Коллоквиум по дискретной математике 2

Содержание

1 Логика и машины Тьюринга

1.1 Структуры и сигнатуры. Нормальные структуры. Изоморфизм структур.

Структура – кортеж множеств $(M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$, где

1. M – непустое множество, *носитель структуры*
2. $\mathcal{F}$ – множество функций вида $f\colon M^n \to M$
3. $\mathcal{R}$ – множество кортежей из M
4. $\mathcal{C}$ – подмножество M

Сигнатура – кортеж попарно непересекающихся множеств $(Fnc, Prd, Cnst)$, где Fnc – множество функциональных символов, Prd – непустое множество предикатных символов и $Cnst$ – множество константных символов. (просто набор символов)

*σ-структура (или интерпретация сигнатуры σ) – это формально кортеж $\mathcal{M} = (M, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I}(Fnc) = \mathcal{F}$, $\mathcal{I}(Prd) = \mathcal{R}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = \mathcal{C}$. Вводим обозначения: $\mathcal{I}(Fnc) = f^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{I}(Prd) = R^{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{I}(Cnst) = c^{\mathcal{M}}$. Для задания σ-структуры достаточно только M и $\mathcal{I}$.

Нормальная структура – содержащая двувалентный предикатный символ “=“ $:= \{(a, a) \in M^2 \mid a \in M\}$, где M – носитель структуры.

Изоморфизм структур: интепретации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ сигнатуры σ с носителями M и N соответственно изоморфны если существует биекция $\eta\colon M \to N$ для которой выполняются следующие свойства:

1. $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$
2. $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$
3. $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$