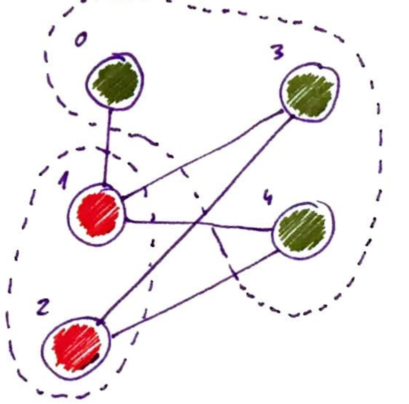
Magdalena Słonińska (322568)
Matematyka dyskretna L
14 XII 2021
Lista 9 - zad. 1, 2, 3, 6, 8, 9

1. Chcemy sprawdzić czy dany graf jest dwudzielny, czyli jego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory takie, że krawędzie nie łączą wierzchołków z tego samego zbioru.
Żeby to zrobić będziemy kolorować wierzchołki grafu na zielono i czerwono (wierzchołki nieodwiedzone mają kolor szary/neutralny). ~~i jeśli~~ Jeśli graf da się pokolorować tak, żeby wierzchołek jakiegoś koloru nie miał żadnego sąsiada tego koloru to możemy powiedzieć, że graf jest dwudzielny.
Zapis algorytmu:

Oznaczenia:
G - graf, który badamy (n wierzch. m kraw.)
S - stos (dla algorytmu DFS)
kolor$[i]$ - kolor wierzchołka i (-1 to czerwony, 1 to zielony, 0 to szary)

1) Inicjalizacja stosu S, tablicy kolor itd.
2) Dla i-tego wierzch. ($i = 0, 1, \dots, n-1$) wykonaj:
- Jeśli kolor$[i] = 0$ wykonaj:
  - ↳ kolor$[i] \leftarrow 1$
  - ↳ dodaj wierzchołek i na stos S
  - ↳ Dopóki S jest niepusty wykonaj:
    - $v \leftarrow S$.top()
    - usuń element z wierzchu S
    - Dla każdego u - sąsiad v wykonaj:
      - ↳ Jeśli kolor$[u]$ = kolor$[v]$:
        - zwróć „NIE" i zakończ
      - ↳ Jeśli kolor$[u] = 0$:
        - kolor$[u] \leftarrow (-1)$ kolor$[v]$
        - dodaj u na stos S

3) Zwróć „TAK" i zakończ.



W powyższym algorytmie wykorzystujemy DFS do przejścia wszystkich wierzchołków grafu. Skoro mamy (lekko zmodyfikowaną) tablicę odwiedzonych, to możemy zagwarantować, że każdy wierzchołek i każdą krawędź przejdziemy maksymalnie 2 razy. Stąd złożoność czasowa algorytmu to $O(n+m)$.

9. Mamy grafy:
- $G = (V, E)$
- $\overline{G} = (V, E')$, gdzie $\overline{G}$ jest dopełnieniem G i $\{u,v\} \in E' \Leftrightarrow \{u,v\} \notin E$

Pokażemy, że przynajmniej jeden z nich jest spójny.
Rozważmy dwa przypadki:

1° Graf G jest spójny, wtedy oczywiście to zachodzi.

2° Graf G nie jest spójny, chcemy pokazać spójność grafu $\overline{G}$:

Skoro G nie jest spójny, to istnieją przynajmniej dwie niepuste spójne składowe - musimy przeanalizować dwie sytuacje:

~~a) Weźmy wierzchołki u, v znajdujące się w tej samej spójnej składowej. Pokażemy, że w grafie $\bar{G}$ nie zostaną rozspójnione. Wiemy, że w grafie G istnieje ścieżka~~

~~$u \to w_1 \to w_2 \to \dots \to w_n \to v$~~

~~której nie ma w $\bar{G}$~~

a) Weźmy wierzchołki u, v znajdujące się w tej samej spójnej składowej oraz wierzchołek w znajdujący się w innej. Wiemy, że istnieje ścieżka $u \to w_1 \to w_2 \to \dots \to w_n \to v$ oraz $\{u,w\} \notin E$, $\{v,w\} \notin E$. Wtedy z def. dopełnienia grafu $\bar{G}$ istnieje ścieżka $u \to w \to v$, czyli połączenie wierzchołków w G zostaje zachowane w $\bar{G}$.

b) Weźmy teraz wierzchołki u, v znajdujące się w różnych spójnych składowych. Wtedy na pewno nie istnieje między nimi krawędź w grafie G, ale skoro $\{u,v\} \notin E$, to $\{u,v\} \in E'$.

