UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Gabarito da 1^a Lista - MAT 137 - Introdução à Álgebra Linear **II/2004**

1. (a) AE tem ordem 4×5, mas não é possível somar com $B^T_{5\times 4}$ pois têm ordens distintas;

   (b) não é possível somar $D^T_{5\times 2}$ e $B_{4\times 5}$ pois têm ordens distintas;

   (c) $\Big(A_{4\times 3} \cdot C_{3\times 5}\Big)_{4\times 5} + B_{4\times 5}$ tem ordem 4×5;

   (d) não é possível mutliplicar C por B, pois o número de colunas de C é igual 5 que é diferente do número de colunas de B, que é igual a 4.

2. A tem ordem 5×6; B tem ordem 3×6; C tem ordem 3×4;

   D tem ordem 4×3 e E tem ordem 3×5.

3. (a) A tem ordem 4×5; (b) $a_{23} = 11$, $a_{35} = 3$ e $a_{43} = -4$.

4. A tem ordem 3×2; B tem ordem 2×3; C tem ordem 3×2;

   D tem ordem 2×3 e E tem ordem 3×2.

5. $c_{32} = 18$ e $d_{48} = 23$.

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 & -10 \\ -2 & 8 & -5 & -8 \\ -5 & -1 & 15 & -6 \\ -8 & -4 & 0 & 24 \end{bmatrix}$.

7. (a) $A^2 = I_2$; (b) $A^3 = A$; (c) $A^{31} = A$; (d) $A^{42} = I_2$.

8. $x = -1$ e $y = 1$.

9. (a) $x = 4$, (b) $x = 12$ $y = -8$ $z = -4$,

   (c) $x = 2$, $y = -7$ $z = -2$ ou $x = -2$, $y = -3$ $z = 10$.

10. (a) $4E - 2D = \begin{bmatrix} 22 & - & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $2A^T + C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$;

    (c) $\left(2E^T - 3D^T\right)^T = \begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$; (d) $\left(BA^T - 2C\right)^T = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$;

    (e) $(-AC)^T + 5D^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 37 & -2 & 15 \\ 16 & 13 & 27 \end{bmatrix}$; (f) $B^T\left(CC^T - A^T A\right) = \begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$; (g) $0_{3\times 3}$.

11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) Dada $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $B^2=A$ se, e somente se, $\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a^2+bc=5 \\ b\ (a+d)=0 \\ c\ (a+d)=0 \\ bc+d^2=9 \end{cases}$ e as soluções deste sistema são $a=\pm\sqrt{5}$, $b=c=0$ e $d=\pm\sqrt{9}$.

Logo, as raízes de A são $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{9} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{9} \end{bmatrix}$.

(c) Não, o sistema pode não ter solução

12. (a) $(A\pm B)^2=(A\pm B)\cdot(A\pm B)=A^2\pm AB\pm BA+B^2=A^2\pm 2AB+B^2$;

    (b) $(A-B)(A+B)==A^2+AB-BA-B^2=A^2-B^2$;

    (c) $$\begin{aligned}(A-B)(A^2+AB+B^2) &= A^3+A^2B+AB^2-BA^2-BAB-B^3 \\ &= A^3+A(AB)+(AB)B-(BA)A-(BA)B-B^3 \\ &= A^3+A(BA)+(AB)B-(AB)A-(AB)B-B^3=A^3-B^3.\end{aligned}$$

13. (a) $\Big(A\cdot A^T\Big)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\cdot A^T$;

    $\Big(\frac{1}{2}(A+A^T)\Big)^T=\frac{1}{2}\Big(A^T+(A^T)^T\Big)=A+A^T$.

    (b) $\Big(\frac{1}{2}(A-A^T)\Big)^T=\frac{1}{2}\Big((A^T-(A^T)^T\Big)=\frac{1}{2}\Big(A^T-A\Big)=-\frac{1}{2}(A-A^T)$.

    (c) $A=\frac{1}{2}\Big(A+A+A^T-A^T\Big)=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$.

14. (a) $\det A=\pm 1$

    (b) A é anti-simétrica $\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

    Por outro lado A é ortogonal $\Leftrightarrow$ $A\cdot A^T=\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $\Leftrightarrow b^2=1$.

    Logo, as únicas matrizes quadradas de ordem 2 que são simultaneamente anti-simétricas e ortogonais são $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

15. $m=\pm 1$.

