4. Матрицы и матричные операции часть 2

1. Вычислить определитель

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = $

$= 45 - 48 - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0$

2. Определитель матрицы A равен 4. Найти

а) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 16$

б) $\det(A^T) = \det(A) = 4$

в) $\det(2A) = 2 \cdot \det(A) = 8$

3. Доказать, что матрица вырожденная

$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$

$= -2(-182 - 42) - 7(52 + 18) - 3(28 - 42) =$

$= 448 - 490 + 42 = 0$

Если определитель матрицы равен 0, то у
матрицы нет обратной матрицы. Следует, что
исходная матрица является вырожденной

4. Найти ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Из 3 строки вычтем сумму элементов 1 и 2 строки

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Из 2 строки вычтем 1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Следует ранг матрицы равен $\underline{2}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Из 3 строки вычтем сумму 1 и 2 строки

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Из 1 строки вычтем 2

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Следует, что ранг матрицы
равен $\underline{3}$