# Коллоквиум по дискретной математике 2

## Содержание

# 1 Логика и машины Тьюринга

## 1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$, где

1. $M$ – непустое множество, *носитель структуры*
2. $\mathcal{F}$ – множество функций вида $f\colon M^n \to M$
3. $\mathcal{R}$ – множество кортежей из $M$
4. $\mathcal{C}$ – подмножество $M$

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств $(Fnc, Prd, Cnst)$, где $Fnc$ – множество функциональных символов, $Prd$ – непустое множество предикатных символов и $Cnst$ – множество константных символов. (просто набор символов)

*$\sigma$-структура (или интерпретация сигнатуры $\sigma$) – это формально кортеж $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F},\ \mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$. Вводим обозначения: $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$. Для задания $\sigma$-структуры достаточно только $M$ и $\mathcal{I}$.

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ “=“ $:=\ \{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$, где $M$ – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интепретации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ сигнатуры $\sigma$ с носителями $M$ и $N$ соответственно изоморфны если существует биекция $\eta\colon M \to N$ для которой выполняются следующие свойства:

1. $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$
2. $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3. $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$, где $c$ – один символ

## 1.2 Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.

Формулы первого порядка – это выражения в логике первого порядка (предикатной логике), построенные по правилам синтаксиса, установленным для данной сигнатуры.

Формулы первого порядка строятся из термов и предикатов, используя логические связки и кванторы. Основные элементы синтаксиса формул первого порядка:

1. Термы: переменные, константы и функции, примененные к термам.
2. Атомарные формулы: предикаты, примененные к термам.
3. Сложные формулы: атомарные формулы, соединенные логическими операциями $(\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$ и кванторами $(\forall, \exists)$.

Свободные переменные формулы – это переменные, которые не находятся под действием кванторов ($\forall$ или $\exists$) внутри этой формулы. То есть, они не ”связаны” кванторами и могут принимать любые значения из области определения. Множество свободных переменных в формуле $\varphi$ обозначается как $FV(\varphi)$.

Предложения в логике первого порядка – это формулы, которые не содержат свободных переменных, то есть все переменные в них связаны кванторами. Такие формулы имеют логическое значение (истинность или ложность) в интерпретации.

## 1.3 Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.

Оценка переменных – способ присвоения конкретных значений переменным в формуле. По сути это функция $\mu$, которая ставит в соответствие *каждой* переменной какое-то значение.

Значение терма $t$ и формулы $\varphi$ в данной структуре $\mathcal{M}$ при данной оценке $\mu$:

1. если $t$ – переменная, то $t$ принимает значение $\mu(t)$
2. если $t$ – константный символ $c$, то $t$ принимает значение интерпретации $c$ в $\mathcal{M}$: $c^{\mathcal{M}}$
3. если $t$ – функция $f$, применяемая к термам $t_1, \ldots, t_n$, то значение $t$ – это $f^{\mathcal{M}}(v_1, \ldots, v_n)$, где $v_1, \ldots, v_n$ – это значения термов при данной оценке

4. если $\varphi$ – атомарная формула $P(t_1, \ldots, t_n)$, то она истинна, если $(v_1, \ldots, v_n) \in R^{\mathcal{M}}$, где $v_1, \ldots, v_n$ – это значения термов при данной оценке

5. для сложных формул $\varphi$ используются стандартные логические правила

Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами означает, что если мы изменим значения переменных, которые не являются свободными в данной формуле, то значение формулы останется неизменным. Другими словами, переменные, не являющиеся *свободными* в формуле, не влияют на ее истинностное значение.

## 1.4 Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств.

Значение терма или формулы $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе элементов $y = (y_1, \ldots, y_n)$ структуры $\mathcal{M}$ определяется значением функции $\alpha^{\mathcal{M}}(y) = [\alpha](\pi + (x_1 \to y_1) + \ldots + (x_n \to y_n))$, где $\pi$ – любая оценка.

Выразимые в структуре $\mathcal{M}$ множества – это множества $D \subseteq \mathcal{M}$, которые можно описать с помощью формул логики первого порядка

Примеры:

1. пустое множество: $\varphi(x) = (x \neq x)$

2. носитель структуры $\mathcal{M}$: $\varphi(y) = (y = y)$

3. четные числа: $\varphi(z) = \exists a(a \in \mathbb{N} \wedge a + a = z)$

Выразимые в структуре предикаты – это предикаты, для которых существуют эквивалентные формулы логики первого порядка

## 1.5 Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

*Если $\sigma$-предложение $\varphi$ истинно в $\mathcal{M}$, то это обозначается так: $\mathcal{M} \models \varphi$

*Теория в языке сигнатуры $\sigma$ – это какое-то множество $\sigma$-предложений.

*Модель теории $T$ в языке сигнатуры $\sigma$ – это такая $\sigma$-структура $\mathcal{M}$, что все предложения в ней истинны.

*Модель предложения $\varphi$ в языке сигнатуры $\sigma$ – это модель теории $\{\varphi\}$.

*Теория $\sigma$-структуры $\mathcal{M}$ – это все $\sigma$-предложения, истинные в $\mathcal{M}$. Обозначение: $Th(\mathcal{M})$.

Элементарная эквивалентность структур: $\sigma$-структуры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ эквивалентны если $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$. Обозначение: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

Значение формулы $\varphi$ при изоморфизме $\eta$ структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$: для любого $a \in M^n$ равносильны $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(a))$.

