

Nome: Nicole Migliorini Magagnin

Lista Matemática Aplicada – Transformada Z Inversa

Prof: Walter Gontijo

1) Determine a transformada inversa de $X(z) = \frac{4z}{(z-1)(z-3)}$

$$X(z) = \frac{4z}{(z-1)(z-3)} = \frac{K1}{z-1} + \frac{K2}{z-3}$$

$$\frac{4z(z-1)(z-3)}{(z-1)(z-3)} = \frac{K1(z-1)(z-3)}{z-1} + \frac{K2(z-1)(z-3)}{z-3}$$

$$4z = k1 * (z-3) + k2 * (z-1)$$

p/ z = 1

$$4z = k1 * (1-3) + 0 * k2$$

$$-2K1 = 4$$

$$K1 = -2$$

p/ z = 3

$$4 * 3 = 0 + 2k2$$

$$12 = 2k2$$

$$k2 = 6$$

$$= \frac{-2}{z-1} + \frac{6}{z-3} \rightarrow \frac{-2}{1} * \frac{z}{z-1} + \frac{6}{1} * \frac{z}{z-3}$$

$$2 * u[n] + 3^n * u[n]$$

$$\mathbf{x1[n] = (2 + 3^n) * u[n]}$$

2) Determine a função de transferência dos sistemas discretos modelados pelas seguintes equações diferença:

a) $y(k) - \frac{1}{2} * y(k-1) = x(k) + \frac{1}{3} * x(k-1)$

$$Y(z) - \frac{1}{2} * z^{-1} * Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} * z^{-1} * X(z)$$

$$1 - \frac{1}{2} * z^{-1} * Y(z) = 1 + \frac{1}{3} * z^{-1} * X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} * z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} * z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{3}}{z - \frac{1}{2}}$$

b) $y(k) - \frac{3}{4} * y(k-1) + \frac{1}{8} * y(k-2) = 2x(k)$

$$Y(z) - \frac{3}{4} * z^{-1} * Y(z) + \frac{1}{8} * z^{-2} * Y(z) = 2 * x(z)$$

$$\left(1 - \frac{3}{4} * z^{-1} + \frac{1}{8} * z^{-2}\right) * Y[z] = 2 * X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} * z^{-1} + \frac{1}{8} * z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

3) Para cada uma das transferências discretas a seguir:

- Determine os pólos e zeros da função.
- Esboce os pólos e zeros no plano z (desenhe também o círculo de raio unitário).
- Verifique se o sistema é estável e justifique.
- Obtenha o correspondente h[n].

a) $H(z) = 3 * \frac{z-1,2}{(z-0,5)*(z-0,9)}$

$$= \frac{3z-3,6}{z^2-1,4z+0,45}$$

Zeros: **3,6**

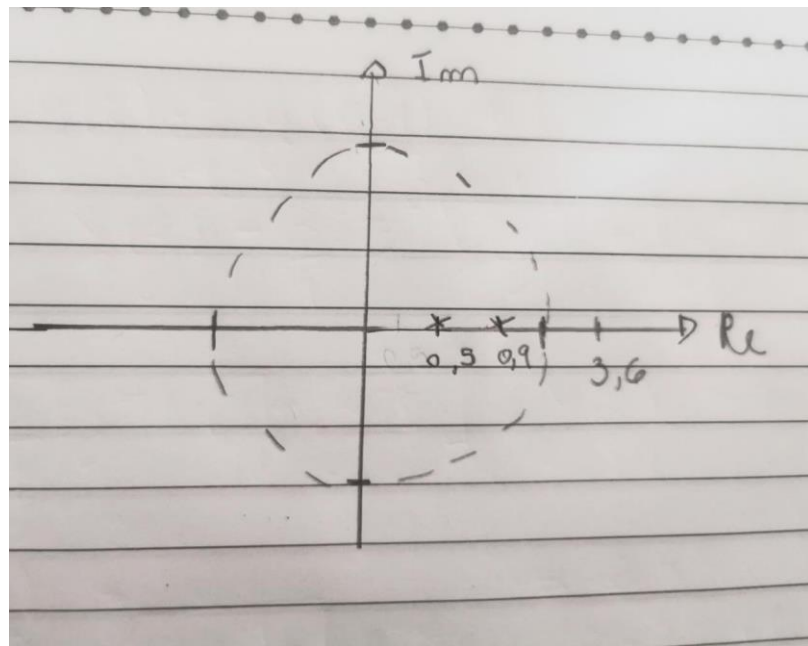
Pólos: $z^2 - 1,4z + 0,45$

$$\frac{1,4 \pm \sqrt{1,4^2 - 4 * 1 * 0,45}}{2}$$

x' = 0,9

x'' = 0,5

Círculo:



- O sistema não é estável, todos os pólos estão no semicírculo direito.

$$H(z) = 3 * \frac{z - 1,2}{(z - 0,5) * (z - 0,9)}$$

$$h[n] = \frac{3z-3,6}{(z-0,5)(z-0,9)} = \frac{k_1}{z-0,5} + \frac{k_2}{z-0,9}$$

$$= \frac{(3z - 3,6) * (z - 0,5) * (z - 0,9)}{(z - 0,5) * (z - 0,9)} = \frac{k_1(z - 0,5) * (z - 0,9)}{z - 0,5} + \frac{k_2(z - 0,5) * (z - 0,9)}{z - 0,9}$$

$$= 3z - 3,6 = k_1 * (z - 0,9) + k_2 * (z - 0,5)$$

$$P/z = 0,5$$

$$3 * 0,5 - 3,6 = k_1 * (0,5 - 0,9) + 0$$

$$1,5 - 3,6 = k_1 * (-0,4)$$

$$-2,1 = -0,4k_1$$

$$k_1 = 5,25$$

$$P/z = 0,9$$

$$3 * 0,9 - 3,6 = 0 + k_2 * (0,9 - 0,5)$$

$$2,7 - 3,6 = 0,4k_2$$

$$k_2 = 2,25$$

$$= \frac{5,25}{z - 0,5} - \frac{2,25}{z - 0,9}$$

$$= \frac{5,25}{1} * \frac{z}{z - 0,5} - \frac{2,25}{1} * \frac{z}{z - 0,9}$$

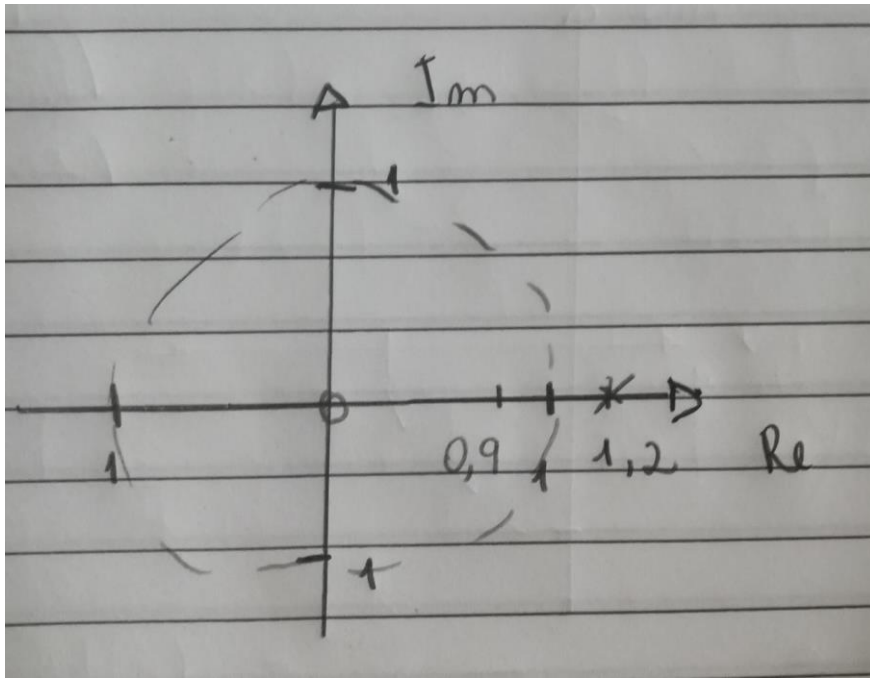
$$\mathbf{h[n] = 3\delta[n] * (-1, 4^n)u[n]}$$

$$\text{b) } H(z) = \frac{z}{(z-0,9)*(z-1,2)}$$

Zeros: 0

Pólos: 1,2 e 0,9

Círculo:



- O sistema não é estável pois todos os pólos estão no semicírculo direito.

$$H[n] = \frac{z}{(z - 0,9) * (z - 1,2)} = \frac{K1}{z - 0,9} + \frac{K2}{z - 1,2}$$

$$= \frac{z(z - 0,9)(z - 1,2)}{(z - 0,9)(z - 1,2)} = \frac{K1(z - 0,9)(z - 1,2)}{z - 0,9} + \frac{K2(z - 0,9)(z - 1,2)}{z - 1,2}$$

$$z = K1(z - 1,2) + K2(z - 0,9)$$

$$P/ z = 0,9$$

$$0,9 = 0,3 K1$$

$$K1 = -3$$

$$P/ z = 1,2$$

$$1,2 = 0,3K2$$

$$K2 = 4$$

$$= \frac{-3}{z-0,9} + \frac{4}{z-1,2} \rightarrow H[n] = \frac{-3}{1} * \frac{z}{z-0,9} + \frac{4}{1} * \frac{z}{z-1,2}$$

$$H[n] = (-0,9^n - 1,2^n)u[n]$$

$$H[n] = (-3, 1^n) u[n]$$

c) $H(z) = \frac{z+0,9}{z^2+z+0,41}$

Zeros = -0,9

Pólos =

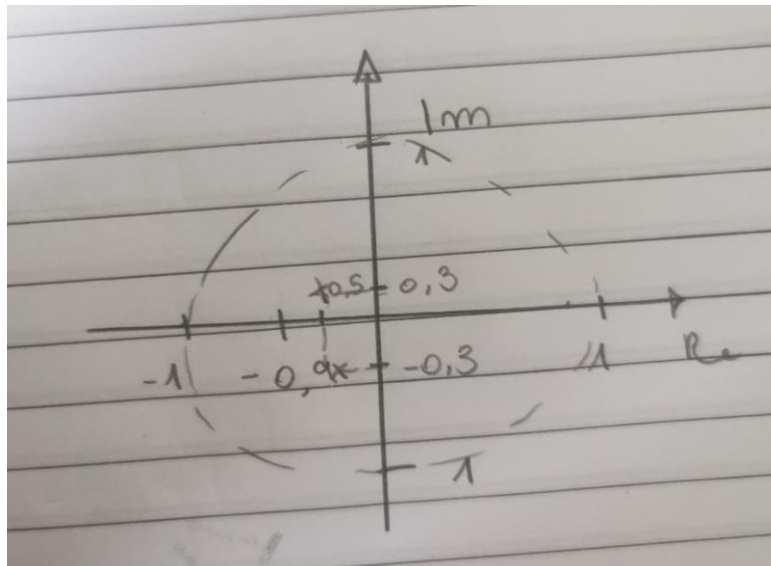
$$\frac{-1 \pm \sqrt{-0,64}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm 0,6i}{2}$$

$$x' = -0,5 + 0,3i$$

$$x'' = -0,5 - 0,3i$$

Círculo:



- O sistema é estável, pois todos os pólos estão no semicírculo esquerdo.

