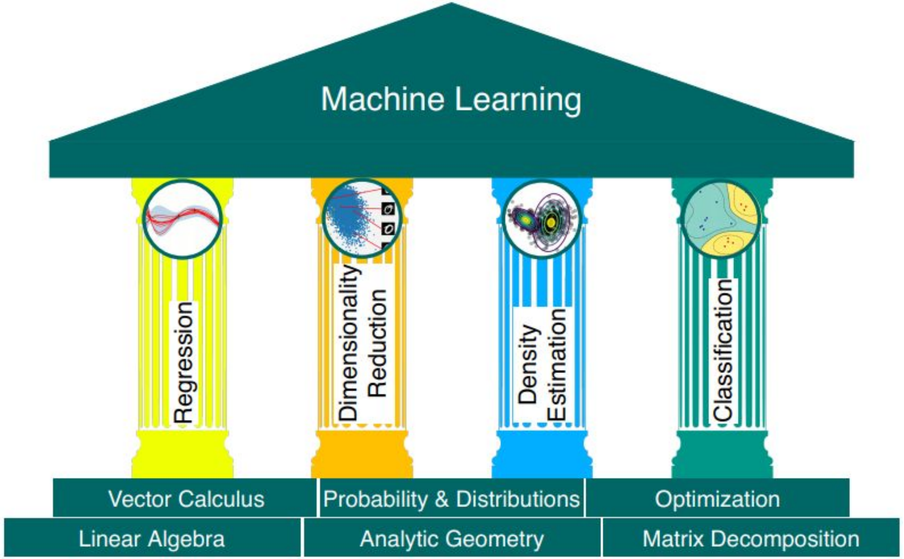
Análisis Matemático

Clase 1

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.

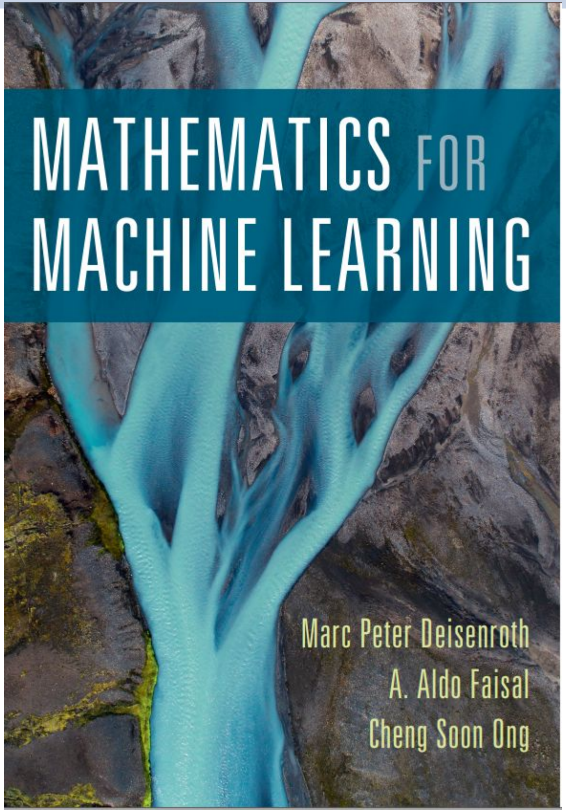


“Mathematics for Machine Learning”, Deisenroth, Faisal, Ong

Cronograma de la materia

Clase 1	• Espacios Vectoriales • Operaciones matriciales • Ortogonalidad
Clase 2	• Proyecciones • Autovalores y autovectores • SVD
Clase 3	Aplicaciones: • Filtro de Kalman • PageRank
Clase 4	• Cálculo multivariado • Gradiente
Clase 5	• Optimización
Clase 6	Aplicaciones • Gradiente descendente • SVM
Clase 8	Evaluación

Bibliografía troncal



Vamos a seguir principalmente este libro, pero para algunos temas particulares iremos agregando otra bibliografía

Está disponible gratis en https://mml-book.github.io/

Espacios vectoriales

Una que sepamos todos

Consideremos los vectores en $\mathbb{R}^3$. Qué pasa cuando operamos sobre este espacio?

1. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
2. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \ \rightarrow\ \boldsymbol{kx}$

Algunas definiciones previas

Sea V un conjunto no vacío

Def : Una operación es una función $+ : V \times V \to V$

Algunas propiedades deseables de $+$:

1. Es asociativa si $(a+b)+c = a+(b+c),\ a,b,c \in V$
2. Tiene elemento neutro si $\exists\, e \in V$ tq $e+a = a+e = a$
3. Si $+$ tiene elemento neutro e, todo elemento tiene inverso si
$$\forall v \in V,\ \exists\, v' \in V \text{ tq } v+v' = v'+v = e$$
4. Es conmutativa si $a+b = b+a, \forall a,b \in V$

Algunas definiciones previas

Sean K y V dos conjuntos

Def: Una acción de K en V es una función $\cdot : K \times V \to V$

Espacio Vectorial: definición

Def: Diremos que $\mathcal{V} = (V, +, K, \cdot)$ es un espacio vectorial si K y V son conjuntos no vacios y la operación $+$ en V, y la acción $\bullet$ de K en V satisfacen:

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w, \ \forall \alpha \in K, \forall v, w \in V$
6. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \ \ \alpha, \beta \in K, v \in V$
7. $1 \cdot v = v \ \ \forall v \in V$ (existe el elemento neutro)
8. $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v \ \ \forall \alpha, \beta, \in K, \ \forall v \in V$ ($\bullet$ es conmutativa)

Grupo conmutativo

Grupo

Algunas definiciones más

Sea $\mathcal{V} = (V, +, K, \cdot)$ un EV, diremos que V es un K-espacio vectorial

A K se lo conoce como cuerpo de escalares y a la acción $\bullet$ se la llama producto por escalar

Si $(V, +)$ cumple con las propiedades 1-3, se dice que es un grupo. Si además cumple con 4. Se dice un grupo conmutativo.

Subespacios vectoriales

Definición

Definición

Def: Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto $S \subseteq V$ no vacío se dice un subespacio de V si la suma y el producto por escalares (de V) son una operación y una acción en S que lo convierten en un K-espacio vectorial

Prop: S es un SEV de V sii:

1. $S \neq \emptyset \longrightarrow 0 \in S$
2. $x,\ y \in S \Rightarrow x + y \in S$
3. $\alpha \in K, v \in S \Rightarrow \alpha \cdot v \in S$

Algunas propiedades

Sean $X, T \subseteq V$ dos subespacios de V

1. $X \cap T = \{v \in V | v \in X \text{ y } v \in T\} \subseteq V$ es un SEV
2. $X + T = \{v \in V | x = x + t,\ x \in X,\ t \in T\} \subseteq V$ es un SEV
3. $X \cup T = \{v \in V | v \in X \text{ o } v \in T\}$ ¿Es un SEV? [Ejercicio]

Representación de subespacios

Sistemas generadores

Def: Sea V un K-EV, y sea $G = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot v_i,\ \alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

Def: Sea V un K-EV y sea $G \subseteq V$. Se dice que G es un sistema de generadores de V si todo elemento de V es una combinación lineal de G.

Noación: $< G >= V$

Independencia lineal

Interesa buscar, dentro de los conjuntos generadores, aquellos que sean mínimos (menor cantidad de elementos)

Sea V un K-EV, S un SEV de V,

- y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Entonces $< v_1, \ldots, v_n > \subseteq S \Leftrightarrow v_i \in S \; \forall 1 \leq i \leq n.$
- y sea $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq V$. Entonces:

$$< v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} > = < v_1, \ldots, v_n > \Leftrightarrow v_{n+1} \in < v_1, \ldots, v_n >$$

Def: Sea V un K-EV, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores de V.
Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) si

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow k_\alpha = 0 \; \forall \, \alpha \in I$$

