5 CÁLCULO DIFERENCIAL EM $\mathbb{R}$

5.1. Calcule, usando a definição, a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$; *b*) $f(x) = \sqrt{x}$; *c*) $f(x) = e^x$;

d) $f(x) = senx$; *e*) $f(x) = \cos x$; *f*) $f(x) = \ln x$.

5.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 6$.

a) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de f é horizontal;

b) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de f tem declive 6;

c) Mostre que a recta $y = 12x - 17$ é tangente ao gráfico de f e determine o ponto de tangência.

5.3. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

a) Calcule $g'(2)$, aplicando a definição;

b) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

5.4. Calcule a inclinação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2$ no ponto de abcissa 1.

5.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + ax + b$. Determine os valores de a e b tais que a recta $y = 2x$ seja tangente à curva f no ponto $(2, 4)$.

5.6. Determine os valores das constantes a, b e c para os quais os gráficos dos dois polinómios $p(x) = x^2 + ax + b$ e $q(x) = x^3 - c$ se intersectem no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

5.7. Estude a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = |x|$, no ponto $x = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x < 2, \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$ no ponto $x = 2$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, no ponto $x = 1$.

5.8. Determine as derivadas das seguintes funções indicando o domínio de derivação:

a) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$;

b) $f(x) = x^3 - x^2$;

c) $f(x) = 2x^{-1} + 6x^{\frac{1}{3}}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$;

e) $f(x) = (x-4)^2 \left(\dfrac{x^3}{3} + \sqrt[5]{x}\right)$;

f) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2-3x}\right)^{-3}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+\sqrt{x}}$;

h) $f(x) = \cos^3 x$;

i) $f(x) = e^{x^2+1}$;

j) $f(x) = \ln(3x)$;

k) $f(x) = x\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}$;

l) $f(x) = \dfrac{1}{sen^2 x}$;

m) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x^2+1)$;

n) $f(x) = tg(e^x)$;

o) $f(x) = e^{\ln 2x}$;

p) $f(x) = tg(x^2-1)$;

q) $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{sen\ x}$;

r) $f(x) = xe^{\cos^2 x}$;

s) $f(x) = \dfrac{sen(3x+5)}{2x+1}$;

t) $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\cos(2x+1)}$;

u) $f(x) = \dfrac{e^{(x-1)^2}}{(x-1)}$;

v) $f(x) = x^2 arctg\ x$;

x) $f(x) = \ln(\ln x)$;

z) $f(x) = \cos(arcsen\ x)$.

5.9. Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}$ tal que:

i) $f(a+b) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$;

ii) $f(0) = 1$;

iii) f é diferenciável em $x = 0$.

Prove que f é diferenciável para todo o $x \in \mathbb{R}$ e tem-se $f'(x) = f'(0).f(x)$.

5.10. Calcule a e b de modo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2, \\ ax + b & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

seja diferenciável e determine, para esses valores de a e b, a função derivada.

5.11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } \ x = 0. \end{cases}$

Calcule a derivada de f em cada $x \in \mathbb{R}$.

5.12. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por $g(x) = |x|$ e $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$

Mostre que f e g não são diferenciáveis no ponto zero, mas que a função composta $f \circ g$ é.

5.13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f'. Determine a derivada de:

a) $f(-x)$;

b) $f(e^x)$;

c) $f(\ln(x^2 + 1))$;

d) $f\ [f(x)]$.

5.14. Como se sabe, a restrição da função $f(x) = tgx$ ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é uma bijecção diferenciável deste intervalo sobre $\mathbb{R}$. Utilizando o teorema da derivação da função inversa, mostre que a função inversa de f, $arctg\ x$, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e se tem $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Demonstre resultados análogos para as restantes funções trigonométricas.

5.15. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule $[arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\ x)]'$.

5.16. Mostre que as seguintes funções têm um máximo ou um mínimo local nos pontos indicados, não sendo todavia diferenciáveis nesses pontos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x > 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$ no ponto $x = 0$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ no ponto $x = 3$.

