# Universidade de Évora

Departamento de Matemática

3.ª FREQUÊNCIA - 7/01/2017

**RESOLUÇÃO**

## Grupo I

**1. *a*)** Com $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$, então tem-se

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1.$$

Portanto, o polinómio de Taylor de ordem 2, no ponto $x = 0$, para a função $f$ é

$$p_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Assim, tem-se

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

***b*)** Como $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}} = f(-\frac{1}{4})$ e uma vez que o polinómio de Taylor nos dá uma aproximação razoável de $f$ numa vizinhança do ponto $x_0 \in D_f$, então podemos considerar que a parábola $p_2(x)$, obtida na alínea anterior, é uma "boa" aproximação ao gráfico da função $f$ numa vizinhança de $x_0 = 0$, ou seja, que $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx p_2(-\frac{1}{4})$. Portanto, tem-se

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{25}{32}.$$

## Grupo II

**2. *a*)** Considerando $u(x) = \dfrac{\ln x}{2}$ e que $P\left(\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}\right) = arctg\,(u(x))$, tem-se

$$P\left(\frac{1}{x\left(4+\ln^2 x\right)}\right) = \frac{1}{4}P\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{\ln^2 x}{4}}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{\frac{1}{2x}}{1+\left(\frac{\ln x}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\ln x}{2}\right).$$

***b)*** Aplicando o método de primitivação por partes com $u'(x) = e^x$ e $v(x) = x^2 - 2$, pelo que $u(x) = P(e^x) = e^x$ e $v'(x) = 2x$, tem-se

$$P\left((x^2-2)e^x\right) = (x^2-2)e^x - P(2xe^x).$$

Donde, aplicando novamente o método de primitivação por partes a esta nova primitiva com $u'(x) = e^x$ e $v(x) = 2x$, pelo que $u(x) = P(e^x) = e^x$ e $v'(x) = 2$, tem-se

$$P\left((x^2-2)e^x\right) = (x^2-2)e^x - 2xe^x + P(2e^x) = (x^2-2)e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x)e^x.$$

***c)*** Como

$$P\left(\frac{\cos x}{sen^3 x + 3sen^2 x}\right) = P\left(\frac{1}{sen^3 x + 3sen^2 x} \times \cos x\right),$$

então aplicando o método de primitivação por substituição com $\varphi : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $\varphi(t) = arcsen\ t$, pelo que $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ e $\varphi^{-1}(x) = senx$, tem-se

$$\begin{aligned} P\left((f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)\right) &= P\left(\frac{1}{t^3+3t^2} \times \sqrt{1-t^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = P\ \frac{1}{t^3+3t^2} = \\ &= P\ \frac{1}{t^2(t+3)}. \end{aligned}$$

Dado que se trata da primitiva de uma função racional própria, onde o polinómio $Q(t) = t^2(t+3)$ tem duas raízes reais distintas $t = 0$ e $t = -3$ e $t$ aparece duas vezes na fatorização do polinómio, podemos concluir que a primeira raiz tem multiplicidade 2 e a segunda tem multiplicidade 1. Portanto, a função racional decompõe-se em

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2(t+3)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+3} = \frac{At(t+3) + B(t+3) + Ct^2}{t^2(t+3)} = \\ &= \frac{(A+C)t^2 + (3A+B)t + 3B}{t^2(t+3)} \end{aligned}$$

e, pelo método dos coeficientes indeterminados, tem-se

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ 3A + B = 0, \\ 3B = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C = 1/9, \\ A = -1/9, \\ B = 1/3. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P\ \frac{1}{t^2(t+3)} &= P\left(-\frac{1}{9t}+\frac{1}{3t^2}+\frac{1}{9(t+3)}\right)=-\frac{1}{9}P\ \frac{1}{t}+\frac{1}{3}P\ \frac{1}{t^2}+\frac{1}{9}P\ \frac{1}{(t+3)}= \\ &= -\frac{1}{9}\ln|t|-\frac{1}{3}\frac{1}{t}+\frac{1}{9}\ln|t+3|=\frac{1}{9}\ln\left|\frac{t+3}{t}\right|-\frac{1}{3t} \end{aligned}$$

e, portanto, vem

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos x}{sen^3x+3sen^2x}\right) &= \left[P\left(\left(f\circ\varphi\right)(t)\times\varphi'(t)\right)\right]\circ\varphi^{-1}(x)= \\ &= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{senx+3}{senx}\right|-\frac{1}{3senx}. \end{aligned}$$

## Grupo III

**3. *a*)** Considerem-se as funções

$$G(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{e} \quad \varphi(x)=x^2.$$

