Guía 1

1. Sea el conjunto $X = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T = A^{-1}\}$,

   a) Determinar si X con la operación suma de matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ define un grupo.

   b) ¿Qué ocurre si reemplazamos la operación $+$ por el producto interno de matrices? ¿Podría definir un espacio vectorial con esta operación?

2. Mostrar que la unión de subespacios no genera un subespacio.

3. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$?

   a) $A = \{(\lambda^2, -\lambda^2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

   b) $B = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 | \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{Z}$ es el conjunto de número enteros, positivos y negativos, y el cero)

4. Mostrar que $\langle x, y\rangle := x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2$ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $\mathbb{R}^n$ con cuerpo en $\mathbb{R}$. Mostrar que para cada $p \in \mathbb{N}$

   $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

   $\|x\|_p$ define una norma en $\mathbb{R}^n$

6. Mostrar que

   $$\langle A, B\rangle = Tr(A^H B)$$

   define un producto interno en $(C)^{n\times m}$. A este p.i. se lo conoce como producto interno de Frobenius. (La operación A^H representa A transpuesta y conjugada)

7. Mostrar que $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ define un producto interno en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, los polinomios de grado dos con coeficientes reales.