# Obliczenia Naukowe Sprawozdanie Lista 4

Mateusz Gancarz

8 grudnia 2022

## 1 Zadanie 1.

### 1.1 Opis problemu

Zadanie polegało na implementacji funkcji, która będzie obliczała ilorazy różnicowe bez użycia tablicy dwuwymiarowej.

### 1.2 Rozwiązanie

Iloraz różnicowy jest przedstawiony za pomocą wzoru:

$$f[x_1, x_2] = \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

Aby ulepszyć algorytm obliczania ilorazów różnicowych, możemy zastosować w nim tablicę jednowymiarową i uniknąć użycia tablicy dwuwymiarowej za pomocą zapamiętywania tylko jednej kolumny macierzy z wynikami:

$$\begin{bmatrix} f[x_0] & f[x_0,x_1] & \dots & f[x_0,\dots,x_{n-1}] & f[x_0,\dots,x_n] \\ f[x_1] & f[x_1,x_2] & \dots & f[x_1,\dots,x_n] & \\ \vdots & & \iddots & & \\ f[x_{n-1}] & f[x_{n-1},x_n] & & & \\ f[x_n] & & & & \end{bmatrix}$$

$$f[x_0] = f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

$$f[x_i, ..., x_{k+1}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_k - x_i}, itd.$$

Na początku funkcji tworzymy tablicę zawierająca wszystkie $f(x)$, a następnie uruchamiamy pętlę i w każdej iteracji będziemy uzupełniać wartości tablicy z obliczonymi ilorazami róznicowymi. Kod znajduje się w funkcji *ilorazyRoznicowe* w pliku *ex1_2_3_4.jl*

## 2 Zadanie 2.

### 2.1 Opis zadania

Zadanie polegało na zaimplementowaniu funkcji obliczającej wartośc wielomianu interpolacyjnego stopnia $n$ w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

## 2.2 Rozwiązanie

Wzór interpolacyjny Newtona ma postać:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j),$$

Za pomocą uogólnionych wzorów Hornera możemy ten wzór przedstawić jako:

$$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n]$$

$$w_k(x) = f[x_0, ..., x_k] + (x - x_k)w_{k+1},$$

$$N_n(x) = w_0(x)$$

gdzie $k < n$. Za pomocą tego wzoru możemy obliczyć pożądaną wartość w czasie liniowym. Wystarczy, że w funkcji wykorzystamy przedstawiony wzór i zwrócimy ostatnią wartość, którą dostaniemy po skończonej iteracji. Rozwiązanie znajduje się w funkcji *warNewton* w pliku *ex1_ 2_ 3_ 4.jl*

# 3 Zadanie 3.

## 3.1 Opis zadania

Zadanie polegało na zaimplementowaniu funkcji, która obliczy współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona znając jego ilorazy różnicowe $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], ..., c_n = f[x_0, ..., x_n]$ oraz węzły $x_0, x_1, ..., x_n$.

## 3.2 Rozwiązanie

Postacią naturalną wielomianu nazywamy jego przedstawienie w postaci

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Do rozwiązania przyda nam się fakt, że współczynnik $a_n$ występujący przy $x_n$ jest równy $c_n$. Wykorzystamy ten fakt licząc kolejne współczynniki zaczynając od najwyższych potęg i wraz z kolejnymi iteracjami możemy zaaktualizować współczynniki przy aktualnym $x_n$ i wyższych $x_{n+i}$ tak, aby ostatecznie uzyskać pożądaną postać naturalną. Rozwiązanie znajduje się w funkcji *naturalna* w pliku *ex1_ 2_ 3_ 4.jl*

# 4 Zadanie 4.

## 4.1 Opis zadania

Zadanie polegało na napisaniu funkcji, która zinterpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia $n$ w postaci Newtona, a następnie narysuje wielomian interpolacyjny oraz interpolowaną funkcję.

## 4.2 Rozwiązanie

Funkcja najpierw oblicza wartości interpolowanej funkcji w podanym przedziale $[a, b]$, a następnie za pomocą wcześniej napisanych funkcji *ilorazyRoznicowe* oraz *warNewton* i obliczonych wartości $f(x)$ liczy wartości interpolowanej funkcji oraz wielomianu interpolacyjnego dla zagęszczonego przedziału. Na sam koniec wrzucamy obliczone wartości do funkcji *PyPlot*, która wygeneruje nam z tych danych wykres.

