

Коллоквиум по дискретной математике 2

Ми (@technothecow)

Содержание

1	Логика и машины Тьюринга	3
1.1	Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.	3
1.2	Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.	3
1.3	Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.	3
1.4	Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств.	4
1.5	Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.	4
1.6	Значение формулы при изоморфизме структур. Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры. Примеры невыразимых множеств.	4
1.7	Эквивалентность формул первого порядка. Лемма о фиктивном кванторе. Общезначимые и выполнимые формулы. Квантор всеобщности и общезначимость.	5
1.8	Основные эквивалентности логики первого порядка. Замена подформулы на эквивалентную.	5
1.9	Пропозициональные формулы и задаваемые ими булевы функции. Тавтологии первого порядка.	5
1.10	Лемма о корректной подстановке.	5
1.11	Понятие корректной подстановки («терм свободен для переменной в формуле»). Пример некорректной подстановки. Лемма о корректной подстановке (без доказательства). Переименование связанной переменной. Общезначимость формул вида $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi$ в случае корректной подстановки.	6
1.12	Переименование связанной переменной (без доказательства). Теорема о предваренной нормальной форме.]	6
1.13	Понятие теории первого порядка. Примеры содержательных теорий. Модель теории. Логическое (семантическое) следование (для теорий и предложений).	6
1.14	Исчисление предикатов с равенством (в гильбертовской форме). Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности в двух формах: про выполнимость теории и про логическое следование из теории.	7
1.15	Теорема компактности (без доказательства). Любый пример применения.	7
1.16	Одноленточная машина Тьюринга (допустимо неформальное определение с лентой и головкой). Сложение натуральных чисел (при унарном и бинарном кодировании).	8
1.17	Многоленточная машина Тьюринга (допустимо неформальное определение с лентами и головками). Удвоение входного слова за линейное время.	8
1.18	Конфигурации одноленточной и многоленточной машин Тьюринга. Меры сложности «время» и «зона» и их соотношение в обоих случаях.	8
1.19	Сокращение ленточного алфавита и его цена.	8
1.20	Сокращение числа лент и его цена.	8
2	Вычислимость	9
2.1	Вычислимые функции (при интуитивном понимании алгоритма). Разрешимые и перечислимые множества. Связь конечности, разрешимости и перечислимости. Разрешимые множества под действием операций алгебры множеств и декартова произведения.	9
2.2	Перечислимые множества под действием операций алгебры множеств, декартова произведения и проекции. Теорема Поста.	9
2.3	Теорема о графике вычислимой функции. Перечислимость образа и прообраза множества под действием вычислимой функции.	9
2.4	Непустые перечислимые множества суть, в точности, области значений вычислимых тотальных функций.	10
2.5	Полуразрешимость. Перечислимые множества суть, в точности, области определения вычислимых функций.	10

2.6	Перечислимые множества суть, в точности, проекции разрешимых. Теорема о свойствах, равносильных перечислимости (доказательство на основе утверждений предшествующих вопросов).	10
2.7	Универсальная вычислимая функция (в классе вычислимых функций $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$). Т-Предикаты. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.	10
2.8	Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Примеры перечислимого неразрешимого и неперечислимого множеств.	11

1 Логика и машины Тьюринга

1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$, где

1. M – непустое множество, *носитель структуры*
2. \mathcal{F} – множество функций вида $f: M^n \rightarrow M$
3. \mathcal{R} – множество кортежей из M
4. \mathcal{C} – подмножество M

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств $(Fnc, Prd, Cnst)$, где Fnc – множество функциональных символов, Prd – непустое множество предикатных символов и $Cnst$ – множество константных символов. (просто набор символов)

* σ -структура (или интерпретация сигнатуры σ) – это формально кортеж $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F}$, $\mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$. Вводим обозначения: $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$. Для задания σ -структуры достаточно только M и \mathcal{I} .

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ “ $=$ ” := $\{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$, где M – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интерпретации \mathcal{M} и \mathcal{N} сигнатуры σ с носителями M и N соответственно изоморфны если существует биекция $\eta: M \rightarrow N$ для которой выполняются следующие свойства:

1. $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n))$
2. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3. $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$, где c – один символ

1.2 Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.

Формулы первого порядка – это выражения в логике первого порядка (предикатной логике), построенные по правилам синтаксиса, установленным для данной сигнатуры.

Формулы первого порядка строятся из термов и предикатов, используя логические связки и кванторы. Основные элементы синтаксиса формул первого порядка:

1. Термы: переменные, константы и функции, примененные к термам.
2. Атомарные формулы: предикаты, примененные к термам.
3. Сложные формулы: атомарные формулы, соединенные логическими операциями ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) и кванторами (\forall, \exists).

Свободные переменные формулы – это переменные, которые не находятся под действием кванторов (\forall или \exists) внутри этой формулы. То есть, они не “связаны” кванторами и могут принимать любые значения из области определения. Множество свободных переменных в формуле φ обозначается как $FV(\varphi)$.

Предложения в логике первого порядка – это формулы, которые не содержат свободных переменных, то есть все переменные в них связаны кванторами. Такие формулы имеют логическое значение (истинность или ложность) в интерпретации.

1.3 Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.

Оценка переменных – способ присвоения конкретных значений переменным в формуле. По сути это функция μ , которая ставит в соответствие *каждой* переменной какое-то значение.

Значение терма t и формулы φ в данной структуре \mathcal{M} при данной оценке μ :

1. если t – переменная, то t принимает значение $\mu(t)$
2. если t – константный символ c , то t принимает значение интерпретации c в \mathcal{M} : $c^{\mathcal{M}}$
3. если t – функция f , применяемая к термам t_1, \dots, t_n , то значение t – это $f^{\mathcal{M}}(v_1, \dots, v_n)$, где v_1, \dots, v_n – это значения термов при данной оценке

4. если φ – атомарная формула $P(t_1, \dots, t_n)$, то она истинна, если $(v_1, \dots, v_n) \in R^{\mathcal{M}}$, где v_1, \dots, v_n – это значения термов при данной оценке
5. для сложных формул φ используются стандартные логические правила

Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами означает, что если мы изменим значения переменных, которые не являются свободными в данной формуле, то значение формулы останется неизменным. Другими словами, переменные, не являющиеся *свободными* в формуле, не влияют на ее истинностное значение.

1.4 Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств.

Значение терма или формулы $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ на наборе элементов $y = (y_1, \dots, y_n)$ структуры \mathcal{M} определяется значением функции $\alpha^{\mathcal{M}}(y) = [\alpha](\pi + (x_1 \rightarrow y_1) + \dots + (x_n \rightarrow y_n))$, где π – любая оценка.

Выразимые в структуре \mathcal{M} множества – это множества $D \subseteq \mathcal{M}$, которые можно описать с помощью формул логики первого порядка

Примеры:

1. пустое множество: $\varphi(x) = (x \neq x)$
2. носитель структуры \mathcal{M} : $\varphi(y) = (y = y)$
3. четные числа: $\varphi(z) = \exists a(a \in \mathbb{N} \wedge a + a = z)$

Выразимые в структуре предикаты – это предикаты, для которых существуют эквивалентные формулы логики первого порядка

1.5 Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

*Если σ -предложение φ истинно в \mathcal{M} , то это обозначается так: $\mathcal{M} \models \varphi$

*Теория в языке сигнатуры σ – это какое-то множество σ -предложений.

*Модель теории T в языке сигнатуры σ – это такая σ -структура \mathcal{M} , что все предложения в ней истинны.

*Модель предложения φ в языке сигнатуры σ – это модель теории $\{\varphi\}$.

*Теория σ -структуры \mathcal{M} – это все σ -предложения, истинные в \mathcal{M} . Обозначение: $Th(\mathcal{M})$.

Элементарная эквивалентность структур: σ -структуры \mathcal{M} и \mathcal{N} эквивалентны если $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$. Обозначение: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

Значение формулы φ при изоморфизме η структур \mathcal{M} и \mathcal{N} : для любого $a \in M^n$ равносильны $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(a))$.

Элементарная эквивалентность изоморфных структур: изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

TODO: дополнить доказательствами два последних утверждения

1.6 Значение формулы при изоморфизме структур. Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры. Примеры невыразимых множеств.

Значение формулы φ при изоморфизме η структур \mathcal{M} и \mathcal{N} : для любого $a \in M^n$ равносильны $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(\eta(a))$.

Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры: семейство выразимых множеств сохраняется между автоморфизмами

Примеры невыразимых множеств: множество всех простых чисел (для этого необходимо проверять все возможные делители); множество натуральных чисел, являющихся степенью двойки (для этого требуется, например, рекурсия, которой нет).

TODO: дополнить доказательствами

1.7 Эквивалентность формул первого порядка. Лемма о фиктивном кванторе. Общезначимые и выполнимые формулы. Квантор всеобщности и общезначимость.

Эквивалентность формул первого порядка: формулы φ и ψ являются эквивалентными, если их значения совпадают в любой интерпретации при любой оценке. Обозначение $\varphi \equiv \psi$.

Лемма о фиктивном кванторе: пусть x не лежит в множестве свободных переменных формулы φ , тогда $\varphi \equiv \forall x\varphi$

Общезначимая формула – формула, истинная при любой интерпретации и оценке.

Выполнимая формула – формула, для которой существует интерпретация и оценка, в которой она истинна.

Квантор всеобщности и общезначимость: формула φ общезначима \iff формула $\forall u\varphi$ общезначима

1.8 Основные эквивалентности логики первого порядка. Замена подформулы на эквивалентную.

Основные эквивалентности логики первого порядка для произвольных φ и ψ :

1. Пусть x не является параметром ψ , тогда $\forall\{\exists\}x(\varphi \wedge \{\forall\}\psi) \equiv \forall\{\exists\}x\varphi \wedge \{\forall\}\psi$ (итого 4 равенства)
2. $\forall x(\varphi \wedge \psi) = \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
3. $\forall x(\varphi \vee \psi) = \forall x\varphi \vee \forall x\psi$
4. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
5. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$

Пусть φ – какая-то формула, $\varphi \equiv \varphi'$, тогда замена φ на φ' эквивалентна в случаях использования логического и, или, не, импликации, "тогда и только тогда квантора всеобщности и существования.

Замена подформулы на эквивалентную: пусть $\varphi \equiv \varphi'$ и ψ' была получена путем замены вхождений φ в ψ на φ' , тогда $\psi \equiv \psi'$.

1.9 Пропозициональные формулы и задаваемые ими булевы функции. Тавтологии первого порядка.

Пропозициональная формула – формула, построенная из пропозициональных переменных (простых букв) с помощью булевых связок.

Каждая пропозициональная формула задаёт булеву функцию, так как для каждого набора значений переменных (истина или ложь) формула принимает одно определённое значение (истина или ложь). То есть, если у вас есть пропозициональная формула A с переменными p и q , можно построить таблицу истинности, которая покажет значение формулы для всех возможных значений p и q .

Тавтология – это формула, истинная при любых значениях ее переменных. Любая тавтология общезначима.

1.10 Лемма о корректной подстановке.

*Терм t свободен для переменной x в формуле φ , если при подстановке терма t вместо переменной x в формуле φ не происходит никаких изменений значений других свободных переменных. Иными словами, терм t можно подставить на место x в φ без появления новой привязки переменных, которая может изменить интерпретацию формулы. Обозначение: $t - x - \varphi$.

