

Sprawozdanie z projektu: Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi i LU

Danylo Zherzdiev 196765

April 17, 2025

1 Wprowadzenie

W ramach tego projektu analizowane są różne metody rozwiązywania układów równań liniowych: iteracyjne metody Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz metoda bezpośrednia LU. W szczególności, analizowane są wyniki uzyskane w zależności od rozmiaru macierzy, rodzaju macierzy pasmowej, a także czasów obliczeń i normy residuum. Celem projektu jest porównanie tych metod pod kątem zbieżności, efektywności oraz dokładności rozwiązania.

Układ równań liniowych w postaci $Ax = b$ jest jednym z fundamentalnych problemów w algebrze numerycznej. W tym projekcie przyjęto, że macierz A jest macierzą pasmową, posiadającą pięć diagonal: główną, dwie sąsiednie oraz dwie skrajne. Celem projektu jest zaimplementowanie metod iteracyjnych, takich jak metoda Jacobiego oraz Gaussa-Seidla, oraz metody bezpośredniej - rozkładu LU. Zbadano ich zbieżność oraz czas obliczeń dla różnych wartości rozmiaru macierzy N .

2 Opis matematyczny

Rozważamy układ równań $Ax = b$, gdzie:

- A to macierz pasmowa o rozmiarze $N \times N$,
- b to wektor pobudzenia o długości N ,
- x to wektor rozwiązań.

Macierz A jest zdefiniowana przez pięć diagonal: główną z elementami a_1 , dwie sąsiednie z elementami a_2 , oraz dwie skrajne diagonale z elementami a_3 . Wektor

b jest wektorem o długości N , a jego n -ty element ma postać:

$$b_n = \sin(n \cdot (f + 1)),$$

gdzie f to trzecia cyfra numeru indeksu.

W zadaniach A–E, analizowane są różne metody rozwiązywania tego układu równań.

$$A(a_1 = 10)$$

$$A(a_1 = 3)$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 10 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 10 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.6569866 \\ 0.99060736 \\ 0.83665564 \\ \vdots \\ 0.52972203 \\ 0.95659582 \\ 0.91263746 \end{bmatrix}$$

3 Opis metod

3.1 Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest iteracyjna metoda rozwiązywania układów równań. Zakłada, że rozwiązanie x_k w k -tej iteracji jest obliczane na podstawie poprzednich wartości rozwiązania x_{k-1} . Zdefiniowano ją za pomocą wzoru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j^{(k)}}{A_{ii}},$$

gdzie $x_i^{(k)}$ to wartość i -tej niewiadomej w k -tej iteracji. W zadaniu zaimplementowano wersję tej metody z obliczaniem residuum, które jest normą różnicy $Ax^{(k)} - b$.

3.2 Metoda Gaussa-Seidla

Metoda Gaussa-Seidla jest modyfikacją metody Jacobiego. Zamiast używać wartości $x_j^{(k)}$ z poprzedniej iteracji, korzysta się z już obliczonych wartości $x_j^{(k+1)}$, co może przyspieszyć zbieżność. Wzór iteracyjny ma postać:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j^{(k+1)}}{A_{ii}}.$$

3.3 Rozkład LU

Rozkład LU jest metodą bezpośrednią, w której macierz A jest dekomponowana na iloczyn dwóch macierzy: macierzy dolnej L i macierzy górnej U . Następnie, układ równań jest rozwiązywany w dwóch etapach: najpierw rozwiązujemy układ $Ly = b$ za pomocą podstawienia w przód, a potem $Ux = y$ za pomocą podstawienia wstecz.

4 Zadania

4.1 Zadanie A

W zadaniu A, rozwiązaliśmy układ równań dla $a_1 = 5 + e$, gdzie e jest ostatnią cyfrą numeru indeksu, $a_2 = a_3 = -1$. Wektor b został utworzony jako wektor sinusów, zdefiniowany jako:

$$b_n = \sin(n \cdot (f + 1)),$$

gdzie f to trzecia cyfra numeru indeksu.

4.2 Zadanie B

W zadaniu B zaimplementowaliśmy metody iteracyjne Jacobiego oraz Gaussa-Seidla. Dla obu metod porównaliśmy liczbę iteracji potrzebną do uzyskania rozwiązania zadaną dokładnością (norma residuum mniejsza niż 10^{-9}), a także przedstawiliśmy wykresy normy residuum w funkcji liczby iteracji.

