Introdução à Probabilidade e Estatística

Testes de Hipóteses Não Paramétricos

Departamento de Matemática
Universidade de Évora

Podemos efectuar os testes do Qui-Quadrado de Ajustamento

Exemplo. As classes que se seguem resultam da geração de 20 números pseudo-aleatórios que se supõe que tenham distribuição normal reduzida:

Classes	n_i
$\leqslant -0.5$	5
$]-0.5, 0.5]$	8
> 0.5	7

Teste, aos níveis usuais de significância, a normalidade dos dados.

Aos valores de n_i chama-se Valores Observados e representa-se por O_i. Os valores de E_i são designados por Valores Esperados.

Os valores de E_i obtêm-se calculando as probabilidade, através da distribuição postulada, p_i e multiplicando estas pela dimensão da amostra. Ou seja, $E_i = nP_i$.

Após a determinação dos E_i procede-se ao cálculo da seguinte estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \frown \chi^2_{(k-p-1)}$$

k representa o nº de classe ou categorias e p o nº de parâmetros que tivermos de estimar para o cálculo das probabilidades p_i.

Rejeita-se a hipótese H_0 se $\chi^2_{Obs} > \chi^2_{(k-p-1);1-\alpha}$.

Requisitos:

1. As observações (individuais) são independentes;
2. 80% das frequências esperadas (E_{ij}) são superiores ou iguais a 5;
3. Nenhuma frequência esperada é inferior ou igual a 1.

Classes	O_i	p_i	E_i
$\leqslant -0.5$	5	0.3085	6.17
$]-0.5, 0.5]$	8	0.383	7.66
> 0.5	7	0.3085	6.17

$$\chi^2_{obs} = \frac{(5-6.17)^2}{6.17} + \frac{(8-7.66)^2}{7.66} + \frac{(7-6.17)^2}{6.17} = 0.3486$$

Dado que $\chi^2_{obs} < 5.991 (= \chi^2_{2;0.95})$, não se rejeita H_0 para um nível de significância de 5%. Ou seja, não existe evidência estatística suficiente para rejeitar a hipótese de que os dados não provenham de uma distribuição normal reduzida.

Pretende-se testar a independência entre duas variáveis aleatórias, X e Y, que se encontram agrupadas em classes ou categorias mutuamente exclusivas e exaustivas. As hipóteses a testar são, pois,

$$\begin{aligned} H_0 &: X \text{ e } Y \text{ são independentes} \\ H_1 &: X \text{ e } Y \text{ não são independentes} \end{aligned}$$

A classificação dos elementos da amostra dá lugar a uma tabela de dupla entrada, designada por Tabela de Contigência:

X \ Y	B_1	B_2	...	B_j	...	B_C	**Total**
A_1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1j}	...	O_{1C}	$O_{1.}$
A_2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2j}	...	O_{2C}	$O_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	O_{i1}	O_{i2}	...	O_{ij}	...	O_{iC}	$O_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_L	O_{L1}	O_{L2}	...	O_{Lj}	...	O_{LC}	$O_{L.}$
Total	$O_{.1}$	$O_{.2}$	...	$O_{.j}$	...	$O_{.C}$	n

$L =$ número de categorias da v.a. X (nº de linhas); $C =$ número de categorias da v.a. Y (nº de colunas);
$n =$ dimensão total da amostra
$O_{ij} =$ frequência absoluta simples, conjunta, das categorias A_i e B_j, $i = 1, 2, ..., L$, $j = 1, 2, ..., C$;
$O_{i.} =$ frequência absoluta marginal da categoria A_i, de X, $i = 1, 2, ..., L$;
$O_{.j} =$ frequência absoluta marginal da categoria B_j, de Y, $j = 1, 2, ..., C$.

Procedemos ao cálculo das freqências esperadas

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}.$$

A estatística de teste é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{C} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{(L-1)\times(C-1)}.$$

Rejeitamos a hipótese de independência entre as variáveis, X e Y, ao nível de significância α, quando $\chi^2_{obs} > \chi^2_{(L-1)\times(C-1),1-\alpha}$.

Condições de aplicabilidade:	**não mais de 20% de** $E_{ij} < 5$**;** **todos os** $E_{ij} > 1$**.**

Quando alguma destas condições falha deve-se proceder à agregação dessas classes com as adjacentes.

No caso das tabelas 2×2 costuma-se efectuar a correcção de Yates, para melhorar a aproximação à distribuição χ^2, que consiste em considerar a seguinte estatística de teste:

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{C} \frac{\left(|O_{ij} - E_{ij}| - 0.5\right)^2}{E_{ij}} \\
&= \frac{n\left(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21} - 0.5n\right)^2}{O_{1.}O_{2.}O_{.1}O_{.2}} \sim \chi^2_{(L-1)\times(C-1)=1}
\end{aligned}$$

NOTA: Para tabelas 2×2 que não cumpram as condições de aplicabilidade (amostras pequenas) é calculado o teste Exacto de Fisher.

Outros Testes Não Paramétricos

Quando falha alguma das condições de aplicabilidade dos testes paramétricos que estudámos anteriormente, como por exemplo a normalidade e/ou a homogeneidade (ou igualdade) das variâncias populacionais, existem testes não paramétricos alternativos os quais não exigem pressupostos tão rígidos como os paramétricos e são aplicáveis independentemente da forma da distribuição.

- Teste do Sinal e Teste de Wilcoxon: alternativa aos testes paramétricos para a média ou comparação de médias no caso em que se tem uma amostra ou duas amostras emparelhadas;
- Teste de Mann-Whitney: alternativa aos testes paramétricos para comparação de médias no caso em que se tem duas amostras independentes;