Урок 3. Линейные преобразования

Урок 5. Линейные преобразования

1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda)+12=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=2$$

$$\lambda_2=3$$

$$\lambda_1: \quad \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1-6x_2=2x_1 \\ 2x_1+6x_2=2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}x_1 \\ 2x_1-3x_1=-x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2}x_1 \\ 0=0 \end{cases}$$

За x_1 можно принять любое ненулевое значение

Например, $x_1 = 1$

Собственный вектор при $\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3}x_1 \\ 2x_1 - 4x_1 = -2x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3}x_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

собственный вектор при $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, заданный матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Показать, что любой вектор является для него собственным

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 + 0x_2 = -x_1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 = -x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases}$

Можем сделать вывод, что любой вектор является собственным для матрицы A

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Такая система имеет смысл, вектор $x = (1, 1)$ является собственным вектором A

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Разные значения λ. Вектор $x = (3, -3, -4)$ не является собственным вектором