4.3 Zadanie C

W zadaniu C, rozwiązaliśmy układ równań dla innych parametrów macierzy, czyli $a_1 = 3$, $a_2 = a_3 = -1$. Sprawdziliśmy, czy metody iteracyjne zbiegają się dla tych wartości parametrów.

4.4 Zadanie D

W zadaniu D, zaimplementowaliśmy metodę rozkładu LU i rozwiązaliśmy układ równań z zadania C. Obliczyliśmy normę residuum oraz czas wykonania algorytmu.

4.5 Zadanie E

W zadaniu E, zmierzono czas obliczeń dla różnych metod (Jacobi, Gauss-Seidel, LU) w zależności od rozmiaru macierzy N . Przedstawiono wykresy zależności czasu wykonania dla rozmiarów $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000\}$.

5 Wyniki

5.1 Wykres 1: Porównanie różnic w obliczeniach dla $a_1 = 10$ i $a_1 = 3$

Pierwszy wykres przedstawia, jak zmieniają się wartości iteracyjne w zależności od wybranego parametru a_1 . W przypadku $a_1 = 10$, wartości maleją wraz z kolejnymi iteracjami, co wskazuje na zbieżność metody do rozwiązania układu równań.

Dla $a_1 = 3$, wykres normy residuum rośnie wykładniczo w kolejnych iteracjach, co świadczy o braku zbieżności metody. Wynika to z faktu, że macierz nie spełnia warunku dominacji przekatniowej, który jest konieczny do zapewnienia zbieżności metod Jacobiego i Gaussa-Seidla. W praktyce oznacza to, że wartości kolejnych przybliżeń rozwiązania oddalają się od rzeczywistego rozwiązania, a błędy obliczeniowe mogą się kumulować. To zjawisko obserwujemy jako rosnący wykres, czyli systematyczny wzrost normy residuum w czasie. Ostatecznie potwierdza to niestabilność metody przy nieodpowiednio dobranych parametrach macierzy.