Элементарная эквивалентность изоморфных структур: изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

TODO: дополнить доказательствами два последних утверждения

## 1.6 Значение формулы при изоморфизме структур. Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры. Примеры невыразимых множеств.

Значение формулы $\varphi$ при изоморфизме $\eta$ структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$: для любого $a \in M^n$ равносильны $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(a))$.

Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры: семейство выразимых множеств сохраняется между автоморфизмами

Примеры невыразимых множеств: множество всех простых чисел (для этого необходимо проверять все возможные делители); множество натуральных чисел, являющихся степенью двойки (для этого требуется, например, рекурсия, которой нет).

TODO: дополнить доказательствами

### 1.7 Эквивалентность формул первого порядка. Лемма о фиктивном кванторе. Общезначимые и выполнимые формулы. Квантор всеобщности и общезначимость.

Эквивалентность формул первого порядка: формулы $\varphi$ и $\psi$ являются эквивалентными, если их значения совпадают в любой интерпретации при любой оценке. Обозначение $\varphi \equiv \psi$.

Лемма о фиктивном кванторе: пусть $x$ не лежит в множестве свободных переменных формулы $\varphi$, тогда $\varphi \equiv \forall x \varphi$

Общезначимая формула – формула, истинная при любой интерпретации и оценке.

Выполнимая формула – формула, для которой существует интерпретация и оценка, в которой она истинна.

Квантор всеобщности и общезначимость: формула $\varphi$ общезначима $\iff$ формула $\forall y \varphi$ общезначима

### 1.8 Основные эквивалентности логики первого порядка. Замена подформулы на эквивалентную.

Основные эквивалентности логики первого порядка для произвольных $\varphi$ и $\psi$:

1. Пусть $x$ не является параметром $\psi$, тогда $\forall\{\exists\}x(\varphi \wedge \{\vee\}\psi) \equiv \forall\{\exists\}x\varphi \wedge \{\vee\}\psi$ (итого 4 равенства)
2. $\forall x(\varphi \wedge \psi) = \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
3. $\forall x(\varphi \vee \psi) = \forall x\varphi \vee \forall x\psi$
4. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
5. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$

Пусть $\varphi$ – какая-то формула, $\varphi \equiv \varphi'$, тогда замена $\varphi$ на $\varphi'$ эквивалентна в случаях использования логического и, или, не, импликации, "тогда и только тогда квантора всеобщности и существования.

Замена подформулы на эквивалентную: пусть $\varphi \equiv \varphi'$ и $\psi'$ была получена путем замены вхождений $\varphi$ в $\psi$ на $\varphi'$, тогда $\psi \equiv \psi'$.

### 1.9 Пропозициональные формулы и задаваемые ими булевы функции. Тавтологии первого порядка.

Пропозициональная формула – формула, построенная из пропозициональных переменных (простых букв) с помощью булевых связок.

Каждая пропозициональная формула задаёт булеву функцию, так как для каждого набора значений переменных (истина или ложь) формула принимает одно определённое значение (истина или ложь). То есть, если у вас есть пропозициональная формула $A$ с переменными $p$ и $q$, можно построить таблицу истинности, которая покажет значение формулы для всех возможных значений $p$ и $q$.

Тавтология – это формула, истинная при любых значениях ее переменных. Любая тавтология общезначима.

### 1.10 Лемма о корректной подстановке.

*Терм $t$ свободен для переменной $x$ в формуле $\varphi$, если при подстановке терма $t$ вместо переменной $x$ в формуле $\varphi$ не происходит никаких изменений значений других свободных переменных. Иными словами, терм $t$ можно подставить на место $x$ в $\varphi$ без появления новой привязки переменных, которая может изменить интерпретацию формулы. Обозначение: $t - x - \varphi$.

*Замена $y$ на $x$ в формуле $\varphi$ обозначается как $\varphi(y/x)$

Лемма о корректной подстановке: в любой интерпретации при любой оценке $\pi$ для всех $\varphi$ - формул, $t, s$ - термов, и $x$ - переменной, если $t - x - \varphi$, то выполняется:

$$[s(t/x)](\pi) = [s](\pi + (x \to [t](\pi))) \text{ и } [\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \to [t](\pi)))$$

TODO: доказательство

## 1.11 Понятие корректной подстановки («терм свободен для переменной в формуле»). Пример некорректной подстановки. Лемма о корректной подстановке (без доказательства). Переименование связанной переменной. Общезначимость формул вида $\forall x\varphi \to \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ в случае корректной подстановки.

см. билет 1.10

Пример некорректной подстановки: возьмем формулу $\varphi(x, y) = \forall y(P(x, y))$ и терм $t = y$. Подставляем: $\varphi(x/t, y) = \forall y(P(y, y))$. Смысл формулы изменен т.к. терм не свободен для переменной в формуле.

Переименование связанной переменной:

Лемма 1. Пусть $y \notin V(\varphi)$ (т.е. $y$ нет в $\varphi$), тогда $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$.

Лемма 2. Для любого терма $t$ и любой формулы $\varphi$, если $y \notin V(\varphi)$, то для любой оценки $\pi$ верно: $[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \to \pi(y)))$ и $[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \to \pi(y)))$

1. $\forall x\varphi \to \varphi(t/x)$, если $t$ свободен для $x$ в $\varphi$
2. $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi(x)$, если $t$ свободен для $x$ в $\varphi$

TODO: дописать доказательства