Guía 4 - Autovalores y autovectores

1. Calcular los autovalores y autovectores de las matrices
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
¿Cuáles de ellas son diagonalizables?

2. Leonardo Fibonacci fue el primer matemático en estudiar la serie de números 1,1,2,3,5,8,... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 1, f_1 = 1$.

   a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}, f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir
   $$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ x^{(0)} = [1, 1]^T$$

   b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable?

   c) Hallar una fórmula explícita para el k-ésimo elemento de la serie. Sugerencia: usar los resultados del item anterior.

3. Calcular la SVD de las siguientes matrices:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $b = [1,\ 2]^T$, hallar la solución por mínimos cuadrados, $\hat{x}$, para el problema
$$Ax = b$$