Коллоквиум по дискретной математике 2

Содержание

1 Логика и машины Тьюринга

1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$, где

1. M – непустое множество, *носитель структуры*
2. $\mathcal{F}$ – множество функций вида $f\colon M^n \to M$
3. $\mathcal{R}$ – множество кортежей из M
4. $\mathcal{C}$ – подмножество M

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств $(Fnc, Prd, Cnst)$, где Fnc – множество функциональных символов, Prd – непустое множество предикатных символов и $Cnst$ – множество константных символов. (просто набор символов)

*σ-структура (или интерпретация сигнатуры σ) – это формально кортеж $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F},\ \mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$. Вводим обозначения: $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$. Для задания σ-структуры достаточно только M и $\mathcal{I}$.

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ "$=$" $:= \{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$, где M – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интепретации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ сигнатуры σ с носителями M и N соответственно изоморфны если существует биекция $\eta\colon M \to N$ для которой выполняются следующие свойства:

1. $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$
2. $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3. $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$

1.2 Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.

Формулы первого порядка – это выражения в логике первого порядка (предикатной логике), построенные по правилам синтаксиса, установленным для данной сигнатуры.

Формулы первого порядка строятся из термов и предикатов, используя логические связки и кванторы. Основные элементы синтаксиса формул первого порядка:

1. Термы: переменные, константы и функции, примененные к термам.
2. Атомарные формулы: предикаты, примененные к термам.
3. Сложные формулы: атомарные формулы, соединенные логическими операциями $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ и кванторами $(\forall, \exists)$.

Свободные переменные формулы – это переменные, которые не находятся под действием кванторов ($\forall$ или $\exists$) внутри этой формулы. То есть, они не "связаны" кванторами и могут принимать любые значения из области определения.

Предложения в логике первого порядка – это формулы, которые не содержат свободных переменных, то есть все переменные в них связаны кванторами. Такие формулы имеют логическое значение (истинность или ложность) в интерпретации.

1.3 Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.

Оценка переменных – способ присвоения конкретных значений переменным в формуле. По сути это функция μ, которая ставит в соответствие *каждой* переменной какое-то значение.

Значение терма t и формулы φ в данной структуре $\mathcal{M}$ при данной оценке μ:

1. если t – переменная, то t принимает значение $\mu(t)$
2. если t – константный символ c, то t принимает значение интерпретации c в $\mathcal{M}$: $c^{\mathcal{M}}$
3. если t – функция f, применяемая к термам $t_1, \ldots, t_n$, то значение t – это $f^{\mathcal{M}}(v_1, \ldots, v_n)$, где $v_1, \ldots, v_n$ – это значения термов при данной оценке

4. если φ – атомарная формула $P(t_1, \ldots, t_n)$, то она истинна, если $(v_1, \ldots, v_n) \in R^{\mathcal{M}}$, где $v_1, \ldots, v_n$ – это значения термов при данной оценке

5. для сложных формул φ используются стандартные логические правила

Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами означает, что если мы изменим значения переменных, которые не являются свободными в данной формуле, то значение формулы останется неизменным. Другими словами, переменные, не являющиеся *свободными* в формуле, не влияют на ее истинностное значение.

1.4 Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств.

Значение терма или формулы $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе элементов $y = (y_1, \ldots, y_n)$ структуры $\mathcal{M}$ определяется значением функции $\alpha^{\mathcal{M}}(y) = [\alpha](\pi + (x_1 \to y_1) + \ldots + (x_n \to y_n))$, где π – любая оценка.

Выразимые в структуре $\mathcal{M}$ множества – это множества $D \subseteq \mathcal{M}$, которые можно описать с помощью формул логики первого порядка

Примеры:

1. пустое множество: $\varphi(x) = (x \neq x)$

2. носитель структуры $\mathcal{M}$: $\varphi(y) = (y = y)$

3. четные числа: $\varphi(z) = \exists a(a \in \mathbb{N} \land a + a = z)$

Выразимые в структуре предикаты – это предикаты, для которых существуют эквивалентные формулы логики первого порядка

1.5 Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

*Если σ-предложение φ истинно в $\mathcal{M}$, то это обозначается так: $\mathcal{M} \models \varphi$

*Теория в языке сигнатуры σ – это какое-то множество σ-предложений.

*Модель теории T в языке сигнатуры σ – это такая σ-структура $\mathcal{M}$, что все предложения в ней истинны.

*Модель предложения φ в языке сигнатуры σ – это модель теории $\{\varphi\}$.

*Теория σ-структуры $\mathcal{M}$ – это все σ-предложения, истинные в $\mathcal{M}$. Обозначение: $Th(\mathcal{M})$.

Элементарная эквивалентность структур: σ-структуры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ эквивалентны если $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$. Обозначение: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

Значение формулы φ при изоморфизме η структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$: для любого $a \in M^n$ равносильны $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(a))$.

Элементарная эквивалентность изоморфных структур: изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

TODO: дополнить доказательствами два последних утверждения