UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
CAMPUS UFV - FLORESTAL

LISTA DE ÁLGEBRA LINEAR A - LISTA 2

Prof. Fernando Bastos

Exercícios

1. Sejam $u = (-4, 3)$, $v = (2, -5)$ e $w = (a, b)$.

   (a) Encontre a e b nos seguintes: (i) $w = 2u + 3v$ $\quad (ii)$ $w = \frac{2}{5}v$ $\quad (iii)$ $u + w = 2u - v$.

   (b) Represente os vetores acima no plano cartesiano.

   (c) Encontre o comprimento dos vetores u, v e w.

2. Sejam $u = (4, -1, 2)$, $v = (3, -2, -4)$ e $w = (a, b, c)$.

   (a) Encontre a, b, c nos seguintes casos:
   (i) $w - u = v$ $\quad (ii)$ $w = 3v$ $\quad (iii)$ $u + w = 2u - v$.

   (b) Encontre o comprimento dos vetores u, v e w.

3. Encontre um vetor unitário com a mesma direção e o mesmo sentido que $u = (-1, -3)$.

4. Suponha que uma força de 12 newtons é aplicada em um objeto ao longo do semi-eixo negativo dos x e que uma força de 5 newtons é aplicada ao longo do semi-eixo positivo dos y. Encontre a intensidade, a direção e o sentido da força resultante. Represente graficamente.

5. Suponha que um barco está atravessando um rio na direção leste a uma velocidade de 4 quilômetros por hora, enquanto a corrente do rio está fluindo na direção sul a uma velocidade de 3 quilômetros por hora. Encontre a velocidade resultante do barco. Represente graficamente.

6. Em cada item deste exercício são dados um espaço vetorial $(V, +, ., \mathbb{R})$ e um subconjunto U de V. Verifique se U é um subespaço do espaço vetorial V.
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z \leq 1\}$.
   (c) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in V;\ \det A = 0\}$.
   (d) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ e $U = \left\{p \in V;\ p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_i \in \mathbf{Z}, 0 \leq i \leq 3\right\}$.
   (e) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ e $U = \left\{p \in V;\ p = ax^3 + bx + c\right\}$.

7. Determine para que valores de k os vetores do $\mathbb{R}^3$ abaixo são L.I. ou L.D.
   (a) $u = (1, 1, 2)$, $v = (-1, 2, 3)$ e $w = (k, -1, 1)$
   (b) $u = (-1, 0, 7)$, $v = (-4, 5, -3k)$, $w = (0, 4, -2)$ e $z = (2k, 3, 1)$.

8. Determine que condições a, b, e c devem satisfazer para que o vetor $v = (a, b, c)$ seja combinação linear dos vetores $u = (1, -3, 2)$ e $w = (2, -1, 1)$.

9. Quais dos seguintes vetores são combinação linear de $u = (1, 2, 1, 0)$, $v = (4, 1, -2, 3)$, $w = (1, 2, 6, -5)$, e $p = (-2, 3, -1, 2)$.
   (a) $(3, 6, 3, 0)$ $\quad (b)$ $(1, 0, 0, 0)$ $\quad (c)$ $(3, 6, -2, 5)$ $\quad (d)$ $(0, 0, 0, 1)$

10. Determine $[S]$, onde $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$.

11. Os conjuntos abaixo são linearmente independente ou linearmente dependentes? Justifique (Faça contas somente quando for realmente necessário!)
   (a) (   ) $\{1, 2t, 2t+t^2, 2t+2t^2\} \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
   (b) (   ) $\{(1,1), (0,1), (-1,5)\} \subset \mathbb{R}^2$
   (c) (   ) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 332 \\ 41 & 90 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}$
   (d) (   ) $\left\{(1,3,2,5,7), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)\right\} \subset \mathbf{R}^5$
   (e) (   ) $\{1\} \subset \mathbf{R}$

12. Coloque V ou F, justificando sua resposta.
   (a) (   ) Se $\dim W = 3$ e $\mathcal{B}$ é um subconjunto de W com 4 vetores então $\mathcal{B}$ é L.D.
   (b) (   ) Se $\dim W = 3$ e $\mathcal{B}$ é um subconjunto de W com 2 vetores então $\mathcal{B}$ é L.I.
   (c) (   ) Todo subconjunto de um espaço vetorial contendo o vetor nulo é L.D.
   (d) (   ) Se $\dim W = 3$ e $v_1, v_2 \in W$, então $[v_1, v_2] \neq W$.
   (e) (   ) Se $\dim W = 3$ e $v_1, v_2, v_3 \in W$, então $[v_1, v_2, v_3] = W$.

13. Verifique que se $u, v \in V$ e $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\{u, v\}$ é L.D.

14. Encontre um sistema homogêneo cujo conjunto das soluções seja gerado por

$$\{(1,-2,0,3), (1,-1,-1,4), (1,0,-2,5)\}.$$

15. Suponha que $\{u, v, w\}$ é um conjunto L.I.. Então $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ é L.I. ou L.D.?

16. Seja $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   (a) Mostre que W é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$? $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?
   (c) Determine uma base para W.

17. Seja $\mathbf{W}_1 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R});\ A^\intercal = A\}$, isto é, $\mathbf{W}_1$é o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem 3.
   (a) Mostre que $\mathbf{W}_1$ é subespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   (b) Determine uma base de $\mathbf{W}_1$.