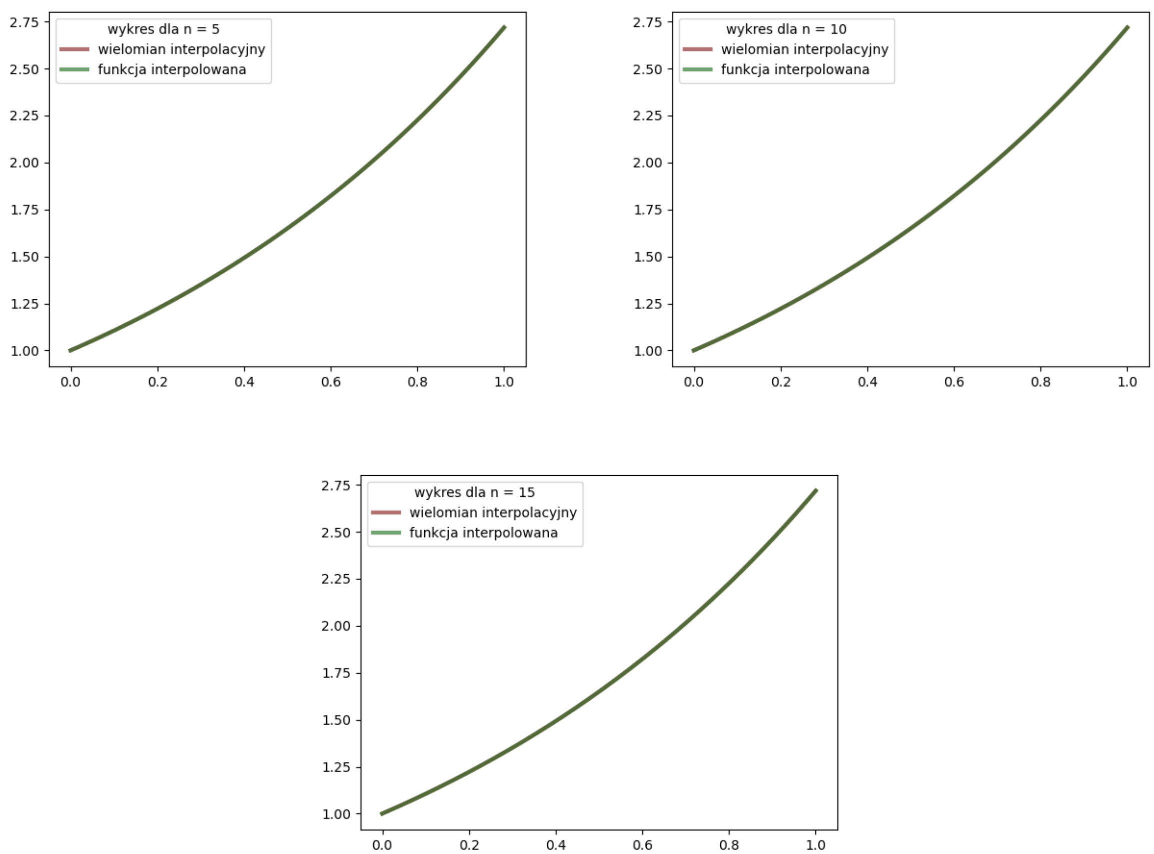
# 5 Zadanie 5.

## 5.1 Opis zadania

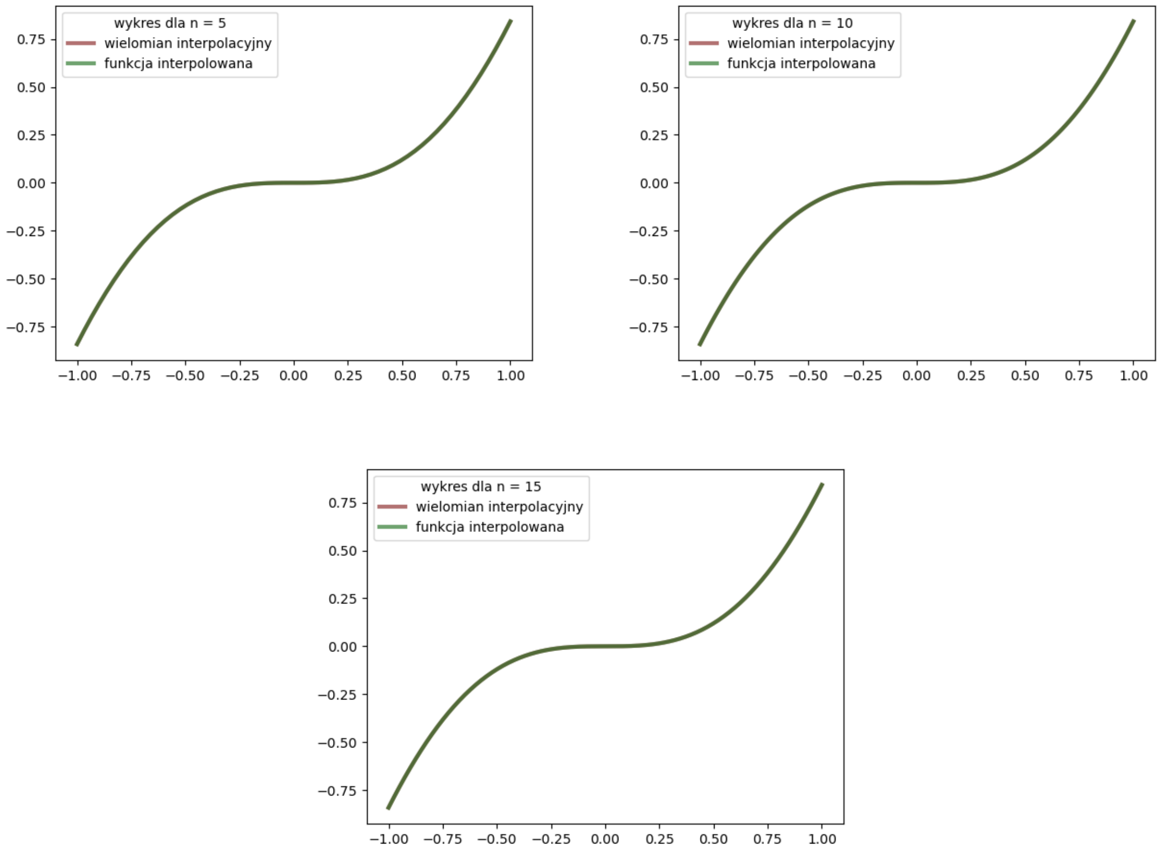
Zadanie polegało na przetestowaniu funkcji z zadania 4 na następujących przykładach:

- $e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15,$
- $x^2 sinx, [-1, 1], n = 5, 10, 15$

## 5.2 Wyniki




Rysunek 1: $f(x) = e^x$ w przedziale $[0; 1]$ dla $n = 5, 10, 15$




Rysunek 2: $f(x) = x^2 sinx$ w przedziale $[-1; 1]$ dla $n = 5, 10, 15$

### 5.3 Wnioski

Jak widać, interpolowana funkcja i wielomian interpolacyjny nakładają się idealnie. Wynika to z tego, że wybraliśmy zakres, w którym wartości funkcji zmieniają się niewiele, a ich pochodna nie zmienia znaku.

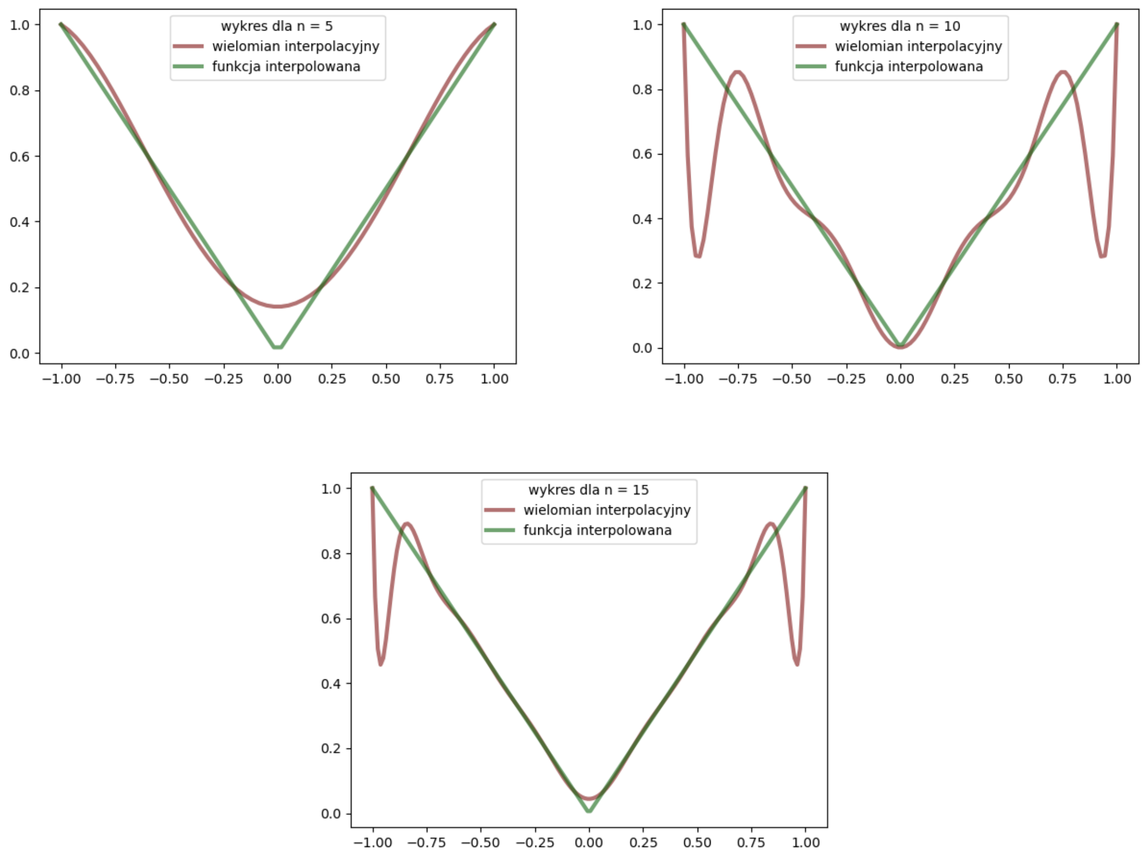
## 6 Zadanie 6.