Zatem wierzchołki połączone w G pozostają połączone w $\bar{G}$, a niepołączone w G zostają połączone w jednej spójnej składowej w $\bar{G}$. Wtedy $\bar{G}$ jest grafem spójnym, bo między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje ścieżka.

Pokazaliśmy, że w takim razie przynajmniej jeden z $G, \bar{G}$ jest spójny.

3. Pokażemy, że graf G jest drzewem wtw. gdy dla dowolnych $u, v \in G$ istnieje dokładnie jedna ścieżka łącząca te wierzchołki. ~~Musimy udowodnić, że zachodzą dwie implikacje:~~

~~„⇒": Załóżmy, że G jest drzewem. Z definicji drzewa wiemy, że G jest grafem spójnym. Wystarczy pokazać, że dowolne wierzchołki u, v łączy jednocześnie przynajmniej jedna (a) i co najwyżej jedna (b) ścieżka.~~

~~a)~~

„⇒": Załóżmy, że G jest drzewem. Z definicji drzewa wiemy, że G jest grafem spójnym, czyli dla dowolnych wierzchołków u, v istnieje przynajmniej jedna ścieżka. Pokażemy nie wprost, że istnieje co najwyżej jedna taka ścieżka. Załóżmy, że istnieją dwie różne ścieżki z u do v:

$$u \to w_1 \to \dots \to \overbrace{w_i \to \dots \to w_j}^{P} \to \dots \to w_n \to v$$

$$P'$$

P, P' - ścieżki

Jak widać na rysunku w pewnym momencie druga ścieżka musi „odbić" od pierwszej i potem z powrotem „wrócić", czyli musi istnieć w G jakiś cykl. Ale skoro G jest drzewem, to nie ma w nim cykli - sprzeczność!

Zatem jeśli G jest drzewem, to istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v.

„$\Leftarrow$": Załóżmy, że w grafie G istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v. Pokażemy, że w takim razie G jest acykliczny, wykorzystamy dowód nie wprost. Załóżmy, że w grafie G jest cykl. Ale wtedy możemy wybrać taką parę wierzchołków u,v, że łączą je dwie ścieżki (chociażby w cyklu). Jednak z zał. każdą parę wierzchołków w G łączy tylko jedna ścieżka - sprzeczność! Zatem G jest spójnym grafem acyklicznym, G jest drzewem.

Pokazaliśmy, że G to drzewo $\Leftrightarrow$ każde wierzchołki $u,v \in G$ łączy dokładnie jedna ścieżka.

2. t_i - liczba wierzchołków stopnia i w drzewie

Ile jest liści w drzewie (wzór na t_1)?

Znamy kilka sposobów na wyznaczenie liczby krawędzi w n-wierzchołkowym drzewie np.

↳ z własności drzew mamy $|E| = n-1 = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1$

↳ z lematu o uściskach dłoni mamy $2|E| = \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = \sum_{i=1}^{n} i t_i \Leftrightarrow |E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i$

Zestawiamy te wzory i otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i - 1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i - 2\sum_{i=1}^{n} t_i + 2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i - \sum_{i=1}^{n} 2t_i + 2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (i-2) + 2 = 0$$

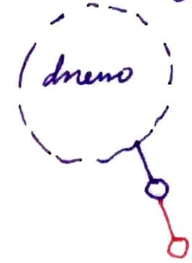
$$t_1(1-2) + t_2(2-2) + \sum_{i=3}^{n} t_i (i-2) + 2 = 0$$

$$-t_1 + \sum_{i=3}^{n} t_i (i-2) + 2 = 0$$

$$t_1 = \sum_{i=3}^{n} t_i (i-2) + 2$$

Dlaczego liczba liści nie zależy od t_2?

Spróbujmy zmodyfikować t_2 w pewnym drzewie i sprawdźmy czy taka modyfikacja wpłynie na t_1. Skoro chcemy utworzyć więcej wierzchołków stopnia 2, to musimy dodać krawędzie do istniejących liści np.



