

# Коллоквиум по дискретной математике 2

## Содержание

<b>1</b>	<b>Логика и машины Тьюринга</b>	<b>2</b>
1.1	Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур. . . . .	2
1.2	Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения. . . . .	2
1.3	Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами. . . . .	2
1.4	Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств. . . . .	3
1.5	Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны. . . . .	3
1.6	Значение формулы при изоморфизме структур. Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры. Примеры невыразимых множеств. . . . .	3
1.7	Эквивалентность формул первого порядка. Лемма о фиктивном кванторе. Общезначимые и выполнимые формулы. Квантор всеобщности и общезначимость. . . . .	4
1.8	Основные эквивалентности логики первого порядка. Замена подформулы на эквивалентную. . . . .	4
1.9	Пропозициональные формулы и задаваемые ими булевы функции. Тавтологии первого порядка. . . . .	4
1.10	Лемма о корректной подстановке. . . . .	4
1.11	Понятие корректной подстановки («терм свободен для переменной в формуле»). Пример некорректной подстановки. Лемма о корректной подстановке (без доказательства). Переименование связанной переменной. Общезначимость формул вида $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi$ в случае корректной подстановки. . . . .	5
1.12	Переименование связанной переменной (без доказательства). Теорема о предваренной нормальной форме.] . . . . .	5
1.13	Понятие теории первого порядка. Примеры содержательных теорий. Модель теории. Логическое (семантическое) следование (для теорий и предложений). . . . .	5
1.14	Исчисление предикатов с равенством (в гильбертовской форме). Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности в двух формах: про выполнимость теории и про логическое следование из теории. . . . .	6
1.15	Теорема компактности (без доказательства). Любой пример применения. . . . .	6

# 1 Логика и машины Тьюринга

## 1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств  $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ , где

1.  $M$  – непустое множество, *носитель структуры*
2.  $\mathcal{F}$  – множество функций вида  $f: M^n \rightarrow M$
3.  $\mathcal{R}$  – множество кортежей из  $M$
4.  $\mathcal{C}$  – подмножество  $M$

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств  $(Fnc, Prd, Cnst)$ , где  $Fnc$  – множество функциональных символов,  $Prd$  – непустое множество предикатных символов и  $Cnst$  – множество константных символов. (просто набор символов)

\* $\sigma$ -структура (или интерпретация сигнатуры  $\sigma$ ) – это формально кортеж  $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ , где  $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$  и  $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$ . Вводим обозначения:  $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$ ,  $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$  и  $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$ . Для задания  $\sigma$ -структуры достаточно только  $M$  и  $\mathcal{I}$ .

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ “ $=$ ” :=  $\{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$ , где  $M$  – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интерпретации  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  сигнатуры  $\sigma$  с носителями  $M$  и  $N$  соответственно изоморфны если существует биекция  $\eta: M \rightarrow N$  для которой выполняются следующие свойства:

1.  $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n))$
2.  $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3.  $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ , где  $c$  – один символ

## 1.2 Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.

Формулы первого порядка – это выражения в логике первого порядка (предикатной логике), построенные по правилам синтаксиса, установленным для данной сигнатуры.

Формулы первого порядка строятся из термов и предикатов, используя логические связки и кванторы. Основные элементы синтаксиса формул первого порядка:

1. Термы: переменные, константы и функции, примененные к термам.
2. Атомарные формулы: предикаты, примененные к термам.
3. Сложные формулы: атомарные формулы, соединенные логическими операциями ( $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ) и кванторами ( $\forall, \exists$ ).

Свободные переменные формулы – это переменные, которые не находятся под действием кванторов ( $\forall$  или  $\exists$ ) внутри этой формулы. То есть, они не “связаны” кванторами и могут принимать любые значения из области определения. Множество свободных переменных в формуле  $\varphi$  обозначается как  $FV(\varphi)$ .

Предложения в логике первого порядка – это формулы, которые не содержат свободных переменных, то есть все переменные в них связаны кванторами. Такие формулы имеют логическое значение (истинность или ложность) в интерпретации.

## 1.3 Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.

Оценка переменных – способ присвоения конкретных значений переменным в формуле. По сути это функция  $\mu$ , которая ставит в соответствие *каждой* переменной какое-то значение.