Como

$$F(x)=G(\varphi(x))=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

e uma vez que a função integranda $e^{-t^2}$ é contínua, então pelo teorema Fundamental do Cálculo e pela regra de derivação da função composta vem

$$F'(x)=[G(\varphi(x))]'=G'(\varphi(x))\times\varphi'(x)=e^{-\left(x^2\right)^2}\times 2x=2xe^{-x^4}.$$

Portanto,

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 2x\underbrace{e^{-x^4}}_{\neq 0}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Como o sinal de $F'(x)$ depende apenas do sinal de $2x$ e

$$F(0)=\int_0^0 e^{-t^2}\,dt=0,$$

então tem-se

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

portanto, $F$ é monótona decrescente em $]-\infty, 0[$ e é monótona crescente em $]0, +\infty[$, tendo um ponto de mínimo local em $x = 0$.

***b)*** Dado que

$$F''(x) = \left(2xe^{-x^4}\right)' = 2e^{-x^4} + 2x\left(-4x^3\right)e^{-x^4} = 2\left(1-4x^4\right)e^{-x^4},$$

então

$$\begin{aligned} F''(x) &= 0 \Leftrightarrow 2\left(1-4x^4\right)e^{-x^4} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2e^{-x^4}}_{>0}\left(1-2x^2\right)\underbrace{\left(1+2x^2\right)}_{>0} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Como o sinal de $F''(x)$ depende apenas do sinal de $\left(1-2x^2\right)$, tem-se

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{2}/2$ | | $\sqrt{2}/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F$ | $\frown$ | $p.\ i.$ | $\smile$ | $p.\ i.$ | $\frown$ |

Logo, $F$ tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ e tendo um ponto de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e outro em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**4.** Uma vez que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \frac{e^t-1}{t}\,dt}{x} = \frac{0}{0},$$

considerem-se as funções $g(x) = x$ e

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t-1}{t}\,dt = \int_x^{1} \frac{e^t-1}{t}\,dt + \int_1^{2x} \frac{e^t-1}{t}\,dt = -\int_1^{x} \frac{e^t-1}{t}\,dt + \int_1^{2x} \frac{e^t-1}{t}\,dt.$$

Dado que a função integranda $\dfrac{e^t-1}{t}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então, pelo teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$f'(x) = -\frac{e^x-1}{x} + \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2,$$

logo $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e como $g'(x) = 1 \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então, pela regra de Cauchy, vem que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o segundo limite existir. Calculando este limite tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2}{1} = \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + 2\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = -1 + 2 = 1,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t}\, dt = 1.$$

## Grupo IV

**5.** Considere-se a região do plano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq\ y \leq e^x\}.$$

***a*)** A região $A$ encontra-se representada na Figura 1.

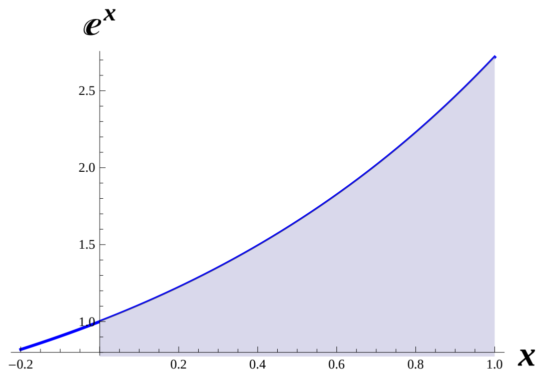


Figure 1: Representação gráfica da região $A$.

***b)*** A área da região $A$ é

$$A = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

***c)*** Tendo em conta a alínea a), o comprimento da linha que delimita a região $A$ é dado por

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = (1-0) + (1-0) + (e-0) + \int_0^1 \sqrt{1 + \left[(e^x)'\right]^2} dx = \\ &= 1 + 1 + e + \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx. \end{aligned}$$

Vamos calcular este integral aplicando o método de integração por substituição com $\varphi : \mathbb{R} \backslash [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} \ln \left(t^2 - 1\right)$, pelo que $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2} \dfrac{2t}{t^2 - 1} = \dfrac{t}{t^2 - 1}$ e como $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$, então $\varphi^{-1}(0) = \sqrt{2}$ e $\varphi^{-1}(1) = \sqrt{1 + e^2}$. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \sqrt{t^2} \frac{t}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \\ &= [t]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \\ &= [t]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2} \left[\ln \left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} = \\ &= \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+e^2} - 1}{\sqrt{1+e^2} + 1} - \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$L = 2 + e + \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+e^2} - 1}{\sqrt{1+e^2} + 1} - \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right).$$