Universidade de Évora

Departamento de Matemática

2.^{a} FREQUÊNCIA - 26/11/2016

RESOLUÇÃO

Grupo I

1. Considere $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{arcsen\ x}{x} - 5.$$

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \wedge x \neq 0\} = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

b) A função f é continua em todo o seu domínio porque é o quociente de duas funções contínuas: a função $arcsen\ x$, que é contínua em $[-1, 1]$ e a função polinomial $p(x) = x$, que é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, $p(x)$ é contínua em $[-1, 1]$ e $p(x) \neq 0$, para todo o $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

c) Tem-se $f(-1) = \dfrac{arcsen\ (-1)}{-1} = -\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{arcsen\ (1/2)}{1/2} = 2 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{arcsen\ x}{x} - 5\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen\ x}{x} - 5.$

Fazendo $y = arcsen\ x$ tem-se que se $x \to 0$, então $y \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{arcsen\ x}{x} - 5 = \lim_{y \to 0} \frac{y}{seny} - 5 = \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{seny}{y}} - 5 = 1 - 5 = -4.$$

d) Embora a função f não esteja definida em $x = 0$, pela alínea anterior, sabemos que existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, portanto f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$. Sendo a função prolongamento definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{arcsen\ x}{x} - 5 & \text{se} \quad x \in D_f, \\ \\ -4 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Grupo II

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} & \text{se } x < 1, \\ \\ ae^{\frac{x-1}{2}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) A função f é diferenciável em $x = 1$ se e só se f é contínua em 1 e existe $f'(1)$. A função f será contínua no ponto $x = 1$ se e só se

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1).$$

Como

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ae^{\frac{x-1}{2}} = ae^{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{2}} = ae^0 = a = f(1),$$

então vem que f é contínua em 1 se e só se $a = -\frac{1}{2}$.

Vejamos agora, para este valor de a, se f é diferenciável em 1, ou seja, se existem $f'(1^+)$ e $f'(1^-)$ e $f'(1^+) = f'(1^-)$.

Por definição tem-se

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ae^{\frac{x-1}{2}} - a}{x-1} = a \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{\frac{x-1}{2}} - 1}{\frac{x-1}{2} \times 2} = \frac{a}{2} \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{\frac{x-1}{2}} - 1}{\frac{x-1}{2}}.$$

Fazendo $y = \dfrac{x-1}{2}$ tem-se que se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$. Portanto,

$$f'(1^+) = \frac{a}{2} \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{\frac{x-1}{2}} - 1}{\frac{x-1}{2}} = \frac{a}{2} \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{a}{2} \times 1 = \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{x^2-4x+3}-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{2+x-3}{2\,(x-3)\,(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2\,(x-3)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Logo, $f'(1^+) = f'(1^-) = -\dfrac{1}{4} = f'(1)$. Donde se concluí que f é diferenciável em 1 se e só se $a = -\frac{1}{2}$.

Assim, tem-se que a função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{1}{x-3} & \text{se } x < 1, \\[2ex] -\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

b) Determinemos agora a função deriva de f.

Se $x < 1$, vem que

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-3}\right)' = -\frac{1}{(x-3)^2}.$$

Se $x > 1$, tem-se

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)' e^{\frac{x-1}{2}} = -\frac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}}.$$

Portanto, tendo em conta os cálculos efetuados na alínea anterior, a função derivada é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-3)^2} & \text{se } x < 1, \\[2ex] -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

c) Pela alínea anterior sabemos que:

Se $x < 1$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} < 0$, para todo o $x \in \left]-\infty, 1\right[$. Portanto, a função f é decrescente em $\left]-\infty, 1\right[$.

Se $x \geq 1$, então $f'(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}} < 0$, para todo o $x \in [1, +\infty[$, pelo que a função é decrescente em $[1, +\infty[$.

Logo, podemos concluir que a função f é monótona decrescente em todo o seu domínio.

d) Por definição e pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, tem-se que a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$ é dada por

$$y = f'(x)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{4}(x-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x+1).$$

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^x - x - 2$.

Vejamos primeiro que a função f tem dois zeros em $\mathbb{R}$.

Sabemos que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, porque é a diferença de duas funções contínuas: a função e^x, que é contínua em $\mathbb{R}$, e a função polinomial $p(x) = x + 2$, que também é contínua em $\mathbb{R}$. Por outro lado, temos $f(-2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$, $f(0) = e^0 - 2 = -1$ e $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 > 0$. Então, em particular, podemos considerar que a função $f(x)$ é contínua nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0, 2]$, portanto, aplicando o teorema de Bolzano em ambos os intervalos, tem-se que

$$\exists c_1 \in (-2, 0) : f(c_1) = 0 \quad \text{e} \quad \exists c_2 \in (0, 2) : f(c_2) = 0,$$

ou seja, a função f tem, pelo menos, dois zeros em $\mathbb{R}$.