Значение терма  $t$  и формулы  $\varphi$  в данной структуре  $\mathcal{M}$  при данной оценке  $\mu$ :

1. если  $t$  – переменная, то  $t$  принимает значение  $\mu(t)$
2. если  $t$  – константный символ  $c$ , то  $t$  принимает значение интерпретации  $c$  в  $\mathcal{M}$ :  $c^{\mathcal{M}}$
3. если  $t$  – функция  $f$ , применяемая к термам  $t_1, \dots, t_n$ , то значение  $t$  – это  $f^{\mathcal{M}}(v_1, \dots, v_n)$ , где  $v_1, \dots, v_n$  – это значения термов при данной оценке

4. если  $\varphi$  – атомарная формула  $P(t_1, \dots, t_n)$ , то она истинна, если  $(v_1, \dots, v_n) \in R^M$ , где  $v_1, \dots, v_n$  – это значения термов при данной оценке
5. для сложных формул  $\varphi$  используются стандартные логические правила

Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами означает, что если мы изменим значения переменных, которые не являются свободными в данной формуле, то значение формулы останется неизменным. Другими словами, переменные, не являющиеся *свободными* в формуле, не влияют на ее истинностное значение.

#### 1.4 Значение терма и формулы на наборе элементов структуры. Выразимые в структуре множества (отношения, функции, элементы). Примеры выразимых множеств.

Значение терма или формулы  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  на наборе элементов  $y = (y_1, \dots, y_n)$  структуры  $M$  определяется значением функции  $\alpha^M(y) = [\alpha](\pi + (x_1 \rightarrow y_1) + \dots + (x_n \rightarrow y_n))$ , где  $\pi$  – любая оценка.

Выразимые в структуре  $M$  множества – это множества  $D \subseteq M$ , которые можно описать с помощью формул логики первого порядка

Примеры:

1. пустое множество:  $\varphi(x) = (x \neq x)$
2. носитель структуры  $M$ :  $\varphi(y) = (y = y)$
3. четные числа:  $\varphi(z) = \exists a(a \in \mathbb{N} \wedge a + a = z)$

Выразимые в структуре предикаты – это предикаты, для которых существуют эквивалентные формулы логики первого порядка

#### 1.5 Значение формулы при изоморфизме структур. Элементарная эквивалентность структур. Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

\*Если  $\sigma$ -предложение  $\varphi$  истинно в  $M$ , то это обозначается так:  $M \models \varphi$

\*Теория в языке сигнатуры  $\sigma$  – это какое-то множество  $\sigma$ -предложений.

\*Модель теории  $T$  в языке сигнатуры  $\sigma$  – это такая  $\sigma$ -структура  $M$ , что все предложения в ней истинны.

\*Модель предложения  $\varphi$  в языке сигнатуры  $\sigma$  – это модель теории  $\{\varphi\}$ .

\*Теория  $\sigma$ -структуры  $M$  – это все  $\sigma$ -предложения, истинные в  $M$ . Обозначение:  $Th(M)$ .

Элементарная эквивалентность структур:  $\sigma$ -структуры  $M$  и  $N$  эквивалентны если  $Th(M) = Th(N)$ . Обозначение:  $M \equiv N$

Значение формулы  $\varphi$  при изоморфизме  $\eta$  структур  $M$  и  $N$ : для любого  $a \in M^n$  равносильны  $M \models \varphi(a)$  и  $N \models \varphi(\eta(a))$ .

Элементарная эквивалентность изоморфных структур: изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

TODO: дополнить доказательствами два последних утверждения

#### 1.6 Значение формулы при изоморфизме структур. Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры. Примеры невыразимых множеств.

Значение формулы  $\varphi$  при изоморфизме  $\eta$  структур  $M$  и  $N$ : для любого  $a \in M^n$  равносильны  $M \models \varphi(a)$  и  $N \models \varphi(\eta(a))$ .

Сохранение выразимых множеств автоморфизмами структуры: семейство выразимых множеств сохраняется между автоморфизмами

Примеры невыразимых множеств: множество всех простых чисел (для этого необходимо проверять все возможные делители); множество натуральных чисел, являющихся степенью двойки (для этого требуется, например, рекурсия, которой нет).

TODO: дополнить доказательствами

## 1.7 Эквивалентность формул первого порядка. Лемма о фиктивном кванторе. Общезначимые и выполнимые формулы. Квантор всеобщности и общезначимость.

Эквивалентность формул первого порядка: формулы  $\varphi$  и  $\psi$  являются эквивалентными, если их значения совпадают в любой интерпретации при любой оценке. Обозначение  $\varphi \equiv \psi$ .

Лемма о фиктивном кванторе: пусть  $x$  не лежит в множестве свободных переменных формулы  $\varphi$ , тогда  $\varphi \equiv \forall x\varphi$

Общезначимая формула – формула, истинная при любой интерпретации и оценке.

Выполнимая формула – формула, для которой существует интерпретация и оценка, в которой она истинна.

