Análisis Matemático

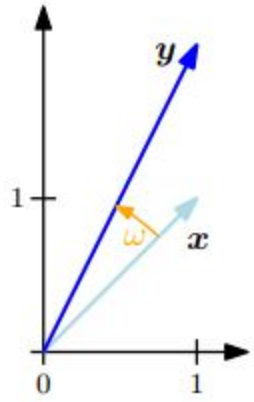
Clase 2

Algunos comentarios sobre la clase pasada

Ángulo entre elementos de un e.v.

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo ω entre dos vectores $x, \ y$ como

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$



Obs: si $x, \ y$ son ortogonales, entonces

$$\cos(\omega) = 0, \text{ y } \omega = \pm\pi$$

Base ortonormal

Def: Una base ortonormal (BON) de un espacio vectorial V es una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ que satisface

$$\langle v_i , v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$
$$\langle v_i , v_i \rangle = 1$$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i , v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$, B se dice una base ortogonal

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt

Complemento ortogonal

Def: Sea V un EV de dimensión n y $S \subseteq V$ un SEV de V de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal $S^{\perp}$ es un SEV de V de dimensión $(n-m)$ que satisface

$$S \cup S^{\perp} = V$$
$$S \cap S = \{0\}$$

Matrices definidas positivas

Def: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que

$$x^T A x > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Si vale que $x^T A x \geq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ se la llama semi definida positiva

Matrices def. positivas y p.i.

Teor: Sea V un EV de dimensión finita, y B una base de V, vale que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un p.i. **sii** existe una matriz definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\langle x, y \rangle = \hat{x}^T A \hat{y}$$

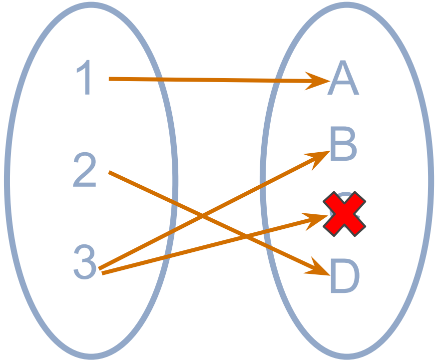
donde, $\hat{x}$, $\hat{y}$ son las representaciones de x, y en la base B

Transformaciones

Transformaciones

Def: Sea una transformación $\Phi : V \rightarrow W$, donde V, W son dos conjuntos arbitrarios. Φ se dice:

- Inyectiva: si $\forall x, y \in V : \Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y$
- Suryectiva: si $\Phi(V) = W$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva



Def: Sean V y W dos espacios vectoriales.
$\Phi : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si:

$$\forall \lambda, \psi \in K, x, y \in V : \Phi(\lambda x + \psi y) = \lambda \Phi(x) + \psi \Phi(y)$$

Corolario: toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.

Transformaciones lineales especiales

- Isomorfismo: $\Phi : V \rightarrow W$ es lineal y biyectiva
- Endomorfismo: $\Phi : V \rightarrow V$ es lineal
- Automorfismo: $\Phi : V \rightarrow V$ es lineal y biyectiva
- $id_V : V \rightarrow V, x \mapsto x$ (transformación identidad)

Representaciones

Teorema: V y W, dos espacios vectoriales de dim. finita son un isomorfismo sii $dim(V) = dim(W)$

Corolario: Todo e.v. V de dimensión finita (n) tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ todo $v \in V$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta

$$\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

Espacio nulo e Imagen.

Def: Sea una transformación $\Phi : V \to W$. Se define
Espacio nulo (kernel): $Nul(\Phi) := \{v \in V : \Phi(v) = 0_W\}$
Imagen (rango): $rg(\Phi) := \Phi(V) = \{w \in W | \exists v \in V : w = \Phi(v)\}$

Si Φ es una transformación lineal, con matriz asociada A, el kernel y rango de la transformación se asocian con los espacios nulo y columna de A

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se definen:
Espacio nulo: $x \in \mathbb{R}^m | Ax = 0$
Espacio columna: $gen(a_1, \ldots, a_m)$, con a_i la columna i de A

Proyección ortogonal

Proyección ortogonal: motivación

Las proyecciones ortogonales son un caso particular (importantísimo!) de las transformaciones lineales.

Algunos usos:

- Reducción de dimensiones (proyecto sobre un subconjunto más pequeño)
- Regresión/Clasificación
- Compresión

Proyección

Def: Sea V un EV y $U \subseteq V$ un SEV de V. Una transformación lineal $\pi : V \to U$ es la proyección si

$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$$

Esto significa que la matriz de transformación asociada a la proyección debe satisfacer:

$$P_\pi^2 = P_\pi \quad \text{(idempotencia)}$$

Proyección ortogonal

Dado V un EV con **p.i.** y $S \subset V$ un SEV de V, el objetivo es dado $v \in V$ hallar $\hat{v} \in S$ que sea “lo más parecido posible” a v.

$$\hat{v} \in S : \hat{v} = \arg\min_{s \in S} \|z - s\|.$$

Además vale que $\langle v - \hat{v}, s \rangle = 0 \quad \forall\, s \in S$

Obs: La ortogonalidad de la proyección tiene que ver con el p.i. que se esté usando

Teorema de proyección

Teorema: Sea V un EV de dimensión finita con p.i.$\langle\cdot,\cdot\rangle$, S un SEV de V. Dado $x \in V$ existe un **único** $\hat{x} \in S$ tal que

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - z\| \, \forall \, z \in V$$

Más aún: $\langle x - \hat{x}, s\rangle = 0 \quad \forall \, s \in S$

Cómo hallar la proyección

Sea V in EV de dimensión n con p.i. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y $S \subset V$ un subespacio de V de dimensión $m \geq 1$, y sea $B = \{s_1, \ldots, s_m\}$una BON de S. Buscamos encontrar la proyección $\hat{v} \in S$ de $v \in V$ $(\hat{v} = \pi_S(v))$

Como $\hat{v} \in S$, $\hat{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \Rightarrow$ Busco los coeficientes que minimizan $\|v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i\|$. El problema puede escribirse como:

$$\pi_S(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = B\alpha, \quad B = [s_1, \ldots, s_m], \; \alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]^T$$

Cómo hallar la proyección.