*Замена y на x в формуле φ обозначается как $\varphi(y/x)$

Лемма о корректной подстановке: в любой интерпретации при любой оценке π для всех φ - формул, t, s - термов, и x - переменной, если $t - x - \varphi$, то выполняется:

$$[s(t/x)](\pi) = [s](\pi + (x \rightarrow [t](\pi))) \text{ и } [\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow [t](\pi)))$$

TODO: доказательство

1.11 Понятие корректной подстановки («терм свободен для переменной в формуле»). Пример некорректной подстановки. Лемма о корректной подстановке (без доказательства). Переименование связанной переменной. Общезначимость формул вида $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi$ в случае корректной подстановки.

см. билет 1.10

Пример некорректной подстановки: возьмем формулу $\varphi(x, y) = \forall y(P(x, y))$ и терм $t = y$. Подставляем: $\varphi(x/t, y) = \forall y(P(y, y))$. Смысл формулы изменен т.к. терм не свободен для переменной в формуле.

Переименование связанной переменной:

Лемма 1. Пусть $y \notin V(\varphi)$ (т.е. y нет в φ), тогда $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$.

Лемма 2. Для любого терма t и любой формулы φ , если $y \notin V(\varphi)$, то для любой оценки π верно: $[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$ и $[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$

1. $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$, если t свободен для x в φ
2. $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$, если t свободен для x в φ

TODO: дописать доказательства

1.12 Переименование связанной переменной (без доказательства). Теорема о предваренной нормальной форме.]

Переименование связанной переменной:

Лемма 1. Пусть $y \notin V(\varphi)$ (т.е. y нет в φ), тогда $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$.

Лемма 2. Для любого терма t и любой формулы φ , если $y \notin V(\varphi)$, то для любой оценки π верно: $[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$ и $[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$

*Предваренная формула – такая, что имеет кванторы только в кванторном префиксе в начале формулы.

Теорема о предваренной нормальной форме: для любой формулы найдется эквивалентная ей предваренная.

Доказательство: индукция по построению. Разберем все случаи:

1. Если формула атомарная, то она уже предваренная.
2. Если формула начинается с квантора, то по предположению индукции заменяем формулу под этим квантором на эквивалентную предваренную.
3. Если формула начинается с отрицания, то по предположению индукции заменяем формулу под отрицанием на эквивалентную предваренную и проносим отрицание вовнутрь, переменяя кванторы.
4. Если в формуле главная связка бинарная, то по предположению индукции заменяем формулы под связкой на эквивалентные предваренные и переименовываем связанные переменные так, чтобы все кванторы можно было вынести наружу и выносим их.

1.13 Понятие теории первого порядка. Примеры содержательных теорий. Модель теории. Логическое (семантическое) следование (для теорий и предположений).

Теория первого порядка – логическая система, включающая в себя сигнатуру (набор символов, включающий константы, функции и предикаты), аксиомы (набор утверждений или формул, принимаемых без доказательств) и правила вывода (правила, по которым из аксиом и других утверждений можно выводить новые утверждения)

Примеры содержательных теорий:

1. Теория групп:
 - (а) Сигнатура: бинарная операция $*$ и константа e

- (b) Аксиомы: ассоциативность, существование нейтрального элемента, существование обратного элемента

2. Теория колец:

- (a) Сигнатура: две бинарные операции: $+$ и $*$ и константы 0 и 1.
(b) Аксиомы: дистрибутивность, ассоциативность, коммутативность, существование обратного элемента по сложению

Модель теории – это интерпретация сигнатуры, в которой все аксиомы теории истинны. Например, для теории групп это множество целых чисел с операцией сложения и нулем.

Логическое следование – отношение между формулами и теориями, которое говорит, что если истинны определенные формулы, то и другие формулы истинны.

Для теорий: Теория T логически следует из множества аксиом A , если любая модель A также является моделью T .

Для предложений: Предложение φ логически следует из теории T ($T \models \varphi$), если φ истинно в каждой модели T .

