UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

1.^{a} Frequência de Análise Matemática I - 21/10/2017

Observações: Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas. Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as suas respostas. Numere todas folhas de teste que entregar: por exemplo, se entregar 3 folhas de teste, devem numerá-las como 1/3, 2/3 e 3/3.

Grupo I

1. Considere o seguinte conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0 \ \wedge \ x^3 - 64 \geq 0\right\} \ \cup \ [0, 1[\,.$$

a) Determine o interior, exterior e o fecho de A.

b) Diga, justificando, se A é um conjunto aberto ou fechado.

c) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A

Grupo II

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}. \end{cases}$$

a) Mostre que $(u_n)_n$ é majorada por 3;

b) Mostre que $(u_n)_n$ é crescente.

c) Prove que a sucessão $(u_n)_n$ é convergente e calcule o seu limite.

Grupo III

3. Determine, caso existam, os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_n \left(n - \sqrt{n^2 + \cos^2 n}\right);$ $\qquad b)\ \lim\limits_n \left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n} + \left(\frac{7}{4}\right)^n\right];$

$c)\ \lim\limits_n \left(\frac{3}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{3}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{3}{\sqrt{n^2+n+1}}\right).$

4. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são duas sucessões tais que $x_n < y_n$, para todo o $n > p$, com $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_n x_n = a$ e $\lim\limits_n y_n = b$, então $a < b$".

Grupo IV

5. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+3)}$$

converge e calcule a sua soma.

6. Sobre uma circunferência, e partindo de um ponto, uma pulga dá, sucessivamente, pulos angulares de α, $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{4}, \cdots, \frac{\alpha}{n}, \cdots$ (com $\alpha > 0$ fixo).

Mostre que a pulga dá infinitas voltas à circunferência.

Grupo V

7. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^n};$ $\qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5n}+1}$ $\qquad c)\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{n^2}\right)^n.$

8. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para zero, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente."