Ejercicio - Números naturales

$0 = \lambda f\ \lambda x.x$
$2 = \lambda f\ \lambda x.\ (f\ x)$
$2 = \lambda f\ \lambda x.\ (f\ (f\ x))$
$3 = \lambda f\ \lambda x.\ (f\ (f\ (f\ x)))$

sucesor $= \lambda n\ \lambda f\ \lambda x.\ (f\ ((n\ f)\ x))$
suma $= \lambda n\ \lambda m\ c\ \lambda x.\ ((n\ f)\ ((m\ f)\ x))$
producto $= \lambda n\ \lambda m\ \lambda f\ \lambda x.\ ((n\ (m\ f))\ x)$

Ejercicio - Y-Combinator

Dado:

$$\text{Fix} = \lambda f.\ (\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x))$$

Ver que:

$$\text{Fix}\ F = F\ (\text{Fix}\ F)$$

Cálculo:

$$\begin{aligned}(\text{Fix}\ F) &= (\lambda f.\ (\lambda x.\ f(x\ x))\ (\lambda x.\ f(x\ x)))\ F \\ &\rightarrow_{(\beta)} (\lambda x.\ F(x\ x))\ (\lambda x.\ F(x\ x)) \\ &\rightarrow_{(\beta)} F((\lambda x.\ F(x\ x))\ (\lambda x.\ F(x\ x)))\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{F((\lambda x.\ F(x\ x))\ (\lambda x.\ F(x\ x)))\ \text{“=”}\ F\ (Fix\ F)}$$

Ejercicio - β-reducir

β-reducir: $(\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x)$

$$(\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x) \rightarrow_{(\beta)} (\lambda x.\ x\ x)\ (\lambda x.\ x\ x)$$

Demostración del corolario de Church-Posser

Si la forma normal existe, es única

Demostración por el absurdo:

Supongo que la forma normal no es única, entonces:

$$M_{\rightarrow(\beta^*)}\ T$$
$$M_{\rightarrow(\beta^*)}\ S$$
$$T \neq S$$

Por teorema de Church-Posser:

$$\exists\, N /\ T_{\rightarrow(\beta^*)}\ N \wedge S_{\rightarrow(\beta^*)}\ N$$
$$T = N \wedge S = N$$
$$T = S \text{ Abs!}$$