



Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología
FACYT
Departamento de Matemática



Revisión sobre la existencia de medidas invariantes para
transformaciones monótonas a trozos.

Bachiller: Br. Magdiel Márquez.
Tutor: Dr. Luis-Angel Rodríguez.

Valencia, 08 de agosto 2012

Índice general

0.1. Introduccion	3
1. Sistemas Dinámicos	5
1.1. Ejemplo ilustrativo	6
1.2. La evolución de las densidades	10
2. Operadores Especiales	15
2.1. Operador de Markov	15
2.2. El operador Perron-Frobenius	21
2.3. El operador de Koopman	30
3. Estudio el Caos con Densidades	34
3.1. Medidas Invariantes	34
3.2. Transformaciones Ergódicas	36
3.3. Transformaciones Mezclantes y Exactas	40
3.4. Taxonomía de las Transformaciones	41
4. Resultados Preliminares	48
4.1. Funciones de Variación Acotada	48
4.2. Principio de Selección de Helly	53
4.3. Teorema de Mazur	54
4.4. Teorema de Kakutani-Yosida	56
5. Existencia de Medidas Invariantes	60
A. Sistema dinámicos discretos	72
B. Teoría de la Medida	75
B.1. Espacios Medibles y Medidas	75
B.1.1. Espacios Medible	76
B.1.2. Espacios de Media	79
B.2. Integración	80
B.3. Derivación	83
B.4. Espacios L^p	84
B.5. Convergencia de sucesiones de funciones	86

0.1. Introduccion

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Una medida se llama invariante bajo una transformación $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ si $\mu(A) = \mu(S^{-1}(A))$ para $A \in \mathcal{A}$. Se puede observar que para una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no existe una medida invariante absolutamente continua, si la gráfica de f es muy plana. Por ejemplo: para la transformación $f(x) = rx \pmod{1}$ con $|r| < 1$ una medida invariante no existe.

En 1957 S. Ulam propuso el problema de la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas para funciones definidas por funciones suficientemente simples¹ donde el gráfico no corte la línea $y = x$ con una pendiente de valor absoluto menor que 1. La respuesta literal de esta pregunta es negativa. Se puede ilustrar, que para la siguiente transformación

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq \frac{5}{12} \\ (2 - 2x)/7 & \frac{5}{12} < x \leq 1 \end{cases}$$

No existe una medida invariante absolutamente continua. Note que esta transformación cruza la línea $y = x$ en el punto $x = \frac{1}{3}$ con pendiente $f'(x) = -2$.

Muchos resultados en relación de la existencia de medidas absolutamente continuas para ciertas clases de transformaciones del intervalo unitario en si mismo han sido proporcionadas (A. Rényi, Parry, Krzyzewski/Szlenk). Sin embargo, se puede señalar que el mejor resultado en esta dirección fue obtenido por A. Lasota ya J. Yorke

Teorema 0.1.1. *Sea $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función a trozos de clases C^2 que satisfaga la condición*

$$\inf_{x \in [0, 1]} \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| > 1$$

Entonces existe una medida invariante absolutamente continua sobre f

La metodología usada por Lasota/Yorke en la demostración difiere de los trabajos antes mencionados. En primer lugar se uso el hecho de que operador de Perron-Frobenius correspondiente a la transformación tiene la propiedad de contracción en la variación de la función. Luego prueba que cierta sucesión es relativamente compacta, así se cumplen en la hipótesis del teorema de Mazur.

Esto garantiza, que el promedio de las orbitas convergen fuertemente a una función límite, por medio al uso de teorema de Kakutani-Yosida. Repitiendo este proceso se consigue una familia de funciones que acotan a la variación del operador de Perron-Frobenius. Para finalizar usando el principio de selección de Helly se puede conseguir una sucesión de funciones, que convergen a una función de variación finita.

El objetivo del presente trabajo es aclarar los detalles de la presente demostración con lo cual se presentará en el primer capítulo una introducción intuitiva a los sistemas dinámicos, caos y el operador de Perron-Frobenius. En el siguiente capítulo se analizará en detalle el operador de Perron-Frobenius. En el tercer

¹Ejemplo: funciones lineales a trozos o poligonales

capítulo, se presenta la noción de ergodicidad junto con otros niveles de irregularidades. El cuarto capítulo está dedicado a estudio de los teoremas de Mazur, Kakutani-Yosida, así también como del Principio de Helly.

Finalmente, se presenta el quinto capítulo se probará el teorema de Lasota-Yorke junto con un contra ejemplo. Los apéndices expuestos tratan de unas nociones básicas de sistemas dinámicos y de teoría de la medida necesaria para el desarrollo de los temas tratados.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos

Los astros han sido del interés humano desde hace varios siglos. No obstante, La presencia de ecuaciones diferenciales no-lineales ha dificultado el estudio de los mismos. La dinámica, el movimiento, de 3 cuerpos celestes originado por la interacción de gravitatoria de los mismos; se le conoce como *el problema de los 3 cuerpos*. A finales del siglo XIX, Henri Poincaré (1854-1912) desarrolló el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales estudiando el problema de los 3 cuerpos. De esta forma surgen los Sistemas Dinámicos.

El objetivo de los sistemas dinámicos es el estudio del comportamiento asintótico o a largo plazo de un sistema que depende del tiempo. Por ejemplo, si consideramos la cantidad de población de una especie su comportamiento asintótico nos proporciona información útil sobre la supervivencia o extinción de dicha especie. Como puede advertirse, los Sistemas Dinámicos tiene asida la idea de movimiento o cambio con respecto al tiempo.

Esta idea se representa con la noción de grupo de acción; la cual será presentada en el apéndice A. Los grupos de acción aunque son amplios e interesante teóricamente hablando, aunque no responden al objetivo fundamental de los sistemas dinámicos anteriormente discutidos. Como consecuencia, se requiere tener cierta estructura sobre el conjunto \mathcal{X} , así como restricciones sobre S . Existe tres ramas principales:

Dinámica Diferencial \mathcal{X} una variedad diferenciable y S un difeomorfismo.

Dinámica Topológica \mathcal{X} un espacio topológico y S un homeomorfismo.

Teoría Ergódica \mathcal{X} un espacio de medida y una medida invariante sobre S .

El desarrollo de la investigación se fundamentará en el estudio de algunos elementos de la teoría ergódica. Especialmente, aquellos aspectos estrechamente vinculados al estudio de propiedades estadísticas ¹ de los sistemas dinámicos.

¹aleatorio o estocástico

Sin embargo, se comentó que los sistemas dinámicos surgen el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales; área de investigación propiamente determinística. Entonces, ¿Cómo se fundamentará la investigación en algunos elementos de teoría ergódica vinculados con propiedades estocásticas?. La conexión entre sistemas determinísticos y estocásticos se analizará en la siguiente sección mediante un ejemplo.

1.1. Ejemplo ilustrativo

La tasa de crecimiento en la población de una especie es proporcional a la población real en cualquier instante dado. Si x representa la cantidad de especímenes en cualquier instante dado y t las unidades de tiempo, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

representa la dinámica de una población. Donde α es una constante; si $\alpha > 0$ se tiene una ley de crecimiento natural y si $\alpha < 0$ se tiene una ley de decrecimiento natural.

Sin embargo, al comparar dicho modelo con la evidencia experimental se comprobó que no se ajustaba a la realidad. Ninguna población puede crecer indefinidamente a una tasa constante; ya sea por limitaciones de espacio, recursos, entre otros. Por lo tanto, es realista suponer que el medio solo puede sostener de manera estable un máximo α de población, de modo que si

$x(t) > \alpha$, la tasa sería negativa y la población decrecería acercándose a α .

$x(t) = \alpha$, la tasa sería nula y, por lo tanto, la población constante.

$x(t) < \alpha$, la tasa sería positiva, creciendo entonces la población, aunque más lentamente cuando más próxima esté del valor de α .

De lo dicho previamente se puede reformular la ecuación que representa la dinámica de una población, la ecuación logística, como

$$x' = \alpha x(1 - x)^2$$

Por consiguiente, podemos considerar la siguiente definición

Definición 1.1.1 (Familia Logística). *Es la transformación definida como:*

$$S(x) = \alpha x(1 - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

Se supondrá $\alpha = 4$. La transformación está definida en $[0, 1]$ en sí misma, dicho de otro modo, el *estado* o *fase del espacio* es $[0, 1]$. La gráfica de la transformación se muestra en la siguiente Figura 1.1

²donde x' representa clásicamente la derivada de x con respecto del tiempo

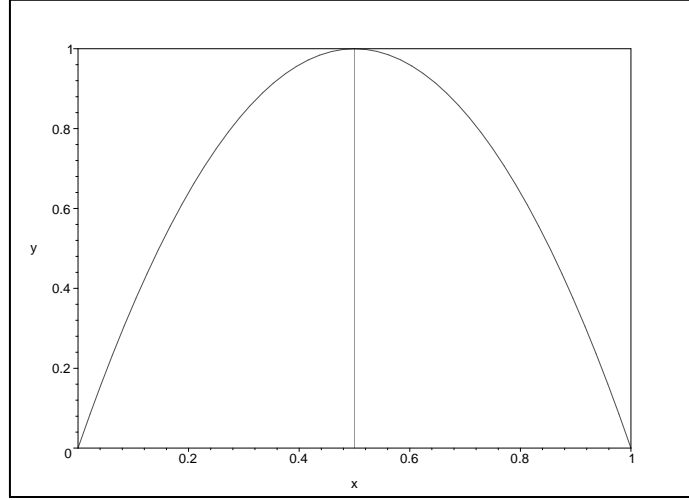


Figura 1.1: Gráfica $S(x) = 4x(1-x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Se observa como la población crece y decrece alrededor de α

Al examinar la población de una especie, se puede considerar la variable t como las generaciones de la misma. La cantidad de población de la siguiente generación dependerá de la cantidad de población actual mediante la transformación S . Debido a lo anterior, el tiempo se considera discreto sobre las generaciones de la especie. Por lo tanto, para el estudio de la dinámica de la población se considera mediante la siguiente definición.

Definición 1.1.2. (*Trayectoria³ de x^0*) Es la sucesión de estado definidos como

$$x^0, S(x^0), \quad S(S(x^0)) = S^2(x^0), \quad S(S(S(x^0))) = S^3(x^0), \dots \quad (1.2)$$

donde $x^0 \in [0, 1]$ en los tiempos $1, 2, 3, \dots$

Al no existir población entonces la misma no podría variar, así se esperaría que al elegir $x^0 = 0$ la trayectoria no difieran de 0. La primera parte de la Figura 1.2 se comprueba dicha observación con la grafica de la trayectoria en forma de serie de tiempo. Por otra parte, al elegir $x^1 = \frac{3}{4}$ la población se mantiene con el paso del tiempo, como se muestra en la ultima Figura 1.2.

Ahora en ambos puntos 0 y $\frac{3}{4}$ son interesantes para la función logística. En la Figura 1.3 se muestra la función logística y la identidad. Ambas funciones se cortan en 0 y $\frac{3}{4}$; cuando se cortan la orbitas de estos puntos no varían. Esto motiva la siguiente definición

Definición 1.1.3 (Puntos fijos). Son los puntos x que cumple

$$T(x) = x \quad (1.3)$$

³tambien llamada orbita de x^0

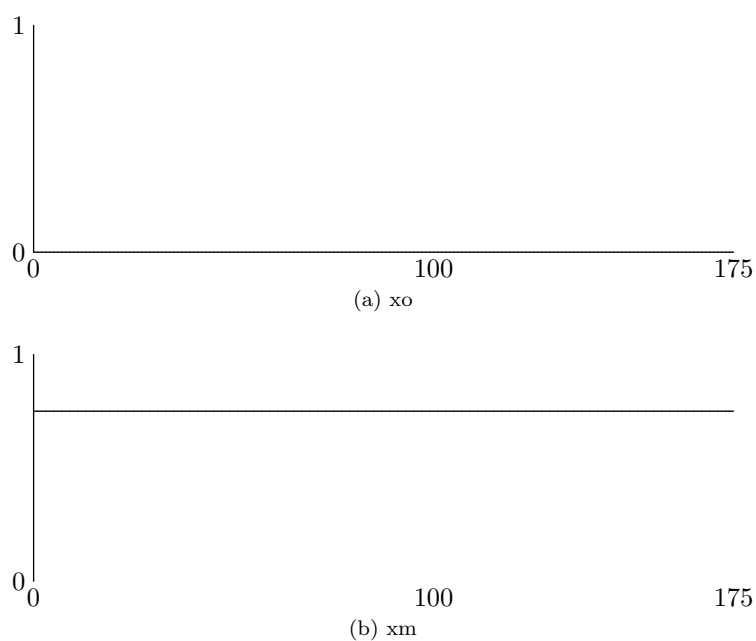


Figura 1.2: (Arriba) La trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^0 = 0$. (Abajo) Trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^1 = \frac{3}{4}$

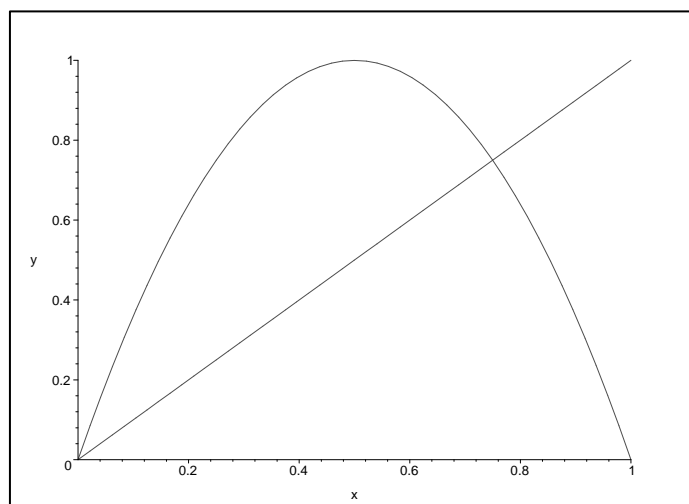


Figura 1.3: Gráfica $S(x) = 4x(1-x)$ e $y = x$. Ambas se interceptan en los puntos $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$

Sin embargo, comportamientos interesantes ocurren alejándose de los números racionales entre $[0, 1]$ como por ejemplo en $x^0 = \pi/10$. Analizando otro valor inicial cercano a x^0 como por ejemplo, $x^1 = \pi/10 + 0,001$. En la Figura 1.4 se presenta las gráficas de la trayectorias. Para comprobar que las trayectorias han variado significativamente la evolución de la población.

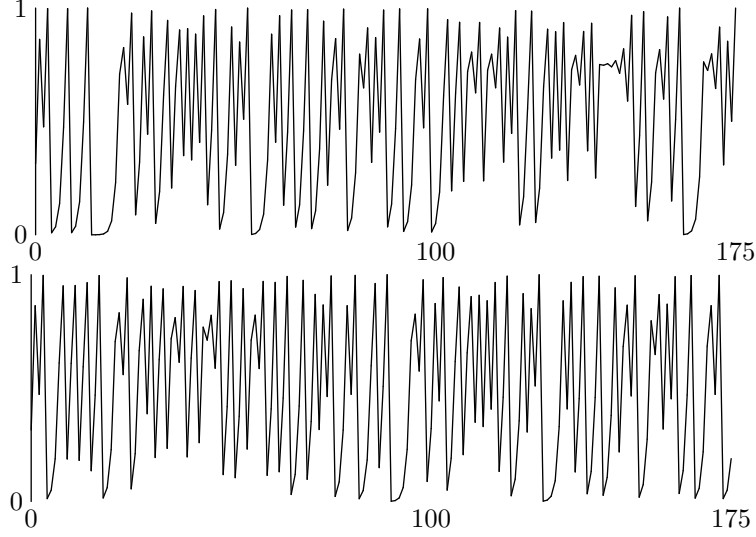


Figura 1.4: (Arriba) La trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^0 = \pi/10$. (Abajo) Trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^1 = \pi/10 + 0,001$

Se considera

$$X^0 = \{x^0(0), S(x^0) = x^0(1), S(S(x^0)) = x^0(2), \dots, x^0(n)\}$$

$$X^1 = \{x^1(0), S(x^1) = x^1(1), S(S(x^1)) = x^1(2), \dots, x^1(n)\}$$

Y calculando la norma 2, osea

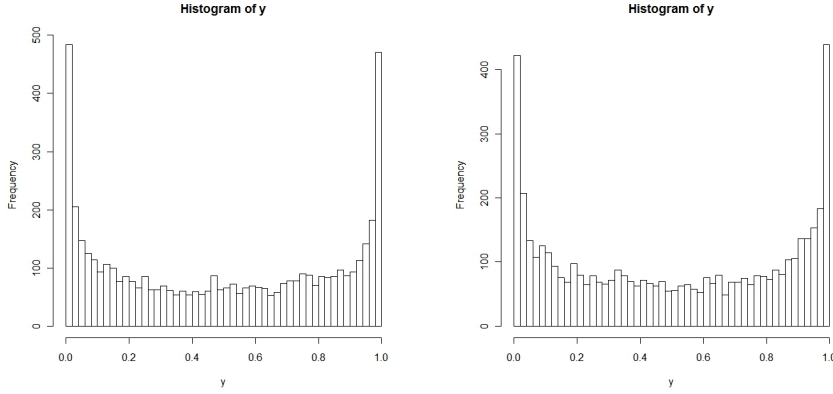
$$\begin{aligned} \|x^0 - x^1\| &= \sqrt{\sum_{i=0}^n x^0(i) - x^1(i)} \\ &= 35,909 \end{aligned}$$

La norma $\|x^0 - x^1\|$ es mayor que 1 y dado que la diferencia entre x^0 y x^1 es de una milésima. Lo anterior, indica que la solución es sensible a las condiciones iniciales. Se realiza un estudio estadístico de cada una de las trayectorias. Consideremos el histograma de frecuencia f_i ; este se construye de la siguiente

forma. Se toma una partición $\{I_k\}_{k=1, \dots, n}$ del espacio de fases $[0, 1]$ y para cada trayectoria definimos las frecuencias

$$f_i = \frac{\#\{x^0(j) \in I_k\}}{N}$$

donde $\sum f_i = 1$, $N \gg n$ y $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ $i = 1, \dots, n$. Por ultimo, se grafica la partición $\{I_k\}$ vs la frecuencia f_i .



Cuadro 1.1: (Izquierda) Histograma de frecuencia para $S(x^0)$ con $x^0 = \pi/2$. (Derecha) Histograma de frecuencia para $S(x^0)$ con $x^0 = \pi/2 + 0,001$.

Se observa simetría en el resultado. Las frecuencias son mayores en los extremos 0 y 1, pero menores próximas al centro en $\frac{1}{2}$. Repitiendo este proceso para distintos estados iniciales, o sea, para distintos valores de x^0 y x^1 se obtiene, en general, el mismo resultado. *La trayectoria del sistema es sensible a pequeños cambios en el estado inicial, pero estos no producen cambios considerables en la distribución de estados*

El estudio de órbitas particulares parece poco fructífero, no obstante el análisis de las densidades se observa más prometedor. Sin embargo, surgen varias interrogantes: ¿Cómo podemos calcular la función de densidad? Y más importante aún, ¿Existe dicha función de densidad? ¿Para cuales condiciones? En la siguiente sección se tratará estos temas.

1.2. La evolución de las densidades

Si considerando que las trayectorias son aleatorias, equidistribuidas e independientes; hipótesis de la Ley Fuerte de Grandes Números nos permite decir que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\Delta_0}(x_j^0) = \int_{\Delta_0} f_0(x) \mu(dx)$$

donde f es una función de densidad de \mathcal{X} y se define

Definición 1.2.1. (*Función Características, $\mathbb{I}_\Delta(x)$*) Se define como:

$$\mathbb{I}_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in \Delta \\ 0 & \text{Si } x \text{ not } \in \Delta \end{cases} \quad (1.4)$$

Sin embargo, debido a la forma como son generados las trayectorias estas no son independientes; por lo que se necesita recurrir a teoremas Ergódicos. Los teoremas Ergódicos pueden pensar se como generalizaciones de las Ley fuerte en caso que no se cumpla la hipotesis independencia. Se presentará el operador Perron-Frobenius de forma intuitiva, con la finalidad de poder conseguir la función de probabilidad para el ejemplo en estudio.

Inicialmente, se supone que tenemos la transformación $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (una forma abreviada de decir $S[0, 1]$ en sí misma). Se recoge un gran número N de estados iniciales

$$x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_N^0$$

Para cada uno de los estados se le aplica la transformación S , obteniendo así N nuevos estados denotados por

$$x_1^1 = S(x_1^0), x_2^1 = S(x_2^0), \dots, x_N^1 = S(x_N^0)$$

En términos generales, decimos que una función $f_0(x)$ es una función de densidad para el valor inicial $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_N^0$ si, para cada intervalo (no tan pequeño) $\Delta_0 \subset [0, 1]$ tenemos

$$\int_{\Delta_0} f_0(\mu) d\mu \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{\Delta_0}(x_j^0) \quad (1.5)$$

Similarmente, la función densidad $f_1(x)$ para los estados $x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_N^1$ la satisface por $\Delta \subset [0, 1]$

$$\int_{\Delta} f_1(\mu) d\mu \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{\Delta}(x_j^1) \quad (1.6)$$

Se quiere encontrar la relación entre f_1 y f_0 . Para hacer esto es necesario introducir la noción de imagen inversa.

Definición 1.2.2. (*Imagen inversa de S , $S^{-1}(\Delta)$*) Es el conjunto de todos los puntos que están en Δ luego la aplicación de S , o

$$S^{-1}(\Delta) = \{x : S(x) \in \Delta\}$$

Observe que para cualquier $\Delta \subset [0, 1]$ se tiene

$$x_j^1 \in \Delta \quad \text{si} \quad x_1^0 \in S^{-1}(\Delta)$$

En consecuencia, se deduce la útil relación

$$\mathbb{I}_{\Delta}(S(x)) = \mathbb{I}_{S^{-1}(\Delta)}(x) \quad (1.7)$$

Con 1.7 ee puede reescribir la ecuación como

$$\int_{\Delta} f_1(\mu) d\mu \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{S^{-1}(\Delta)}(x_j^0) \quad (1.8)$$

Siendo Δ_0 y Δ ha sido arbitraria hasta este punto, simplemente, escogemos $\Delta_0 = S^{-1}(\Delta)$. Con esta opción la ecuaciones (1.5) y (1.8) son iguales y por lo tanto

$$\int_{\Delta} f_1(\mu) d\mu = \int_{S^{-1}(\Delta)} f_0(\mu) d\mu \quad (1.9)$$

Esta ecuación nos entrega la relación que existe entre las funciones densidad f_0 y f_1 , y nos dice como cambia la densidad para los estados iniciales al aplicarles la transformacion S . Es decir, nos dice como la función densidad f_0 es cambiada a una nueva función f_1 al aplicar la transformacion S . Ahora bien: si Δ es un intervalo, digamos $\Delta = [a, x]$, entonces podemos obtener una representacion explicita para f_1 . En este caso, la ecuación (1.9) se transforma en :

$$\int_a^x f_1(\mu) d\mu = \int_{S^{-1}([a, x])} f_0(\mu) d\mu$$

derivando con respecto a x tenemos

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a, x])} f_0(\mu) d\mu \quad (1.10)$$

Ahora es claro que f_1 dependerá de f_0 . Esta dependencia se indica usualmente escribiendo $f_1 = \mathcal{P}f_0$ y entonces podemos escribir la ecuación como :

$$Pf(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a, x])} f(\mu) d\mu \quad (1.11)$$

Este operador (1.11) se le conoce como el nombre de Perron-Frobenius. Para ilustrar el uso de esta formula (1.11) el resultado en el ejemplo ya estudiado. Se procede a calcular la región de la inversa de S . Esto se puede hacer despejado la función con respecto a y

$$4x(1-x) = y$$

Se despeja x . Operando la expresión resulta así

$$x = \frac{2 \mp 2\sqrt{(1-y)}}{4}$$

Se obtiene la region de integración.

