Analiza numeryczna (L) - Lista 14

Magdalena Słonińska

1 lutego 2022

Zadanie 2

Najpierw rozkładamy macierz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & 10 & 10 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

na iloczyn LU stosując odpowiednią kolejność obliczeń:

- pierwszy wiersz macierzy U
- pierwsza kolumna macierzy L
- ...
- $(n-1)$-szy wiersz macierzy U
- $(n-1)$-sza kolumna macierzy L
- n-ty wiersz macierz U

Korzystamy przy tym ze wzorów:

$$u_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \text{ dla } i \leqslant j$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}) \text{ dla } i > j$$

Niech

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{0} \dots = 1$
$u_{12} = a_{12} - \sum_{k=1}^{0} \dots = 0$
$u_{13} = a_{13} - \sum_{k=1}^{0} \dots = 2$
$u_{14} = a_{14} - \sum_{k=1}^{0} \dots = 2$

$l_{21} = \frac{1}{u_{11}}(a_{21} - \sum_{k=1}^{0} \dots) = \frac{-2}{1} = -2$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-2) \cdot 0 = 1$
...
$u_{44} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34}) = -1$

Otrzymujemy

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wtedy $det(A) = det(L)det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} \cdot u_{44} = -1$.

Żeby znaleźć macierz odwrotną A^{-1} wystarczy wyznaczyć L^{-1} oraz U^{-1} (na przykład za pomocą metody Gaussa-Jordana). Otrzymujemy

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 28 & 16 & 5 & 1 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 3 & 0 \\ 34 & 19 & 6 & 1 \\ -28 & -16 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$