### 6.1 Opis zadania

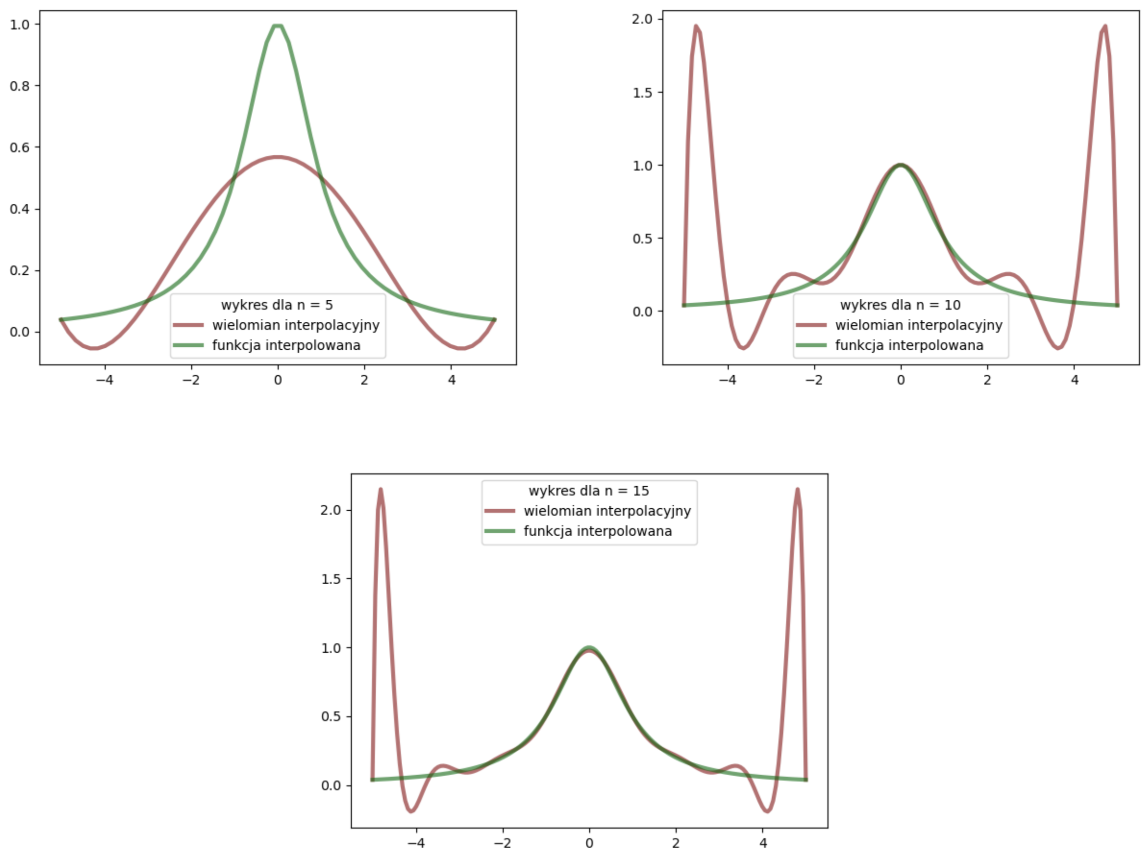
Zadanie polegało na przetestowaniu funkcji z zadania 4 na następujących przykładach ze zjawiskiem rozbieżności:

- $|x|, [-1, 1], n = 5, 10, 15,$
- $\frac{1}{1+x^2}, [-5, 5], n = 5, 10, 15$

## 6.2 Wyniki




Rysunek 3: $f(x) = |x|$ w przedziale $[-1; 1]$ dla $n = 5, 10, 15$




Rysunek 4: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w przedziale $[-5; 5]$ dla $n = 5, 10, 15$

### 6.3 Wnioski

Jak widać, wykresy interpolowanej funkcji i wielomianu interpolacyjnego dość mocno od siebie odbiegają. Wynika to z tego, że funkcje z pochodną o zmieniającym się znaku w podanym przedziale są gorzej interpolowane.