$$S^{-1}([0, x]) = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1]$$

Sustituyendo en se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f(x) &= \frac{d}{dx} \int_{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1]} f(u) du \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}} f(u) du + \frac{d}{du} \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}}^1 f(u) du \\ &= \frac{d}{dx} F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) - \frac{d}{dx} F(0) + \frac{d}{dx} F(1) - \frac{d}{dx} F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left\{ f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Supongamos que $f(x) = 1$ para $x \in [0, 1]$. Entonces la formula (1.12) se simplifica como

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad (1.13)$$

Ahora se sustituye la expresión (1.12), es decir $\mathcal{P}f$ por f y podemos calcular nuevamente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{P}f(x)) &= \mathcal{P}^2 f(x) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1-x}}} \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Se puede mostra que para este ejemplo en especifico la sucesión de orbitas converge a una densidad limite dada por:

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (1.15)$$

En la Figura 1.5 se muestra la gráfica de la densidad límite. Comparando los histogramas 1.1 con 1.5 se observa el operador de Perron-Frobenius Refe construye la densidad de probabilidad, aunque las condiciones para la existencia no han sido tratadas. El *estudio de la existencia* será el tema a desarrollar en la presente investigación. Así mismo, como las razones que justifican el paso al

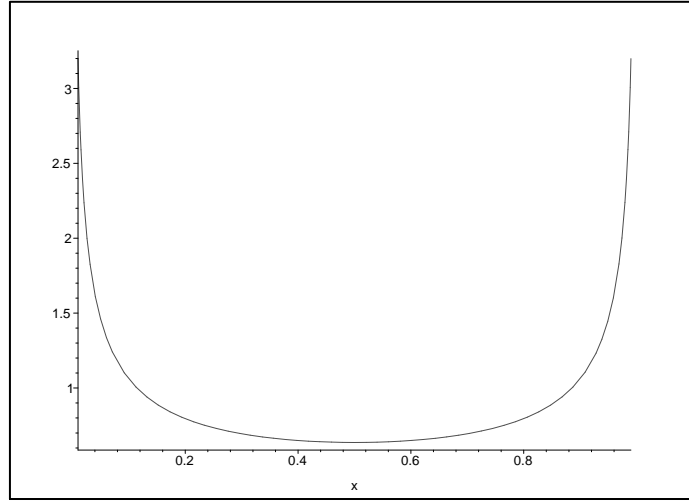


Figura 1.5: Gráfica $f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. Se observa como la función predice la probabilidad empírica conseguida en los histogramas 1.1

límite de (1.15) y en profundizar en las propiedades del operador de Perron-Frobenius.

Recapitulando, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales de algunas funciones se opta en tratar un problema determinista como un problema estocástico. Entiéndase como problema determinista hallar el comportamiento asintótico de la solución de una ecuación diferencial. Así mismo, como problema estocástico el de encontrar la función de probabilidad que siguen las trayectorias. Se mostró como el operador de Perron-Frobenius colabora en proporcionar un método recursivo para encontrar una sucesión que converge a la función de probabilidad deseada. Aunque, no quedó claro el paso al límite de la sucesión anterior. Menos aun, las hipótesis y razonamiento que justifique el procedimiento anterior. Estos temas serán tratado en del desarrollo de la investigación.

Capítulo 2

Operadores Especiales

En este capítulo se formalizará y caracterizará el operador Perron-Frobenius el cual fué presentado en el Capítulo 1. En dicho capítulo se mostró su uso en estudio de la evolución de densidades bajo la operación de sistemas determinísticos.

Sin embargo, primeramente se desarrollarán conceptos generales del operador de Markov. El motivo para este desarrollo preliminar se basa en:

- a) Muchos conceptos sobre el comportamiento asintótico de las densidades pueden ser igualmente formulada por ambos sistemas deterministas y estocásticos.
- b) Muchos de los resultados que desarrollamos en los capítulos siguientes sobre el comportamiento de la densidad de la evolución bajo la influencia de los sistemas deterministas, son casos especiales de resultado más general para sistemas estocásticos.

Para finalizar, se estudiará el operador de Koopman el cual está íntimamente relacionado con el operador de Perron-Frobenius.

2.1. Operador de Markov

Definición 2.1.1 (Operador de Markov, \mathcal{P}). *Es un operador lineal $\mathcal{P} : L^1 \rightarrow L^1$ de un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ que satisface:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f &\geq 0 & \text{para } f \geq 0, f \in L^1 \\ \|\mathcal{P}f\| &= \|f\| & \text{para } f \geq 0, f \in L^1 \end{aligned}$$

Propiedades del Operador de Markov Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y \mathcal{P} un operador de Markov entonces, para cada $f, g \in L^1$

$$\mathcal{P}f(x) \geq \mathcal{P}g(x) \quad \text{cuando } f(x) \geq g(x) \quad (2.1)$$

$$(\mathcal{P}f(x))^+ \leq \mathcal{P}f^+(x) \quad (2.2)$$

$$(\mathcal{P}f(x))^- \leq \mathcal{P}f^-(x) \quad (2.3)$$

$$|\mathcal{P}f(x)| \leq \mathcal{P}|f(x)| \quad (2.4)$$

$$\|\mathcal{P}f\| \leq \|f\| \quad (2.5)$$

Demostración. Las demostraciones se deducen directamente de las definiciones.

$$\begin{aligned} f \geq g &\Rightarrow f - g \geq 0 && \text{(despejando)} \\ &\Rightarrow h \geq 0 && (h = f - g \in L^1) \\ &\Rightarrow \mathcal{P}h \geq 0 && \text{(def. operador de Markov)} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}(f - g) \geq 0 && \text{(sustituyendo h)} \\ &\Rightarrow \mathcal{P}f \geq \mathcal{P}g && \text{(por linealidad)} \end{aligned}$$

Cuando un operador satisface se dice que es montono.

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}f(x))^+ &= (\mathcal{P}(f^+(x) - f^-(x)))^+ && \text{(por col. de } f) \\ &= (\mathcal{P}f^+(x) - \mathcal{P}f^-(x))^+ && \text{(por linealidad)} \\ &= \max\{0, \mathcal{P}f^+(x) - \mathcal{P}f^-(x)\} && \text{(def. de } f \text{ positiva)} \\ &= \max\{0, \mathcal{P}f^+(x)\} && \text{(debido a } \mathcal{P}f^-(x) \geq 0) \\ &= \mathcal{P}f^+(x) && \text{(def. de } f \text{ positiva)} \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra . La propiedad es similar.

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}f(x))^- &= (\mathcal{P}(f^+(x) - f^-(x)))^- && \text{(por col. de } f) \\ &= (\mathcal{P}f^+(x) - \mathcal{P}f^-(x))^- && \text{(por linealidad)} \\ &= \max\{0, \mathcal{P}f^-(x) - \mathcal{P}f^+(x)\} && \text{(def. de } f \text{ negativa)} \\ &\leq \max\{0, \mathcal{P}f^-(x)\} && \text{(debido a } \mathcal{P}f^-(x) \geq 0) \\ &= \mathcal{P}f^-(x) && \text{(def. de } f \text{ negativa)} \end{aligned}$$

En la propiedad se incluyen los resultados presentes.

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}f(x)| &= (\mathcal{P}f(x))^+ + (\mathcal{P}f(x))^- && \text{(por col. de } f) \\ &\leq \mathcal{P}f^+(x) + \mathcal{P}f^-(x) && \text{(por y)} \\ &= \mathcal{P}(f^+(x) + f^-(x)) && \text{(por linealidad)} \\ &= \mathcal{P}|f(x)| && \text{(por col. de } f) \end{aligned}$$

Y la propiedad de mayor importancia

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{P}f(x)\| &= \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f(x)|\mu(dx) && \text{(por definición de norma)} \\
 &\leq \int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}|f(x)|\mu(dx) && \text{(por)} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} |f(x)|\mu(dx) && \text{(def. Operador de Markov)} \\
 &= \|f(x)\| && \text{(por def. de norma)}
 \end{aligned}$$

□

Se ilustra la importancia de la propiedad . Note que para cualquier operador $f \in L^1$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{P}^{n+1}f\| &= \|\mathcal{P}(\mathcal{P}^n f)\| && \text{debido a } \mathcal{P} : \odot \\
 &\leq \|\mathcal{P}^n f\| && \text{por}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Graficando la inecuación

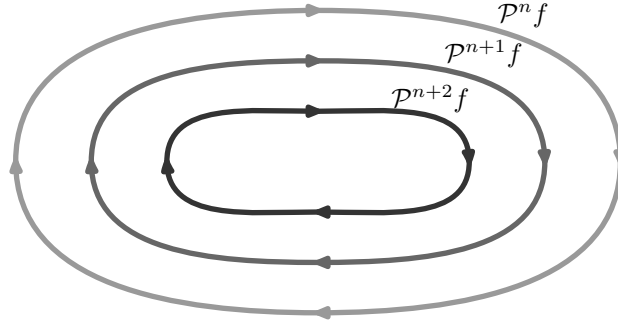


Figura 2.1: Con cada iteración del operador la órbita el operador decrece o se mantiene.

A esta propiedad se le conoce con el nombre de contractiva debido a que reduce la distancia en el proceso de iteración. Como se puede observar para cualquier par de funciones distintas de L^1 .

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{P}^{n+1}f_1 - \mathcal{P}^{n+1}f_2\| &= \|\mathcal{P}^{n+1}(f_1 - f_2)\| && \text{linealidad} \\
 &\leq \|\mathcal{P}^n(f_1 - f_2)\| && \text{por} \\
 &= \|\mathcal{P}^n f_1 - \mathcal{P}^n f_2\|
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Graficando la inecuación

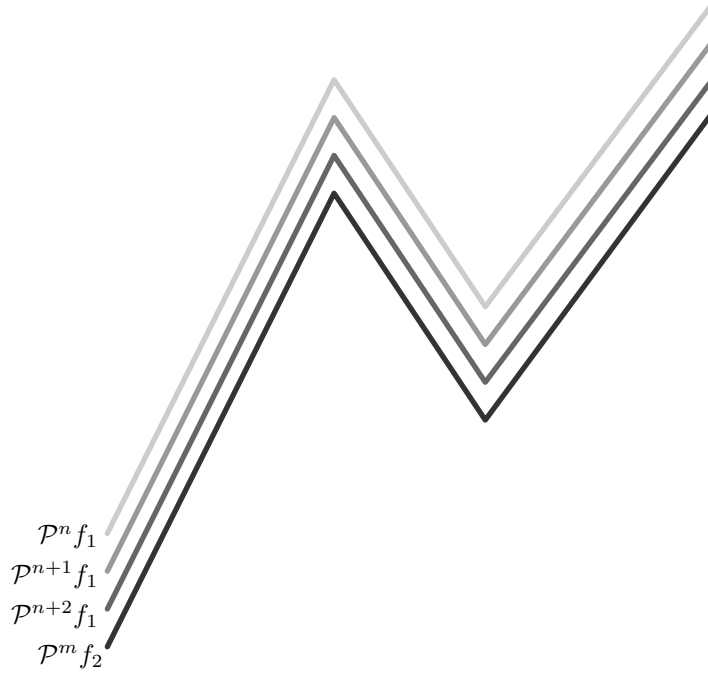


Figura 2.2: Sea $\mathcal{P}^i f_2 = \mathcal{P}^m f_2 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, ósea un punto fijo. Se aprecia como la norma $\|\mathcal{P}^i f_1 - \mathcal{P}^i f_2\|$ se reduce con cada iteración, acercándose $\mathcal{P}^i f_1$ de $\mathcal{P}^i f_2$.

De lo analizado se desprende la idea de orbitas acotadas o orbitas estables. Se formalizará esta noción con la siguiente definición.

