Departamento de
Matemática

Introdução à Probabilidade e Estatística
2015/2016 - 2º Semestre

Ficha 5 : Distribuições amostrais

1. Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo lançado gasta em média 9.7 litros aos 100 km, com desvio-padrão de 1 litro. Admita que o consumo segue uma distribuição Normal.

(a) Descreva a variável em questão e especifique a sua distribuição;

(b) Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 20 carros, o gasto médio ser superior a 10 litros?

2. Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo lançado gasta em média 9.7 litros aos 100 km, com desvio-padrão desconhecido. Recolheu-se uma a.a. e estimou-se o devio-padrão como sendo $s = 1$ litro. Admitindo que o consumo segue uma distribuição Normal, qual a probabilidade de, numa a.a. de 20 carros, o consumo médio amostral ser superior a 10 litros? E inferior a 8.9 litros?

3. Uma empresa lançou um medicamento para dormir que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes não sujeitos a este medicamento dormiam em média 7.5 horas, com desvio-padrão de 1.4 horas, ao passo que os doentes aos quais se administrou este medicamento dormiam em média 8 horas com desvio-padrão de 2 horas. Num hospital observaram-se 31 doentes não sujeitos ao medicamento e 61 sujeitos à medicação. Qual a probabilidade dos doentes do primeiro grupo observado dormirem em média mais do que os do segundo grupo? Assuma a normalidade das distribuições.

4. Uma empresa lançou um medicamento para dormir que tem estado a ser utilizado nos hospitais. Constatou-se que os doentes não sujeitos a este medicamento dormiam em média 7.5 horas enquanto que os doentes aos quais se administrou este medicamento dormiam em média 8 horas. Num hospital observaram-se $n = 20$ doentes não sujeitos ao referido medicamento e $m = 27$ sob a referida medicação tendo-se obtido, respectivamente, os seguintes desvio-padrão 1.4 horas e 2 horas. Qual a probabilidade dos doentes do primeiro grupo dormirem em média menos dos que os do segundo grupo, quando se verifica a igualdade das variâncias populacionais? Assuma a normalidade das distribuições.

Resumo

1. Distribuição da média amostral com variância conhecida

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população Normal com média μ e variância σ^2. A média amostral, $\bar{X}$ tem média e variância dadas por

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Em particular, tem-se que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

2. Distribuição da média amostral com variância desconhecida

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população Normal com média μ e variância σ^2 desconhecida. Nestas condições, tem-se que

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

3. Distribuição da diferença de duas médias amostrais com variâncias conhecidas

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ duas amostras aleatórias independentes retiradas de duas populações Normais, sendo $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Então,

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

4. Distribuição da diferença de duas médias amostrais com variâncias desconhecidas mas iguais

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ duas amostras aleatórias independentes retiradas de duas populações Normais, sendo $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Então,

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)}$$