Analiza numeryczna (L) - Lista 12

Magdalena Słonińska

18 stycznia 2022

Zadanie 2

Udowodnij, że kwadratura postaci $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ma rząd $\geqslant n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

Musimy pokazać dwie zależności:

1. Kwadratura Q_n (zadana powyższym wzorem) ma rząd $\geqslant n+1 \Rightarrow Q_n$ jest kwadraturą intepolacyjną.
   Dowód: Załózmy, że Q_n jest rzędu co najmniej $n+1$. Rozważmy dowolną funkcję $f(x)$ oraz wielomian interpolujący węzły jej kwadratury Q_n:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x),\ \lambda_k(x) = \prod_{j=0 \wedge j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

   Łatwo zauważyć, że dla $j = k$ mamy $\lambda_k(x_j) = 1$, a w przeciwnym wypadku $\lambda_k(x_j) = 0$. Stopień wielomianu λ_k jest wystarczająco niski, żeby kwadratura rzędu $\geqslant n+1$ była dokładna (bez reszty). Wobec tego możemy zapisać, że

$$Q_n(\lambda_k) = \int_a^b \lambda_k(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\lambda_k(x_i) =$$
$$= A_0 \cdot 0 + \cdots + A_{k-1} \cdot 0 + A_k \cdot 1 + A_{k+1} \cdot 0 + \cdots + A_n \cdot 0 = A_k$$

   Wróćmy teraz do naszej funkcji $f(x)$:

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \lambda_k(x)dx \cdot f(x_k)$$

   czyli Q_n jest kwadraturą interpolacyjną.

2. Kwadratura Q_n jest interpolacyjna $\Rightarrow$ kwadratura Q_n ma rząd $\geqslant n+1$.
   Dowód: Weźmy dowolny wielomian w stopnia n. Wtedy $I(w) = \int_a^b w(x)dx$, ale skoro kwadratura Q_n jest interpolacyjna, to zachodzi również

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b L_n(x)dx$$

Z jednoznaczności interpolacji Lagrange'a wiemy, że jest dokładnie jeden wielomian stopnia n interpolujący te $n+1$ punktów, czyli $w(x) = L_n(x)$. Zatem

$$\int_a^b w(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx$$

Z kolei błąd kwadratury Q_n wynosi wtedy

$$R_n(w) = I(w) - \int_a^b L_n(x)dx = 0$$

czyli kwadratura jest dokładna dla wielomianu n-tego stopnia, co znaczy, że ona sama jest rzędu $\geqslant n+1$.

Zadanie 7

Niech A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ oznaczają współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa. Udowodnij, że $A_k/(b-a)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ są liczbami wymiernymi.

Najpierw zapiszmy to, co wiemy o współczynnikach

$$A_k = h \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt,\ t = \frac{x-a}{h},\ h = \frac{b-a}{n}$$

Wtedy

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{h}{b-a} \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt$$

Od razu widzimy, że zarówno $\frac{1}{n}$ jak i $\prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} \frac{1}{k-j}$ są liczbami wymiernymi (po przeliczeniu tego iloczynu otrzymamy coś postaci $\frac{1}{a}, a \in \mathbb{Z}$). Pozostaje nam sprawdzić czy całka $\int_0^n \prod_{j=0 \wedge j \neq k}^{n} (t-j)dt$ też jest liczbą wymierną. Zapiszmy to w rozwiniętej postaci:

$$\int_0^n (t(t-1)(t-2)\ldots(t-k-1)(t-k+1)\ldots(t-n))dt =$$

$$= \int_0^n (a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_0)dt =$$

$$= \int_0^n a_{n-1}t^{n-1}dt + \cdots + \int_0^n a_1 t^1 + \int_0^n a_0 =$$

$$= -a_{n-1}\frac{n^n}{n} - a_{n-2}\frac{n^{n-1}}{n-1} - \cdots - a_0\frac{n}{1} + C$$

Skoro każdy ze składników sumy jest wymierny (bo $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ $a_i \in \mathbb{Z}$), to wyrażenie $\frac{A_k}{b-a}$ jest liczbą wymierną.