Introdução à Probabilidade e Estatística

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Ano lectivo 2015/16

Ana Isabel Santos

Estatística Descritiva

e

Probabilidades

Aula 3

Covariância

Covariância: mede o grau de associação linear entre duas variáveis quantitativas obtidas do mesmo indivíduo ou unidade.

Covariância amostral:

$$S_{XY} = Cov(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}\right)$$

Covariância populacional:

$$\sigma(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$$

> 0 associação linear positiva; = 0 não existe associação linear; < 0 associação linear negativa.

Correlação

Coeficiente de Correlação de Pearson: mede o grau de associação linear entre duas variáveis quantitativas e assume a normalidade dos dados. Não depende das unidades de medida.

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}, \qquad -1 \leq r \leq 1$$

Se $0 \leq |r| < 0.2$, não existe associação linear entre as variáveis ou é desprezível;

Se $0.2 \leq |r| < 0.7$, existe associação linear moderada;

Se $0.7 \leq |r| < 0.9$, existe associação linear forte;

Se $|r| \geq 0.9$, existe associação linear muito forte.

Exercício 4:

No quadro seguinte indicam-se os preços (X) de pacotes de arroz (em euros) praticado durante 12 meses consecutivos e o número de pacotes vendidos (Y) em cada mês:

X	1.10	0.90	0.80	0.76	0.74	0.71	0.70	0.65	0.63	0.60	0.55	0.50
Y	55	70	90	100	90	105	80	110	125	115	130	131

a) Represente graficamente a informação.

b) Comente a seguinte afirmação: “Parece existir relação linear entre as duas variáveis”.

c) Calcule o valor do coeficiente de correlação de Pearson.

d) Responda novamente à alínea b).

Introdução às Probabilidades

Álgebra de Acontecimentos

Sejam $A \subseteq \Omega$ *e* $B \subseteq \Omega$ dois acontecimentos quaisquer.

- O **acontecimento reunião,** $A \cup B$, ocorre se e só se pelo menos um dos acontecimentos ocorrer.

- O **acontecimento intersecção,** $A \cap B$, ocorre se e só se ambos os acontecimentos ocorrem.

- O **acontecimento diferença,** $A - B$, ocorre quando ocorre A mas não ocorre B. O **acontecimento complementar,** $\Omega - A$ ou $\overline{A}$, ocorre se e só se A não ocorre.

- Dois **acontecimentos** A e B dizem-se **mutuamente exclusivos, disjuntos ou incompatíveis** se não ocorrem em simultâneo, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

Propriedades das Operações

Propriedades	União
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$
Lei do Complementar	$A \cup \overline{A} = \Omega$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Elemento Neutro	$A \cup \varnothing = A$
Elemento Absorvente	$A \cup \Omega = \Omega$

Propriedades das Operações

Propriedades	Intersecção
Comutativa	$A \cap B = A \cap B$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotência	$A \cap A = A$
Lei do Complementar	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Elemento Neutro	$A \cap \Omega = A$
Elemento Absorvente	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Definição clássica (ou de Laplace) de Probabilidade

Para uma dada experiência aleatória em que os resultados possíveis são disjuntos e igualmente prováveis.

Probabilidade Laplaciana

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Definição Axiomática de Probabilidade

1º Axioma: Para qualquer acontecimento $A \subseteq \Omega$,

$$P(A) \geq 0.$$

2º Axioma: A probabilidade associada ao acontecimento certo é

$$P(\Omega) = 1.$$

3º Axioma: Se dois acontecimentos *A e B,* definidos em Ω, forem mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Resultados importantes da Teoria das Probabilidades

Teoremas: Sejam *A*, *B* dois acontecimentos quaisquer de Ω.

1. $P(\emptyset) = 0$.

2. $0 \leq P(A) \leq 1$.