Bases y dimensión

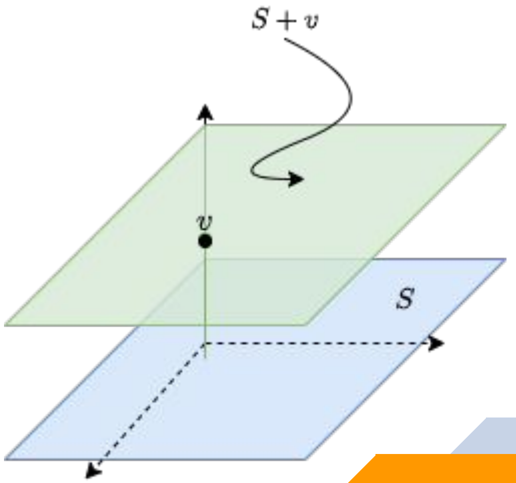
Def: Sea V un K-EV. Un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama una base del EV V si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto l.i. De V que satisface $< v_\alpha >_{\alpha\in I} = V$

Def: Sea V un K-EV, y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Diremos que n es la dimensión de V. En este caso, diremos que V es un K-EV de dimensión finita.
(hay casos donde la dimensión de V es infinita)

Variedad lineal

Def: Sea V un K-espacio vectorial. Una variedad lineal $M \subseteq V$ es un conjunto de la forma $M = \{s + p | s \in S\}$, donde S es un subespacio de V y $p \in V$

$$Ax = 0$$
$$Ax = b$$



Observación: Se pueden modificar las operaciones + y . para que M sea en SEV.

Espacios con producto interno

Def: Sea V un $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$-EV. Un producto interno sobre V es una función $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ que satisface:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, y $v, w, z \in V$
   - $\Phi(v + w, z) = \Phi(v, z) + \Phi(w, z)$
   - $\Phi(\alpha \cdot v, z) = \alpha\Phi(v, z)$
2. $\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)}$
3. $\Phi(v, v) \geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Notacón: $\Phi(v, w) = \langle v, w \rangle$

EV con producto interno

Def: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama un espacio euclídeo (espacio unitario)

Obs: El p.i. Es una generalización del producto escalar en

$$\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$$

Norma

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

Def: Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un EV real (complejo) con p.i. Y sea $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.
Se define la norma de $\boldsymbol{v}$ asociada a $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Notación: $\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$

Norma - Propiedades

1. Para todo $v \in V,\ \|v\| \geq 0, y\|v\| = 0\ sii\ v = 0$
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ y $c \in V.\ \|\alpha \cdot v\| = |\alpha|\|v\|$
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz. Si $v, w \in V,$ entonces
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$$
4. Desigualdad triangular. Si $v, w \in V$ entonces
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Ortogonalidad

Def: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-EV ($\mathbb{C}$-EV) con p.i. Dos vectores $v, w \in V$ se dicen ortogonales si $\langle v, w \rangle = 0$.

Obs (Teorema de Pitágoras) **:** Si $v, w \in V$ son vectores ortogonales, $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Def: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un EV con p.i. Se dice que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \, \forall \, i \neq j$.

Distancia

A partir de la definición de norma se puede definir la distancia entre vectores.

Def: Sea V un EV real (complejo) con p.i. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se define la distancia $d: V \times V \to \mathbb{R}$ como $d(v,w) = \|v - w\|$

Propiedades:

1. $d(v,w) \geq 0 \; \forall \, v, w, \in V$
2. $d(v,w) = 0 \; \Leftrightarrow v = w$
3. $d(v,w) = d(w,v) \; \forall \, v, w \in V$
4. $d(v,z) \leq d(v,w) + d(w,z) \; \forall \, v, w, z \in V$

Obs: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma

Operaciones matriciales

Operaciones básicas

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m},$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

- Suma (+): $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} b_{nm} \end{bmatrix}$
- Producto por escalar (·): $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$
- Producto entre matrices: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$
  (“sumo fila i por columna j”)

  Propiedades:
  - Asociativa
  - $AB \neq BA$
  - $I_n A = A I_m, \quad I_n = diag(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Algunas matrices especiales

1. Matrices cuadradas: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Operaciones especiales:

- Determinante: $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i}\, det(A(1|i))$, donde a_{1i} es el elemento (1,i) de A y $A(1|i)$ es la matriz A quitando la fila 1 y la columna i
- Traza $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Casos particulares

- Simétricas: $A^T = A$ (o hermíticas si la $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $A^H = A$)
- Inversibles: $\exists A^{-1}$ (si $det(A) \neq 0$)

Bibliografía extra

1. Álgebra Lineal, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA
2. The Matrix Cookbook, buen resumen de operaciones matriciales y sus propiedades