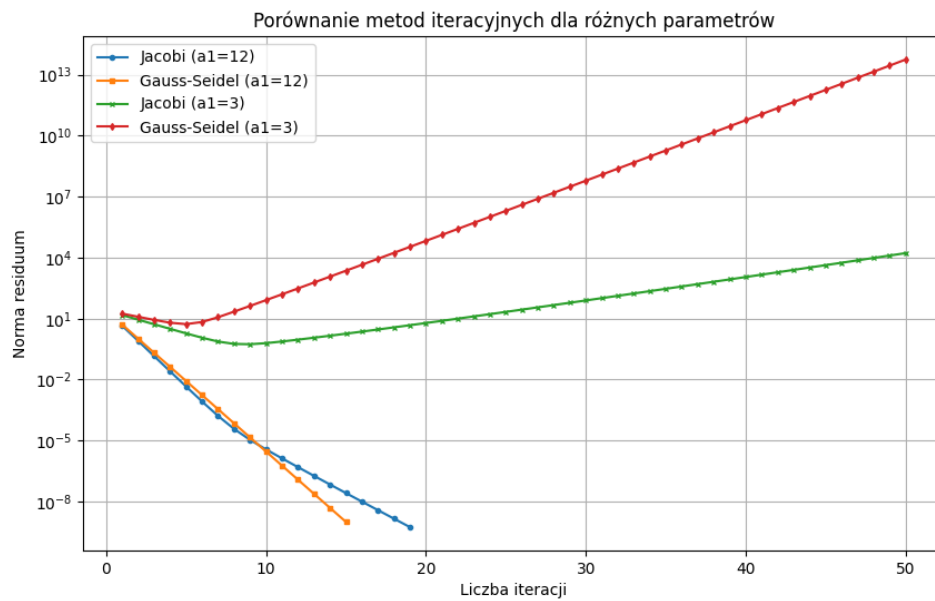


Figure 1: Porównanie wyników obliczeń dla $a_1 = 10$ oraz $a_1 = 3$

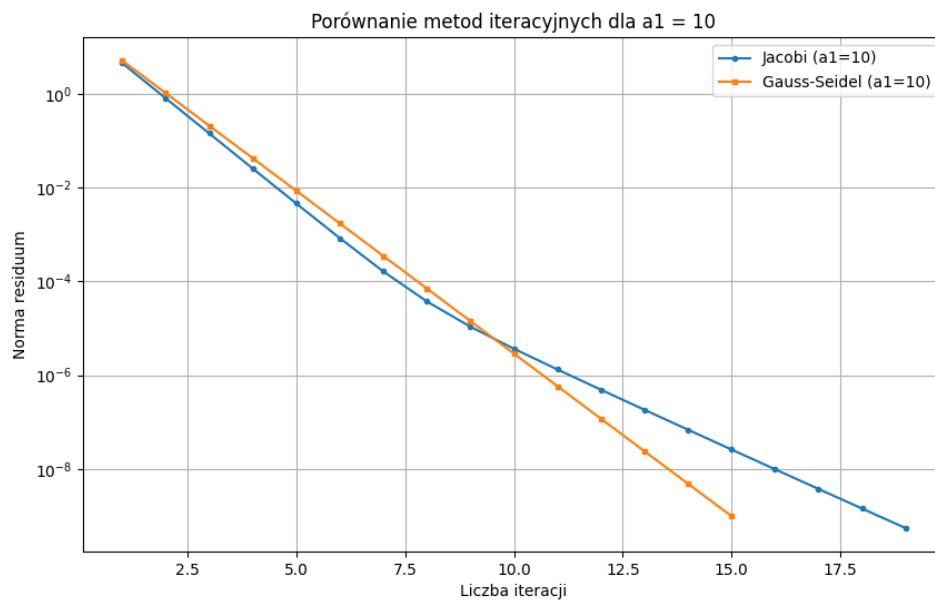


Figure 2: Porównanie wyników obliczeń dla $a_1 = 10$

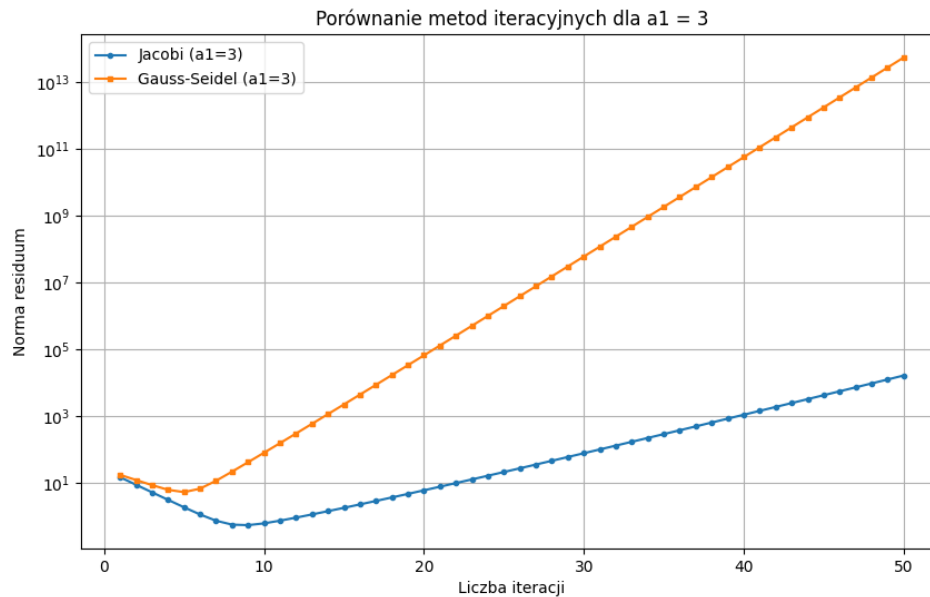


Figure 3: Porównanie wyników obliczeń dla $a_1 = 3$

5.2 Wykres 2: Czas wykonania metod iteracyjnych i LU dla różnych N

Drugi wykres przedstawia czas wykonania metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i rozkładu LU w zależności od rozmiaru macierzy N . Jak widać:

- Metoda Jacobiego wykazuje krótszy czas wykonania niż metoda Gaussa-Seidla w przeprowadzonych eksperymentach, co wskazuje na jej efektywność w tym przypadku.
- Metoda Gaussa-Seidla, pomimo teoretycznej przewagi wynikającej z uwzględniania nowych wartości w każdej iteracji, w przedstawionych wynikach wykazała dłuższy czas wykonania.
- Rozkład LU, choć charakteryzuje się stabilnym czasem wykonania przy mniejszych wartościach N , zauważalnie wydłuża czas obliczeń dla większych rozmiarów macierzy. To wskazuje na większą złożoność obliczeniową metody LU przy rosnących wartościach N , co może ograniczać jej efektywność w przypadku dużych układów równań.

