Analiza numeryczna (L) - Lista 9

Magdalena Słonińska

21 grudnia 2021

Zadanie 3

Udowodnij, że wielomiany B_0^n, B_1^n, ..., B_n^n tworzą bazę przestrzeni $\prod_n$.

Wielomiany Bernsteina to wielomiany postaci $B_k^n(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Skorzystamy z własności $\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$, żeby je przekształcić. Wtedy

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \binom{n}{k}x^k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(-1)^i x^i$$

i dalej zmiana indeksów daje nam

$$B_k^n(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k}(-1)^{i-k}x^{j-k+k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}x^i$$

Teraz musimy wykazać, że dla $\sum_{j=0}^{n}\alpha_j B_j^n = 0$ zachodzi $\forall_{j\in\{0,1,\ldots,n\}}\alpha_j = 0$.

$$0 = \alpha_0 B_0^n(x) + \alpha_1 B_1^n(x) + \cdots + \alpha_n B_n^n(x)$$

$$0 = \alpha_0\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i}{0}x^i + \alpha_1\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{1}x^i + \cdots + \alpha_n\sum_{i=n}^{n}(-1)^{i-n}\binom{n}{i}\binom{i}{n}x^i$$

Skoro x^n, x^{n-1}, ..., x^1, x^0 są liniowo niezależne, to zachodzi

$$\beta_n x^n + \cdots + \beta_0 x^0 = 0 \Leftrightarrow \beta_n = \cdots = \beta_0 = 0$$

Widzimy, że współczynnik przy x^j ma postać $\beta_j = \sum_{i=0}^{j}(\alpha_i\binom{n}{j}\binom{j}{i})$. Łatwo zauważyć, że ten przy x^0 jest bardzo prosty, a mianowicie $\beta_0 = \alpha_0\binom{n}{0}\binom{0}{0} = \alpha_0$. Stąd $\alpha_0 = 0$.
Możemy tą informację wykorzystać przy wyznaczaniu kolejnych współczynników np. $\beta_1 = \alpha_0\binom{n}{0}\binom{0}{0} + \alpha_1\binom{n}{1}\binom{1}{1} = \alpha_1\binom{n}{1}\binom{1}{1}$. Ale z definicji dwumianu Newtona dla dowolnego n, k mamy $\binom{n}{k} \neq 0$. Stąd $\alpha_1 = 0$. Analogicznie postępujemy dla pozostałych współczynników aż do α_n.
Pokazaliśmy zatem, że $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Do tego wiadomo, że wielomianów Bernsteina stopnia n jest $n+1$, czyli tworzą one bazę przestrzeni liniowej $\prod_n$.