Introdução à Probabilidade e Estatística

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Ano lectivo 2015/16

Ana Isabel Santos

Aulas 13 e 14

Testes de hipóteses não paramétricos

Testes de Hipóteses

Não Paramétricos

Testes de Ajustamento

do Qui-quadrado

Teste de Hipóteses Não Paramétricos

Os **teses de hipóteses não paramétricos** são menos potentes que os teste de hipóteses paramétricos, pelo que devem utilizar-se apenas como alternativa a estes quando:

i) Não se verificam as condições para aplicar os testes paramétricos, ou

ii) As variáveis são do tipo ordinal.

Iremos abordar dois tipos de testes não paramétricos:

- **Testes de ajustamento:** Para averiguar se as amostras foram retiradas de populações com uma dada distribuição.
  - Teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) — v.a.'s quantitativas.
  - Teste de ajustamento do Qui-Quadrado — v.a.'s do tipo quantitativo ou qualitativo, mas onde observações são repartidas em classes.
- **Teste de independência:** Para testar a independência entre duas variáveis aleatórias X e Y.

Teste de Ajustamento

H_0 : X tem f. de distribuição $F_0(x)$ vs ***H_1*** : X não tem f. de distribuição $F_0(x)$

Em geral, a distribuição da população não está completamente especificada. Admitindo, por exemplo, que ela é Normal não sabemos qual é a sua média e/ou qual é o seu desvio-padrão, pelo que torna-se necessário estimar este(s) parâmetro(s) a partir dos dados amostrais.

No caso em que é necessário proceder-se a estimações, o **Teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S)** torna-se conservativo, isto é, tende a não rejeitar a hipótese nula. Neste casos usa-se o **Teste de K-S** com a modificação de Lilliefors. Este teste deve ser usado em amostras de grande dimensão ($n > 30$).

Quando a dimensão da amostra é ≤ 30, o **Teste de Shapiro-Wilk** é o mais adequado, uma vez que tem melhor performance que o anterior para amostras de pequena dimensão.

Testes de ajustamento do Qui-quadrado

Procedimento

1. Construir k classes de valores da v. a. $X: A_1, A_2, \ldots, A_k$;

2. Dada uma amostra aleatória, determinar as frequências absolutas simples observadas, O_i, para cada classe A_i;

3. Calcular a probabilidade, p_i, com base na distribuição teórica definida em H_0, da classe A_i conter elementos;

4. Determinar as frequências absolutas estimadas, E_i, para cada classe;

5. Se a distribuição definida em H_0 se ajustar aos dados, então as frequências observadas estarão próximas das estimadas.

Teste de Ajustamento

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Seja X uma variável aleatória com k classes de valores, $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Notação:

- n - dimensão da amostra; k – n.º de classes;
- O_i - frequência observada para a classe ;
- p_i - probabilidade de uma elemento pertencer à classe A_i, sob a hipótese H_0;
- $E_i = np_i$ - frequência estimada para a classe A_i, sob a hipótese H_0;

Condições de aplicabilidade do teste:

***i*)** Não existirem mais de 20% das classes com $E_i < 5$;

***ii*)** Todas as classes têm $E_i \geq 1$.

Quando estas condições não se verificam, procede-se ao agrupamento das classes que falham os requisitos com as adjacentes.

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Hipóteses a testar:

H_0 : X tem a função (densidade) de probabilidade $f_0(x)$ *vs*

H_1 : X não tem a função (densidade) de probabilidade $f_0(x)$

Estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-1} .$$

Regiões críticas:

R. A.: $\left[0 \,;\, \chi^2_{k-1;1-\alpha}\right[$ e **R. R.:** $\left[\chi^2_{k-1;1-\alpha} \,;\, +\infty\right[$

Regra de decisão:

Rejeitar H_0 se $\chi^2_{obs} \geq \chi^2_{k-1;1-\alpha}$ - **Teste unilateral direito**

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 5: Foi realizado um estudo para determinar se a opinião pública era favorável à construção de uma barragem hidroeléctrica. Os resultados foram os seguintes: 40% a favor da construção, 30% são indiferentes, 20% opõem-se e os restantes disseram não terem pensado no assunto. Uma amostra aleatória de 150 indivíduos da região afectada revelou que 42 eram a favor, 61 eram indiferentes e 33 eram contrários à construção.

a) Com base nos outputs seguintes, estarão estes dados de acordo com os resultados obtidos no referido estudo?

b) Determine o valor do p-value associado a este teste de hipóteses.