Provemos agora que a função f tem exactamente dois zeros em $\mathbb{R}$, isto é, provemos que f não pode ter três zeros distintos.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tais que $c_1 < c_2 < c_3$ e $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

Como a função f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, por ser a diferença de duas funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, e^x e $p(x) = x + 2$, em particular podemos considerar que f é contínua em $[c_1, c_2]$ e em $[c_2, c_3]$ e que f é diferenciável em (c_1, c_2) e em (c_2, c_3). Dado que $f(c_1) = f(c_2)$ e $f(c_2) = f(c_3)$, então, aplicando o teorema de Rolle em ambos os intervalos, vem que

$$\exists d_1 \in (c_1, c_2) : f'(d_1) = 0 \;\text{ e }\; \exists d_2 \in (c_2, c_3) : f'(d_2) = 0.$$

Mas, por outro lado, temos que $f'(x) = (e^x - x - 2)' = e^x - 1$ e

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

ou seja, a função derivada de f tem apenas um zero em $\mathbb{R}$. Logo, não podem existir dois números reais distintos d_1 e d_2 tais que $f'(d_1) = f'(d_2) = 0$, o que é uma contradição. Donde, se conclui que a função f tem exactamente dois zeros em $\mathbb{R}$.

Grupo III

4. *a)* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg\ x - 1}{sen\ x - \cos x} = \left(\tfrac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{sen\ x}{\cos x} - 1}{sen\ x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen\ x - \cos x}{\cos x\,(sen\ x - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} =$

$\displaystyle = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Alternativa:

Considerando-se $f(x) = tg(x) - 1$ e $g(x) = sen\ x - \cos x$, tem-se

$$f'(x) = [tg(x) - 1]' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2 \qquad \text{e}$$

$$g'(x) = [sen(x) - \cos(x)]' = \cos x + sen\ x \Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 0.$$

Então, aplicando a Regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg\ x - 1}{sen\ x - \cos x} = \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\ x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} \times senx.$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$ e a função $senx$ é uma função limitada, então, por um teorema dado, tem-se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{sen\ x}{\ln(1+x)} = 0.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{2\sqrt{x} - x - 1} = \left(\tfrac{0}{0}\right)$

Uma vez que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, vejamos se é possível resolver este limite aplicando a Regra de Cauchy.

Consideremos as funções $f(x) = \ln x - x + 1$ e $g(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$, cujas funções derivadas são

$$f'(x) = [\ln x - x + 1]' = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{e} \quad g'(x) = \left[2\sqrt{x} - x - 1\right]' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1.$$

Vejamos agora se existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Como

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) = 2,$$

então, pela Regra de Cauchy, tem-se que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{2\sqrt{x} - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

5. Pretende-se mostrar que $\dfrac{x}{1 + x^2} \leq arctg\ x$, para todo o $x \geq 0$.

Assim:

i) Se $x = 0$, então

$$\frac{0}{1 + 0^2} \leq arctg 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0, \text{ ou seja, obtemos uma proposição verdadeira.}$$

ii) Se $x > 0$, consideremos a função $f(x) = arctg\ x$ e o intervalo $[0, x]$. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular f é uma função contínua no intervalo $[0, x]$, para qualquer $x > 0$.

Por outro lado, como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, então f é diferenciável em $(0, x)$. Logo, pelo teorema de Lagrange, existe pelo menos um $c \in (0, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{arctg\ x - arctg\ 0}{x} = \frac{arctg\ x}{x} \Leftrightarrow arctg\ x = f'(c)x.$$

Como $f'(c) = \dfrac{1}{1 + c^2}$, então $arctg\ x = \dfrac{x}{1 + c^2}$. Por outro lado, dado que $c \in (0, x)$ tem-se

$$0 < c < x \Leftrightarrow 0 < c^2 < x^2 \Leftrightarrow 0 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}.$$

Além disso, como $x > 0$, podemos afirmar que

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} = arctg\ x, \text{ para todo o } x > 0.$$

Donde, por $i)$ e $ii)$, concluimos que

$$\frac{x}{1+x^2} \leq arctg\ x, \text{ para todo o } x \geq 0.$$

Grupo IV

6. $a)$ Como

$$\begin{aligned} \lim_n\ (-1)^n \frac{e^{n+2}-1}{e^n+5} &= \lim_n\ (-1)^n \times \lim_n \frac{e^{n+2}-1}{e^n+5} = \lim_n\ (-1)^n \times \lim_n \frac{e^2 - 1/e^n}{1+5/e^n} = \\ &= \lim_n\ (-1)^n \times e^2 \neq 0, \end{aligned}$$

então não se verifica a condição necessária de convergência de uma série, pelo que se conclui que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n+2}-1}{e^n+5}$ é divergente.

$b)$ Considere-se a sucessão de termo geral $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$.

Como $\lim_n y_n = \lim_n \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$ e a sucessão $(y_n)_n$ é decrescente, pois

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-\left(\sqrt{n+1}+1\right)}{\left(\sqrt{n+1}+1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}+1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)} \leq 0$$

porque $0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Então, pelo critério de Leibniz, podemos concluir que a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ é convergente.