Definición 2.1.2 (Estabilidad de la iteraciones). *Es cuando la distancia entre un par de funciones, durante el proceso de iteraciones, puede decrecer pero jamás aumentar.*

Definición 2.1.3 (Soporte de una función $g(x), \text{sop } g(x)$). *Son todos los x del dominio donde $g(x)$ no se anula.*

Observación Esta no es la definición usual de soporte de una función, normalmente se define como

$$\text{sop } g = \text{clausura}\{x : g(x) \neq 0\}$$

No obstante, debido a que requiere conceptos topológicos se prefirió usar esta definición no tan común.

Proposición 2.1.1. *Sea $\|\mathcal{P}f\| = \|f\|$ sii $\mathcal{P}f^+$ y $\mathcal{P}f^-$ son soportes disjuntos*

Demostración. Notemos que si $x \geq 0$ e $y \geq 0$

$$\begin{array}{ll}
 -x \leq x & -y \leq y \\
 -y - x \leq x - y & x - y \leq x + y \\
 -(x + y) \leq x - y \leq x + y & \\
 |x - y| \leq x + y & \\
 |x - y| \leq |x + y| & \text{Ya que } x > 0 \text{ \& } y > 0
 \end{array}$$

Por lo tanto podemos afirmar

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{P}f^+ - \mathcal{P}f^-| &\leq |\mathcal{P}f^+ + \mathcal{P}f^-| \\
 &\leq |\mathcal{P}f^+| + |\mathcal{P}f^-| \quad \text{desigualdad triangular}
 \end{aligned}$$

La desigualdad estricta se cumple para cualquier $\mathcal{P}f^+ > 0$ y $\mathcal{P}f^- > 0$. La igualdad solo se garantiza cuando $\mathcal{P}f^+ = 0$ o $\mathcal{P}f^- = 0$. Supongase la igualdad (Osea $\mathcal{P}f^+ = 0$ o $\mathcal{P}f^- = 0$) e integrando sobre el espacio tenemos

$$\int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^+ - \mathcal{P}f^-| \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^+| + \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^-| \mu(dx) \quad (2.8)$$

por lo tanto se tiene que

$$\nexists A \subset, \mu(A) > 0 \quad \text{tal que} \quad \mathcal{P}f^+ > 0 \quad y \quad \mathcal{P}f^- > 0$$

Como $\mathcal{P}f \geq 0$, tenemos de la definición de soporte vista en OJO

$$\begin{aligned}
 \nexists A \subset, \mu(A) > 0 \quad \text{tal que} \quad A \subset \text{sop}(\mathcal{P}f^+) \quad y \quad A \subset \text{sop}(\mathcal{P}f^-) \\
 \nexists A \subset, \mu(A) > 0 \quad \text{tal que} \quad A \subset \text{sop}(\mathcal{P}f^+) \cap \text{sop}(\mathcal{P}f^-)
 \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación en el lado izquierdo quedaria

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^+ - \mathcal{P}f^-| \mu(dx) &= \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}(f^+ - f^-)| \mu(dx) && \text{Agrupando} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f| \mu(dx) && \text{por col. de } f \\
 &= \|\mathcal{P}f\| && \text{por def. norma}
 \end{aligned}$$

mientras que por el lado derecho de

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^+| + \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{P}f^-| \mu(dx) &= \|\mathcal{P}f^+\| + \|\mathcal{P}f^-\| && \text{por def. norma} \\
 &= \|f^+\| + \|f^-\| && \text{por def. de Markov} \\
 &= |(\|f\|)| && \text{por col. de } f \\
 &= \|f\| && \text{la norma es positiva}
 \end{aligned}$$

por último agrupando ambos lados de nos queda

$$||\mathcal{P}f|| = ||f||$$

□

La definición de punto fijo se considera en este contexto siendo $\mathcal{P} : L^1 \odot$ la ley de evolución temporal. Se presenta una caracterización para los puntos fijos del operador de Markov

Proposición 2.1.2. *Si $\mathcal{P}f = f$ entonces $\mathcal{P}f^+ = f^+$ y $\mathcal{P}f^- = f^-$*

Demostración. Como $\mathcal{P}f = f$ entonces

$$f^+ = (\mathcal{P}f)^+ \leq \mathcal{P}f^+$$

$$f^- = (\mathcal{P}f)^- \leq \mathcal{P}f^-$$

por lo tanto

$$(\mathcal{P}f)^+ - f^+ \geq 0$$

$$(\mathcal{P}f)^- - f^- \geq 0$$

sumando e integrando las desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} [\mathcal{P}f^+ - f^+] \mu(dx) + \int_{\mathcal{X}} [\mathcal{P}f^- - f^-] \mu(dx) &\geq 0 \\ \int_{\mathcal{X}} [\mathcal{P}f^+ + \mathcal{P}f^-] \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} [f^+ + f^-] \mu(dx) &\geq 0 \\ \int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}|f| \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} |f| \mu(dx) &\geq 0 \\ ||\mathcal{P}|f|| - ||f|| &\geq 0 \end{aligned}$$

por otro lado. Gracias a la propiedad contractiva tenemos $||\mathcal{P}|f|| - ||f|| \leq 0$ en consecuencia se llega a una contradicción. Por lo tanto $||\mathcal{P}|f|| - ||f|| = 0$

$$\mathcal{P}f^+ - f^+ = 0$$

$$\mathcal{P}f^+ = f^+$$

$$\mathcal{P}f^- - f^- = 0$$

$$\mathcal{P}f^- = f^-$$

□

Definición 2.1.4 (Conjunto de densidades, $D(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$). *Es el conjunto definido como $\{f \in L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) : f \geq 0 \text{ \& } ||f|| = 1\}$ donde $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Cualquier función $f \in D(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es llamada **densidad**.*

Definición 2.1.5 (Densidad f de μ , $\mu_f(A)$). *Si se cumple que*

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) \mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A}$$

Donde $f \in D(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. También se dice que f es **absolutamente continua** con respecto a μ .

Usando la noción de densidades se puede extender el concepto de punto fijo a un operador de Markov con la siguiente definición.

Definición 2.1.6 (Densidad estacionaria). *Para cualquier $f \in D$ que satisfaga $\mathcal{P}f = f$ siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y \mathcal{P} un operador de Markov.*

Observación El concepto de densidad estacionaria de un operador jugara un papel fundamenta el los próximos capítulos.

2.2. El operador Perron-Frobenius

En el capítulo 1 se presento el operador de Perron-Frobenius para el estudiar la evolución de la densidad en el caso de la función logística. Después de haber desarrollado el concepto de operador de Markov y algunas de sus propiedades; se está en posición de estudiar el operador de Perron-Frobenius. En consecuencia, se fundamentará, se caracterizará e ilustrará dicho operador; así como se mostrará su relación con el operador de Markov.

Lema 2.2.1. *Sea $S : \mathcal{O}$ una transformación no-singular sobre un espacio de medida dado. Sea $f \in L^1$ con $f \geq 0$ la siguiente expresión:*

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) \quad (2.9)$$

es una medida y existe un unico elemento en L^1 , que denotaremos por $\mathcal{P}f$, tal que:

$$\int_A \mathcal{P}f(x) \mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A}$$

Demostración. Se procede a demostrar que es una medida. Observe que la imagen inversa del conjunto vacio es vacio por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S^{-1}(\emptyset)} f(x) \mu(dx) &= \int_{\emptyset} f(x) \mu(dx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como S es no singular entonces $\mu(S^{-1}(A)) \geq 0$ para $\mu(A) \geq 0$ Por lo tanto podemos garantizar que

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) \geq 0 \quad \int_A f(x) \mu(dx) \geq 0$$

Por ultimo consideremos

$$S^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i S^{-1}(A_i)$$

Siendo lo A_i disjuntos se tiene

$$\int_{S^{-1}(\cup_i A_i)} f(x)\mu(dx) = \int_{\cup_i S^{-1}(A_i)} f(x)\mu(dx)$$

y por la propiedad L5

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) = \sum_i \int_{S^{-1}(A_i)} f(x)\mu(dx)$$

con lo cual es una medida. Como $f \in L^1$ entonces tiene medida finita.

por lo tanto por el colorario X, existe un unico elemento $f \in L^1$ tal que

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx) \quad \text{para cada } a \in \mathcal{A}$$

□

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A} \quad (2.10)$$

Propiedades del Operador Perron-Frobenius A partir de puede deducir las siguientes propiedades.

$$\mathcal{P}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{P}f_1 + \lambda_2 \mathcal{P}f_2 \quad f_i \in L^1 \text{ y } \lambda_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{P} \geq 0 \quad \text{si} \quad f \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) \quad (2.13)$$

Si $S_n = S \circ \dots \circ S$ y \mathcal{P}_n es el operador de Forbenius-Perron correspondiente a S_n , entonces $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^n$, donde \mathcal{P} es el operador de Forbenius-Perron correspondiente para S . Las demostraciones son directas de la definición en el caso de tenemos

$$\mathcal{P}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \int_A \mathcal{P}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\mu(dx)$$

Consideremos $B = S^{-1}(A)$

$$\begin{aligned} &= \int_B (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\mu(dx) \\ &= \lambda_1 \int_B f_1\mu(dx) + \lambda_2 \int_B f_2\mu(dx) \\ &= \lambda_1 \int_A \mathcal{P}f_1\mu(dx) + \lambda_2 \int_A \mathcal{P}f_2\mu(dx) \end{aligned}$$

La demostración que es una medida nos garantiza que se cumple ya que la medida es una función positiva. Por último observemos que $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ por lo tanto la imagen inversa de \mathcal{X} esta contenida en \mathcal{X} .

Observación Las propiedades nos garantizan que el operador de Perron-Frobenius es un operador de Markov y por lo tanto cumple con las propiedades vistas anteriormente.

Para algunos casos especiales se tiene una forma explícita del operador de Perron-Frobenius. Si $\mathcal{X} = [a, b]$ es un intervalo real y $A = [a, x]$ entonces se escribe como

$$\int_a^x \mathcal{P}f(s)ds = \int_{S^{-1}([a, x])} f(s)ds$$

derivando respecto a x

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}([a, x])} f(s)ds \quad (2.14)$$

es importante notar que este es un caso especial donde la transformación S es diferenciable e invertible, en el cual la forma explícita de $\mathcal{P}f$ es posible. Si S es diferenciable y invertible entonces es monótona, adicionalmente, supongamos que es creciente y S^{-1} tiene derivada continua. Entonces

$$S^{-1}([a, x]) = [S^{-1}(a), S^{-1}(x)]$$

por lo tanto queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f(x) &= \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} f(s)ds \\ &= f(S^{-1}(x)) \frac{d}{dx}(S^{-1}(x)) \end{aligned}$$

y si $S(X)$ es decreciente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}f(x) &= \frac{d}{dx} \int_{S^{-1}(x)}^{S^{-1}(a)} f(s)ds \\ &= \frac{d}{dx} - \int_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} f(s)ds \\ &= -f(S^{-1}(x)) \frac{d}{dx}(S^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Proposición 2.2.1. *Sea S una transformación real diferenciable e invertible, con derivada continua y creciente entonces el operador de Perron-Frobenius se expresa como:*

$$\mathcal{P}f(x) = f(S^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx}[S^{-1}(x)] \right| \quad (2.15)$$

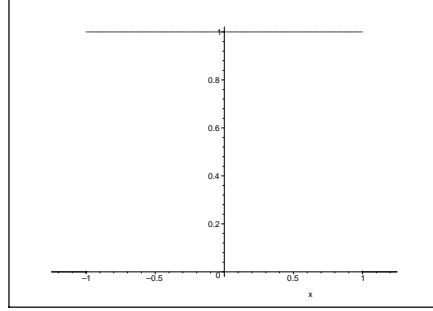


Figura 2.3: La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Observe que $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$ y por lo tanto $f(x)$ una densidad.