Квантор всеобщности и общезначимость: формула  $\varphi$  общезначима  $\iff$  формула  $\forall u\varphi$  общезначима

## 1.8 Основные эквивалентности логики первого порядка. Замена подформулы на эквивалентную.

Основные эквивалентности логики первого порядка для произвольных  $\varphi$  и  $\psi$ :

1. Пусть  $x$  не является параметром  $\psi$ , тогда  $\forall\{\exists\}x(\varphi \wedge \{\forall\}\psi) \equiv \forall\{\exists\}x\varphi \wedge \{\forall\}\psi$  (итого 4 равенства)
2.  $\forall x(\varphi \wedge \psi) = \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
3.  $\forall x(\varphi \vee \psi) = \forall x\varphi \vee \forall x\psi$
4.  $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
5.  $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$

Пусть  $\varphi$  – какая-то формула,  $\varphi \equiv \varphi'$ , тогда замена  $\varphi$  на  $\varphi'$  эквивалентна в случаях использования логического и, или, не, импликации, "тогда и только тогда квантора всеобщности и существования.

Замена подформулы на эквивалентную: пусть  $\varphi \equiv \varphi'$  и  $\psi'$  была получена путем замены вхождений  $\varphi$  в  $\psi$  на  $\varphi'$ , тогда  $\psi \equiv \psi'$ .

## 1.9 Пропозициональные формулы и задаваемые ими булевы функции. Тавтологии первого порядка.

Пропозициональная формула – формула, построенная из пропозициональных переменных (простых букв) с помощью булевых связок.

Каждая пропозициональная формула задаёт булеву функцию, так как для каждого набора значений переменных (истина или ложь) формула принимает одно определённое значение (истина или ложь). То есть, если у вас есть пропозициональная формула  $A$  с переменными  $p$  и  $q$ , можно построить таблицу истинности, которая покажет значение формулы для всех возможных значений  $p$  и  $q$ .

Тавтология – это формула, истинная при любых значениях ее переменных. Любая тавтология общезначима.

## 1.10 Лемма о корректной подстановке.

\*Терм  $t$  свободен для переменной  $x$  в формуле  $\varphi$ , если при подстановке терма  $t$  вместо переменной  $x$  в формуле  $\varphi$  не происходит никаких изменений значений других свободных переменных. Иными словами, терм  $t$  можно подставить на место  $x$  в  $\varphi$  без появления новой привязки переменных, которая может изменить интерпретацию формулы. Обозначение:  $t - x - \varphi$ .

\*Замена  $y$  на  $x$  в формуле  $\varphi$  обозначается как  $\varphi(y/x)$

Лемма о корректной подстановке: в любой интерпретации при любой оценке  $\pi$  для всех  $\varphi$  - формул,  $t, s$  - термов, и  $x$  - переменной, если  $t - x - \varphi$ , то выполняется:

$$[s(t/x)](\pi) = [s](\pi + (x \rightarrow [t](\pi))) \text{ и } [\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow [t](\pi)))$$

TODO: доказательство

### 1.11 Понятие корректной подстановки («терм свободен для переменной в формуле»). Пример некорректной подстановки. Лемма о корректной подстановке (без доказательства). Переименование связанной переменной. Общезначимость формул вида $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ и $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi$ в случае корректной подстановки.

см. билет 1.10

Пример некорректной подстановки: возьмем формулу  $\varphi(x, y) = \forall y(P(x, y))$  и терм  $t = y$ . Подставляем:  $\varphi(x/t, y) = \forall y(P(y, y))$ . Смысл формулы изменен т.к. терм не свободен для переменной в формуле.

Переименование связанной переменной:

Лемма 1. Пусть  $y \notin V(\varphi)$  (т.е.  $y$  нет в  $\varphi$ ), тогда  $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$ .

Лемма 2. Для любого терма  $t$  и любой формулы  $\varphi$ , если  $y \notin V(\varphi)$ , то для любой оценки  $\pi$  верно:  $[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$  и  $[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$

1.  $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ , если  $t$  свободен для  $x$  в  $\varphi$
2.  $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ , если  $t$  свободен для  $x$  в  $\varphi$

TODO: дописать доказательства

### 1.12 Переименование связанной переменной (без доказательства). Теорема о предваренной нормальной форме.]

Переименование связанной переменной:

Лемма 1. Пусть  $y \notin V(\varphi)$  (т.е.  $y$  нет в  $\varphi$ ), тогда  $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(y/x)$ .

Лемма 2. Для любого терма  $t$  и любой формулы  $\varphi$ , если  $y \notin V(\varphi)$ , то для любой оценки  $\pi$  верно:  $[t(y/x)](\pi) = [t](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$  и  $[\varphi(y/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \rightarrow \pi(y)))$

\*Предваренная формула – такая, что имеет кванторы только в кванторном префиксе в начале формулы.