5.17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$. Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

Sug.: *a)* Prove primeiro, utilizando o Teorema de Bolzano, que f tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$; *b)* Prove em seguida, utilizando o Teorema de Rolle, que f não pode ter mais do que um zero em $\mathbb{R}$.

5.18. Mostre que a função $f(x) = 1 - x^2$ satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$. Determine um ponto c onde $f\,'(c) = 0$.

5.19. Seja $f(x) = e^x - x - 1$. Mostre, utilizando o Teorema de Rolle, que f não tem outra raíz para além de $x = 0$.

5.20. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável com $f(a) = f\,'(a) = f(b) = f\,'(b) = 0$. Prove que $f'''(c) = 0$, para algum $c \in (a, b)$.

5.21. Mostre, utilizando o Teorema de Lagrange, que:

a) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, para $x > 0$;

b) $-x \leq sen\ x \leq x$, para $x > 0$.

c) $|sen\ b - sen\ a| \leq |b - a|$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

5.22. Aplique o Teorema de Lagrange para determinar um valor aproximado de $\sqrt{105}$.

5.23. Determine, sempre que existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$; *c)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{\log(5-x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{3x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{sen\ (3x)}{1-2\cos x}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{sen^2\,(x-2)}{e^{x^2-4}-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{2x+1}$; *h)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, com $\alpha>0$; *i)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{xe^x-x}$;

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+5x)}$; *k)* $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$; *l)* $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(3x)$;

m) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; *n)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x+5)}{2x+1}$; *o)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{xe^x-x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{sen\ x}\right)$; *q)* $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$; *r)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

5.24. Estude a monotonia e o sentido da concavidade da função $f(x)=x^4-2x^3-3$.

5.25. Determine a derivada de ordem n das seguintes funções:

a) $f(x)=sen\ x$; *b)* $f(x)=\cos(2x)$; *c)* $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

d) $f(x)=\ln(1+x)$; *e)* $f(x)=xe^{-x}$; *f)* $f(x)=x^3+5x^2+4x-9$.

5.26. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=sen\ x$. Determine o polinómio de Taylor de ordem 6 no ponto $x=\dfrac{\pi}{2}$.

5.27. Determine o polinómio de Taylor de ordem n (polinómio de MacLaurin de ordem n), no ponto $x=0$, das seguintes funções:

a) $f(x)=x^3-1$; *b)* $f(x)=e^x$; *c)* $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

d) $f(x)=\ln(1+x)$; *e)* $f(x)=e^{5x-1}$; *f)* $f(x)=sen(2x+3)$.

5.28. Determine o polinómio de Taylor de ordem n, nos pontos indicados, das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, em $x = 2$; *b)* $g(x) = \sqrt{x}$, em $x = 1$.

5.29. Determine os máximo e os mínimos das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; *b)* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

c) $f(x) = x^2(x-12)^2$; *d)* $f(x) = x \ln x$;

5.30. Determine um polinómio de 2.^{o} grau que tem como uma das suas raízes $x = -1$, que toma para $x = 0$ o valor 1 e tal que é máximo para $x = 0$.

5.31. De entre todos os rectângulos que se podem inscrever numa circunferência de raio r, determine aquele cuja área é máxima.

5.32. Estude e represente graficamente as seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$; *b)* $g(x) = (e^x - 1)^2$; *c)* $h(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$; *d)* $j(x) = x \ln|x|$.

5.33. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{1+x}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade e à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

b) Estude a função f quanto à monotonia e extremos.

c) Determine o sentido da concavidade e as inflexões do gráfico de f.

d) Esboce o gráfico de f.

5.34. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ arctg\,(ax) & \text{se } x < 0. \end{cases}.$$

a) Determine a.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Estude f quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada.

d) Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

5.35. Seja $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

b) A função f é necessariamente limitada.

c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.