Ejemplo 2.2.1. Veamos como el operador de Perron-Frobenius trabaja. Sea $S(x) = \exp(x)$, siendo $S^{-1} = \ln(x)$ y $(S^{-1})' = \frac{1}{x}$. Aplicando (2.15) la propiedad tenemos

$$\mathcal{P}f(x) = f(\ln(x))\left(\frac{1}{x}\right)$$

Consideremos que ocurre si se toma la densidad de probabilidad f dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

Evaluando la densidad sobre \mathcal{P} tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\ln(x)) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq \ln(x) \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } e^{-1} \leq x \leq e^1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[e^{-1}, e^1]}(x) \end{aligned}$$

Nótese que el soporte de la función f está contenido en el soporte de $\mathcal{P}f$. Esa observación la generaliza la siguiente proposición

Teorema 2.2.1. Sea $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación no singular y \mathcal{P} el operador de Perron-Frobenius. Se asume $f \leq 0, f \in L^1$ es dado. Entonces

$$\text{sop } f \subset S^{-1}(\text{sop } \mathcal{P}f) \quad (2.16)$$

Y, más generalmente, para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ la siguiente equivalencia es cierta: $\mathcal{P}f(x) = 0$ para $x \in A$ si y solo si $f(x) = 0$ para $x \in S^{-1}(A)$.

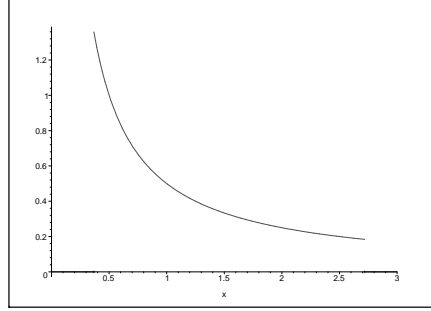


Figura 2.4: La gráfica de $\mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Debido a $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$ y por lo tanto $\mathcal{P}f(x)$ una densidad. En otra palabra, el operador \mathcal{P} mapeo una densidad en otra densidad.

Demostración. Por la definición del operador de Perron-Frobenius, se tiene

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

Que es equivalente a

$$\int_{\mathcal{X}} 1_A(x)\mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}f(x)\mu(dx)$$

Así $\mathcal{P}f(x) = 0$ sobre A implica, por la propiedad B.2 de la integral de Lebesgue, que $f(x) = 0$ para $x \in S^{-1}(A)$ y viceversa. Se toma $A = \mathcal{X} \setminus \text{sop}(\mathcal{P}f)$ y se tiene $\mathcal{P}f(x) = 0$ para $x \in A$ y, en consecuencia, $f(x) = 0$ para $x \in S^{-1}(A)$ esto significa que $\text{sop } f \subset \mathcal{X} \setminus S^{-1}(A)$. Como $S^{-1}(A) = \mathcal{X} \setminus \text{sop}(\mathcal{P}f)$ esto completa la prueba. \square

Observación En el caso de una función arbitraria $f \in L^1$, entonces, solo se tiene esta implicación: Si $f(x) = 0 \forall x \in S^{-1}(A)$ entonces $\mathcal{P}f(x) = 0 \forall x \in A$. Falla la suficiencia; esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo. Se toma la transformación r-ardica para $r = 2$, osea, $S(x) = 2x \pmod{1}$ y sea f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Se toma un intervalo $[0, x] \subset [0, 1]$ se calcula la imagen inversa de $[0, x]$ bajo S la cual viene dada por:

$$S^{-1}([0, x]) = \cup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r} \right]$$

Y calculando el Operador de Perron-Frobenius

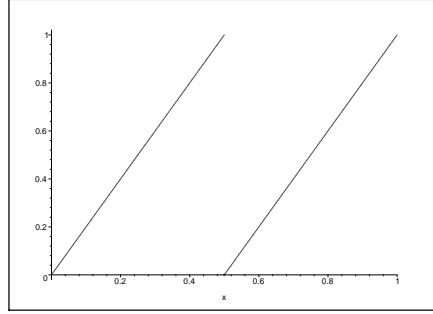


Figura 2.5: Gráfica de la transformación 2-ardica, osea, $S(x) = 2x \pmod{1}$

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{r-1} \int_{\frac{i}{r}}^{\frac{i}{r} + \frac{x}{r}} f(u) du = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right) \quad (2.18)$$

Ahora como $r = 2$ entonces i toma valores de 0 e 1. Observando la grafica podemos concluir que $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 f\left(\frac{i}{2} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ y por lo tanto $\mathcal{P}f(x) = 0 \forall x \in [0, 1]$ pero $f(x) \neq 0$ para ningun $x \in [0, 1]$.

La generalización inmediata de (2.15) se tiene al extender \mathcal{X} al plano \mathbb{R}^2 . Sea $A = [a, x] \times [b, y]$ entonces de (2.14) se tiene

$$\int_a^x ds \int_b^y \mathcal{P}f(s, t) dt = \iint_{S^{-1}([a, x] \times [b, y])} f(s, t) ds dt$$

diferenciando con respecto a x y luego con respecto a y , se tiene inmediatamente que

$$\mathcal{P}f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \iint_{S^{-1}([a, x] \times [b, y])} f(s, t) ds dt$$

y formulas análogas que pueden derivarse en el caso de $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$

En el caso general, donde $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ y $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ invertible, se puede derivar una interesante y útil generalización de la ecuación (2.15). Para hacer esto primero se probará el teorema del cambio de variable basado en el teorema de Radon-Nikodym.

Definición 2.2.1. (Función de integración acotada) Es una función $f \in L^1 \cap L^\infty$.

Teorema 2.2.2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, f de integración acotada y una transformación $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ entonces para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\int_{S^{-1}(A)} f(S(x)) \mu(dx) = \int_A f(x) \mu S^{-1}(dx) = \int_A f(x) J^{-1}(x) \mu(dx)$$

Donde μS^{-1} denota la medida

$$\mu S^{-1}(B) = \mu(S^{-1}(B)) \quad B \in \mathcal{A}$$

Y J^{-1} es la densidad de μS^{-1} con respecto a μ , esto es,

$$\mu(S^{-1}(B)) = \int_B J^{-1}(x) \mu(dx) \quad \text{para } B \in \mathcal{A}$$

Observación Se usará la notación $J^{-1}(x)$ para mostrar la conexión con las transformaciones invertibles y diferenciables de \mathbb{R}^d , en este sentido $J(x)$ es el determinante de la matriz del Jacobiano:

$$J(x) = \left| \frac{dS(x)}{dx} \right| \quad o \quad J^{-1}(x) = \left| \frac{dS^{-1}(x)}{dx} \right|$$

Demostración. Obsérvese que si tomamos $f(x) = 1_B(x)$ entonces

$$\begin{aligned} f(S(x)) = 1_B(S(x)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } B \in (S(x)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } S^{-1}(B) \in x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= 1_{S^{-1}(B)}(x) \end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S^{-1}(A)} f(S(x)) \mu(dx) &= \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}(x) f(S(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}(x) 1_{S^{-1}(B)}(x) \mu(dx) \\ &= \mu(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B)) \\ &= \mu(S^{-1}(A \cap B)) \end{aligned}$$

para la segunda integral del teorema se tiene

$$\begin{aligned} \int_A f(x) J^{-1}(x) \mu(dx) &= \int_A 1_B(x) J^{-1}(x) \mu(dx) \\ &= \mu(S^{-1}(A \cap B)) \end{aligned}$$

la tercera integral toma la forma de

$$\begin{aligned} \int_A f(x) J^{-1}(x) \mu(dx) &= \int_A 1_B(x) J^{-1}(x) \mu(dx) \\ &= \int_{A \cap B} J^{-1}(x) \mu(dx) \\ &= \mu(S^{-1}(A \cap B)) \end{aligned}$$

Ahora, se procede a probar para una función simple $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}(x)$

$$\begin{aligned} f(S(x)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}(S(x)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i & \text{si } B_i \in (S(x)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i & \text{si } S^{-1}(B_i) \in x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{S^{-1}(B_i)}(x) \end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S^{-1}(A)} f(S(x)) \mu(dx) &= \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}(x) f(S(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{S^{-1}(B_i)}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\mathcal{X}} 1_{S^{-1}(A)}(x) 1_{S^{-1}(B_i)}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B_i)) \\ &= \mu(S^{-1}(A \cap B)) \end{aligned}$$

para la segunda integral del teorema se tiene

$$\begin{aligned} \int_A f(x) J^{-1}(x) \mu(dx) &= \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}(x) J^{-1}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_A 1_{B_i}(x) J^{-1}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B_i)) \\ &= \mu(S^{-1}(A \cap B)) \end{aligned}$$

la tercera integral toma la forma de

$$\begin{aligned}
 \int_A f(x)J^{-1}(x)\mu(dx) &= \int_A \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{B_i}(x)J^{-1}(x)\mu(dx) \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_A \lambda_i 1_{B_i} J^{-1}(x)\mu(dx) \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{A \cap B_i} J^{-1}(x)\mu(dx) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B_i)) \\
 &= \mu(S^{-1}(A \cap B))
 \end{aligned}$$

Como f es una función de integración acotada podemos suponer que existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones simples que convergen uniformemente a f . Por lo tanto, podemos evaluar los siguientes límites

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^{-1}(A)} g_n(S(x))\mu(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S^{-1}(A \cap B)) \\
 &= \mu(S^{-1}(A \cap B))
 \end{aligned}$$

para la segunda integral del teorema se tiene

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x)J^{-1}(x)\mu(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S^{-1}(A \cap B)) \\
 &= \mu(S^{-1}(A \cap B))
 \end{aligned}$$

la tercera integral toma la forma de

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x)J^{-1}(x)\mu(dx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S^{-1}(A \cap B)) \\
 &= \mu(S^{-1}(A \cap B))
 \end{aligned}$$

□

El teorema anterior es tomado por algunos autores como la definición del operador de Perron-Ruelle-Frobenius o operador de Transferencia. El siguiente resultado es una consecuencia directa del teo (ref) y extiende la ecuación (refe)

Corolario 2.2.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación no singular invertible y \mathcal{P} el operador de Perron-Frobenius asociado. Entonces para cada función de integración acotada, se tiene*

$$\mathcal{P}f(x) = f(S^{-1}(x))J^{-1}$$

Demostración. Por la definición de \mathcal{P} , para $A \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

Haciendo el cambio de variable en la integral con $y = S(x)$, tal que

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) = \int_A f(S^{-1}(y))J^{-1}(y)\mu(dy)$$

Por el teoremas (2.10)

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_A f(S^{-1}(x))J^{-1}(x)\mu(dx)$$

Usando del teorema de Radon-Nikodym

$$\mathcal{P}f(x) = f(S^{-1}(x))J^{-1}(x)$$

□

2.3. El operador de Koopman

Se asume que μ es una medida. Se conoce que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mu \circ S^{-1}} & \mathbb{R} \\ S^{-1} \searrow & & \nearrow \mu \\ & A & \end{array}$$

Es decir $\nu = \mu \circ S^{-1}$ define una medida. Si $\mu(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$, entonces $\mu \ll \nu$. La definición del siguiente operador se basa en esta idea. Recuerdese que $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y es suficiente tomar a S

Definición 2.3.1 (Operador de Koopman con respecto a S , U). *El operador $U : L^\infty \rightarrow L^\infty$ se define como*

$$Uf(x) = f(S(x)) \quad (2.19)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ una transformacion no-singular y $f \in L^\infty$.

Observación $f_1(x) = f_2(x) \text{ c.s.} \Rightarrow f_1(S(x)) = f_2(S(x)) \text{ c.s.}$ En otras palabras, $\mu(\{x : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$ entonces $\mu(\{x : f_1(S(x)) \neq f_2(S(x))\}) = 0$ debido a $\mu(\{y : S(x) \in \{f_1(x) \neq f_2(x)\}\}) = S \circ \mu(\{x : \{f_1(x) \neq f_2(x)\}\}) = 0$ por hipótesis. Por lo tanto el operador de koopman esta bien definido.

Propiedades del Operador de Koopman

$$U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 U f_1 + \lambda_2 U f_2 \quad \forall f_1, f_2 \in L^\infty, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

$$\|Uf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \quad \text{Para cada } f \in L^\infty \quad (2.21)$$

$$\langle \mathcal{P}f, g \rangle = \langle f, Ug \rangle \quad \text{Para cada } f \in L^\infty, g \in L^\infty \quad (2.22)$$

Observación La proposición expresa que U es una contracción en L^∞ . De forma análoga que U es el operador autoadjunto de \mathcal{P} del operador de Perron-Frobenius.

Demostración. Para se tiene

$$\begin{aligned} U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= S(x) \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \\ &= \lambda_1 f_1(S(x)) + \lambda_2 f_2(S(x)) \\ &= \lambda_1 U f_1 + \lambda_2 U f_2 \end{aligned}$$

En el caso de se tiene

$$|f(x)| \leq \sup_x |f(x)| = \|f\|_{L^\infty} \quad \text{c.5}$$

por lo tanto $|f(S(x))| \leq \|f\|_{L^\infty}$ Finalmente, para se asume que $g(x) = \mathbb{1}_A$ asi, en la primera parte de la ecuación

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}f, g \rangle &= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}f(x) \mathbb{1}_A(x) \mu(dx) \\ &= \int_X \mathcal{P}f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \int_A \mathcal{P}f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Ahora para el lado derecho de

$$\begin{aligned} \langle f, Ug \rangle &= \int_X f(x) U \mathbb{1}_A(x) \mu(dx) \\ &= \int_X f(x) \mathbb{1}_A(S(x)) \mu(dx) \\ &= \int_X f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } S(x) \in (A) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \int_X f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S^{-1}(A) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \int_{S^{-1}(A)} f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Por lo tanto es equivalente a

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx)$$

La definición del operador de Perron-Frobenius.

Con lo cual para la función característica. Supongamos $g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}(x)$ así, en la primera parte de la ecuación

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}f, g \rangle &= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}f(x) \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}(x) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \mathcal{P}f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{A_i} \mathcal{P}f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Ahora para el lado derecho de

$$\begin{aligned} \langle f, Ug \rangle &= \int_X f(x) U \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}(x) \right) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X f(x) \mathbb{I}_{A_i}(S(x)) \mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } S(x) \in A_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X f(x) \mu(dx) \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S^{-1}(A_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{S^{-1}(A_i)} f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Con lo cual para la una función simple. Sea un sucesión $g = \{f_n\}$ que converge uniformemente a f . Entonces podemos evaluar el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}f, g_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mathcal{P}f(x) g_n \mu(dx) \\ &= \int_A \mathcal{P}f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Ahora para el lado derecho de

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, U g_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) U g_n \mu(dx) \\ &= \int_{S^{-1}(A)} f(x) \mu(dx)\end{aligned}$$

Con lo que queda probado $\langle \mathcal{P}f, g \rangle = \langle f, Ug \rangle$. □

Definición 2.3.2 (Operador débilmente continuo). *Para cada sucesión $\{f_n\}$ contenida L^1 la condición $f_n \rightarrow f$ débilmente, implica $\mathcal{P}f_n \rightarrow \mathcal{P}f$ débilmente.*

Con el operador de Koopman es fácil probar el siguiente resultado

Teorema 2.3.1. *El operador de Perron-Frobenius es débilmente continuo*

Demostración. Usando la propiedad se puede mostrar que $\langle \mathcal{P}, g \rangle = \langle f_n, g \rangle$ para $g \in L^\infty$. Como $\langle f_n, Ug \rangle$ converge débilmente a $\langle f, Ug \rangle$. Ahora como $\langle f, Ug \rangle = \langle \mathcal{P}, g \rangle$ entonces $\langle f_n, Ug \rangle$ converge débilmente a $\langle \mathcal{P}, g \rangle$. En consecuencia, el operador de Perron-Frobenius es débilmente continuo. □

Capítulo 3

Estudio el Caos con Densidades

Se introduce el concepto de medida invariantes por transformaciones, posteriormente, define e ilustra tres niveles de irregularidades en el comportamiento de las transformaciones. Estos tres niveles son conocidos como ergodicidad, mezclante (o mixing) y exactas. Así mismo, se presentan sus caracterizaciones. El objetivo central del capítulo es mostrar la utilidad de los operadores de Perron-Frobenius y Koopman en el estudio de de estos comportamientos.

Para una de densidad constante $f(x) = 1$, preservar la medida es que sea una densidad estacionaria del operador de Perron-Frobenius, osea, $\mathcal{P}1 = 1$. Para la ergodicidad, la condición es que $f(x) = 1$ sea la única densidad estacionaria para ese operador. Finalmente, mixing y exacta son condiciones sobre la estabilidad de la densidad estacionaria.

3.1. Medidas Invariantes

Definición 3.1.1. (*Medidas Invariantes Sobre S*) Si $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$ donde $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es una transformación medible y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

Observe que la preservación de la medida depende de transformación S como de la medida μ . Esta relación queda explícita cuando se dice que la medida μ es invariante bajo la transformación S .

Teorema 3.1.1. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación no singular, y \mathcal{P} el operador de Perron-Frobenius asociado con S . Considere $f \in L^1$ entonces μ_f una medida dada por

$$\mu_f = \int_A f(x) \mu(dx) \quad (3.1)$$

Es invariante si y solo si es un punto fijo de \mathcal{P}

Demostración. Probemos la suficiencia de la propocición. Se asume la invarianza de la medida μ_f . Entonces, por la definición de medida invariante se tiene

$$\mu_f(A) = \mu_f(S^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Lo cual por definición es

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A} \quad (3.2)$$

Sin embargo, por la definición del operador de Perron-Frobenius, se tiene

$$\int_{S^{-1}} f(x)\mu(dx) = \int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A} \quad (3.3)$$

Comparando (3.2) con (3.3) se tiene que

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx)$$

por lo tanto

$$f = \mathcal{P}f$$

Si $\mathcal{P}f = f$ para algun $f \in L^1 \geq 0$ entonces, se tiene

$$\begin{aligned} f &= \int_A f\mu(dx) \\ &= \mu_f(A) \\ &= \mathcal{P}f \\ &= \int_{S^{-1}(A)} f\mu(dx) \\ &= \mu_f(S^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\mu_f(A) = \mu_f(S^{-1}(A))$$

Y por tanto, S preserva la medida. \square

Observación La medida es invariante sii $\mathcal{P}1 = 1$

Ejemplo 3.1.1. Considere la transformación r -ardica, presentada en el ejemplo (2.17)

$$S(x) = rx \quad (\text{mod } 1)$$

donde $r > 1$ es un entero. Recordemos que para $[0, x] \subset [0, 1]$ se tiene que

$$S^{-1}([0, x]) = \cup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r} \right]$$

El operador de Perron-Frobenius para esta transformación está definido como

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right)$$

así

$$\mathcal{P}1 = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} 1 = 1$$

Así la función 1 es un punto fijo, debido al teorema ?? transformación r -árdica es invariante.

3.2. Transformaciones Ergódicas

Que el operador de Frobenius-Perron \mathcal{P} asociado a S tenga una órbita estacionaria. O equivalentemente, Que una transformación S tenga una medida invariante, no implica que S tenga propiedades estadísticas interesantes. Por ejemplo, si S es la identidad sobre \mathcal{X} , ósea, $S(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$ entonces

Para todo $A \subset \mathcal{X}$, y, en consecuencia, $\mathcal{P}f = f$ para todo $f \in L^1$. Y claramente, esta transformación no es interesante. Sin embargo, si se mantiene para un subconjunto A de \mathcal{X} , entonces la transformación puede ser estudiada separadamente sobre los conjuntos A o su complemento. Considerando las órbitas de x^0 la ecuación implica que los elementos de A son mapeados en sí mismo y que ningún elemento del complemento son mapeados en A . Un conjunto invariante que cumpla la condición anterior necesariamente modulo cero, motiva la siguiente definición.

Definición 3.2.1 (Transformaciones Ergódicas). *Si para cada conjunto invariante $A \in \mathcal{A}$ se cumple $\mu(A) = 0$ o $\mu(\mathcal{X} \setminus A)$*

Observación Si S es ergódica se dice que todos los conjuntos invariantes son subconjuntos *triviales* de \mathcal{X} .

Teorema 3.2.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación no singular. S es ergódico si y solo si, para cada función medible $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(S(x)) = f(x) \quad \text{para casi todos los } x \in \mathcal{X} \quad (3.4)$$

Implica que f es constante c.s

Demostración. Probemos que ergodicidad implica f es constante. Se asume que f no es una función constante. Sea un número real r tal que $r \in [a, b]$ donde a y b son el mínimo y máximo de S . Entonces, existe algún r tal que

$$A = \{x : f(x) \leq r\} \quad \text{y} \quad B = \{x : f(x) > r\}$$

que tiene medida positiva. Obsérvese que $\mathcal{X} = A \cup B$ y que los conjuntos son invariantes debido a

$$\begin{aligned} S^A &= \{x : S(x) \in A\} \\ &= \{x : f(S(x)) \leq r\} \\ &= \{x : f(x) \leq r\} \\ &= A \end{aligned}$$

De modo similar para B

$$\begin{aligned} S^B &= \{x : S(x) \in B\} \\ &= \{x : f(S(x)) > r\} \\ &= \{x : f(x) > r\} \\ &= B \end{aligned}$$

Como los conjuntos A y B son invariantes y tiene medida positiva ambos conjuntos, S no es ergódico. Por lo tanto se tiene una contradicción derivada de suponer que f no es constante. Se proba la implicación inversa. Se asume que S no es ergódico, por lo tanto debe de existir un conjunto no-trivial que sea invariante. Siendo $f = \mathbb{1}_A$ y como A es no-trivial entonces f no es una función constante. Sin embargo, como $A = S^{-1}(A)$ se tiene

$$\begin{aligned} f(S(x)) &= \mathbb{1}_A(S(x)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } A \in S(x) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } S^{-1}(A) \in x \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{S^{-1}(A)}(x) \\ &= \mathbb{1}_A(x) \\ &= f(x) \text{ c.s} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación no singular y \mathcal{P} el operador de Perron-Frobenius asociado a S . Si S es ergódico, entonces existe a lo sumo una densidad estacionaria f_* de \mathcal{P} y $f_*(x) > 0$ c.s entonces S es ergódico. Adicionalmente, Si existe una única densidad estacionaria f_* de \mathcal{P} y $f_*(x) > 0$ c.s entonces S es ergódico.