Теорема о предваренной нормальной форме: для любой формулы найдется эквивалентная ей предваренная.

Доказательство: индукция по построению. Разберем все случаи:

1. Если формула атомарная, то она уже предваренная.
2. Если формула начинается с квантора, то по предположению индукции заменяем формулу под этим квантором на эквивалентную предваренную.
3. Если формула начинается с отрицания, то по предположению индукции заменяем формулу под отрицанием на эквивалентную предваренную и проносим отрицание вовнутрь, переменяя кванторы.
4. Если в формуле главная связка бинарная, то по предположению индукции заменяем формулы под связкой на эквивалентные предваренные и переименовываем связанные переменные так, чтобы все кванторы можно было вынести наружу и выносим их.

### 1.13 Понятие теории первого порядка. Примеры содержательных теорий. Модель теории. Логическое (семантическое) следование (для теорий и предположений).

Теория первого порядка – логическая система, включающая в себя сигнатуру (набор символов, включающий константы, функции и предикаты), аксиомы (набор утверждений или формул, принимаемых без доказательств) и правила вывода (правила, по которым из аксиом и других утверждений можно выводить новые утверждения)

Примеры содержательных теорий:

1. Теория групп:
  - (а) Сигнатура: бинарная операция  $*$  и константа  $e$

- (b) Аксиомы: ассоциативность, существование нейтрального элемента, существование обратного элемента

## 2. Теория колец:

- (a) Сигнатура: две бинарные операции:  $+$  и  $*$  и константы 0 и 1.  
 (b) Аксиомы: дистрибутивность, ассоциативность, коммутативность, существование обратного элемента по сложению

Модель теории – это интерпретация сигнатуры, в которой все аксиомы теории истинны. Например, для теории групп это множество целых чисел с операцией сложения и нулем.

Логическое следование – отношение между формулами и теориями, которое говорит, что если истинны определенные формулы, то и другие формулы истинны.

Для теорий: Теория  $T$  логически следует из множества аксиом  $A$ , если любая модель  $A$  также является моделью  $T$ .

Для предложений: Предложение  $\varphi$  логически следует из теории  $T$  ( $T \models \varphi$ ), если  $\varphi$  истинно в каждой модели  $T$ .

### 1.14 Исчисление предикатов с равенством (в гильбертовской форме). Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности в двух формах: про выполнимость теории и про логическое следование из теории.

Исчисление предикатов с равенством – это система логики первого порядка, включающая равенство как основной предикат. В гильбертовской форме исчисления предикатов используются аксиомы и правила вывода.

Аксиомы для равенства:

1. Рефлексивность:  $\forall x(x = x)$
2. Симметричность:  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
3. Транзитивность:  $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$
4. Замена в формулах: если  $t$  – терм, а  $P$  – предикат, то  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y)))$

Общие аксиомы и правила вывода:

1. Аксиомы логики первого порядка
2. Правило Modus Ponens: из  $\varphi$  и  $\varphi \rightarrow \psi$  следует  $\psi$
3. Правило обобщения: из  $\varphi$  следует  $\forall x \varphi$ , если  $x$  не свободная в  $\varphi$

Теорема о полноте и корректности исчисления предикатов: если  $\varphi$  логически следует из  $A$ , тогда и только тогда  $\varphi$  выводима из  $A$  в исчислении предикатов.

Теорема о компактности: если любая конечная подсистема множества предложений имеет модель, то и все множество имеет модель.

Теорема о компактности в форме про выполнимость теории: если каждое конечное подмножество множества формул  $T$  выполнимо, то и все множество  $T$  выполнимо.

Теорема о компактности в форме про логическое следование из теории: формула  $\varphi$  логически следует из теории  $T$  тогда и только тогда, когда  $\varphi$  логически следует из некоторого конечного подмножества теории  $T$ .

TODO: дополнить доказательствами

### 1.15 Теорема компактности (без доказательства). Любой пример применения.

см. билет 1.14

Пример: хотим показать, что существует бесконечное множество.

Пусть  $T$  – это теория, содержащая набор формул  $F = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ , где  $\varphi_n$  утверждает, что в нашем множестве существует как минимум  $n$  различных элементов. Любое конечное подмножество  $F$  выполнимо в модели потому что можно найти конечное число элементов, принадлежащих множеству. Применяем теорему компактности: раз каждое подмножество  $F$  имеет модель, то и все множество  $F$  имеет модель, значит существует модель, содержащая бесконечно много элементов.