$$H[n] = \frac{1}{z} * \frac{z + 0,9}{z^2 + z + 0,41} = \frac{z + 0,9}{z * (z - (-0,5 - 0,4j)) * (z - (-0,5 + 0,4j))}$$

$$= \frac{z + 0,9}{z * (z + (0,5 + 0,4j) * (z + (0,5 - 0,4j)))} = \frac{k1}{z} + \frac{k2}{z + 0,5 + 0,4j} + \frac{k3}{z + 0,5 - 0,4j}$$

$$\frac{k1 = z * \frac{z+0,9}{z*(z+0,5+0,4j)*(z+0,5-0,4j)}}{(s=0)} = \frac{0,9}{(0,5+0,4j)*(0,5-0,4j)} = \frac{90}{41}$$

$$k2 = (z + 0,5 + 0,4j) * \frac{z + 0,9}{z * (z + 0,5 + 0,4j) * (z + 0,5 - 0,4j)} = (s = -0,5 - 0,4j)$$

$$\frac{-0,5 - 0,4j + 0,9}{(-0,5 - 0,4j) * (0,5 - 0,4j + 0,5 - 0,4j)} = \frac{-0,4j + 0,4}{(-0,5 - 0,4j) * (-0,8j)}$$

$$k2 = -\frac{45}{41} - \frac{5}{41}j = 1,10e^{-3,03}$$

$$k3 = (z + 0,5 - 0,4j) * \frac{z + 0,9}{z * (z + 0,5 + 0,4j) * (z + 0,5 - 0,4j)} = (s = -0,5 + 0,4j)$$

$$\frac{-0,5 + 0,4j + 0,9}{-0,5 + 0,4j * (-0,5 + 0,4j + 0,5 + 0,4j)} = \frac{0,4j + 0,4}{(-0,5 + 0,4j) * (0,8j)}$$

$$k3 = -\frac{45}{41} - \frac{5}{41}j = 1,10e^{3,03}$$

Substituindo:

$$z * \left(\frac{\frac{90}{41}}{z} + \frac{1,10e^{-3,03}}{z+0,5+0,4j} + \frac{1,10e^{3,03}}{z+0,5-0,4j} \right)$$

$$\frac{90}{41} + 1,10e^{-3,03} * \frac{z}{z + 0,5 + 0,4j} + 1,10e^{3,03} * \frac{z}{z + 0,5 - 0,4j}$$

$$\frac{r}{2} = 1,10$$

$$r = 2,2$$

$$\theta = -3,03rad$$

$$y = -0,5 - 0,4$$

$$y = 0,64 * e^{-2,47j}$$

$$|y| = 0,64$$

$$\beta = -2,47$$

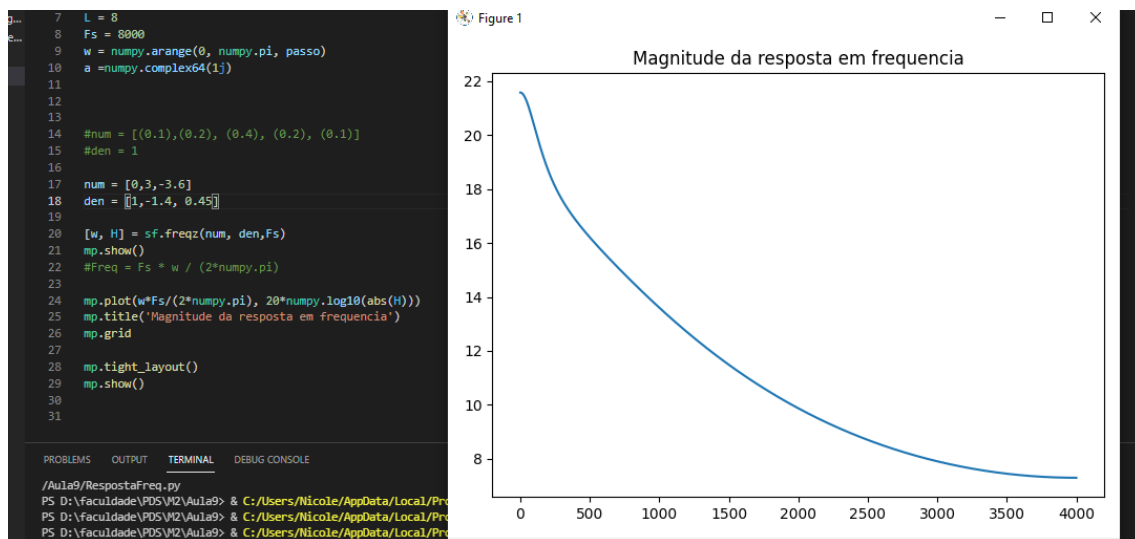
$$12b \quad r|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta)u[n] \quad \gamma = |\gamma|e^{j\beta} \quad \frac{(0,5re^{j\theta})z}{z-\gamma} + \frac{(0,5re^{-j\theta})z}{z-\gamma^*}$$

