Universidade de Évora

Departamento de Matemática

1.^{a} FREQUÊNCIA - 21/10/2017

RESOLUÇÃO

Grupo I

1. Considere o seguinte conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0 \ \wedge \ x^3 - 64 \geq 0\} \ \cup \ [0, 1[\,.$$

a) Como

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 4$$

e $x^2 - 5x + 4$ é a equação de uma parábola, com a concavidade voltada para cima, que cruza o eixo dos xx em $x = 1$ e $x = 4$, então a condição $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ verifica-se se e só se $1 \leq x \leq 4$. Por outro lado, tem-se que

$$x^3 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 64 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{64} = 4.$$

Portanto,

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \ \wedge \ x^3 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4 \ \wedge \ x \geq 4 \Leftrightarrow x = 4,$$

logo o conjunto em questão é

$$A = [0, 1[\cup \{4\}\,.$$

Donde, atendendo às definições, tem-se que

$$int(A) = (0, 1)\,, \quad ext(A) =]-\infty, 0[\cup (]1, +\infty[\setminus \{4\}) \quad \text{e} \quad \overline{A} = [0, 1] \cup \{4\}\,.$$

b) Pela alínea anterior, sabe-se que $int(A) \neq A$, então pode concluir-se que A não é um conjunto aberto. Por outro lado, como $\overline{A} \neq A$, então A também não é fechado.

c) Dado que $0, 4 \in A$ e $0 \leq x \leq 4$, para todo o $x \in A$, então $\sup(A) = \max(A) = 4$ e $\inf(A) = \min(A) = 0$.

Grupo II

2. Considere-se a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}. \end{cases}$$

a) Provemos, através do Princípio de Indução Matemática, que a sucessão $(u_n)_n$ é majorada por 3, ou seja, que

$$u_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $P(n) : u_n \leq 3$.

I) Mostremos que $P(1)$ é verdadeira.

Como $u_1 = 0 < 3$, então $P(1)$ é verdadeira.

II) Vejamos agora que $P(n)$ é hereditária, ou seja, que $u_n \leq 3 \Rightarrow u_{n+1} \leq 3$.

Dado que, por hipótese de indução,

$$u_n \leq 3 \Leftrightarrow 6 + u_n \leq 9,$$

então, uma vez que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é monótona crescente, tem-se

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \leq \sqrt{9} = 3,$$

pelo que $P(n)$ é hereditária. Logo, aplicando-se o Princípio de Indução Matemática, por I) e II) conclui-se que $P(n)$ é universal, ou seja, a sucessão $(u_n)_n$ é majorada por 3.

b) Provemos agora que a sucessão $(u_n)_n$ é crescente, ou seja, que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{6+u_n} \geq u_n \Leftrightarrow 6 + u_n \geq u_n^2 \Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 6 \leq 0,$$

e, uma vez que $x = -2$ e $x = 3$ são raízes do polinómio $x^2 - x - 6$, então tem-se

$$u_n^2 - u_n - 6 = (u_n - 3)(u_n + 2) \leq 0.$$

Dado que todos os termos desta sucessão são não negativos, então vem

$$u_n + 2 > 0,$$

portanto,

$$(u_n - 3)(u_n + 2) \leq 0 \Leftrightarrow u_n - 3 \leq 0 \Leftrightarrow u_n \leq 3$$

o que, pela alínea anterior, sabemos ser verdadeiro. Logo, podemos afirmar que

$$u_{n+1} - u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Pela alínea anterior, sabemos que a sucessão $(u_n)_n$ é crescente, isto é,

$$0 = u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots,$$

pelo que a sucessão $(u_n)_n$ é minorada. Por outro lado, na alínea a), provamos que a sucessão $(u_n)_n$ é majorada por 3, portanto a sucessão $(u_n)_n$ é limitada. Além disso, $(u_n)_n$ é monótona, porque é crescente. Como toda a sucessão monótona e limitada é convergente, vem que a sucessão $(u_n)_n$ é convergente.

Seja $L = \lim\limits_n u_n$.

Dado que $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$, pelas propriedades dos limites e pela continuidade da função $\sqrt{x}$, tem-se

$$\lim_n u_{n+1} = \lim_n \sqrt{6+u_n} = \sqrt{6 + \lim_n u_n} \Leftrightarrow$$

$$L = \sqrt{6+L} \Leftrightarrow L^2 = 6 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Leftrightarrow L = -2 \ \vee \ L = 3.$$

Como $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos não negativos, então $\lim_n u_n \geq 0$, portanto, tem-se $L = 3$.

