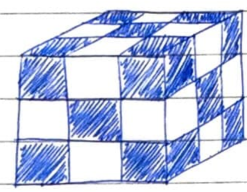
Magdalena Słonińska (322568) | 18 I 2022
Matematyka dyskretna L
Zad. 1, 2, 8, 11

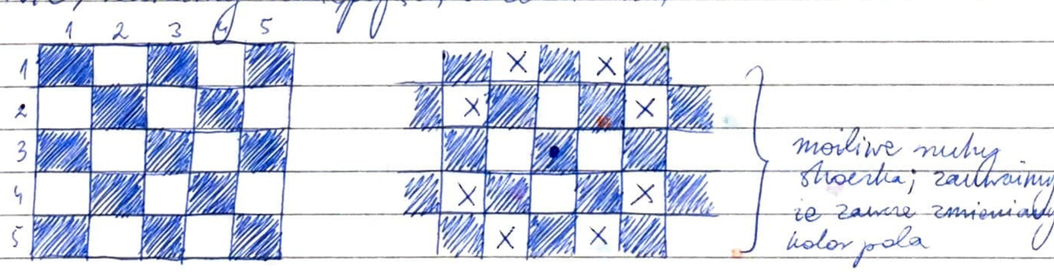
Zad. 2. Mamy kostkę $3\times3\times3$ – czy możliwe jest zjedzenie środkowego pola na końcu, jeśli zaczęliśmy od dowolnego rogu?
NIE, rozważmy takie kolorowanie (np. na biało i czarno), że kostki stykające się ścianką są różnego koloru:



Wtedy musimy zacząć od czarnej kostki (wszystkie narożniki są czarne) i skończyć na środkowej białej kostce, a dopuszczalne są tylko ruchy pomiędzy kostkami różnego koloru. Skoro mamy 14 pól czarnych, a tylko 13 białych, to niemożliwe jest zakończenie naszej sekwencji ruchów na jakiejkolwiek białej kostce (a w szczególności środkowej):

$$\underset{\text{zaczynamy w rogu}}{C} \rightarrow \underbrace{B \rightarrow C \rightarrow B}_{\text{taki ruch powtarzamy najw. 13 razy}} \rightarrow \ldots \rightarrow \underset{\text{ostatnia pozostała kostka jest czarna}}{C}$$

Zad. 1. Mamy szachownicę 5×5 – czy można obejść ją (odwiedzić każde pole dokładnie raz i wrócić na początek) ruchem konika szachowego?
NIE, rozważmy następującą szachownicę:



Załóżmy (bez straty ogólności), że startujemy z czarnego pola, czyli chcemy też skończyć na czarnym polu. Żeby odwiedzić każde pole, musimy wykonać 25 ruchów, ale niemożliwe jest skończenie na polu tego samego koloru, z którego zaczęliśmy po wykonaniu nieparzystej liczby ruchów. Zatem takiej szachownicy 5×5 nie da się obejść ruchem skoczka.

Zad. 8. Pokażemy, że graf $G=(V,E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.
Na początku niech P będzie najdłuższą ścieżką w grafie G (lub dowolną z nich, jeśli istnieje kilka najdłuższych).

Wtedy $P = v_0 v_1 \dots v_k$. Przyjrzyjmy się wierzchołkowi końcowemu v_k. Wiemy, że ma on dokładnie trzech sąsiadów (oznaczmy ich a, b, c). Wszyscy sąsiedzi a, b, c muszą leżeć na P, ponieważ gdyby dowolny z nich nie znajdował się w P, to moglibyśmy przedłużyć P (a z założenia jest to ścieżka najdłuższa). Rozważmy teraz 3 ścieżki:

1) $v_k \to a$

2) $v_k \to \underbrace{b \to \dots \to a}_{\text{taką ścieżkę zawsze możemy zbudować, bo zarówno } a, b \in P}$

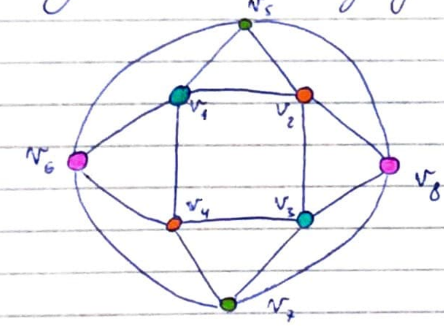
3) $v_k \to \underbrace{c \to \dots \to a}_{\text{analogicznie jak wyżej}}$

Z zas. szuf. Dirichleta przynajmniej dwie z tych trzech ścieżek mają długość tej samej parzystości.

Skoro mamy dwie ścieżki łączące v_k i a o długościach, które mają taką samą parzystość, to możemy je połączyć i otrzymać cykl o parzystej długości.

Zad. 4. ~~A, B – rozłączne zbiory osób. Przypuśćmy, że każda osoba $a \in A$ chce poślubić naraz co najmniej $n_0 \geq 1$ osób z B. Chcemy znaleźć warunek konieczny i wystarczający, aby problem został rozwiązanie.~~

Zad. 11. Pokolorujmy wierzchołkowo graf z wykładu:



wykorzystaliśmy tu 4 kolory