Obliczenia Naukowe Sprawozdanie Lista 2

Mateusz Gancarz

13 listopada 2022

1 Zadanie 1.

1.1 Opis zadania

Zadanie polegało na powtórzeniu zadania 5 z listy 1, ale po usunięciu ostatniej 9 z x_4 i ostatniej 7 z x_5.

1.2 Wyniki

- *Float32*
  - metoda "w przód"- -0.3472038161889941
    różnica - $3.637978807091713 \cdot 10^{-12}$
  - metoda "w tył"- -0.3472038162872195
    różnica - 0.0
  - od największego do najmniejszego - -0.5
    różnica - 0.0
  - od najmniejszego do największego - -0.5
    różnica - 0.0
- *Float64*
  - metoda "w przód" $-0.004296342739891585 \cdot 10^{-10}$
    różnica - 0.004296342842410399
  - metoda "w tył" $-0.004296342998713953 \cdot 10^{-10}$
    różnica - 0.004296342842280865
  - od największego do najmniejszego - -0.004296342842280865
    różnica - 0.004296342842280865
  - od najmniejszego do największego - -0.004296342842280865
    różnica - 0.004296342842280865

1.3 Wnioski

Przez widoczne różnice widzimy, że zadanie jest źle uwarunkowane, ponieważ małe zmiany w danych prowadzą do dużych zmian w wynikach.

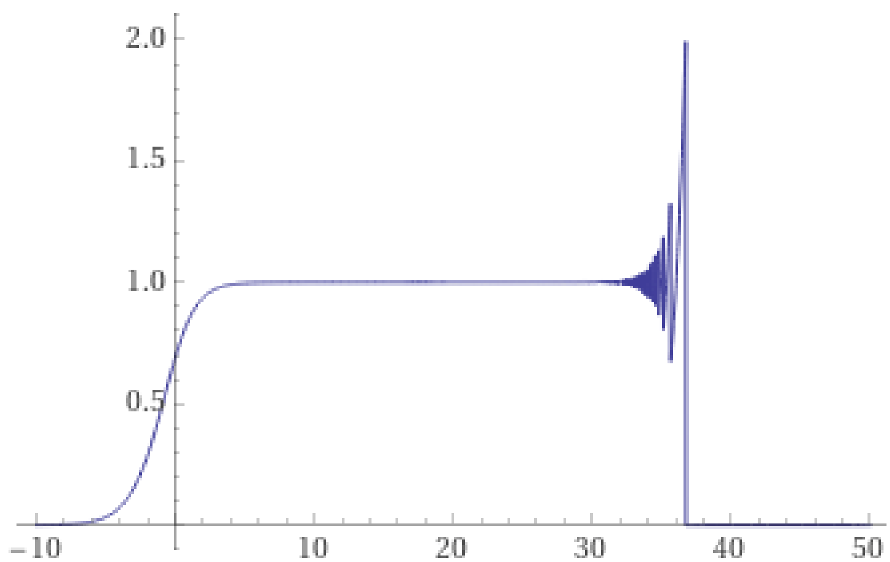
2 Zadanie 2.

2.1 Opis zadania

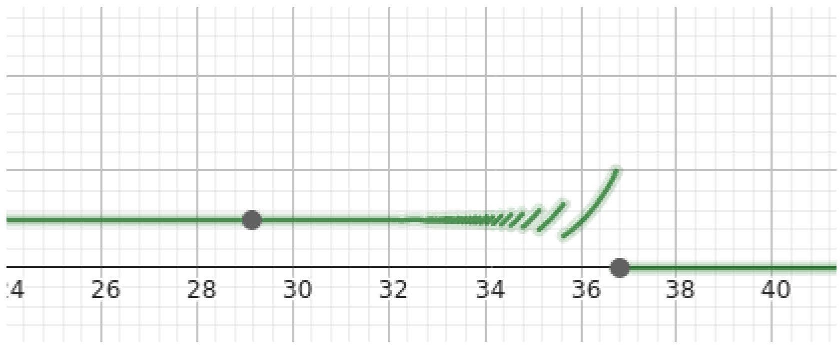
Zadanie polegało na wygenerowaniu wykresu funkcji $f(x) = e^x \cdot \ln(1 + e^{-x})$ za pomocą dwóch generatorów wykresów, policzeniu granicy tej funkcji oraz wytłumaczenia anomalii, która występuje dla $f(x); x > 30$.