Demostración. Asumimos que S es ergódico y que f_1 y f_2 son 2 diferentes densidades estacionarias de \mathcal{P} . Si $g = f_1 - f_2$ entonces por la linealidad de \mathcal{P} se tiene

$\mathcal{P}g = g$. Por lo tanto, el teorema 2.1 g^+ y g^- ambas son densidades estacionarias de \mathcal{P}

$$\mathcal{P}g^+ = g^+ \quad y \quad \mathcal{P}g^- = g^- \quad (3.5)$$

Por hipótesis, f_1 y f_2 no solo son diferentes también son densidades por lo tanto

$$g^+ \neq 0 \quad y \quad g^- \neq 0$$

Los conjuntos

$$A = \text{sop } g^+ = \{x : g^+(x) > 0\}$$

y

$$B = \text{sop } g^- = \{x : g^-(x) > 0\}$$

Dado que A es el soporte de la parte positiva de g y B el soporte de la parte negativa entonces su intersección es vacía. Por lo tanto, son conjuntos disjuntos y de medida positiva. Por la proposición (3.5) se tiene.

$$A \subset S^{-1}(A) \quad y \quad B \subset S^{-1}(B)$$

Como A y B son conjuntos disjuntos entonces $S^{-1}(A)$ y $S^{-1}(B)$ son disjuntos también. Por lo tanto aplicando sucesivamente REFE se tiene

$$A \subset S^{-1}(A) \subset S^{-2}(A) \dots \subset S^{-n}(A)$$

Y

$$B \subset S^{-1}(B) \subset S^{-2}(B) \dots \subset S^{-n}(B)$$

Entonces, $S^{-n}(A)$ y $S^{-n}(B)$ son disjuntos para todo n . Ahora definimos dos conjuntos como

$$\bar{A} = \cap_{n=0}^{\infty} (S^{-n}(A)) \quad y \quad \bar{B} = \cap_{n=0}^{\infty} S^{-n}(B)$$

Estos dos conjuntos \bar{A} y \bar{B} son disjuntos tambien. Además son invariantes ya que

$$S^{-1}(\bar{A}) = \cap_{n=0}^{\infty} (S^{-n}(A)) = \cap_{n=1}^{\infty} S^{-n}(A) = \bar{A}$$

y

$$S^{-1}(\bar{B}) = \cap_{n=0}^{\infty} (S^{-n}(B)) = \cap_{n=1}^{\infty} S^{-n}(B) = \bar{B}$$

Ni \bar{A} ni \bar{B} son conjuntos de media cero ya que ni A ni B son de media cero. Por lo tanto \bar{A} y \bar{B} son conjuntos no-triviales; contradiciendo la ergodicidad de S . Así la primera parte de teorema queda probada. Se demostrará la segunda porción del teorema, por hipótesis $f_* > 0$ es la única densidad que satisface $\mathcal{P}f_* = f_*$, pero como S no es ergódico, entonces existe conjuntos no triviales tal que

$$S^{-1}(A) = A$$

y junto a $\mathcal{K} - A$

$$S^{-1}(B) = B$$

Con eso dos conjuntos A y B se puede escribir $f_* = \mathbb{I}_A f_* + \mathbb{I}_B f_*$ entonces

$$\mathbb{I}_A f_* + \mathbb{I}_B f_* = \mathcal{P}(\mathbb{I}_A f_*) + \mathcal{P}(\mathbb{I}_B f_*)$$

La función $\mathbb{I}_B f_*$ es igual a cero en el conjunto $\mathcal{X} - B = A = S^{-1}(A)$. Entonces, por la proposición (2.10) $\mathcal{P}(\mathbb{I}_B f_*)$ es igual a cero en $B = \mathcal{X} - A$. Entonces la igualdad?? implica que

$$\mathbb{I}_A f_* = \mathcal{P}(\mathbb{I}_A f_*) \quad y \quad \mathbb{I}_B f_* = \mathcal{P}(\mathbb{I}_B f_*)$$

Así como f_* es positivo en A y en B , se puede reemplazar $\mathbb{I}_A f_*$ por $f_A = \mathbb{I}_A / \|\mathbb{I}_A f_*\|$ y $\mathbb{I}_B f_*$ por $f_B = \mathbb{I}_B / \|\mathbb{I}_B f_*\|$ en el último para de ecuaciones obteniendo

$$f_A = \mathcal{P}(f_A) \quad y \quad f_B = \mathcal{P}(f_B)$$

Esto implica que existen dos densidades estacionarias de \mathcal{P} , contradiciendo la hipótesis por lo tanto si hay una única densidad estacionaria f_* de \mathcal{P} entonces es ergódica. \square

Teorema 3.2.3 (Teorema Birkhoff). *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si la medida μ es invariante, entonces existe una función integrable f^* tal que*

$$f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x)) \quad \text{para la mayoría } x \in \mathcal{X} \quad (3.6)$$

Teorema 3.2.4. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito y $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación invariante y ergódica. Entonces, para cualquier f , el promedio de f sobre la trayectoria es igual al promedio de f sobre todo el espacio casi seguramente. Eso es,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x)) = \frac{1}{\mu(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \quad \text{c.s.} \quad (3.7)$$

Demostración. Del teorema (3.6) que dice que f^* es constante casi seguramente. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f^*(x) \mu(dx) &= f^* \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \\ &= f^* \mu(\mathcal{X}) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Despejando

$$f^*(x) = \frac{1}{\mu(\mathcal{X})} \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \quad \text{c.s.}$$

\square

Una de la consecuencias más citadas de este teorema, se presenta a continuación

Corolario 3.2.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de media finito y una medida $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ invariante y ergódica. Entonces para cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$ $\mu(A) > 0$ y la mayoría de los puntos $x \in \mathcal{X}$ la fracción de los puntos $\{S^k(x)\}$ en A tal que $k \rightarrow \infty$ viene dado por $\mu(A)/\mu(\mathcal{X})$*

Demostración. Usando la función característica \mathbb{I}_A de A , sobre la fracción de puntos de $\{S^k(x)\}$ en A es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(S^k(x))$$

Sin embargo de (3.7) esto implica $\mu(A)/\mu(\mathcal{X})$ □

Observación 3.2.1. *El corolario 3.2 traduce que cada conjunto de medida positiva es visitado una infinidad de veces por las iteraciones para casi todos los puntos $x \in \mathcal{X}$. Es un resultado caso especial del **Teorema de Recurrencia de Poicaré***

3.3. Transformaciones Mezclantes y Exactas

Definición 3.3.1 (Transformación Mezclante). *Si S cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{para todo } A, B \in \mathcal{A} \quad (3.8)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un espacio de medida probabilidad, y $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación que preserva la medida.

La definición de mezclante puede ser interpretada de la siguiente forma. Los puntos que partieron en A y finalizaron en B después de n iteraciones su medida está determinada por el producto de las medidas de A y de B . Adicionalmente, es independiente de la posición inicial de A y de B en \mathcal{X} .

Observación Es fácil de ver cualquier transformación de mezclante esta deberá ser ergódica. Se asume que $B \in \mathcal{A}$ es un conjunto invariante, en que se cumple $B = S^{-1}(B)$ y, aún más, $B = S^{-n}(B)$ por inducción. Se toma $A = \mathcal{X}$ para que $\mu(A \cap B) = \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(B)$. Sin embargo, de que debe tener y por lo tanto es o bien 0 o 1, lo que demuestra la ergodicidad

Definición 3.3.2 (Transformación Exactas). *Si S cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S^n(A)) = 1 \quad \text{para cada } A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0 \quad (3.9)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un espacio de medida probabilidad, y $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación que preserva la medida.

Para ejemplificar la diferencia entre los tipos de transformación se procede a mostrar las seis primeras iteraciones de un número aleatorio de 1000 puntos distribuidos en el conjunto de $\mathcal{X} = [0, 1] \times [0, 1]$

Transformación Ergódica

$$S(x, y) = (\sqrt{2} + x, \sqrt{3} + y) \pmod{1} \quad (3.10)$$

Transformación Mezclante

$$S(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod{1} \quad (3.11)$$

Transformación Exacta

$$S(x, y) = (3x + y, x + 3y) \pmod{1} \quad (3.12)$$

3.4. Taxonomía de las Transformaciones

Los conceptos desarrollados en las secciones previas para clasificar varios niveles de irregularidad en el comportamiento están escritos en términos de comportamiento de sucesiones de conjuntos. Las pruebas de ergodicidad, mezclante o exacta usando las definiciones son difíciles. En efecto los ejemplos presentados hasta ahora ilustran estos conceptos, no son rigurosas pruebas.

En esta sección se reformulará los conceptos de ergodicidad, mezclante y exacta en términos del comportamiento de sucesiones de iteraciones de los operadores de Perron-Forbenius y Koopman. Para mostrar cómo pueden ser usadas para determinar si una transformación S junto con una medida invariante es ergódica, mezclante o exacta. Se requerirá nociones sobre convergencia Cesaro, Débil y Fuerte.

Teorema 3.4.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una transformación que preserva la medida y P el operador de Perron-Frobenius correspondiente a S . Entonces:*

La transformación S es ergódica si y solo si la sucesión converge Cesaro a 1 para todo $f \in D$.

La transformación S es mezclante si y solo si la sucesión converge débilmente a 1 para todo $f \in D$.

La transformación S es exacta si y solo si la sucesión converge fuertemente a 1 para todo $f \in D$.

Observación Note que como el operador \mathcal{P} es lineal, la convergencia de la sucesión $\{\mathcal{P}^n f\}$ a 1 para $f \in D$ es equivalente a la convergencia de $\langle \mathcal{P}^n f, 1 \rangle$ a $\langle f, 1 \rangle$ para cada $f \in L^1$. Esta observación es válida para todos los tipos de convergencia: Cesaro, Débil, Fuerte. Por lo tanto, se reescribe el teorema.

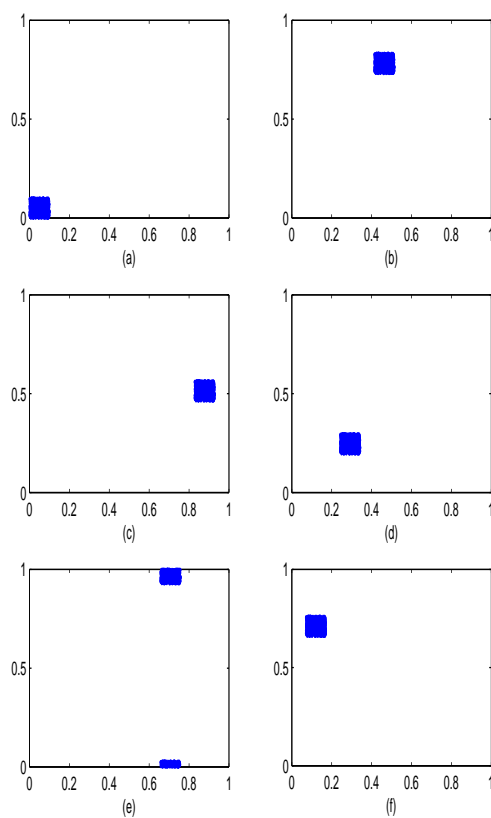


Figura 3.1: Iteraciones sucesivas de la transformación 3.10. Note como se mueve la distribución de puntos en forma de cuadrado sobre el espacio

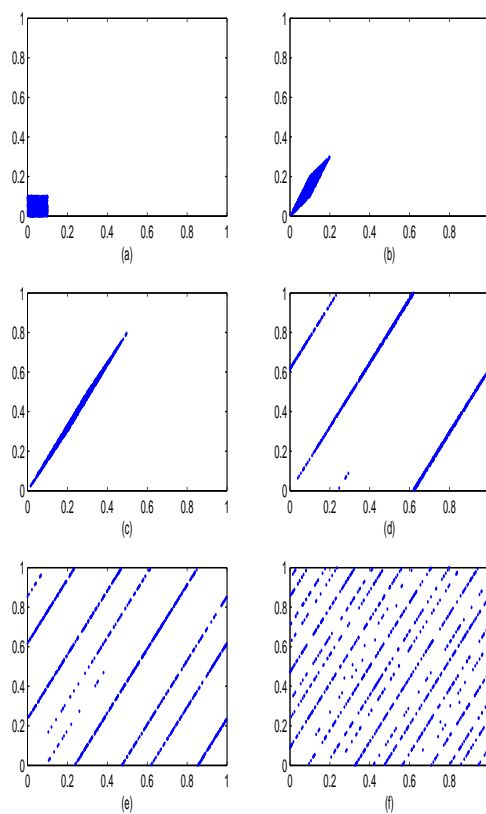


Figura 3.2: Iteraciones sucesivas de la transformación 3.11. Note como se esparce la distribución de puntos sobre el espacio

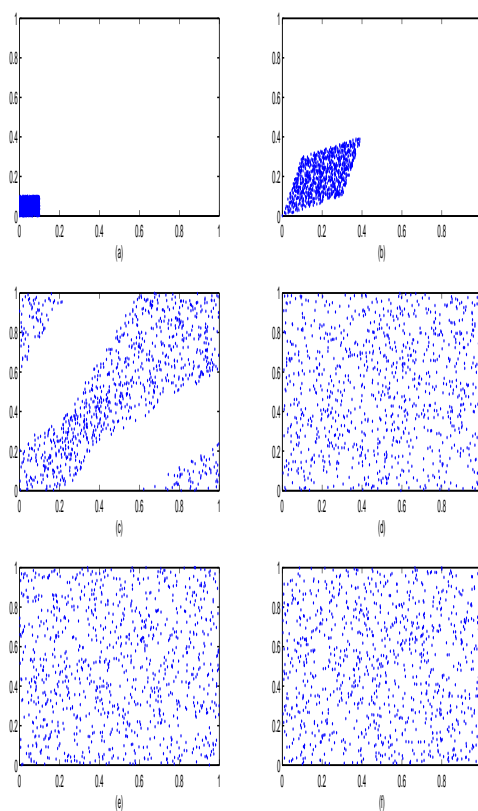


Figura 3.3: Iteraciones sucesivas de la transformación 3.12. Note como se esparce la distribución de puntos sobre el espacio

