

### **Ejercicio 1 - Inducción estructural**

Demostrar que dado un árbol ancestral de  $n$  generaciones, tiene a lo sumo  $2^n - 1$  personas

*Defino la siguiente anotación:*

Si tengo una generación: #personas =  $1 = 2^0$

Si tengo dos generaciones: #personas  $\leq 1 + 2 = 2^0 + 2^1$

Si tengo tres generaciones: #personas  $\leq 1 + 2 + 4 = 2^0 + 2^1 + 2^2$

$$\#personas(n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

*Demostración por inducción:*

$$P(1) \leq \sum_{i=0}^0 2^i = 1 = 2^1 - 1$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$P(n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

$$P(n+1) \leq \sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n = P(n) + 2^n$$

Aplicando la hipótesis inductiva

$$P(n+1) \leq P(n) + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 * 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Entonces

$$P(n+1) \leq 2^{n+1} - 1$$