Introdução à Probabilidade e Estatística

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Ano lectivo 2015/16

Ana Isabel Santos

Aula 6

Distribuições de Probabilidade

Distribuições de probabilidade contínuas

Distribuição Normal

Definição 5: Diz-se que v. a. contínua X segue uma **distribuição Normal,** com média μ e desvio padrão σ e denota-se por $X \sim N(\mu;\sigma)$ se e só se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma > 0.$$

Os parâmetros caraterizadores desta distribuição são μ e σ.

Teorema 2: Se X é uma v. a. contínua que segue uma distribuição Normal, então

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

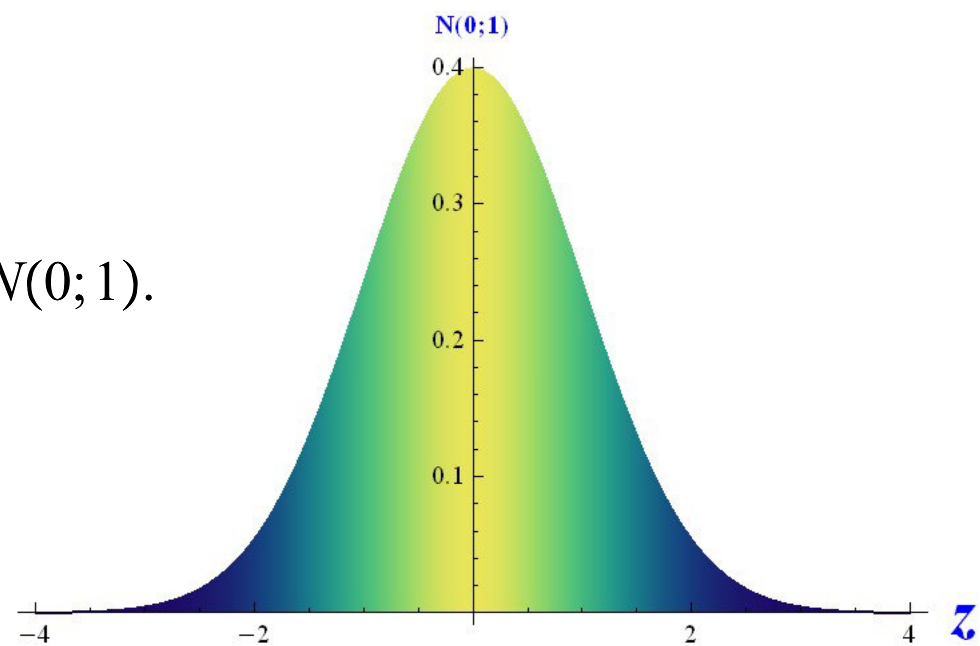
Distribuição Normal Reduzida

Para o cálculo de probabilidades, uma variável aleatória X que segue uma distribuição $N(\mu;\sigma)$ qualquer é transformada numa variável aleatória Z que segue a **distribuição normal reduzida** ou **normal padrão** $N(0;1)$, através da seguinte mudança de variável:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

ou seja,

$$\text{se } X \sim N(\mu;\sigma), \text{ então } Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1).$$



Distribuição Normal Reduzida

Existem valores tabelados da função distribuição da variável aleatória **normal padrão** $N(0;1)$.

A consulta das Tabela da Normal (disponível no Moodle) permite obter os valores da **função distribuição normal padrão** para pontos não negativos, ou seja, a tabela apresenta os valores de

$$\Phi(z) = P(Z \leq z), \quad z \geq 0.$$

A consulta da tabela permite concluir, por exemplo, que

$$P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0,5.$$

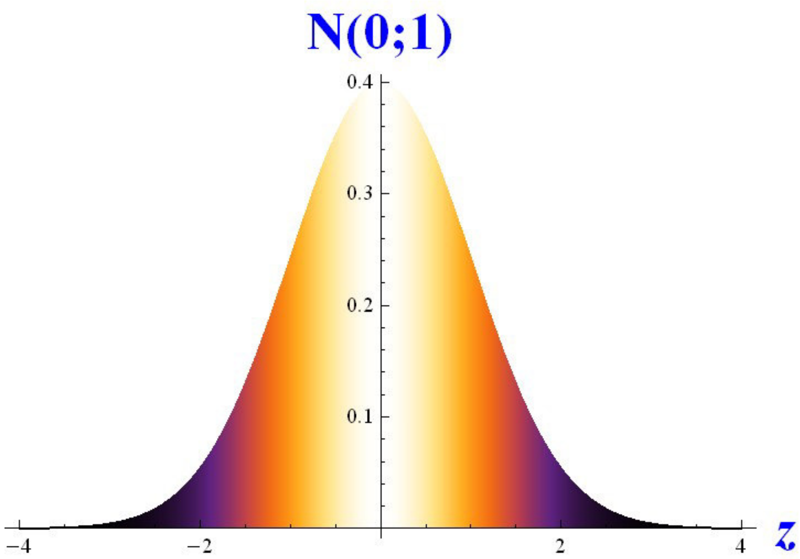
Além disso, como consequência da simetria, temos que

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Distribuição Normal Reduzida

Propriedades da normal reduzida ou padronizada

1. $P(Z \le -z) = P(Z \ge z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z);$



2. $P(Z \ge -z) = P(Z \le z) = \Phi(z);$

3. $P(Z > z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - \Phi(z);$

4. $$P(a < X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Distribuição Normal

Teorema da Aditividade: Se $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ são variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i\,;\,\sigma_i)$. Então, a variável aleatória

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\mu\,;\,\sigma\right), \text{ com } \mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}$$

Corolários: Se $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ são variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim N(\mu;\,\sigma)$. Então:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu\,;\,\sqrt{n}\,\sigma\right);$

2. $\displaystyle\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

Aproximações à distribuição Normal

Aproximação da distribuição Binomial pela Normal

Se $X \sim B(n;p)$, com n grande (n > 50) e 0.1< p <0.9, então

$$X \overset{\circ}{\sim} N(\mu = np; \sigma = \sqrt{npq}), \text{ logo, } Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Aproximação da distribuição Poisson pela Normal

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, com λ grande (λ > 20), então

$$X \overset{\circ}{\sim} N(\mu = \lambda; \sigma = \sqrt{\lambda}), \text{ logo, } Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Distribuição Normal

Exemplo 3: Seja X é a v. a. que representa o número de utilizadores de que está insatisfeito com um determinado programa informático. Sabe-se que, numa amostra de 100 utilizadores, 20% está insatisfeito com o programa informático.

Calcule a probabilidade de:

a) Pelo menos 15 utilizadores estarem insatisfeitos com o programa.

b) Entre 16 e 45 utilizadores estarem insatisfeitos com o programa.

c) No máximo 10 utilizadores estarem insatisfeitos com o programa.