

## 8 INTEGRAIS IMPRÓPRIOS

**8.1.** Diga, justificando, quais dos seguintes integrais são impróprios:

$$\begin{array}{llll} a) \int_{-1}^{+\infty} \sin x dx; & b) \int_{-1}^3 \frac{1}{2x-3} dx; & c) \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx; & d) \int_2^{+\infty} \ln(x-2) dx. \end{array}$$

**8.2.** Calcule, se possível, o valor dos seguintes integrais:

$$\begin{array}{llll} a) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx; & b) \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx; & c) \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx. & d) \int_1^{+\infty} \ln x dx. \end{array}$$

**8.3.** Estude quanto à convergência os seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll} a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}; & b) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}$$

**8.4.** Estude a natureza dos seguintes integrais:

$$\begin{array}{llll} a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx; & b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx; & c) \int_0^{+\infty} \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3} dx; & d) \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx; \\ e) \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^6}} dx; & f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx; & g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3} dx; & h) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx. \end{array}$$

**8.5.** Estude quanto à convergência os seguintes integrais:

$$\begin{array}{ll} a) \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}; & b) \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx, \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}$$

**8.6.** Estude a natureza dos seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 \frac{x}{1-x^2} dx; \quad b) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; \quad c) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \operatorname{sen} x} dx; \quad d) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx; \quad f) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx; \quad g) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-4} dx; \quad h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x} dx.$$

**8.7.** Justifique porque é que não se pode escrever

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx.$$