16. A é ortogonal; B não é ortogonal; C é ortogonal e D é ortogonal.

17. Dado α número real considere a matriz $T_\alpha=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

    (a) $$\begin{aligned} T_\alpha\cdot T_\beta &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}=T_{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

$(b)\ T_{-\alpha}\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -(-\sin\alpha) \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$

$(c)\ T_\alpha \cdot T_\alpha^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

18. De fato, se $AB - BA = I$, então $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(I) = n$, mas por outro lado temos:

    $\mathrm{tr}(AB - BA) \overset{(a)}{=} \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(-BA) \overset{(b)}{=} \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) \overset{(d)}{=} \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = 0$ uma contradição.

    Logo, não existe tal matriz.

19. Os traços de AA^T e A^TA estão definidos, pois são matrizes quadradas de ordem $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente.

    Agora considere $C = AA^T_{m\times m}$, então $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$, logo

    $$tr\ (AA^T) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n} a_{mk}^2.$$

    Por outro lado, $D = A^TA$ é tal que $d_{ii} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}^2$, logo

    $$tr\ (A^TA) = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}^2 + \sum_{k=1}^{m} a_{k2}^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m} a_{kn}^2.$$

    Logo, $tr\ (AA^T) = tr\ (A^TA)$.

20. $A^T = (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA = A$, portanto A é simétrica.

    Logo, $A = A^TA = AA = A^2$.

21. Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, e $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$, então

    $$A \cdot D = I_n \Leftrightarrow = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{11} & \cdots & a_{1n}d_{11} \\ a_{21}d_{22} & a_{22}d_{22} & \cdots & a_{2n}d_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_{nn} & a_{n2}d_{nn} & \cdots & a_{nn}d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & \end{bmatrix},$$

    ou seja, se, e somente se, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = (d_{ii})^{-1}$, ou seja, se, e somente se, A é a matriz diagonal inversa de D.

22. Como $a_{11},\ a_{22}, \ddots, nn \neq 0$, então $= a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0$, logo existe A^{-1} e mais

    $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

23. $AB = AC \Leftrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Leftrightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Leftrightarrow I \cdot B = I \cdot C \Leftrightarrow B = C$.

24. Sim, basta ter A e B matrizes não quadradas, por exemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

25. (a) Primeiro observemos que como $A^2 - 3A + I = 0$, então $A(A - 3I) = -I$, logo A é inversível pois, $\det A \det(A - 3I) = \det(A(A - 3I)) = \det(-I) = (-1)^n \neq 0$.

Agora, $A^{-1}(A(A - 3I)) = A^{-1}(-I) \Leftrightarrow A - 3I = -A^{-1}$, ou seja, $A^{-1} = 3I - A$.

(b) Basta mostrar que $(I - A)(A + A^2 + \ldots + A^n) = I$ e que $(A + A^2 + \ldots + A^n)(I - A) = I$.

Mas, $(I - A)(A + A^2 + \ldots + A^n) = A + A^2 + \ldots + A^n - A - A^2 - \ldots - A^n - A^{n+1} = I - A^{n+1} = I$.

A outra igualdade se mostra de maneira análoga.

26. (a) (F); (b) (V); (c) (V); (V) (F);

(e) (F); (f) (V); (g) (V); (h) (F); (i) (V).

27. (a) $\det P = 1024$ (b) Logo, por (a) P é inversível; (c) $\det B = -9$; $(d) Q$ é inversível.

28. $\det A = -5$.

29. (a) $(AB) = 576$.

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; (c) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

(d) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{17}{24} & \frac{31}{36} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{3} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & -\frac{35}{12} & \frac{55}{18} \\ -\frac{25}{24} & -\frac{67}{24} & -\frac{119}{48} & \frac{187}{72} \end{bmatrix}$; (e) $\det C = 16$.

30. $Q^3 + 2Q^2 = 0 \Leftrightarrow Q^3 = -2Q^2$, como $\det Q \neq 0$, a igualdade acima é equivalente a $Q = -2I$, portanto $\det Q = (-2)^n$.

31. (a) $\det A = 58$ (b) $\det A^T = \det A = 58$; (c) $\det A^2 = (\det A)^2 = 58^2 = 3364$;

(d) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{58}$; (e) $\det(-A) = (-1)^4 \det A = 58$;

(f) $\det(3AA^T) = 3^4 \det A \det A^T = 3^4 58^2 = 272.484$.