$t_2 \leftarrow t_2 + 1$
$t_1 \leftarrow t_1$

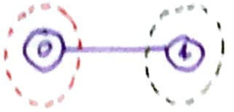
$t_2 \leftarrow t_2 - 1$
$t_1 \leftarrow t_1$

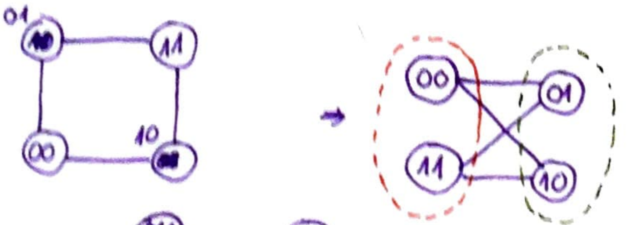
Niezależnie od tego jaką modyfikację t_2 próbujemy wprowadzić liczba liści nie zmienia się.

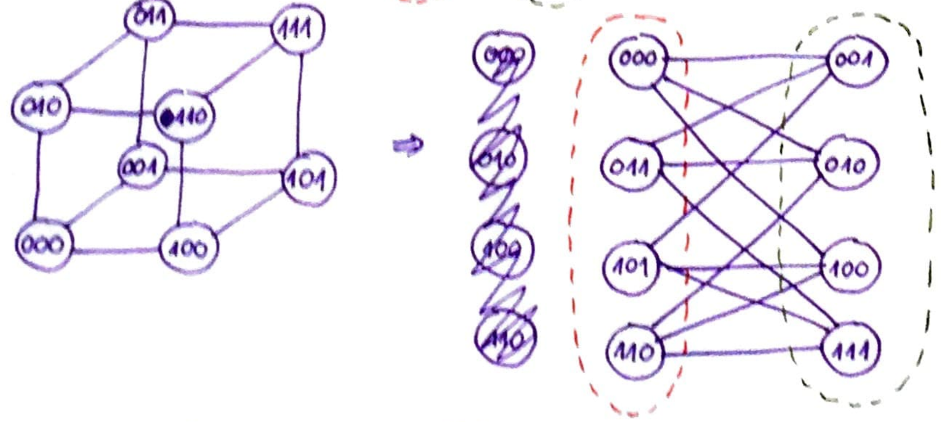
8. Pokażemy, że w spójnym grafie G każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

Przeprowadzimy dowód nie wprost: załóżmy, że są takie dwie najdłuższe ścieżki, które nie mają wspólnego wierzchołka - nazwijmy je D_1 i D_2. Obie mają maksymalną w grafie długość k, więc $D_1 = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, $D_2 = (u_0, u_1, \dots, u_k)$.
Graf G jest spójny, więc dla dowolnie wybranych wierzchołków v_i, u_j (odpowiednio z D_1 i D_2) istnieje ścieżka je łącząca - $D' = (v_i, x_0, \dots, x_p, u_j)$, $x_i \notin D_1 \cup D_2$.
To pozwala nam skonstruować ścieżkę D'' będącą rozszerzeniem D', czyli
$D'' = (v_0, \dots, v_i, x_0, \dots, x_p, u_j, \dots, u_0)$ przy założeniu, że $i, j \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ (co zawsze możemy założyć, bo numeracja nie jest istotna).
Ale wtedy długość D'' wynosi ~~przy~~ przynajmniej $k+1$, ale założyliśmy, że najdłuższa ścieżka ma długość k - sprzeczność!
Zatem każde dwie najdłuższe ścieżki w G mają wspólny wierzchołek.

6. Q_k - graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi 0-1. Dwa wierzchołki są sąsiednie wtw. gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Pokażemy, że Q_k jest grafem dwudzielnym.
Spójrzmy na przykłady dla $k = 1, 2, 3$:

$Q_1 =$ 

$Q_2 =$ 

$Q_3 =$ 

Widzimy, że dany wierzchołek łączy się tylko i wyłącznie z wierzchołkami o innej „parzystości", czyli liczba jedynek w tych dwóch ciągach ma różną parzystość. Natomiast nigdy nie będzie istniała krawędź między wierzchołkami o takiej samej „parzystości", ponieważ wtedy ciągi współrzędnych musiałyby różnić się na przynajmniej dwóch miejscach, co jest niezgodne z definicją Q_k.
Graf dwudzielny to taki graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory takie, że krawędzie nie łączą wierzchołków z tego samego zbioru - w przypadku Q_k taki podział jest dość intuicyjny (zbiór wierzch. o parzystości 0 i 1). Zatem Q_k jest grafem dwudzielnym.