   (c) Seja $\mathbf{W}_2 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}; A^\intercal = -A\}$, istoé, $\mathbf{W}_2$ é o conjunto de todas as matrizes anti-simétricas de ordem 3. Mostre que $\mathbf{W}_2$ é subespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
   (d) Determine uma base de $\mathbf{W}_2$.

18. Considerando $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$ os subespaços dos exercícios anteriores mostre que $M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ e que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{0\}$.

19. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ formado por todas as matrizes diagonais.

20. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ formado por todas as matrizes triangulares superiores.

21. Determine a dimensão e uma base do espaço solução dos seguintes sistemas homogêneos:
   $\begin{cases} x+2y+z-3t=0 \\ 2x+4y+4z-t=0 \\ 3x+6y+7z+t=0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x+2y+2z-s+3t=0 \\ x+2y+3z+s+t=0 \\ 3x+6y+8z+s+5t=0 \end{cases}$

22. Sejam U e W os subespaços do $\mathbb{R}^4$ gerados por

$$\{(1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1)\} \text{ e } \{(1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3)\}$$

   respectivamente. Determine:
   (a) $\dim U$; $\quad (b)$ $\dim W$; (c) $\dim(U \cap W)$ e (d) $\dim(U+W)$

23. Sejam $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in V;\ a_1 + a_3 = 0\}$ e $W_2 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in V;\ b_2 + b_4 = 0\}$.
(a) Demonstrar que W_1 é subespaço de V.
(b) Determinar bases de W_1, W_2 e $W_1 \cap W_2$.
(c) $W_1 + W_2 = V$? Justifique sua resposta.

24. Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$, $v_4 = (1, 0, 1, 0)$. Pede-se:
(a) Determine uma base para W. Qual é a $\dim W$?
(b) O vetor $u = (2, -3, 2, 2)$ pertence a W?
(c) Determine um sistema linear homogêneo cujo espaço das solução seja W.

25. Seja $S = \{u, v, w, r, s, t\}$ um subconjunto L.I. de um espaço vetorial V. Seja $R \subset S$, R com 3 elementos. Determine $\dim [S]$, $\dim [R]$, $\dim ([S] \cap [R])$ e $\dim ([S] + [R])$.

26. Considere o subconjunto $\gamma = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Pede-se:
(a) Mostre que γ é uma base para o $\mathbb{R}^3$ e calcule a matriz mudança da base γ para a base canônica $\mathcal{C}$.
(b) Dado o vetor $u = (1, 1, 1)$ determine suas coordenadas em relação à base γ.

27. No espaço vetorial $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinômios em t de grau menor ou igual a 2, considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{B} = \{1,\ 1 - t,\ (1 - t)^2\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{P}_2$.
(b) Encontre as coordenadas dos seguintes vetores com relação à base ordenada $\mathcal{B}$:
(i) $v = 2 - 3t + t^2$; (ii) $w = 3 - 2t$.

28. Seja $V = \left\{p : [-1, 1] \to \mathbb{R};\ p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right\}$ e

$$S = \{p \in V;\ \ p(-1) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\}.$$

Mostre que S é um subespaço vetorial de V. Encontre uma base e a dimensão do subespaço S.

29. Sejam U e W os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z, w) \subset \mathbb{R}^4;\ \ y + z + w = 0\} \\ W &= \{(x, y, z, w) \subset \mathbb{R}^4;\ \ x + y = 0,\ z = 2w\} \end{aligned}$$

Determine uma base e a dimensão de U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

30. Seja $\mathbf{U}$ o subespaço de $\mathbf{R}^5$ gerado por

$$\{(1, -1, -1, -2, 0), (1, -2, -2, 0, -3), (1, -1, -2, -2, 1)\}$$

e seja $\mathbf{W}$ o subespaço gerado por $\{(1, -2, -3, 0, -2), (1, -1, -3, 2, -4), (1, -1, -2, 2, -5)\}$.
(a) Encontre dois sistemas homogêneos cujos espaços das soluções são $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, respectivamente.
(b) Encontre uma base e a dimensão de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.
(c) Encontre a dimensão de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

31. Se $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e β é a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine a base α.

32. Se $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ache
(a) $[v]_\alpha$ onde $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (b) $[v]_\beta$ onde $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

33. Sejam $\beta_1 = \{(2,-1),(3,4)\}$, $\beta_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Determine $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ e $[(5,-8)]_{\beta_1}$.

34. Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right)\right\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
(*a*) Ache as matrizes de mudança de base:
(*i*) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ (*ii*) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ (*iii*) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ (iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$
(*b*) Quais as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação à base:
(*i*) β (*ii*) β_1 (*iii*) β_2 (*iv*) β_3
(*c*) As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. Quais são as coordenadas de v em relação à base:
(*i*) β (*ii*) β_2 (*iii*) β_3

35. Sejam $\beta_1 = \{(1,0),(0,2)\}$, $\beta_2 = \{(-1,0),(1,1)\}$ e $\beta_2 = \{(-1,-1),(0,-1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
(*a*) Ache
(*i*) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ (*ii*) $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$ (*iii*) $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$ (*iv*) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}\,[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$
(*b*) Se for possível, dê uma relação entre estas matrizes de mudança de base.