32. Determine o polinômio $p(x) = \det(xI_3 - A) = \det\left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) =$
$\det\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{bmatrix} = x(x-1)^2 + 1 - 2(x-1) = x^3 - 2x^2 - x + 3.$

(b) $p(A) = A^3 - 2A^2 - A + 3I = 0.$

(c) $A^3 - 2A^2 - A + 3I = 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 2A - I) = -3I$, portanto $A^{-1} = \frac{1}{3}(I + 2A - A^2)$.

33. (a) -123 (b) $1 + a + b + c$ (c) $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$ (d) -5 (e) -120 (f) 120.

34. (a) $\{0, -1, 1/2\}$; (b) $\{\frac{40}{11}\}$; (c) $\{\frac{3+\sqrt{33}}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{4}\}$.

35. $\det A = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$, generalizando temos

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}.$$

36. (a) $B = PAP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}BP = P^{-1}(PAP^{-1})P \Leftrightarrow P^{-1}BP = (P^{-1}P)A(P^{-1}P) = A$.
Logo, $A = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$, ou seja, B é semelhante a A.

(b) Suponhamos que $B = PAP^{-1}$ e $C = QBQ^{-1}$, então

$$C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1},$$

portanto A é semelhante a C.

(c) Suponhamos que A é semelhante a B, então $B = PAP^{-1}$, onde P é matriz inversível. Logo,

$$\det B = \det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det P \det A \frac{1}{\det P} = \det A.$$

37. (a) $cof(A) = \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ -11 & 13 & 5 \\ -19 & -19 & 19 \end{bmatrix}$; como $\det A = 152 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & -\frac{11}{152} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & -\frac{1}{8} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

(b) $cof(A) = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; como $\det A = 1 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $cof(A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; como $\det A = 1 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) $cof(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & -72 & 60 & 128 \\ 18 & 36 & -39 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$; como $\det A = 72 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{24} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{53}{36} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

38. Basta observar que a linha L_1 é proporcional às linhas L_2 e L_3, pois $L_1 = (a+b+c)L_3 - L_2$. Logo, o determinate da matriz é nulo.

39. (a) $\det A = 32 \neq 0$, logo existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\det A = 14 \neq 0$, logo existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$.

(c) $\det A = 1 \neq 0$ logo existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\det A = -459 \neq 0$ logo existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{51} & -\frac{28}{51} & -\frac{2}{51} \\ -\frac{2}{51} & \frac{16}{51} & \frac{1}{51} \\ -\frac{2}{51} & -\frac{1}{51} & \frac{1}{51} \end{bmatrix}$.

40. $\det B = 1 \neq 0$ logo existe B^{-1} e

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

41. (a) (F); (b) (F); (c) (V); (d) (F);
(e) (F); (f) (F); (g) (V); (h) (V); (i) (V).

42. (a) Dia a Dia:145.400, Nossa Hora: 213.200, Acontece: 164.850 Urgente: 239.250.

(b) Dia a Dia:232.640, Nossa Hora: 341.120, Acontece: 263.760, Urgente: 382.800.

43. (a) Tábuas: 19.000, Tijolos: 450.000, Telhas: 375.000, Tinta: 2.750 litros, Mão de obra: 2.000 dias.

(b) A primeira coluna de AB representa o custo dos materiais para as 20 construções de alvenaria, as 15 construções de madeira e as 30 construções mistas, respectivamente; enquanto que a segunda coluna representa o custo do transporte para as 20 construções de alvenaria, as 15 construções de madeira e as 30 construções mistas, respectivamente.

44. A quantidade necessária será: $780g$ de fósforo, $555g$ de nitrato e $1.455g$ de potássio. O preço totalda mistura será $R\$154,50$.

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1,5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1,5 \\ 1 & 1,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$ e $AB = \begin{bmatrix} 5,5 & 7,5 \\ 9,5 & 12,6 \\ 7,5 & 10,05 \end{bmatrix}$.

O significado de AB é o custo da produção de cada produto em cada uma das duas cidades.

46. $AB^T = \begin{bmatrix} 71.000 & 47.000 & 110.000 \\ 97.000 & 29.000 & 39.000 \\ 114.000 & 65.500 & 176.000 \end{bmatrix}$.