UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

**2.ª Frequência de Análise Matemática I - 25/11/2017**

---

**Observações:** Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as suas respostas. Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas. Numere todas as folhas de teste que entregar: por exemplo, se entregar 3 folhas de teste, deve numerá-las como 1/3, 2/3 e 3/3.

---

## Grupo I

**1.** Considere $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

***a*)** Determine o domíno e os zeros de $f$.

***b*)** Estude a função $f$ quanto à continuidade.

***c*)** Indique o contradomínio de $f$ e diga, justificando, se a função tem máximo e/ou mínimo.

***d*)** Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que $\exists c \in (-1, 1) : f(c) = c$.

## Grupo II

**2.** Seja $b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} arctg\,(bx) & \text{se } x < 0, \\ 2xe^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

***a*)** Determine o valor de $b$ por forma a que $f$ seja diferenciável em zero.

***b*)** Estude $f$ quanto à diferenciabilidade e indique a sua função derivada.

***c*)** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

***d*)** Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e os extremos locais de $f$.

## Grupo III

**3.** Considere que um ponto móvel se movimenta sobre uma recta. Suponha que a lei dos espaços $x(t)$ é derivável, que a velocidade $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ também é derivável: $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ é a aceleração.

Suponha que num instante inicial $t_1$ um móvel está na posição $x(t_1)$ em repouso, isto é, $v(t_1) = 0$. Suponha ainda que num instante posterior, $t_2$, o móvel volta à mesma posição, ou seja, que $x(t_1) = x(t_2)$.

Prove que existe um instante $\tau$, com $t_1 < \tau < t_2$, em que a aceleração é nula, isto é, $a(\tau) = 0$.

**4.** ***a*)** Calcule $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}$, fazendo a substituição $t = s^3$.

***b*)** Este limite é a derivada, em $t = 1$, de uma função, qual? Verifique o resultado obtido na alíena anterior aplicando uma regra de derivação.

## Grupo IV

**5**. Diga se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{8^n+1}$ é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

**6**. Considere $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$. Diga para que valores de $\alpha$ a série dada é:

***a*)** Absolutamente convergente;

***b*)** Simplesmente convergente.

Nome: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

N.$^o$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Curso: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _