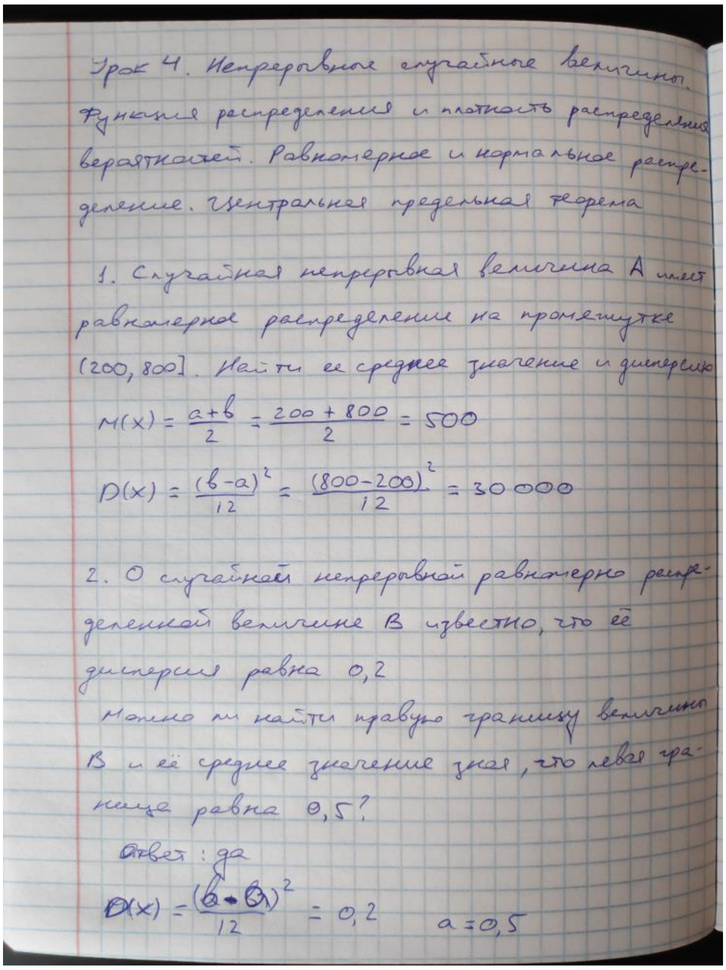
Урок 4. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределение. Центральная предельная теорема



Урок 4. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределение. Центральная предельная теорема

1. Случайная непрерывная величина A имеет равномерное распределение на промежутке [200, 800]. Найти ее среднее значение и дисперсию

$$M(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{200+800}{2} = 500$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(800-200)^2}{12} = 30\,000$$

2. О случайной непрерывной равномерно распределенной величине B известно, что её дисперсия равна 0,2

Можно ли найти правую границу величины B и её среднее значение зная, что левая граница равна 0,5?

Ответ: да

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = 0{,}2 \qquad a = 0{,}5$$

$$\frac{(b-0,5)^2}{12}=0,2$$

$$b^2-b+0,25=2,4$$

$$b^2-b-2,15=0$$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2,15)=9,6$$

$$b_1=\frac{1+\sqrt{9,6}}{2}\approx2,05$$

$$b_2=\frac{1-\sqrt{9,6}}{2}\approx-1,05$$ – не подходит, т.к. меньше a

Правая граница примерно равна 2,05

3. Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения

$$f(x)=\left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\right)\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$$

Найти: а) $M(x)$ б) $D(x)$ в) $std(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-(-2))^2}{2\cdot4^2}}$$

а) $M(x)=a=-2$

б) $D(x)=\sigma^2=4^2=16$

в) $std(x)=\sigma=4$

4. Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем, средний рост равен 174 см, а среднее квадратичное отклонение равно 8 см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:

а) больше 182 см

$\mu = 174$

$\sigma = 8$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{182 - 174}{8} = 1$$

по Z-таблице - правая сторона

$P = \underline{0{,}15866}$

б) больше 190 см

$$z = \frac{190 - 174}{8} = 2$$

$P = \underline{0{,}02275}$

в) от 166 см до 190 см

$$z_1 = \frac{166-174}{8} = -1$$

$$z_2 = \frac{190-174}{8} = 2$$

По Z-таблице - отрицательные значения, найдем вероятность от 166 см

$$P_1 = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

По Z-таблице - правая сторона найдем вероятность от 190 см

$$P_2 = 0{,}02275$$

$$P = P_1 - P_2 = 0{,}8413 - 0{,}02275 = \underline{0{,}81855}$$

г) от 166 см до 182 см

$$z_1 = \frac{166-174}{8} = -1$$

$$z_2 = \frac{182-174}{8} = 1$$

По правилу трех сигм вероятность равна 68%

$$\underline{P = 0{,}68}$$

д) от 158 см до 190 см

$$Z_1 = \frac{158-174}{8} = -2$$

$$Z_2 = \frac{190-174}{8} = 2$$

По правилу трех сигм вероятность равна 95,4%

$P = 0,954$

е) не выше 150 см или не ниже 190 см

$$Z_1 = \frac{150-174}{8} = -3$$

$$Z_2 = \frac{190-174}{8} = 2$$

По Z-таблице отрицательные значения

$P_1 = 0,0013$

$P_2 = 0,02275$ (из ответа пункта б)

$P = P_1 + P_2 = 0,02405$

ё) не выше 150 см или не ниже 198 см

$$Z_1 = \frac{150-174}{8} = -3$$

$$Z_2 = \frac{198-174}{8} = 3$$

По правилу трех сигм вероятность равна 99,75%

$P = 1 - 0,9975 = 0,0025$

ж) ниже 166 см

$$Z = \frac{166-174}{8} = -1$$

По Z-таблице отрицательные значения

$P = 0,1587$

5. На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой $M(X) = 178$ см и $D(X) = 25$ кв. см?

$$Z = \frac{190-178}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Рост человека 190 см отклоняется на 2,4 сигм