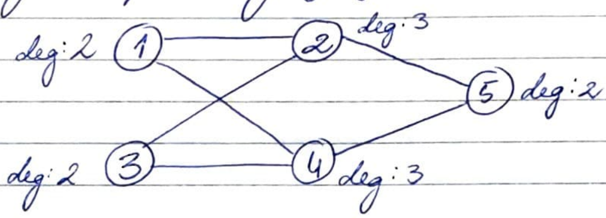
Magdalena Słonińska (322568)
Matematyka dyskretna L
Zad. 6, 8, 10, 11

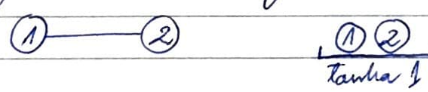
25 I 2022

Zad. 10. Chcemy znaleźć przykład grafu, który zilustruje, że założenia $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ w tw. Diraca nie może być zastąpiony słabszym założeniem $\deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$.
Spójrzmy na poniższy graf:



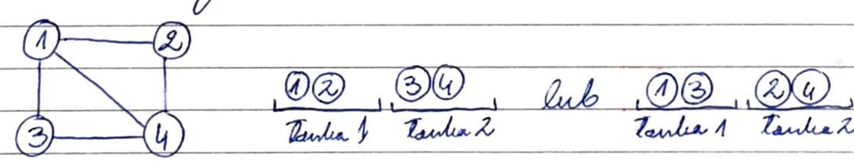
Nie da się w nim znaleźć cyklu Hamiltona, ponieważ np. dla wierzchołków 1 i 5 nie jest spełniony warunek $\deg(1) + \deg(5) \geq 5$. Czyli nie możemy zastąpić założenia w tw. Diraca słabszą wersją.

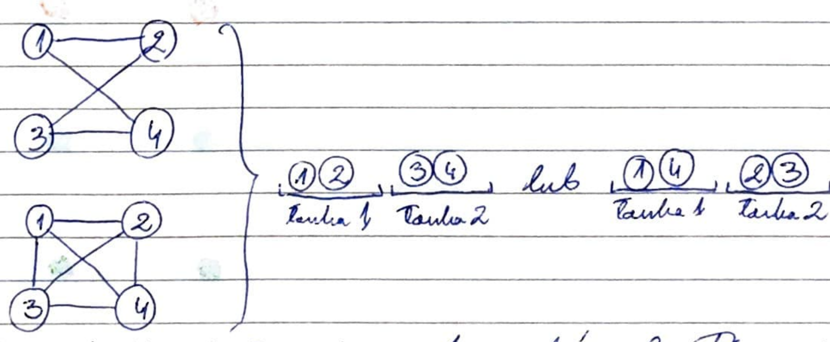
Zad. 8. Mamy $2n$ uczniów, każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokażemy, że można ich posadzić w ławkach 2-osobowych tak, żeby każdy siedział z przyjacielem (i dodatkowo dla $n > 1$ można to zrobić na co najmniej dwa sposoby).
Rozważmy graf, w którym wierzchołki reprezentują uczniów, a krawędzie między nimi reprezentują ich przyjaźń.
Wtedy dla $n=1$ mamy:



Dla $n=2$ mamy:

i wszystkie grafy izomorficzne z tymi przykładami





Natomiast dla $n \geq 3$ możemy skorzystać z tw. Diraca: wiemy, że dla każdego wierzchołka zachodzi $\deg(v) \geq n$, czyli każdy graf zbudowany w ten sposób jest hamiltonowski. Wtedy możemy wybrać co drugą krawędź z cyklu Hamiltona (zawsze będzie ich parzyście wiele) i potraktować je jako „sparowanie" uczniów w ławce. Takich podzbiorów krawędzi możemy wybrać na dwa sposoby.

Zad. 11. Graf $G = (V, E)$ jest spójny i nieskierowany; $|V| = n$. W G dla każdej pary wierzchołków niepołączonych krawędzią zachodzi $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

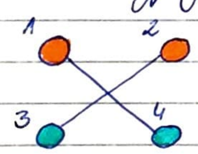
Skonstruujmy graf $H = (V + w, E + \{(1,w),(2,w),\ldots,(n,w)\})$, który jest grafem G z dodatkowym wierzchołkiem w (w jest połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem z V). W grafie H zachodzi zatem $\deg(u) + \deg(v) \geq n+1 \geq n$ dla każdej pary $u, v \in V$ niepołączonej krawędzią. Z tw. Orego H jest hamiltonowski. Weźmy jeden z cykli Hamiltona w H (nazwijmy go C) i rozważmy przypadki:

- $w \in C$, wtedy $C \setminus \{w\}$ jest ścieżką Hamiltona, która istnieje również w G
- $w \notin C$, wtedy G zawiera cykl Hamiltona (tym samym zawiera ścieżkę Hamiltona).

Zatem G spełniający te warunki zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona.

Zad. 6. Pokażemy jak dla dowolnego $n > 1$ skonstruować graf dwudzielny o $2n$ wierzchołkach i wskażemy uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny użyje dokładnie n kolorów.

Dla $n=2$ weźmy poniższy graf i sprawdźmy, że algorytm sekwencyjny wykorzysta użyje 2 kolorów:



1	4	1
2	3	1
3	2	2
4	1	2

Zastanówmy się teraz jak skonstruować kolejne takie grafy – załóżmy, że mamy już „dobry” graf o $2n$ wierzchołkach ($n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) pokolorowany na n kolorów. Dokładamy wierzch. $2n+1$ (łączymy go krawędzią ze wszystkimi wierzch. $2, 4, \ldots, 2n$) oraz $2n+2$ (analogicznie łączymy go krawędziami z wierzch. $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$) – do pokolorowania obu musimy teraz użyć $(n+1)$-ego koloru, ponieważ wszyscy spośród ich n sąsiadów są różnego koloru. Zachowana jest również dwudzielność grafu.