1.14 Исчисление предикатов с равенством (в гильбертовской форме). Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности в двух формах: про выполнимость теории и про логическое следование из теории.

Исчисление предикатов с равенством – это система логики первого порядка, включающая равенство как основной предикат. В гильбертовской форме исчисления предикатов используются аксиомы и правила вывода.

Аксиомы для равенства:

1. Рефлексивность: $\forall x(x = x)$
2. Симметричность: $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
3. Транзитивность: $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$
4. Замена в формулах: если t – терм, а P – предикат, то $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y)))$

Общие аксиомы и правила вывода:

1. Аксиомы логики первого порядка
2. Правило Modus Ponens: из φ и $\varphi \rightarrow \psi$ следует ψ
3. Правило обобщения: из φ следует $\forall x \varphi$, если x не свободная в φ

Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов: если φ логически следует из A , тогда и только тогда φ выводима из A в исчислении предикатов.

Теорема о компактности: если любая конечная подсистема множества предложений имеет модель, то и все множество имеет модель.

Теорема о компактности в форме про выполнимость теории: если каждое конечное подмножество множества формул T выполнимо, то и все множество T выполнимо.

Теорема о компактности в форме про логическое следование из теории: формула φ логически следует из теории T тогда и только тогда, когда φ логически следует из некоторого конечного подмножества теории T .

TODO: дополнить доказательствами

1.15 Теорема компактности (без доказательства). Любой пример применения.

см. билет 1.14

Пример: хотим показать, что существует бесконечное множество.

Пусть T – это теория, содержащая набор формул $F = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, где φ_n утверждает, что в нашем множестве существует как минимум n различных элементов. Любое конечное подмножество F выполнимо в модели потому что можно найти конечное число элементов, принадлежащих множеству. Применяем теорему компактности: раз каждое подмножество F имеет модель, то и все множество F имеет модель, значит существует модель, содержащая бесконечно много элементов.

1.16 Одноленточная машина Тьюринга (допустимо неформальное определение с лентой и головкой). Сложение натуральных чисел (при унарном и бинарном кодировании).

Одноленточная машина Тьюринга — это теоретическая модель вычислений, состоящая из следующих частей: лента (бесконечная в обе стороны, разделенная на ячейки, каждая из которых может хранить один символ из конечного алфавита, который обычно содержит спец.символ "пусто": #), головка для чтения/записи (устройство, которое может перемещаться влево или вправо по ленте, считывать символы с ленты и записывать символы на ленту), множество состояний (конечное множество состояний, одно из которых является начальным, а одно или несколько могут быть конечными) и таблица переходов (определяет правила, по которым машина переходит из одного состояния в другое, в зависимости от символа под головкой)

Сложение натуральных чисел в унарном виде: очевидно

Сложение натуральных чисел в бинарном виде: пусть длина одинаковая, числа записаны в виде $[0,1]^* + [0,1]^*$ тогда сначала идем вправо до конца, ставим знак равенства, идем влево до конца, и если там $1/0$, тогда помечаем символ "решеткой идем вправо до конца и после знака равно ставим $1/0$, потом идем до знака плюса, берем $1/0$, помечаем символ "плюсом идем вправо до конца и к последнему числу добавляем $1/0$. таким образом получим запись в сломанной троичной системе счисления. осталось только перевести в бинарную

TODO: переписать с каким-нибудь нормальным алгоритмом

1.17 Многоленточная машина Тьюринга (допустимо неформальное определение с лентами и головками). Удвоение входного слова за линейное время.

Многоленточная машина Тьюринга — это расширение классической машины Тьюринга, у которой есть несколько лент и несколько головок для чтения/записи. Каждая лента бесконечна в обе стороны и содержит свой собственный алфавит символов.

Удвоение входного слова за линейное время: копируем символы пока не дойдем до решетки. Как дошли до решетки, идем на верхней ленте влево в начало слова и повторяем процедуру.

1.18 Конфигурации одноленточной и многоленточной машин Тьюринга. Меры сложности «время» и «зона» и их соотношение в обоих случаях.

Конфигурация машины Тьюринга — это описание текущего состояния машины, которое включает состояние машины, содержимое ленты (лент), позиция головки (головок).

Время выполнения (или временная сложность) алгоритма на машине Тьюринга — это количество шагов, которые машина делает для выполнения задачи. Временная сложность оценивается в зависимости от размера входных данных n .

Зона выполнения (или пространственная сложность) алгоритма на машине Тьюринга — это количество ячеек ленты, которые машина использует для выполнения задачи.

Существуют [работы](#), которые показывают, что алгоритм, выполненный на МТ из k лент эмулируется за $T \log T$ на двуленточной МТ.

Многоленточные машины Тьюринга более эффективны по времени (например, задача удвоения входного слова) по сравнению с одноленточными машинами, так как позволяют параллельно обрабатывать несколько лент и перемещаться быстрее по необходимым данным. Однако, пространственная сложность остаётся асимптотически такой же, как и для одноленточных машин.

1.19 Сокращение ленточного алфавита и его цена.

См. страницы 21-24 в ["Введении в сложность вычислений"](#) Крупского

1.20 Сокращение числа лент и его цена.

См. страницы 24-27 в ["Введении в сложность вычислений"](#) Крупского

2 Вычислимость

2.1 Вычислимые функции (при интуитивном понимании алгоритма). Разрешимые и перечислимые множества. Связь конечности, разрешимости и перечислимости. Разрешимые множества под действием операций алгебры множеств и декартова произведения.

Вычислимая функция – это такая частичная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для нее существует программа (алгоритм), которая на любом входе $x \in \text{dom } f$ выписывает $f(x)$, а иначе закидывается.

Разрешимое множество – такое множество, чья характеристическая функция (функция, которая есть элемент и выдает единицу если элемент в множестве и ноль иначе) вычислима.

Перечислимое множество – такое множество, для которого есть программа, которая последовательно выписывает все элементы множества и только их. Для каждого элемента множества должно существовать $k \in \mathbb{N}$, что после k -ого шага элемент будет выписан.

Связь конечности, разрешимости и перечислимости: 1) конечно, значит разрешимо; 2) разрешимо, значит перечислимо.

Доказательство: 1) конечно, значит можно пронумеровать элементы $\{a_1, \dots, a_n\}$. Искомая характеристическая функция равна дизъюнкции (логическому или) булевских значений $x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n$. Для пустой функции всегда возвращаем ноль, что также вычислимо.

2) перебираем все натуральные числа и выводим текущее если характеристическая функция вернула единицу

Разрешимые множества под действием операций алгебры множеств и декартова произведения: A, B – разрешимы \implies разрешимы: $A \cup B, A \cap B, A \times B, \bar{A}, \bar{B}$

Доказательство: выразим характеристические функции: $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$, и т.д.

2.2 Перечислимые множества под действием операций алгебры множеств, декартова произведения и проекции. Теорема Поста.

Перечислимые множества под действием операций алгебры множеств, декартова произведения и проекции: A, B – перечислимы \implies перечислимы: $A \cup B, A \cap B, A \times B, \text{pr}^i A, \text{pr}^i B$.

Доказательство: перечислимость $A \cup B$: просто выводим числа по очереди; перечислимость $A \cap B$: по очереди выполняем по шагу алгоритмов A и B и когда получаем очередной элемент a_i выводим его только если нам уже попадался равный ему b_j . Аналогично поступаем с новыми элементами из B ; перечислимость $A \times B$: по очереди выполняем по шагу алгоритмов для A и B и когда получаем очередной элемент a_i выписываем пары со всеми до этого полученными b_1, \dots, b_k . Аналогично поступаем и для B ; перечислимость проекции: просто для каждого нового $a = (a_1, \dots, a_n)$ выводим a_i .

Теорема Поста: множество разрешимо \iff его дополнение и оно само перечислимо.

Доказательство: 1) слева направо следует из леммы о связи конечности, разрешимости и перечислимости (билет 2.1)

2) справа налево доказывается с помощью следующего вычислимого алгоритма: будем выполнять по очереди по одному шагу алгоритма для множества и его дополнения. Рано или поздно в первом или втором появится наш проверяемый элемент

2.3 Теорема о графике вычислимой функции. Перечислимость образа и прообраза множества под действием вычислимой функции.

Теорема о графике вычислимой функции: функция вычислима \iff ее график перечислим (то есть множество пар $(x, f(x))$)

Доказательство: 1) справа налево: просто ждем пока выдаст нужную пару 2) слева направо: переберем все пары $(x, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. x – значение, k – количество шагов, которые проделываются для вычисления x . Таким образом, если за конечное число шагов значение вычисляется, мы выведем пару.

Перечислимость образа и прообраза множества под действием вычислимой функции: пусть множество A – перечислимо и f – вычислимая функция. Тогда $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ перечислимы.

Доказательство: пусть $G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – график f , тогда множество $M = G \cap (A \times \mathbb{N})$ перечислимо так как является пересечением двух перечислимых множеств. Заметим, что $f(A) = \text{pr}^1 M$ и $f^{-1}(A) = \text{pr}^2 M$

2.4 Непустые перечислимые множества суть, в точности, области значений вычислимых тотальных функций.

Лемма: множество A перечислимо $\iff A = \emptyset$ или $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow A$, что f – тотальная и $\text{rng } f = A$.

Доказательство: 1) справа налево: все элементы A выпишет программа, последовательно вычисляющая $f(0), f(1), \dots$ (вычисление $f(n)$ всегда заканчивается за конечное количество шагов ибо f тотальная и вычислимая).

2) Пусть элементы A выписывает программа p . Тогда пусть m – число шагов в программе p до вывода первого числа. Определим f следующим образом: $f(x)$ = последнему числу после $m + x$ шагов. Докажем, что любое $x \in A$ лежит в образе f . Для x должно существовать такое $k \in \mathbb{N}$, что после k шагов x выводится программой p . Тогда $f(k - m) = x$.

Следствие: если f вычислима, тогда $\text{dom } f$ и $\text{rng } f$ перечислимы.

Доказательство: следует из перечислимости образа и прообраза множества под действием вычислимой функции (см. билет 2.3): $\text{dom } f = f^{-1}(\mathbb{N})$, $\text{rng } f = f(\mathbb{N})$.

2.5 Полуразрешимость. Перечислимые множества суть, в точности, области определения вычислимых функций.

*Полухарактеристическая функция φ множества A задается $\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ \text{неопр.}, & \text{иначе} \end{cases}$

Полуразрешимое множество – такое, что его полухарактеристическая функция вычислима.

Лемма: множество перечислимо \iff множество полуразрешимо

Доказательство: 1) слева направо: если перечислимо A , то перечислимо и $A \times \{1\} = \Gamma(\varphi)$. По теореме о графике вычислимой функции (см. билет 2.3), φ вычислима.

2) справа налево: если φ вычислима, то $A = \text{dom } \varphi$ перечислима по следствию (см. билет 2.4)

2.6 Перечислимые множества суть, в точности, проекции разрешимых. Теорема о свойствах, равносильных перечислимости (доказательство на основе утверждений предшествующих вопросов).

Перечислимые множества в точности проекции разрешимых: множество $A \subseteq \mathbb{N}^n$ перечислимо $\iff \exists B \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ разрешимое, что $A = \text{pr}^1(B)$.

