

Коллоквиум по дискретной математике 2

Содержание

1	Логика и машины Тьюринга	2
1.1	Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.	2
1.2	Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.	2
1.3	Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.	2

1 Логика и машины Тьюринга

1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$, где

1. M – непустое множество, *носитель структуры*
2. \mathcal{F} – множество функций вида $f: M^n \rightarrow M$
3. \mathcal{R} – множество кортежей из M
4. \mathcal{C} – подмножество M

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств $(Fnc, Prd, Cnst)$, где Fnc – множество функциональных символов, Prd – непустое множество предикатных символов и $Cnst$ – множество константных символов. (просто набор символов)

* σ -структура (или интерпретация сигнатуры σ) – это формально кортеж $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F}$, $\mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$. Вводим обозначения: $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$. Для задания σ -структуры достаточно только M и \mathcal{I} .

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ “=” := $\{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$, где M – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интерпретации \mathcal{M} и \mathcal{N} сигнатуры σ с носителями M и N соответственно изоморфны если существует биекция $\eta: M \rightarrow N$ для которой выполняются следующие свойства:

1. $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n))$
2. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3. $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$

1.2 Формулы первого порядка данной сигнатуры. Параметры (свободные переменные) формулы. Предложения.

Формулы первого порядка – это выражения в логике первого порядка (предикатной логике), построенные по правилам синтаксиса, установленным для данной сигнатуры.

Формулы первого порядка строятся из термов и предикатов, используя логические связки и кванторы. Основные элементы синтаксиса формул первого порядка:

1. Термы: переменные, константы и функции, примененные к термам.
2. Атомарные формулы: предикаты, примененные к термам.
3. Сложные формулы: атомарные формулы, соединенные логическими операциями ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) и кванторами (\forall, \exists).

Свободные переменные формулы – это переменные, которые не находятся под действием кванторов (\forall или \exists) внутри этой формулы. То есть, они не “связаны” кванторами и могут принимать любые значения из области определения.

Предложения в логике первого порядка – это формулы, которые не содержат свободных переменных, то есть все переменные в них связаны кванторами. Такие формулы имеют логическое значение (истинность или ложность) в интерпретации.

1.3 Оценка переменных. Значение терма и формулы в данной структуре при данной оценке. Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами.

Оценка переменных – способ присвоения конкретных значений переменным в формуле. По сути это функция μ , которая ставит в соответствие каждой переменной какое-то значение.

Значение терма t и формулы φ в данной структуре \mathcal{M} при данной оценке μ :

1. если t – переменная, то t принимает значение $\mu(t)$
2. если t – константный символ c , то t принимает значение интерпретации c в \mathcal{M} : $c^{\mathcal{M}}$
3. если t – функция f , применяемая к термам t_1, \dots, t_n , то значение t – это $f^{\mathcal{M}}(v_1, \dots, v_n)$, где v_1, \dots, v_n – это значения термов при данной оценке

4. если φ – атомарная формула $P(t_1, \dots, t_n)$, то она истинна, если $(v_1, \dots, v_n) \in R^{\mathcal{M}}$, где v_1, \dots, v_n – это значения термов при данной оценке
5. для сложных формул φ используются стандартные логические правила

Независимость значения формулы от значений переменных, не являющихся ее параметрами означает, что если мы изменим значения переменных, которые не являются свободными в данной формуле, то значение формулы останется неизменным. Другими словами, переменные, не являющиеся *свободными* в формуле, не влияют на ее истинностное значение.