Como por definición $\langle v - \pi_S(v), s \rangle = 0 \ \forall s \in S$, debo resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} \langle v - \pi_S(v), s_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v - \pi_S(v), s_m \rangle = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s_1^T(v - B\alpha) = 0 \\ \vdots \\ s_m^T(v - B\alpha) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_m^T \end{bmatrix} [v - B\alpha] = B^T [v - B\alpha] = 0$$

Ecuaciones normales

$$B^T [v - B\alpha] = 0 \Leftrightarrow \boxed{B^T v = B^T B\alpha} \Rightarrow \alpha = (B^T B)^{-1} B^T v$$

Obs: Si B es BON $P_{\pi_s} = BB^T$

$$P_{\pi_S} = B(B^T B)^{-1} B^T$$

Una aplicación: Cuadrados mínimos

Supongamos que tenemos un sistema sobredeterminado de la forma

$$Xb = y,\ X \in \mathbb{R}^{n\times m},\ b \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^m,\ \ m > n$$

Es la solución de cuadrados mínimos

Como $m > n$, puede que no exista b que satisfaga todas las m ecuaciones, entonces busco la solución que más se acerque (busco la proyección de y sobre $Col(X)$)

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad \longrightarrow \quad P = X(X^T X)^{-1} X^T$$

Aplicación: predicción

Modelo

Problema general:

Tenemos un sistema que sigue el siguiente comportamiento:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k$$
$$y_k = C_k x_k + v_k$$

donde y_k son las observaciones del sistema, w_k y v_k son el ruido de proceso y de medición respectivamente

El objetivo es obtener una estimación $\hat{x}_{k|k-1}$ a partir de las las mediciones de los instantes $y_1, \ldots, y_k$

Suposiciones generales

1. $\{v_k\}, \{w_k\}$ son procesos gaussianos de media nula y varianza conocida, e independientes.

$$\mathbb{E}[v_k v_l^*] = R_k \delta_{kl}\,,\ \mathbb{E}[w_k w_l^*] = Q_k \delta_{kl}$$

2. Condiciones iniciales del problema:
   a. Para $k = 0$ partimos de un estado inicial x_0 descorrelacionado de los proceso de ruido.

Estimador óptimo

Dos problemas de interés:

- Hallar $\hat{x}_{k|k}$: la mejor estimación de $\boldsymbol{x}_k$ dada la información hasta el instante k $(Y_k = [y_0, \ldots, y_k])$ [estim. a posteriori]
- Hallar $\hat{x}_{k|k-1}$: la mejor estimación de $\boldsymbol{x}_k$ dada la información hasta el instante $k-1$ $(Y_{k-1} = [y_0, \ldots, y_{k-1}])$ [estim. a priori]

Esto equivale a resolver el problema de proyectar $\boldsymbol{x}_k$ sobre Y_k y Y_{k-1} respectivamente.

Estimador óptimo

1. $\langle x_k - \hat{x}_{k|k}, y_n \rangle, \quad n = 0, \dots, k$
2. $\langle x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}, y_n \rangle, \quad n = 0, \dots, k$

La pregunta clave es: Si conozco $\hat{x}_{k|k} \in Y_k$,
¿puedo hallar $\hat{x}_{k+1|k} \in Y_k$?

Conjetura a partir del modelo: $\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}$

Estimador óptimo

Demostramos que

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}$$

y además tenemos una forma de hallar el error:

$$e^2_{k|k} = \langle x_k - \hat{x}_{k|k}, x_k - \hat{x}_{k|k} \rangle = Tr(P_{k,k})$$

$$e^2_{k+1|k} = \langle x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}, x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \rangle = Tr(P_{k+1,k})$$

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^H + B_k Q_k B_k^H$$

Estamos en camino a encontrar una forma recursiva para estimar x_k

Filtro de Kalman

Sistema de ecuaciones recursivas:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + B_{k-1}Q_{k-1}B_{k-1}^T$$

$$K_k = P_{k|k-1}C_k^T(R_k + C_kP_{k|k-1}C_k^T)^{-1}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = (I - K_kC_k)P_{k|k-1}$$

Condiciones iniciales: $\hat{x}_0 = \mathbb{E}[x_0], \quad P_{0|0} = \mathbb{E}[x_0x_0^T]$ conocidas
(si mi estimación inicial es muy mala, poner la cov. grande)

Filtro de Kalman

Notación:

- $Y_{k-1} = [y_0, \ldots, y_{n-1}]$
- Estimación a priori: $\hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[x_k | Y_{k-1}]$
- Estimación a posteriori: $\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[x_k | Y_k]$
- Error de predicción: $x_k - \hat{x}_{k|k-1}$.

  Cov. de error (pred): $\Sigma_{k|k-1} = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T | Y_{k-1}]$
- Error de estimación: $x_k - \hat{x}_{k|k}$

  Cov. de error (estim): $\Sigma_{k|k-1} = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})^T | Y_k]$