Grupo III

3. ***a)*** $\lim_n \left(n - \sqrt{n^2 + \cos^2 n}\right) = \lim_n \dfrac{\left(n - \sqrt{n^2 + \cos^2 n}\right)\left(n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}\right)}{\left(n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}\right)} =$

$$= \lim_n \frac{n^2 - \left(n^2 + \cos^2 n\right)}{n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}} = \lim_n \frac{-\cos^2 n}{n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}}.$$

Como a sucessão de termo geral $x_n = \cos^2 n$ é uma sucessão limitada, pois

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e

$$\lim_n \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}} = \frac{1}{\lim_n \left(n + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soma de uma sucessão limitada por um infinita/ grande +}}}{\sqrt{n^2 + \cos^2 n}}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

então tem-se

$$\lim_n \frac{-\cos^2 n}{n + \sqrt{n^2 + \cos^2 n}} = 0;$$

b) $\lim_n \left[\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n} + \left(\dfrac{7}{4}\right)^n\right] = \lim_n \left(\dfrac{1 + 1/n}{1 - 1/n}\right)^{2n} + \lim_n \left(\dfrac{7}{4}\right)^n = \left[\dfrac{\lim_n (1 + 1/n)^n}{\lim_n (1 - 1/n)^n}\right]^2 + (+\infty) =$

$$= e^4 + (+\infty) = +\infty;$$

c) $\lim_n \left(\dfrac{3}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = ?$

Seja $x_n = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

Dado que o número de parcelas da sucessão $(x_n)_n$ varia quando n varia, então é necessário aplicar o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite.

Assim, como

$$\frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}+\frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}+\cdots+\frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}\leq x_n\leq\frac{3}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{3}{\sqrt{n^2+2}}\Leftrightarrow$$

$$y_n=\frac{3n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n\leq x_n\leq\frac{3}{\sqrt{n^2+2}}\times n=\frac{3n}{\sqrt{n^2+2}}=z_n$$

e

$$\begin{aligned}\lim_n\ y_n &= \lim_n\frac{3n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_n\frac{3}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}}=3,\\ \lim_n\ z_n &= \lim_n\frac{3n}{\sqrt{n^2+2}}=\lim_n\frac{3}{\sqrt{1+2/n^2}}=3,\end{aligned}$$

então, pelo teorema das sucessões enquadradas, vem que

$$\lim_n\ x_n=\lim_n\left(\frac{3}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=3$$

4. A afirmação: "Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são duas sucessões tais que $x_n<y_n$, para todo o $n>p$, com $p\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_n x_n=a$ e $\lim\limits_n y_n=b$, então $a<b$." é **falsa.**

Contra-exemplo: Por exemplo, se considerarmos as sucessões $x_n=\dfrac{1}{n^2}$ e $y_n=\dfrac{1}{n}$, temos que $x_n<y_n$, para todo o $n\geq 2$, e $\lim\limits_n x_n=0=\lim\limits_n y_n$, mas $0\not<0$.

Grupo IV

5. Pretende-se estudar a convergência da série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n+3)}.$$

Como

$$\frac{1}{n\,(n+3)} = \frac{A}{n} - \frac{A}{n+3} = \frac{3A}{n\,(n+3)} \Rightarrow 1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3,$$

então a série pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3n} - \frac{1}{3\,(n+3)} \right],$$

pelo que se tem uma série de Mengoli, com $x_n = a_n - a_{n+3}$, em que $a_n = \dfrac{1}{3n}$.

Dado que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3},$$

então

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left(a_1 + a_2 + a_3 - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3}\right) = a_1 + a_2 + a_3 - 3 \times \lim_n a_n.$$

Como

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{3n} = 0,$$

vem que a série de Mengoli é convergente.e tem soma

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}.$$

6. Uma vez que o percurso que a pulga percorre dando pulos ao longo da circunferência é descrito por

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{4} + \cdots + \frac{\alpha}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}, \quad \text{com } \alpha > 0 \text{ fixo.}$$

Pelas propriedades algébricas das séries, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n} = \alpha \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmónica, que sabemos ser divergente, portanto, com soma infinita e dado que $\alpha > 0$ é fixo, então vem que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}$ também é divergente e tem soma infinita. Logo, conclui-se que a pulga dá infinitas voltas à circunferência.

Grupo V

7. ***a)*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 2^n}{e^n} = 2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = \frac{2}{e} < 1$, portanto convergente. Então, pelas propriedades algébricas das séries, pode concluir-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^n}$ também é convergente,

b) Estudemos a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5n}+1}$, em que

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5n}+1} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para tal vamos compará-la com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, com $\alpha = 1/2 < 1$, que é divergente.

Como

$$L = \lim_n \frac{\frac{1}{\sqrt{5n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5n}+1} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

é finito e diferente de zero, então, pelo Corolério do Critério Geral de Comparação, conclui-se que as séries são da mesma natureza, ou seja, a série inicial é divergente.

c) Estudemos agora a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{n^2}\right)^n$.

Como $x_n = \left(\frac{3n+1}{n^2}\right)^n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então temos uma série de termos não negativos. Portanto, por aplicação do Critério da Raiz de Cauchy, uma vez que

$$L = \lim_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_n \frac{3n+1}{n^2} = \lim_n \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0 < 1,$$

conclui-se que a série é convergente.

8. A afirmação: "Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para zero, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente." é **falsa.**

Contra-exemplo: Basta considerarmos, por exemplo, a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que sabemos ser divergente, mas em que o seu termo geral $x_n = \frac{1}{n}$ converge para zero.