$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$$
$$\Theta(n \log n)$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$$
$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + ... + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + ... + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$
$$\Downarrow$$
$$A^{[0]}(x^2) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_{n-2}x^{n-2}$$
$$xA^{[1]}(x^2) = a_1x + a_3x^4 + a_5x^5 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$
$$A(\omega_n^k) = A^{[0]}((\omega_n^k)^2) + \omega_n^k A^{[1]}((\omega_n^k)^2)$$
$$A(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) = A^{[0]}((\omega_n^{k+\frac{n}{2}})^2) + \omega_n^{k+\frac{n}{2}} A^{[1]}((\omega_n^{k+\frac{n}{2}})^2)$$
$$(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})^2 = (\omega_n^k)^2 = \omega_{\frac{n}{2}}^k$$
$$\omega_n^{k+\frac{n}{2}} = -\omega_n^k$$
$$\Downarrow$$
$$A(\omega_n^k) = A^{[0]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k)$$
$$A(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) = A^{[0]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k A^{[1]}((\omega_{\frac{n}{2}}^k)$$

消去引理:

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$
$$proof.\omega_{dn}^{dk} = (e^{\frac{2\pi}{dn}i})^{dk} = (e^{\frac{2\pi}{n}i})^k = \omega_n^k$$

折半引理:

$$(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})^2 = (\omega_n^k)^2 = \omega_{\frac{n}{2}}^k$$
$$proof.\omega_n^{k+\frac{n}{2}} = \omega_n^k\omega_n^{\frac{n}{2}} = -\omega_n^k, (\omega_n^k)^2 = \omega_n^{2k} = \omega_{\frac{n}{2}}^k$$

n 次单位复数根是满足 $\omega^n = 1$ 的复数 ω。n 次单位复数根恰好有 n 个: 对于 $k = 0, 1, ..., n-1$, 这些根是 $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$
欧拉公式:

$$e^{iu} = cos(u) + isin(u)$$

值 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 称为**主 n 次单位根**

根据霍纳法则，我们可以在 $\Theta(n)$ 的时间复杂度内完成求值运算:

$$A(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + ... + x_0(a_{n-2} + x_0(a_{n-1}))...))$$

而如果某个凸集 A 有两个凸包 M1 与 M2, 则 $M1 \bigcap M2$ 也能盖住凸集 A，且 $M1 \bigcap M2 \subset M1$，但 M1 是 A 的凸包，故 $M1 \subset M1 \bigcap M2$，故 $M1 \bigcap M2 = M1$. 同理 $M1 \bigcap M2 = M2$. 即 $M1 = M2$ 由于全平面是一个凸集，故任何平面点集都可用全平面盖住，即能被凸集盖住，从而盖住该凸集的所有凸集的交集存在，即凸包存在.
DFT
我们希望计算次数界为 n 的多项式

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

在 $\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, ..., \omega_n^{n-1}$ 处的值 (即在 n 个 n 次单位复数根处)。假设 A 以系数形式给出:$a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$。接下来对 $k = 0, 1, ..., n-1$, 定义结果 y_k:

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

向量 $y = (y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ 就是系数向量 $a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ 的**离散傅里叶变换**。

对于 ∀ x, y ∈ C 与 ∀ λ ∈ [0, 1] , 有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3$$

$\mathcal{O}(n \log n)$ $\mathcal{M}(n \log n)$ mx

FFT(a, *lim*):

  if *lim* == 1 return

$a^{[0]} = (a_0, a_2, ..., a_{n-2})$

$a^{[1]} = (a_1, a_3, ..., a_{n-1})$

FFT($a^{[0]}$,lim»1)

FFT($a^{[1]}$,lim»1)

$\omega_n = e^{\frac{2\pi}{n} i} = cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n})$

$\omega = 1$

for k = 0 .. $\frac{n}{2} - 1$

$\quad a_k = a_k^{[0]} + \omega a_k^{[1]}$

$\quad a_{k+\frac{n}{2}} = a_k^{[0]} - \omega a_k^{[1]}$

$\quad \omega = \omega \omega_n$