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 5: Outputs do SPSS

Opinião

	Observed N	Expected N	Residual
1	42	60,0	-18,0
2	61	45,0	16,0
3	33	30,0	3,0
4	14	15,0	-1,0
Total	150		

Test Statistics

	Opinião
Chi-Square	11,456[a]
df	3
Asymp. Sig.	P

a. 0 cells (0,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 15,0.

p-value

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 7: Numa dada sala de cinema da região de Évora realizou-se um inquérito a 400 estudantes, escolhidos aleatoriamente, da Universidade de Évora, relativamente à sua preferência sobre 4 tipos de filmes: A, B C e D. Os resultados obtidos foram:

Filme

	Observed N	Expected N	Residual
A	a	100,0	30,0
B	b	100,0	-10,0
C	c	100,0	-20,0
D	d	100,0	,0
Total	e		

χ^2_{obs}

Test Statistics

	Filme
Chi-Square	14,000[a]
df	3
Asymp. Sig.	,003

a. 0 cells (0,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 100,0.

p-value

a) Determine os valores de **a**, **b**, **c**, **d** e **e** ?

b) Ao nível de significância de 1%, poderá afirmar-se que não existe preferência por nenhum dos tipos de filmes? Efectue o teste estatístico que considere mais adequado.

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 6: A procura diária de um certo produto foi, em 40 dias escolhidos ao acaso, a seguinte:

N.º de unidades	N.º de dias
0	6
1	14
2	10
3	7
4	2
5	1

Será que se pode admitir que tais observações foram extraídas de uma população com distribuição Poisson, isto é, será de admitir que a procura diária segue uma distribuição de Poisson?

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 6: Outputs do SPSS

Procura diária

	Observed N	Expected N	Residual
0	6	7,4	-1,4
1	14	12,5	1,5
2	10	10,6	-,6
3	7	6,0	1,0
4	2	2,6	-,6
5	1	,9	,1
Total	40		

Test Statistics

	Procura diária
Chi-Square	,765[a]
df	5
Asymp. Sig.	,979

a. 2 cells (33,3%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is ,9.

Teste de ajustamento do Qui-quadrado

Exercício 6: Outputs do SPSS depois de se agruparem as classes 4 e 5

Procura diária

	Observed N	Expected N	Residual
0	6	7,4	-1,4
1	14	12,5	1,5
2	10	10,6	-,6
3	7	6,0	1,0
4	3	3,4	-,4
Total	40		

Test Statistics

	Procura diária
Chi-Square	,677[a]
df	4
Asymp. Sig.	,954

a. 1 cells (20,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 3,4.

Testes de Independência do Qui-quadrado

Testes de Independência

Teste de independência do Qui-quadrado

Objetivo: Testar a independência entre 2 variáveis, X e Y, que estão agrupadas em classes mutuamente exclusivas e exaustivas.

Procedimento

1. Construir L classes de valores da v. a. $X : X_1, X_2, \ldots, X_L$;

2. Construir C classes de valores da v. a. Y : $Y_1, Y_2, \ldots, Y_C$;

3. Determinar as frequências absolutas simples observadas, O_{ij}, para cada par de valores (X, Y);

4. Determinar as frequências absolutas estimadas, E_{ij}, para cada par (X, Y) tendo em conta a condição de independência.

