre os fatores. Use $\alpha = 5\%$.

A_0B_0	A_0B_1	A_1B_0	A_1B_1
25	35	41	60
32	28	35	67
27	33	38	59