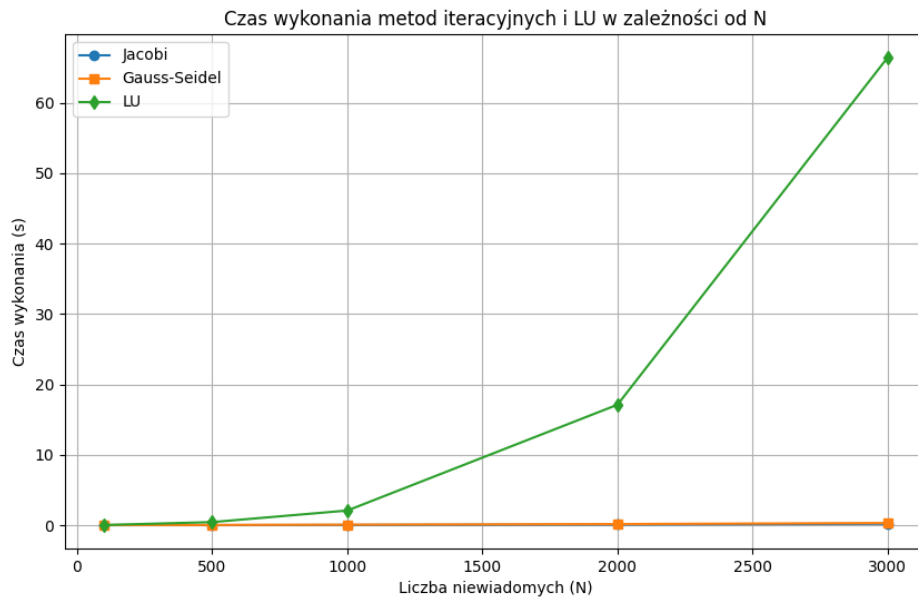


Figure 4: Czas wykonania (skale osi Y) dla różnych N

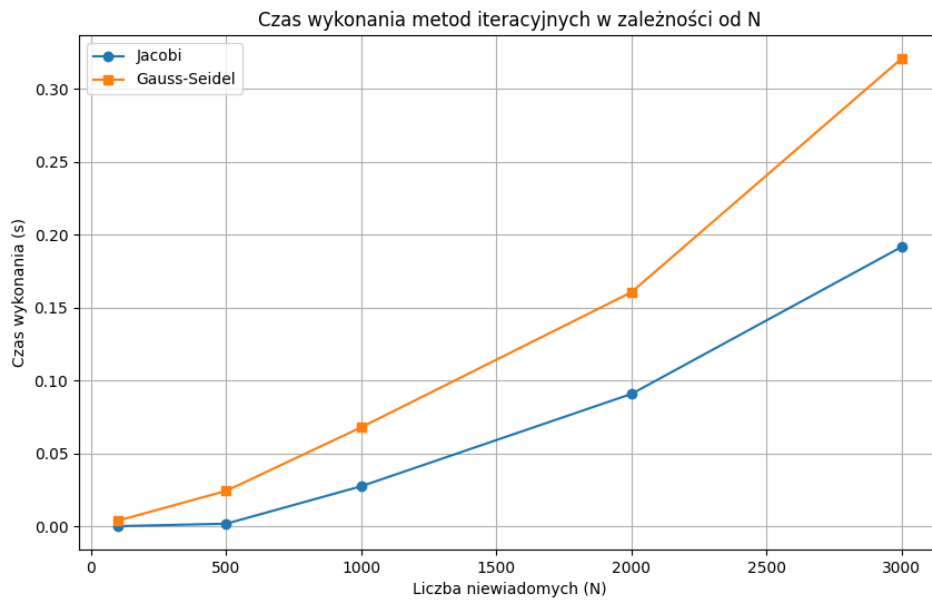


Figure 5: Czas wykonania (skale osi Y bez LU) dla różnych N

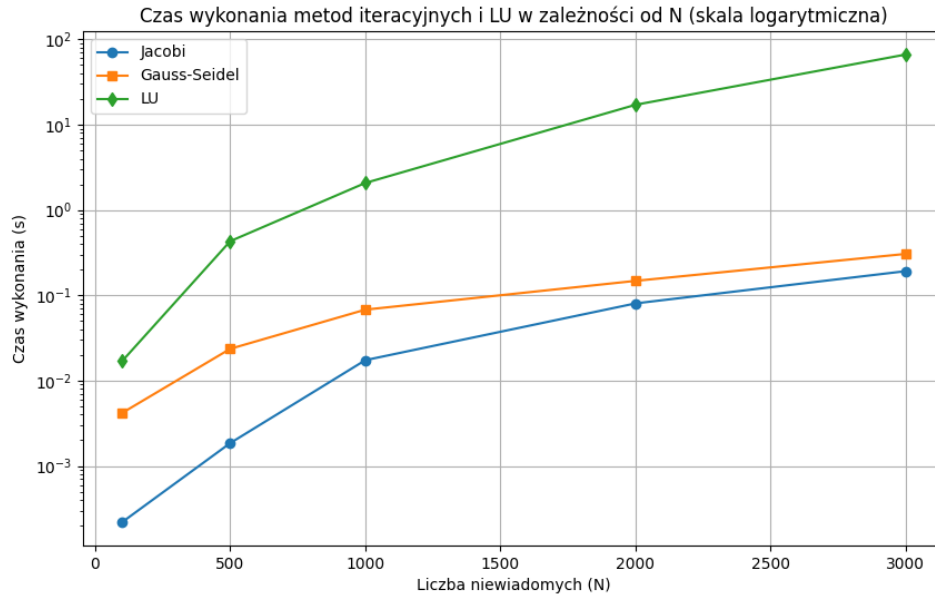


Figure 6: Czas wykonania (skale logarytmiczna) dla różnych N

5.3 Wyniki liczbowe

Poniższa tabela przedstawia wartości normy residuum oraz czas wykonania dla poszczególnych metod.

Table 1: Czas wykonania metod dla różnych N

Metoda	$N = 100$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 2000$	$N = 3000$
Jacobi	0.00024 s	0.00425 s	0.02367 s	0.10292 s	0.22618 s
Gauss-Seidel	0.00384 s	0.02314 s	0.07399 s	0.17481 s	0.29308 s
LU	0.01614 s	0.41702 s	2.06982 s	17.04495 s	65.81837 s

Podsumowanie całkowitego czasu wykonania każdej metody:

- Metoda Jacobiego: **0.3573 s**
- Metoda Gaussa-Seidla: **0.5689 s**
- Rozkład LU: **85.3663 s**

Table 2: Porównanie metod iteracyjnych i rozkładu LU dla różnych a_1

Metoda	a_1	Liczba iteracji	Czas wykonania (s)
Jacobi	10	19	0.0283
Gauss-Seidel	10	15	0.0760
Jacobi	3	50	0.0909
Gauss-Seidel	3	50	0.3076

Dodatkowe informacje:

- Final residual norm (Jacobi, $a_1 = 10$): 5.5179×10^{-10}
- Final residual norm (Gauss-Seidel, $a_1 = 10$): 9.9048×10^{-10}
- Final residual norm (Jacobi, $a_1 = 3$): 1.6665×10^4
- Final residual norm (Gauss-Seidel, $a_1 = 3$): 5.5809×10^{13}
- Norma residuum (LU): 1.3933×10^{-12}
- Czas wykonania (LU): **3.7175 s**
- Maksymalna wartosc iteracji dla testowania byla ustawiona jako **50**.