Доказательство: 1) справа налево: B разрешимо $\implies B$ перечислимо $\implies \text{pr}^1(B) = A$ перечислимо

2) слева направо: возьмем перечисляющую элементы A программу p . Пусть $B = \{(x, k) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \text{программа } p \text{ выписывает } x \text{ на шаге } k\}$. Заметим, что построенное множество отвечает требованиям: B действительно разрешимо (на входе (x, k) запустим k шагов p и если вывелось x , то элемент лежит, иначе нет) и $A = \text{pr}^1(B)$ (т.к. для каждого $x \in A \exists k \in \mathbb{N}$ – такое, что за k шагов программы p выведется x).

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$, тогда следующее равносильно:

1. A перечислимо
2. $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – вычислимая частичная, что $A = \text{dom } f$
3. $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – вычислимая частичная, что $A = \text{rng } f$
4. $A = \emptyset$ или $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – вычислимая тотальная, что $A = \text{rng } f$
5. $\exists B \subseteq \mathbb{N}^2$ – разрешимое, что $A = \text{pr}^1(B)$

Доказательство: 1 \leftrightarrow 5) см. лемму выше; 1 \leftrightarrow 4) см. билет 2.4 (лемма); 1 \rightarrow 2) см. билет 2.5 (берем полухарактеристическую функцию); 2 \rightarrow 1) см. билет 2.4 (следствие); 4 \rightarrow 3) очев.; 3 \rightarrow 1) см. билет 2.4 (следствие);

2.7 Универсальная вычислимая функция (в классе вычислимых функций $\mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$). Т-Предикаты. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

Универсальная вычислимая функция – такая $U: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, если она вычислима и для любой вычислимой функции f существует индекс i такой, что $U_i = f$.

Т-Предикат: пусть U - у.в.ф. и \mathcal{U} - программа, вычисляющая U , тогда определим множество $T = \{(n, x, k) \mid \text{алгоритм } \mathcal{U} \text{ останавливается на входе } (n, x) \text{ за } k \text{ шагов}\}$. Т-Предикатом называется функция $T(n, x, k) := (n, x, k) \in T$.

Неразрешимость проблемы самоприменимости: невозможно создать алгоритм, определяющий, завершится ли программа на собственном коде.

Доказательство: если существует такой алгоритм $p(x)$, возвращающий ноль если программа x закичивается на вводе x и единицу иначе, то существует программа $f(x) = \begin{cases} \text{зацикливается,} & \text{если } p(x) = 1 \\ \text{завершается,} & \text{если } p(x) = 0 \end{cases}$. Рассмотрим случаи: если $p(x) = 0$, то по определению f закичивается, но $f(f)$ завершается; если $p(x) = 1$, то по определению f завершается, но $f(f)$ закичивается. Противоречие.

Неразрешимость проблемы остановки: нет алгоритма g , который бы определял, завершится ли программа на данном входе.

Доказательство: если бы такой алгоритм существовал, то существовал бы и алгоритм $p(x) = g(x, x)$, проверяющий самоприменимость, но такого алгоритма нет.

2.8 Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Примеры перечислимого неразрешимого и неперечислимого множеств.

см. билет 2.7

Пример перечислимого неразрешимого множества: пусть U - у.в.ф., $d(x) = U(x, x)$ тогда $K = \{x \in \mathbb{N} \mid d(x) - \text{определено}\}$

Доказательство: 1) перечислимость следует из того, что $K = \text{dom } d$ – вычислимой функции 2) предположим, что K – разрешимо, тогда определим вычислимую функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin K \\ \text{неопр.}, & x \in K \end{cases}$. Существует n , что $U_n = f$. Тогда рассмотрим, лежит ли n в K : если да, то $d(n)$ не определено, значит $n \notin K$; если нет, то $d(n) = 0$ – определено, значит $n \in K$. В обоих случаях противоречия, значит предположение ложно.

Пример неперечислимого множества: множество \bar{K} – если бы оно было перечислимо, то по теореме Поста (см. билет 2.2) K было бы разрешимо, что неправда.