Testes de independência do Qui-quadrado

A classificação dos elementos da amostra origina uma tabela de dupla entrada, denominada **Tabela de Contingência**:

X	Y						Total
	Y_1	Y_2	$\cdots$	Y_j	$\cdots$	Y_C	
X_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1j}	$\cdots$	O_{1C}	$O_{1.}$
X_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2j}	$\cdots$	O_{2C}	$O_{2.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
X_i	O_{i1}	O_{i2}	$\cdots$	O_{ij}	$\cdots$	O_{iC}	$O_{i.}$
$\cdots$							$\cdots$
X_L	O_{L1}	O_{L2}	$\cdots$	O_{Lj}	$\cdots$	O_{LC}	$O_{L.}$
Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	$\cdots$	$O_{.j}$	$\cdots$	$O_{.C}$	n

Teste de independência do Qui-quadrado

Notação:

n - nº total de observações;

L - nº de categorias da v. a. X;

C - nº de categorias da v. a. Y;

O_{ij} - frequência absoluta observada na célula (i, j);

$O_{i.}$ - frequência absoluta observada na categoria i da v. a. X;

$O_{.j}$ - frequência absoluta observada na categoria j da v. a. Y;

$E_{ij} = \dfrac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}$ - frequência estimada para a célula (i, j).

Condições de aplicabilidade do teste:

***i*)** Não existirem mais de 20% das classes com $E_{ij} < 5$;

***ii*)** Todas as classes terem $E_{ij} \geq 1$.

Quando as condições não se verificam, agrupam-se classes adjacentes.

Teste de independência do Qui-quadrado

Hipóteses a testar:

H_0 : As variáveis X e Y são independentes vs

H_1 : As variáveis X e Y não são independentes.

Estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{C} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{(L-1)(C-1)}.$$

Regiões críticas:

R. A.: $\left[\, 0;\ \chi^2_{(L-1)(C-1);1-\alpha} \right[$ e **R. R.:** $\left[\chi^2_{(L-1)(C-1);1-\alpha}\ ;\ +\infty\right[$

Regra de decisão:

Rejeitar H_0 se $\chi^2_{obs} \geq \chi^2_{(L-1)(C-1);1-\alpha}$ - **Teste unilateral direito**

Testes de independência do Qui-quadrado

No caso em que a tabela de contingência é do tipo 2×2, deve-se efetuar a **correção de Yates,** para melhorar a aproximação à distribuição χ^2, o que consiste em considerar a seguinte estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(|O_{ij} - E_{ij}| - 0,5)^2}{E_{ij}}$$

$$= \frac{n(|O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}| - 0,5n)^2}{O_{1.}O_{2.}O_{.1}O_{.2}} \sim \chi^2_{(L-1)(C-1)=1}.$$

Nota: quando as condições de aplicabilidade não se verificam nas tabelas de 2x2 (amostra pequenas), aplica-se o teste Exato de Fisher.

Teste de independência do Qui-quadrado

Exercício 9: Com o objetivo de participarem numa dada atividade social, os estudantes de uma escola foram submetidos a dois testes: um psicotécnico e um sobre regras de conduta. Obtiveram-se os seguintes resultados:

	Teste Psicotécnico	
Regras de conduta	Aprovado	Reprovado
Aprovado	54	73
Reprovado	47	167

Ao nível de significância de 10%, considera que existe relação entre os resultados obtidos nos dois testes? Se o nível de significância for 5%, mantém a mesma conclusão?

Teste de independência do Qui-quadrado

Exercício 9:

Teste regras de conduta * Teste Psicotécnico Crosstabulation

			Teste Psicotécnico		Total
			Aprovado	Reprovado	
Teste regras de conduta	Aprovado	Count	54	47	101
		Expected Count	37,6	63,4	101,0
	Reprovado	Count	73	167	240
		Expected Count	89,4	150,6	240,0
Total		Count	127	214	341
		Expected Count	127,0	214,0	341,0

χ^2_{obs}

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	16,157[a]	1	,000
Continuity Correction[b]	15,186	1	,000
Likelihood Ratio	15,863	1	,000
Linear-by-Linear Association	16,110	1	,000
N of Valid Cases	341		

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 37,62.

b. Computed only for a 2x2 table

p-value