$$\left[\frac{90}{41} + 2,2 * (0,64)^\pi * \cos(-2,47n - 3,03)u[n]\right]$$

4)

$$a) \quad H(z) = 3 * \frac{z-1,2}{(z-0,5)*(z-0,9)} = \frac{3e^{jw}-3,6}{(e^{jw}-0,5)*(e^{jw}-0,9)}$$

$$\frac{3-3,6}{1-0,9-0,5+0,45} = \frac{3-3,6}{1-1,4+0,45}$$



$$b) \quad H(z) = \frac{z}{(z-0,9)*(z-1,2)} = \frac{e^{jw}}{(e^{jw}-0,9)*(e^{jw}-1,2)}$$

$$\frac{1}{1-1,2-0,9+1,08} = \frac{1}{1-2,1+1,08}$$


```

L = 8
Fs = 8000
w = numpy.arange(0, numpy.pi, passo)
a = numpy.complex64(1j)

#num = [(0.1),(0.2), (0.4), (0.2), (0.1)]
#den = 1

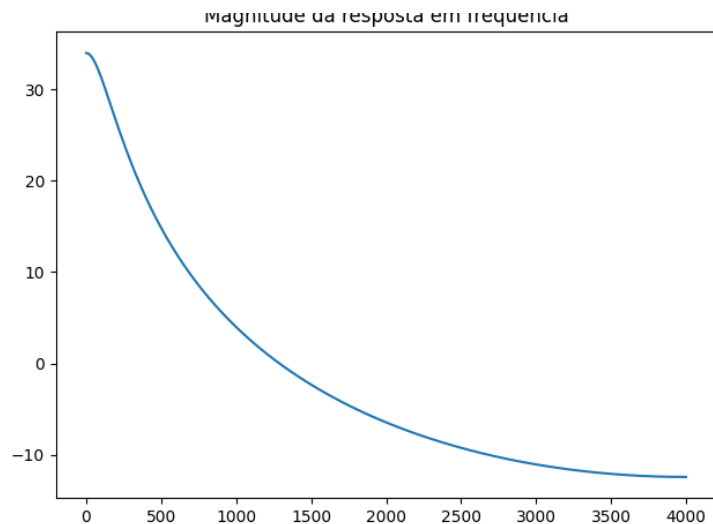
num = [0,0,1]
den = [1,-2.1, 1.08]

[w, H] = sf.freqz(num, den,Fs)
mp.show()
#freq = Fs * w / (2*numpy.pi)

mp.plot(w*Fs/(2*numpy.pi), 20*numpy.log10(abs(H)))
mp.title('Magnitude da resposta em frequencia')
mp.grid

mp.tight_layout()
mp.show()

```



Letra c)

$$H(z) = \frac{z+0,9}{z^2+z+0,41} = \frac{e^{j\omega}+0,9}{e^{j\omega^2}+e^{j\omega}+0,41}$$

