Introdução à Probabilidade e Estatística

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Ano lectivo 2015/16

Ana Isabel Santos

Aula 4

Probabilidades

e

Variáveis Aleatórias

Variáveis e Vetores Aleatórios

Definição de variável aleatória

Definição 1: Uma **variável aleatória** (v. a.), X, é uma função que associa um número real, $X(w)$, a cada elemento do espaço de resultados, w, ou seja,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto X(w) = x \end{aligned}$$

- Uma **variável aleatória** é **discreta** se toma um número finito ou infinito numerável de valores;

- Uma **variável aleatória** é **contínua** se toma valores num certo intervalo.

Função massa de probabilidade

Definição 2: Chama-se **função massa de probabilidade** (f.m.p.) de uma variável aleatória X, e denota-se por $f(x)$, à função que a cada $x \in D$ faz corresponder a probabilidade da variável aleatória X tomar esse valor, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

Propriedades da função massa de probabilidade:

- $0 \leq f(x_i) \leq 1, \;$ para qualquer $x_i \in D$;
- $\sum\limits_{x_i \in D} f(x_i) = 1.$

Função de distribuição

Definição 3: Chama-se **função de distribuição** de uma v. a. X e denota-se por $F(x)$ à função definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Propriedades da função de distribuição

Seja $F(x)$ uma função de distribuição e $x_1, x_2 \in D$ tais que $x_1 < x_2$, então

$i)$ $0 \leq F(x_1) \leq 1;$

$ii)$ $F(x_1) \leq F(x_2);$

$iii)$ $P(X > x_1) = 1 - P(X \leq x_1) \Leftrightarrow P(X > x_1) = 1 - F(x_1);$

$iii)$ $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1).$

Parâmetros de variáveis aleatória: Média ou valor Esperado

Definição 4: Seja X uma v. a. com função massa de probabilidade $f(x)$.

A **média** ou **valor esperado** de X, quando existe, define-se por:

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in D_x} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_x} x_i f(x_i).$$

Nota: A este parâmetro também chamamos *momento de ordem 1 relativamente à origem*.

Parâmetros de variáveis aleatória

Propriedades do valor esperado: Sejam X e Y duas v. a.'s e k uma constante real. Então:

1. $E(k) = k$;
2. $E(kX) = k\,E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)$.E(Y).

Parâmetros de variáveis aleatória: Variância e Desvio padrão

Definição 5: Seja X uma v. a. com função massa de probabilidade $f(x)$.

A **variância** de X, quando existe, define-se por:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 .$$

O **desvio padrão** da v. a. X, quando existe, define-se por: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Nota: À variância também se chama *momento de ordem 2 em relação à média*.