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

4. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilidade condicionada

Probabilidade Condicionada: Sejam *A*, *B* dois acontecimentos definidos em Ω. A probabilidade de *A* condicionada por *B* é dada por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{se } P(B) > 0.$$

Da igualdade anterior obtém-se a **importante relação**:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A), \quad \text{se } P(A) > 0 \text{ e } P(B) > 0.$$

Acontecimentos independentes

Definição: Dois acontecimentos *A* e *B* são independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \text{ com } P(A) \geq 0 \text{ e } P(B) \geq 0.$$

Consequências: Se A e B são acontecimentos independentes, então:

- $P(A \mid B) = P(A), \text{ se } P(A) > 0.$
- $P(B \mid A) = P(B), \text{ se } P(B) > 0.$

Partição do espaço amostra

Definição de Partição: Os acontecimentos $A_1, A_2, \cdots, A_k$ dizem-se uma partição de Ω se e só se:

i. Os acontecimentos são mutuamente exclusivos, dois a dois,

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \ \ \forall i,j \in \{1,2,\cdots,k\}$$

ii. A união de todos os acontecimentos é o espaço amostra Ω ,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \Omega;$$

iii. Todos os acontecimentos têm probabilidade não nula,

$$P(A_i) > 0, \ \forall i \in \{1,2,\cdots,k\}.$$

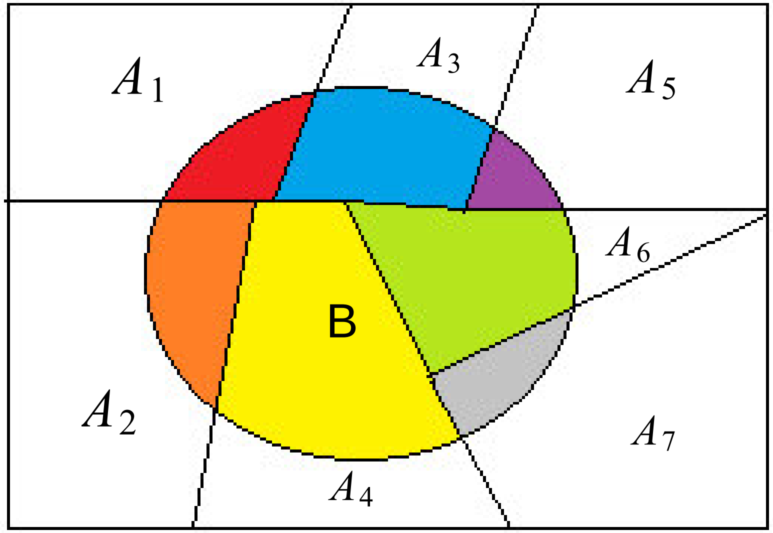
Teorema da Probabilidade Total

Teorema: Se B é um acontecimento qualquer de Ω e $A_1, A_2, \cdots, A_k$ é uma partição de Ω, então tem-se que

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

$$= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_k)P(A_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

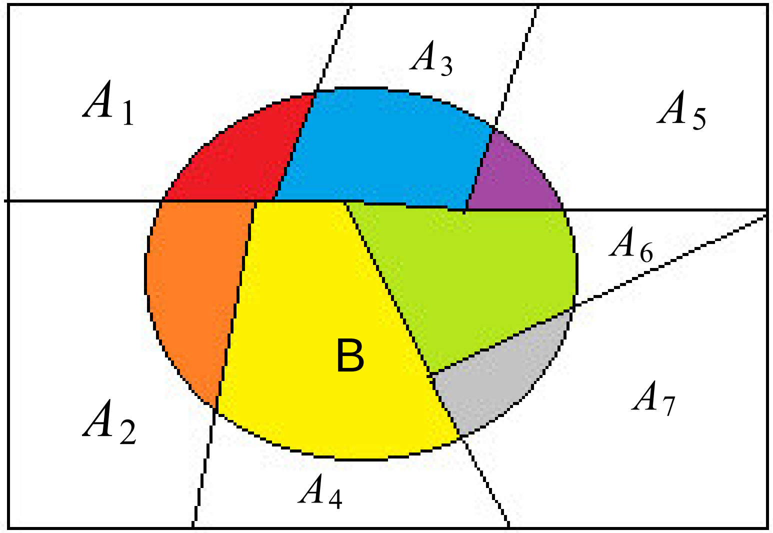


Teorema de Bayes

Teorema: Se *B* é um acontecimento de Ω, tal que *P*(*B*) > 0, e $A_1, A_2, \cdots, A_k$ uma partição de Ω, então

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B \mid A_1)P(A_1) \cdots + P(B \mid A_k)P(A_k)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)},$$



para qualquer $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.