6 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych analiz i eksperymentów, możemy sformułować następujące wnioski:

- **Metoda rozkładu LU charakteryzuje się czasem wykonania który znacząco rośnie wraz z rozmiarem macierzy.** Jak pokazano w sekcji 4, metoda LU jest efektywna dla mniejszych układów (np. $N < 500$), ale dla większych wartości N jej czas wykonania rośnie wykładniczo, co wskazuje na dużą złożoność obliczeniową. Przykład z tabeli potwierdza, że czas wykonania metody LU przy $N = 3000$ wynosi aż 65.818 s.
- **Metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla wykazują szybszy czas wykonania dla mniejszych N , ale ich efektywność zależy od wartości elementów macierzy.** Z analizy wyników w tabeli wynika, że dla $a_1 = 10$, obie metody mają mniejszy czas wykonania i lepszą zbieżność, podczas gdy dla $a_1 = 3$ problemy ze zbieżnością (wzrost normy residuum) pojawiają się zarówno w metodzie Jacobiego, jak i Gaussa-Seidla, jak pokazano w tabeli wyników.

- **Wybór odpowiedniej metody powinien uwzględniać zarówno dokładność rozwiązania, jak i dostępne zasoby obliczeniowe.** Dla bardzo dużych układów warto rozważyć metody przyspieszające iteracje, takie jak przyspieszona metoda Gaussa-Seidla lub metoda Jacobiego, jeśli zapewniają one zbieżność. To wynika z wyników przedstawionych w tabeli wyników, gdzie metody iteracyjne przy większych N były znacznie szybsze niż metoda LU, ale z mniejszą dokładnością.