Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Exame de Recurso de Análise Matemática I

20 de janeiro de 2017

Observações: Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as respostas. Cada grupo que compõe o exame deve ser resolvido em folhas de teste separadas. Numere todas folhas de teste que entregar.

Grupo I

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3}\right)$;   *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2+(-1)^n\dfrac{3n}{n+1}\right]$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{n^2+1}+\dfrac{2n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2+n-1}\right)$.

Sugestão: Use o teorema das sucessões enquadradas.

2. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{3^{n-2}}$;   *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sen\ \frac{1}{n}}{n^3}$;   *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$.

Grupo II

3. Seja f uma função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1 & \text{se} \quad x<0, \\ \dfrac{2x}{arctg\ x}-1 & \text{se} \quad x>0. \end{cases}$$

a) Estude a função f quanto à continuidade.

b) Diga, justificando devidamente, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$. Em caso afirmativo, apresente a função prolongamento.

4. Considere $g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \ln(3e^x - 1).$$

a) Determine o domíno de g e diga, justificando, se é um conjunto aberto, fechado e/ou limitado.

b) Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos.

c) Determine o sentido da concavidade e os pontos de inflexão do gráfico de g.

d) Investigue a existência de assímptotas do gráfico de g.

Grupo III

5. Considere a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$. Prove que esta equação não tem mais do que três raízes distintas. *Sugestão:* Aplique o teorema de Rolle.

6. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx$; *b*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; *c*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$.

Grupo IV

7. Sejam f uma função contínua no intervalo I e c um ponto interior de I. Calcule

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{1}{x-c} \int_c^x f(t)\, dt \right), \quad \text{com } x \in I.$$

8. Considere a região do plano definida pelo conjunto:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, \quad y \geq 1 - x, \quad y \leq sen\ x + 1, \quad y \geq \frac{x}{\pi} - \pi \right\}.$$

Represente geometricamente a região A e determine a sua área.

Bom Trabalho!!