

## 6 PRIMITIVAÇÃO

**6.1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde é válida essa primitiva:

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $3x + 2;$                                    | b) $x^2 (x^3 - 3)^2;$                               | c) $(x^2 - 1)^2;$   |
| d) $\sqrt[5]{x^2};$                             | e) $x^2 e^{x^3};$                                   | f) $x \sqrt[3]{1 + 2x^2};$  |
| g) $\frac{1}{\sqrt[5]{2 - 3x}};$                | h) $5^x;$   | i) $\frac{x}{1 + x^2};$   |
| j) $\operatorname{tg} x;$                       | k) $\frac{x^2}{1 + x^6};$                           | l) $\frac{1}{\cos^2 x (2 \operatorname{tg} x + 1)};$                  |
| m) $\frac{\ln x}{x};$                           | n) $\frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2};$ | o) $\frac{\cos (\ln x)}{x};$  |
| p) $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x};$ | q) $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}};$                 | r) $\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x};$                                |
| s) $e^{2x} \cos (e^{2x});$                      | t) $\frac{1}{5 + x^2};$                             | u) $\frac{\operatorname{arctg} \left( \frac{x}{3} \right)}{9 + x^2};$ |
| v) $\frac{1}{e^x + e^{-x}};$                    | w) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^4}};$                      | x) $\frac{1}{\operatorname{sen} x};$                                  |
| y) $\operatorname{tg}^2 x;$                     | z) $\frac{x^3}{\sqrt{x^8 + 1}}.$                    |   |

**6.2.** Mostrar que se  $F$  é uma primitiva qualquer de uma função ímpar  $f$ , então  $F$  é par.

**6.3.** Determine, utilizando o método de primitivação por partes, uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde é válida essa primitiva:

- |                              |                                 |                               |
|------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $x \operatorname{sen} x;$ | b) $e^x \cos x;$                | c) $x e^{x+2};$               |
| d) $x^2 e^x;$                | e) $\ln (2x);$                  | f) $\cos^2 x;$                |
| g) $2x \cos (4x - 1);$       | h) $\operatorname{arctg} (2x);$ | i) $\operatorname{arcsen}(x)$ |

- $j) \quad x \ln x^2; \quad k) \quad x \cos x \operatorname{sen} x; \quad l) \quad \operatorname{sen}^4 x;$   
 $m) \quad \ln^2 x; \quad n) \quad \frac{x^5}{\sqrt{2+x^3}}; \quad o) \quad \operatorname{sen}(\ln x);$   
 $p) \quad x \operatorname{arctg} x; \quad q) \quad \arccos(x).$

**6.4.** Determine, utilizando o método de substituição, a expressão geral das seguintes primitivas:

- $a) \quad \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}; \quad b) \quad x\sqrt{1+3x}; \quad c) \quad \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}};$   
 $d) \quad \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}; \quad e) \quad \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \quad f) \quad \frac{1}{x\sqrt{x^2-3}};$   
 $g) \quad \frac{\ln(2x)}{x \ln(4x)}; \quad h) \quad \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}; \quad i) \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$

**6.5.** Resolva as seguintes equações diferenciais sujeitas às condições dadas:

- $a) \quad f'(x) = 4x^3 + x^2 - 6x + 1, \quad f(1) = \frac{1}{3};$   
 $b) \quad f'(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f(0) = 2;$   
 $c) \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 2, \quad f(0) = -1.$

**6.6.** Se um automóvel parte do repouso, qual a aceleração constante que lhe permitirá percorrer 150 metros em 10 segundos?

**6.7.** Um ponto percorre o eixo dos  $xx$  com aceleração  $12 - 8t$  ( $m/s^2$ ) em cada instante  $t$ . Sabendo que ocupava a posição  $x = 0$  no instante  $t = 0$  e tinha velocidade 0 nesse instante, calcule:

- $a) \quad$  a sua velocidade no instante  $t = 2$  segundos;  
 $b) \quad$  a sua posição no instante  $t = 3$  segundos.

**6.8.** Determine as primitivas e os respectivos intervalos de primitivação, para as seguintes funções racionais:

$$\begin{array}{lll}
 a) \quad \frac{1}{x+1}; & b) \quad \frac{x^3}{x+1}; & c) \quad \frac{x^2}{x^2-1}; \\
 d) \quad \frac{3x+1}{x^3-x}; & e) \quad \frac{2x}{(x+1)(x+2)^2}; & f) \quad \frac{1}{x^3-x^2+x-1}; \\
 g) \quad \frac{x^4}{(x+2)(x^2-1)}; & h) \quad \frac{x}{x^2+2x+3}; & i) \quad \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.
 \end{array}$$

**6.9.** Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll}
 a) \quad \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}; & b) \quad \frac{x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}}; & c) \quad \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}; \\
 d) \quad \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}; & e) \quad \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}; & f) \quad \frac{1}{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}; \\
 g) \quad \frac{2\ln x - 1}{x \ln x (\ln x - 1)^2}; & h) \quad \frac{1}{e^x - 1}; & i) \quad \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-1}; \\
 k) \quad \frac{1}{e^x - e^{-x}}; & l) \quad \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x - \cos x}; & m) \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; \\
 n) \quad \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}; & o) \quad \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}; & p) \quad \frac{e^{3x} + 3e^{2x} + 6}{e^{3x} + 3e^x}; \\
 q) \quad x\sqrt{x-1}; & r) \quad \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}; & s) \quad \frac{\cos(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}; \\
 t) \quad \frac{1}{x \ln(x)}; & u) \quad \frac{1 + \ln(\ln(x))}{x}.
 \end{array}$$

**6.10.** Determine um intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} \text{ com } f(1) = 2; \\
 b) \quad f''(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} \text{ com } f'(e) = 1 \text{ e } f(1) = 2.
 \end{array}$$

**6.11.** Determine uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique as seguintes condições:

$$g''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -1.$$