2.2 Rozwiązanie

Wykresy zrobiłem za pomocą stron internetowych Wolfram Alpha oraz GeoGebra. Za pomocą pierwszej strony można było również obliczyć granicę funkcji podanej w treści zadania $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.



Rysunek 1: Wykres wykonany przy pomocy programu *Wolfram Alpha*



Rysunek 2: Wykres wykonany przy pomocy strony internetowej *GeoGebra*

2.3 Wnioski

Funkcja przyjmuje swoją właściwą granicę aż do około x równych 30, następnie występuje duży rozrzut w wynikach, po czym funkcja przyjmuje wartość 0. Wynika to z tego że $\ln(1 + e^{-x})$ z czasem przyjmie bardzo małe wartości, aż zbiegnie do 0, przy czym e^x będzie cały czas wzrastało do nieskończoności, co spowoduje duże błędy w obliczeniach.

3 Zadanie 3.

3.1 Opis zadania

Zadanie polegało na porównaniu rozwiązań równania $Ax = b$ metodą macierzy odwrotnej i eliminacji Gaussa na przykładzie macierzy Hilberta oraz macierzy losowej o danym uwarunkowaniu

3.2 Rozwiązanie

Rozwiązujemy to zadanie za pomocą funkcji podanych w plikach w treści zadania (*hilb.jl, matcond.jl*) oraz za pomocą wbudowanych funkcji w bibliotece LinearAlgebra (*rank, cond, norm, inv*).

3.3 Wyniki

Tabela wyników dla H_n

n	rank	cond	odwrotna	gauss
2	2	19.28147006790397	1.4043333874306803e-15	5.661048867003676e-16
4	4	15513.73873892924	0.0	4.137409622430382e-14
6	6	1.49510586424659e7	2.0163759404347654e-10	2.618913302311624e-10
8	8	1.5257575538072489e10	3.07748390309622e-7	6.124089555723088e-8
10	10	1.602441350036382e13	0.0002501493411824886	8.67039023709691e-5
12	11	1.760619121841585e16	0.258994120804705	0.13396208372085344
14	11	9.27636978936766e17	8.71499275104814	1.4554087127659643
16	12	7.063115212292111e17	29.84884207073541	54.15518954564602

Tabela wyników dla $R_{n,c}$

n	rank	cond	odwrotna	gauss
5	5	1.0000000000000009	2.1065000811460203e-16	2.808666774861361e-16
5	5	9.999999999999996	1.1102230246251565e-16	0.0
5	5	999.9999999999388	2.5735343294794633e-14	2.808157657865507e-14
5	5	1.00000000010255e7	1.1535892550970259e-10	1.213991179820676e-10
5	5	1.0000495317872567e12	1.506684696817894e-5	1.9146584386924495e-5
5	4	8.654041771480128e15	0.1523337336450794	0.138239003747278
10	10	1.000000000000001	2.603703785810335e-16	1.447553722489536e-16
10	10	10.0	2.673771110915334e-16	2.673771110915334e-16
10	10	999.9999999999543	5.425672529754491e-14	4.239499682833925e-14
10	10	9.999999998245347e6	3.636523324414098e-10	3.1358189424012933e-10
10	10	1.0000233759799033e12	7.117503416841618e-6	2.6165477803791687e-6
10	9	1.2299745451718668e16	0.04953396088796049	0.0764982917328673
20	20	1.0000000000000013	3.773125249565729e-16	7.418583024460241e-16
20	20	9.999999999999998	4.697175049207787e-16	7.65168414856311e-16
20	20	1000.0000000000982	4.089480552672362e-15	5.7348150952519595e-15
20	20	9.99999999837669e6	2.8789264299185086e-10	2.6641337903429127e-10
20	20	9.999681801252102e11	2.061348890091903e-5	1.870708436432581e-5
20	19	1.3562756683428138e16	1.944906929358623	1.920394482295872

3.4 Wnioski

Jak widzimy z wyników, to zadanie jest źle uwarunkowane dla macierzy Hilberta, ponieważ $cond(X)$ mocno wzrasta wraz z rozmiarem macierzy. Wyniki dla macierzy losowej zależą od wskaźniku uwarunkowania. Możemy to zauważyć patrząc na tabelkę wyników przy różnych wartościach.

4 Zadanie 4.

4.1 Opis zadania

Zadanie polegało na zbadaniu problemy obliczania miejsc zerowych dla wielomianu Wilkinsona w dwóch postaciach $P(x)$ (naturalna) oraz $p(x)$ (iloczynowa). Dla znalezionych pierwiastków należało obliczyć $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$. Następnie należało powtórzyć ten eksperyment, ale zamieniając współczynnik -210 na $-210 - 2^{-23}$.

4.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie polegało na użyciu wbudowanych funkcji z biblioteki *Polynomials*.

4.3 Wyniki

Tabela wyników:

k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	23323.616390897252	209.9999999994903	1.9162449405030202e-13
2	64613.550791712885	1.992294500206081e7	1.1426415369442111e-11
3	18851.098984644806	3.399614787152381e10	1.8315127192636282e-10
4	2.6359390809003003e6	7.207909014916186e12	1.6181327833209025e-8
5	2.3709842874839526e7	4.708779107999601e14	6.88670983350903e-7
6	1.2641076289358065e8	1.447785956223462e16	1.162839790502801e-5
7	5.2301629899144447e8	2.6383794772287792e17	0.00011291076623098917
8	1.798432141726085e9	3.264979342913837e18	0.0007205937181220534
9	5.121881552672067e9	3.0412334816143655e19	0.003273831140774064
10	1.4157542666785017e10	2.165482581506392e20	0.010734312221535092
11	3.586354765112257e10	1.4046825122251604e21	0.027997558569794023
12	8.510931555828575e10	6.394400607614738e21	0.051726041599520656
13	2.2136146301419052e11	3.552983049471623e22	0.08203197196995404
14	3.812024574451268e11	1.1299786430013654e23	0.09319943480685211
15	8.809029239560208e11	5.244377338187383e23	0.0814392993774824
16	1.6747434633806333e12	1.500480066694745e24	0.05759568132553383
17	3.3067827086376123e12	5.218152011502446e24	0.026861831476395537
18	6.166202940769282e12	1.4804765791206516e25	0.009515376609449788
19	1.406783619602919e13	4.173298070513992e25	0.001981084996206306
20	3.284992217648231e13	1.1006550477686024e26	0.00019609193560299332

Tabela wyników dla wielomianu ze zmienionym współczynnikiem:

k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	2168.9361669986724	209.99999999994802	1.9539925233402755e-14
2	29948.438957395843	1.992294499974274e7	1.4264145420384011e-12
3	239010.53520956426	3.3996147932075886e10	1.0508705017286957e-10
4	939293.8049425513	7.207909391699604e12	4.993385704921138e-9
5	7.44868039679552e6	4.708767550725818e14	3.4712703822492585e-8
6	1.4689332508961653e7	1.4478653098913558e16	5.852511414161654e-6
7	5.817946400915084e7	2.6354801821616304e17	0.00029553378320112955
8	1.3954205929609105e8	3.326720046603443e18	0.0072266540647767386
9	2.459617755654851e8	2.5378047144880865e19	0.082603056617506
10	2.291018560461982e9	2.74613634154538e20	0.6502965968281023
11	2.291018560461982e9	2.74613634154538e20	1.110092326920887
12	2.077690789102519e10	6.000655217408786e21	1.6650968123818863
13	2.077690789102519e10	6.000655217408786e21	2.0458176697496047
14	9.390730597798799e10	1.7140364111035264e23	2.5188313205122075
15	9.390730597798799e10	1.7140364111035264e23	2.7129043747424584
16	9.592356563898315e11	4.869020794781557e24	2.906000476898456
17	9.592356563898315e11	4.869020794781557e24	2.8254873227453055
18	5.050467401799687e12	7.495832651658972e25	2.4540193937292005
19	5.050467401799687e12	7.495832651658972e25	2.004328632592893
20	4.858653129933677e12	2.4158779429563425e26	0.8469088741049902

4.4 Wnioski

Przez ograniczenia zastosowanej arytmetyki widzimy, że nasze obliczenia są zaburzone i różnią się od rzeczywistych wyników. Również odjęcie małej liczby od współczynnika wielomianu pokazało nam, że zadanie jest źle uwarunkowane.

