

## 7 CÁLCULO INTEGRAL

**7.1.** Seja  $f(x) = x^2$  em  $[0, 1]$  e  $P = \{0; 0, 4; 0, 5; 0, 7; 1\}$  uma partição de  $[0, 1]$ . Calcule  $s_P$  e  $S_P$ .

**7.2.** Seja  $f(x)$  definida em  $[-1, 2]$  por

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 3 & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e  $P = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$  uma partição de  $[-1, 2]$ . Calcule  $s_P$ .

**7.3.** Seja  $f(x) = (x - 4)^2$  em  $[0, 4]$  e  $P = \{0; 1; 2; 3; 4\}$  uma partição de  $[0, 4]$ .

a) Represente graficamente  $f(x)$ ;

b) Calcule  $s_P$  e  $S_P$ .

**7.4.** Interprete geometricamente os seguintes integrais e determine o seu valor:

a)  $\int_a^b c dx$ , com  $0 < a < b$ ;

b)  $\int_a^b x dx$ , com  $0 < a < b$ ;

c)  $\int_a^b kx dx$ , com  $0 < a < b$  e  $k > 0$ ;

**7.5.** Calcule, usando a definição, o integral  $\int_0^1 x^2 dx$ , decompondo o intervalo em  $n$  partes iguais.

**7.6.** Calcule, usando a definição, o integral  $\int_0^1 e^x dx$ , decompondo o intervalo em  $n$  partes iguais.

**7.7.** Estabeleça uma relação de ordem entre os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 \sqrt{x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^3 dx;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx.$$

**7.8.** Mostre que:

$$a) \quad 0 \leq \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx \leq 4,$$

$$b) \quad -2 \leq \int_{-1}^1 x^3 dx \leq 2.$$

**7.9.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[1, +\infty[$  e  $\int_1^x f(t) dt = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$ .

a) Determine, justificando,  $f(x)$ ;

b) Sem calcular o integral, mostre que  $\int_4^9 f(t) dt = 2e^3 - e^2$ .

**7.10.** Determine as funções derivadas das seguintes funções:

$$a) \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t + \ln t}{t^2} dt;$$

$$b) \quad G(x) = \int_1^{3x^2} \ln t dt;$$

$$c) \quad H(x) = \int_{1/x}^{e^x} \cos t^2 dt.$$

**7.11.** Calcule os seguintes limites:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 dt}{x^4};$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^5 dt}{\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt};$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \operatorname{sen} t dt}{(x-1)^2}.$$

**7.12.** Sendo  $f(x)$  uma função contínua no intervalo  $I$  e sendo  $c$  um ponto interior de  $I$ , calcule

$$\lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{x}{x-c} \int_c^x f(t) dt \right), \quad \text{com } x \in I.$$

**7.13.** Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

$$\begin{array}{ll} a) F(x) = \int_1^x (t^2 - 6t + 8) dt; & b) G(x) = \int_1^x \log t dt; \\ c) H(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt; & d) I(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\ln t} dt; \end{array}$$

**7.14.** Calcule os seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{-2}^{-1} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx; & b) \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7+3x}}; \\ c) \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx; & d) \int_0^{\pi/2} \cos x dx; \\ e) \int_2^3 \frac{1}{x^3+x} dx; & f) \int_1^e \ln x dx, \\ g) \int_0^{\pi} \sin^3 x dx; & h) \int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx; \\ i) \int_0^1 \frac{2}{x-3} dx; & j) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tg x}{\cos^2 x} dx. \end{array}$$

**7.15.** Considere a função  $f(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ . Sabendo que  $1 \leq A \leq 2$ , calcule um majorante e um minorante para

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx.$$

**7.16.** Sendo  $f$  uma função contínua em  $[0, 1]$  e admitindo-se que  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Prove que:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

**7.17.** Calcule, usando o método de integração por partes ou por substituição, os seguintes integrais:

a)  $\int_1^e x^{-3} \ln x dx;$

b)  $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx;$

c)  $\int_0^1 \arccos x dx;$

d)  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{3 + \cos x} dx;$

e)  $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx;$

f)  $\int_0^2 e^{x^2} x dx,$

g)  $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx;$

h)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$

i)  $\int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx;$

j)  $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \operatorname{sen}^4 x} dx.$

**7.18.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Mostre que  $\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$

**7.19.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[-a, a]$ . Prove que:

a) Se  $f$  é uma função par, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$

b) Se  $f$  é uma função ímpar, então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

**7.20.** Se  $f(x)$  é uma função par e  $g(x)$  é uma função ímpar, determine o valor dos seguintes integrais:

a)  $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx;$

b)  $\int_{-1}^1 [g(x)]^2 dx;$

c)  $\int_{-1}^1 [g(x)]^3 dx;$

d)  $\int_{-1}^1 f(0)g(x) dx.$

**7.21.** Mostre que  $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_e^{e^x} \frac{1}{\ln s} ds$ , para qualquer  $x > 0$ .