Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Exame de Época Normal de Análise Matemática I

12 de janeiro de 2017

Observações: Apresente todos os cálculos que efectuar. Numere todas folhas de teste que entregar. Os **alunos que fazem exame devem resolver apenas as perguntas assinaladas com *,** sendo que cada um dos grupos deve ser feito em folhas de teste separadas.

Grupo I

(1.^{a} Frequência - avaliação mista)

1.(*) Considere o conjunto

$$A = \left\{ 2 + (-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

a) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado do conjunto A.

b) Diga, justificando, se A é um conjunto aberto e/ou fechado.

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$$

a) Mostre que $1 \leq u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) Mostre que $(u_n)_n$ é crescente.

c) Prove que a sucessão $(u_n)_n$ é convergente e calcule o seu limite.

3. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n}$; *b*) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{n^5} + 1}$;

$c)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ **(* só para o exame).**

Sugestão: Use o teorema das sucessões enquadradas.

4. Considere a seguinte série numérica

$$\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots.$$

$a)$ Determine o termo geral da série.

$b)$ Estude, por definição, a natureza da série e determine, caso exista, a sua soma.

5.(* excepto c) Estude quanto à convergência as seguintes séries:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n^3}{n^3-1}$; $\quad b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} sen\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\quad c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$; $\quad d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$.

Grupo II

(2.^{a} Frequência - avaliação mista)

1. Considere $f : D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x)=\frac{e^{3x}-1}{x}.$$

$a)$ Determine o domíno de f.

$b)$ Estude a função f quanto à continuidade.

$c)$ Diga, justificando devidamente, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x=0$. Em caso afirmativo, apresente a função prolongamento.

2.(*) Seja $g : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função real de variável real definida por

$$g(x)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{1+x}{x}\right) & \text{se } x\neq 0,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x=0.\end{cases}$$

a) Calcule, caso existam, $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos.

c) Determine o sentido da concavidade e os pontos de inflexão do gráfico de g.

d) Esboce o gráfico de g.

e) Mostre que o teorema de Lagrange é aplicável à função g no intervalo $\left[0, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$ e determine o declive da recta tangente ao gráfico de g que é paralela ao segmento de extremos $A = (0, g(0))$ e $B = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, g\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\right)$.

3.(* excepto c) Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+x}}$; *b*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{1+x}}$; *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+sen x)^{\frac{1}{x}}$

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em (a,b) e tal que $f(a) = f(b) = 0$.

Prove que, dado $k \in \mathbb{R}$ arbitrário, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$.

Sugestão: Aplique o teorema de Rolle a $g(x) = f(x)e^{-kx}$.

Grupo III

(3.ª Frequência - avaliação mista)

1.(*) Determine uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, \quad g(0) = 1.$$

2. Considere $F : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$F(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 \, dt$$

a) Determine os extremos e os intervalos da monotonia de F.

b) Determine os pontos de inflexão e o sentido da concavidade de F.

3.(*) Calcule, usando a *regra de Cauchy* e o *Teorema fundamental do Cálculo*, o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\, dt}.$$

4. (* excepto c) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,(x+1)^2}$; *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$; *c*) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

5.(*) Considere a região do plano definida por.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, \quad y \leq 4 - x^2\}.$$

a) Represente geometricamente a região A.

b) Determine a área da região A.

6. Determine o comprimento do arco de curva definido por $g(x) = \sqrt{x^3}$ no intervalo $I = [0,2]$.

Bom Trabalho!!