5 Zadanie 5.

Zadanie polegało na przeprowadzeniu eksperymentów z użyciem równiania rekurencyjnego (modelu logistycznego, modelu wzrostu populacji)

$$p_{n+1} := p_n + r \cdot p_n \cdot (1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1-p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

5.1 Rozwiązanie

Rozwiązanie polegało na implementacji wzoru w funkcji rekurencyjnej oraz uruchomienia jej dla podanych wartości w treści zadania.

5.2 Wyniki

Dla 40 iteracji i $p_0 = 0.01ir = 3$:

- *Float32*: 0.25860548
- *Float64*: 0.011611238029748606

Dla 40 iteracji i $p_0 = 0.01ir = 3$ wraz z obcięciem co 10 iteracji:

- *Float32*: 0.71587336

5.3 Wnioski

Patrząc na wyniki możemy stwierdzić, że błędy, wraz z dalszym liczeniem i dalszymi błędami, będą coraz bardziej się nawartwiać i modyfikować prawdziwy wynik naszych obliczeń.

6 Zadanie 6.

6.1 Opis zadania

Zadanie polega na przeprowadzeniu eksperymentów z równaniem rekurencyjnym $x_{n+1} := x_n^2 + c$, gdzie c jest pewną stałą. Te eksperymenty przeprowadzimy na danych podanych w treści zadania.

6.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie polega na zaimplementowaniu wzoru do funkcji, a następnie obliczenia jej wartości dla kolejnych wywołań.

6.3 Wyniki

Wyniki dla iteracji:

1.0	2.0	1.99999999999999	1.0	-1.0	0.75	0.25
-1.0	2.0	1.99999999999996	0.0	0.0	-0.4375	-0.9375
-1.0	2.0	1.9999999999998401	-1.0	-1.0	-0.80859375	-0.12109375
-1.0	2.0	1.9999999999993605	0.0	0.0	-0.3461761474609375	-0.9853363037109375
-1.0	2.0	1.999999999997442	-1.0	-1.0	-0.8801620749291033	-0.029112368589267135
-1.0	2.0	1.9999999999897682	0.0	0.0	-0.2253147218564956	-0.9991524699951226
-1.0	2.0	1.9999999999590727	-1.0	-1.0	-0.9492332761147301	-0.0016943417026455965
-1.0	2.0	1.999999999836291	0.0	0.0	-0.0989561875164966	-0.9999971292061947
-1.0	2.0	1.9999999993451638	-1.0	-1.0	-0.9902076729521999	-5.741579369278327e-6
-1.0	2.0	1.9999999973806553	0.0	0.0	-0.01948876442658909	-0.9999999999670343
-1.0	2.0	1.999999989522621	-1.0	-1.0	-0.999620188061125	-6.593148249578462e-11
-1.0	2.0	1.9999999580904841	0.0	0.0	-0.0007594796206411569	-1.0
-1.0	2.0	1.9999998323619383	-1.0	-1.0	-0.9999994231907058	0.0
-1.0	2.0	1.9999993294477814	0.0	0.0	-1.1536182557003727e-6	-1.0
-1.0	2.0	1.9999973177915749	-1.0	-1.0	-0.9999999999986692	0.0
-1.0	2.0	1.9999892711734937	0.0	0.0	-2.6616486792363503e-12	-1.0
-1.0	2.0	1.9999570848090826	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.999828341078044	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.9993133937789613	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.9972540465439481	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.9890237264361752	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.9562153843260486	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.82677862987391	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.3371201625639997	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	-0.21210967086482313	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	-1.9550094875256163	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.822062096315173	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.319910282828443	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	-0.2578368452837396	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	-1.9335201612141288	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.7385002138215109	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.0223829934574389	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	-0.9547330146890065	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	-1.0884848706628412	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	-0.8152006863380978	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	-1.3354478409938944	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	-0.21657906398474625	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	-1.953093509043491	0.0	0.0	0.0	-1.0
-1.0	2.0	1.8145742550678174	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
-1.0	2.0	1.2926797271549244	0.0	0.0	0.0	-1.0

6.4 Wnioski

Po wynikach możemy zauważyć, że kumulujące się błędy mogą mocno zaburzyć wynik obliczeń (przykład z $x_0 = 2.0$ oraz $x_0 = 1.99999999999999$). Możemy też zauważyć, że ograniczenia arytmetyki zmiennopozycyjnej wpływają na końcowe wyniki w przypadku dużej liczby iteracji (przykłady $x_0 = 0.75$ oraz $x_0 = 0.25$).