Teorema 3.4.2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ una medida que preserva la transformación y \mathcal{P} el operador de Perron-Frobenius correspondiente a S . Entonces:

La transformación S es ergódica si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \mathcal{P}^k f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \quad f \in L^1, g \in L^\infty$$

La transformación S es mezclante si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}^k f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \quad f \in L^1, g \in L^\infty$$

La transformación S es exacto si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}^k f - \langle f, 1 \rangle\| = 0 \quad f \in L^1$$

Demostración. Se probará únicamente la condición de mezclante. Se asume la condición de transformación S mezclante entonces por definición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap S^n B) = \mu(A)\mu(B)$$

Reescribiendola en su forma integral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_A(x) \mathbb{I}_B(S^n(x)) \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_A(x) \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_B(x) \mu(dx)$$

Aplicando la definición del operador de Koopman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_A(x) U^n \mathbb{I}_B(x) \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_A(x) \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_B(x) \mu(dx)$$

Aplicando la definición de producto escalar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbb{I}_A, U^n \mathbb{I}_B \rangle = \langle \mathbb{I}_A, 1 \rangle \langle 1, \mathbb{I}_B \rangle$$

Usando la propiedad (2.19) el operador de Perron-Frobenius es adjunto del operador de Koopman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}^n \mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B \rangle = \langle \mathbb{I}_A, 1 \rangle \langle 1, \mathbb{I}_B \rangle$$

Con lo que queda demostrado para $f = \mathbb{I}_A$ y $g = \mathbb{I}_B$.

Supongamos que $\tilde{A} = \cup_{i=1}^n A_i$, $\tilde{B} = \cup_{j=1}^m B_j$ y $\nu(A_i) = \lambda_k \delta_{ki} \mu(A_i)$ donde δ_{ik} es la delta de Kronecker. Nótese que ν define una medida; supongase que S es mezclante, en consecuencia.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\tilde{A} \cap S^{-1}(\tilde{B})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\cup_{i=1}^l A_i \cap S^{-1}(\cup_{j=1}^m B_j))$$

Sustituyendo la definición de ν

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_h \delta_{hi} \lambda_k \delta_{kj} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap S^{-1}(B_j))$$

Propiedades de la medida

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \lambda_h \delta_{hi} \lambda_k \delta_{kj} \mu(A_i \cap S^{-1}(B_j))$$

Por linealidad

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \mu(A_i \cap S^{-1}(B_j))$$

Evaluando las deltas de kronecker

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \int_X \mathbb{1}_{A_i}(x) \mathbb{1}_{B_j}(x) (S^n(x)) \mu(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^l \mathbb{1}_{A_i}(x) \sum_{j=1}^m U^n \mathbb{1}_{B_j}(x) \mu(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x), \sum_{j=1}^m U^n \lambda_j \mathbb{1}_{B_j}(x) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sum_{i=1}^l \mathcal{P}^n \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x), \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbb{1}_{B_j}(x) \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, como ν es mezclante se tiene

$$\begin{aligned}
\nu(A)\nu(B) &= \nu(\cup_{i=1}^l A_i)\nu(\cup_{j=1}^m B_j) \\
&= \lambda_h \delta_{hi} \sum_{i=1}^l \mu(A_i) \lambda_k \delta_{kj} \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^l \lambda_i \mu(A_i) \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^l \lambda_i \int_{\mathcal{X}} \mathbb{I}_A(x) \mu(dx) \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_X \mathbb{I}_B(x) \mu(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbb{I}_A(x) \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbb{I}_B(x) \mu(dx) \\
&= \langle \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}, 1 \rangle \langle 1, \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbb{I}_{B_j} \rangle
\end{aligned}$$

Y por lo tanto se cumple para funciones simples. Adicionalmente, para cada $g \in L^\infty$ es convergente a un límite de funciones simples en $g_k \in \infty$ y para cada función $f \in L^1$ tiene convergencia fuertemente a la sucesión de funciones simples $f_h \in L^1$. Se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned}
| \langle \mathcal{P}^n f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle | &\leq | \langle \mathcal{P} f, g \rangle - \langle \mathcal{P}^n f_k, g_k \rangle | \\
&\quad + | \langle \mathcal{P}^n f_k, g_k \rangle - \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle | \\
&\quad + | \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle |
\end{aligned}$$

Si $\|f_k - f\| \leq \epsilon$ y $\|g_k - g\| \leq \epsilon$ entonces se satisface

$$\begin{aligned}
| \langle \mathcal{P} f, g \rangle - \langle \mathcal{P}^n f_k, g_k \rangle | &\leq | \langle \mathcal{P}^n f, g \rangle - \langle \mathcal{P}^n f_k, g \rangle | \\
&\quad + | \langle \mathcal{P}^n f_k, g \rangle - \langle \mathcal{P}^n f_k, g_k \rangle | \\
&\leq \epsilon \|g\|_{L^\infty} + \epsilon \|f_k\| \\
&\leq \epsilon (\|g\|_{L^\infty} + \|f\| + \epsilon)
\end{aligned}$$

Se forma analoga se prueba

$$| \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle | \leq \epsilon (\|g\|_{L^\infty} + \|f\| + \epsilon)$$

Como estos términos son arbitrariamente pequeños para ϵ . Finalmente, el término

$$| \langle \mathcal{P}^n f_k, g_k \rangle - \langle f_k, 1 \rangle \langle 1, g_k \rangle |$$

Converge a cero para $n \rightarrow \infty$. Esto completa la prueba de que es mezclante implica $\langle \mathcal{P}^n f, g \rangle \rightarrow \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle$ para todo $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$. La implicación opuesta se demuestra tomando el conjunto $f = \mathbb{I}_A$ y $g = \mathbb{I}_B$. \square

Capítulo 4

Resultados Preliminares

4.1. Funciones de Variación Acotada

Definición 4.1.1 (Valor medio de f , $m(f)$). *Se define como*

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

De una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ real.

Definición 4.1.2 (Varianza, $D^2(f)$). *Se define como*

$$D^2(f) = m\left((f - m(f))^2\right)$$

Definición 4.1.3 (Variación acotada, $s_n(f)$). *Se define como*

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad (4.1)$$

Siendo f una función real definida en el intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$ y sea $[a, b]$ un subintervalo de Δ . Así mismo, considerando la partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (4.2)$$

En donde todas las posibles sumas $s_n(f)$, corresponden a todas la divisiones de $[a, b]$, son acotadas por un número que no depende de la subdivisión.

Definición 4.1.4 (Variación Total, $\bigvee f(x)$). *Se define como*

$$\bigvee_a^b f = \sup s_n(f) \quad (4.3)$$

donde el supremo se toma sobre todas la posibles particiones de la forma

Ejemplo 4.1.1. Se asume que f es una función monótona, o sea, creciente o decreciente. Entonces

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \theta[f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

donde

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{para } f \text{ creciente.} \\ -1 & \text{para } f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned} s_n(f) &= \sum_{i=1}^n \theta[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \theta \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \theta[f(x_n) - f(x_0)] \\ &= |f(b) - f(a)| \end{aligned}$$

por lo tanto, cualquier función se define y monótona en un intervalo cerrado es de variación acotada.

La Variación de la Suma Sea f y g sea una variación acotada sobre $[a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned} s_n(f+g) &= \sum_{i=1}^n |f(x_i) + g(x_i) - [f(x_{i-1}) + g(x_{i-1})]| \\ &= \sum_{i=1}^n |[f(x_i) - f(x_{i-1})] + [g(x_i) - g(x_{i-1})]| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &= s_n(f) + s_n(g) \\ &\leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g \end{aligned}$$

Y, en consecuencia

$$\bigvee_a^b (f+g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$$

Si f_1, \dots, f_n es una variación acotada sobre $[a, b]$, entonces por inducción argumento

$$\bigvee_a^b (f_1 + \dots + f_n) \leq \bigvee_a^b f_1 + \dots + \bigvee_a^b f_n \quad (4.4)$$

de deduce inmediatamente.

Variación sobre la union de intervalo. Se asume que $a < b < c$ y que la función f es una variación acotada sobre $[a, b]$ como también sobre $[b, c]$. Considere un porción de los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b = y_0 < y_1 < \dots < y_m = c \quad (4.5)$$

y las correspondientes sumas

$$\begin{aligned} s_{[a,b]}^n(f) &= \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ s_{[b,c]}^m(f) &= \sum_{i=1}^m |f(y_i) - f(y_{i-1})| \end{aligned}$$

Es evidente que la unión de la partición del intervalo de $[a, b]$. Entonces

$$s_{[a,b]}^n(f) + s_{[b,c]}^m(f) = s_{[a,c]}^n(f) \quad (4.6)$$

Donde la parte del lado derecho de denota la suma correspondiente a la variación de f sobre $[a, b]$. Observe que esta partición contiene un punto adicional, a saber b . Sin embargo, cualquier punto adicional en la suma s_n sólo puede aumentar s_n , ya que estamos interesados en el supremo, esto es irrelevante. De la ecuación, se tiene

$$\bigvee_a^b f + \bigvee_b^c f = \bigvee_a^c f$$

Nuevamente usando inducción sobre el argumento en la última fórmula se tiene

$$\bigvee_{a_0}^{a_1} f + \dots + \bigvee_{a_{n-1}}^{a_n} f = \bigvee_{a_0}^{a_n} f \quad (4.7)$$

donde $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ y f es una variación acotada sobre $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \dots, n$

Variación de la composición de funciones Sea $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ es monotoma creciente o monotoma decreciente sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada. La composición $f \circ g$ esta bien definida para cualquier partición de $[\alpha, \beta]$

$$\alpha = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = \beta \quad (4.8)$$

la correspondiente suma es

$$s_n(f \circ g) = \sum_{i=1}^n |f(g(\sigma_i)) - f(g(\sigma_{i-1}))|$$

Observe que, debido a la monotonía de g , los puntos $g(\sigma_i)$ definen una partición de $[a, b]$. Así $s_n(f \circ g)$ es una suma determinada por la variación de f y, por lo tanto,

$$s_n(f \circ g) \leq \bigvee_a^b f$$

para cualquier partición. Consecuencia,

$$\bigvee_\alpha^\beta f \circ g \leq \bigvee_a^b f. \quad (4.9)$$

Variación del Producto Sea f una variación acotada sobre $[a, b]$ y sea la función g de clase C^1 sobre $[a, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} s_n(fg) &= \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_i)g(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) + f(x_{i-1})g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^n |g(x_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) + f(x_{i-1})(g(x_i) - g(x_{i-1}))| \\ &= \sum_{i=1}^n |g(x_i)||f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1})||g(x_i) - g(x_{i-1})| \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio, se tiene

$$\begin{aligned} &\leq (\sup |g|) s_n(f) + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})g'(\tilde{x}_i)|(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq (\sup |g|) \bigvee_a^b f + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})g'(\tilde{x}_i)|(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Con $\tilde{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Observe que el último término que se suma es una aproximación de la integral de Riemann del producto $|f(x)g'(x)|$. Así, la variación

del producto $f(x)g(x)$ viene dada por la expresión

$$\bigvee_a^b fg \leq (\sup |g|) \bigvee_a^b f + \int_a^b |f(x)g'(x)|dx \quad (4.10)$$

En particular si $f = 1$,

$$\bigvee_a^b g \leq \int_a^b |g'(x)|dx \quad (4.11)$$

Sin embargo, en el caso de s_n entonces la igualdad es estricta a la integral de Riemann de la integral de g' .

Desigualdad de Yorke Sea f definido en $[0, 1]$ y sea de variación acotada en $[a, b] \subset [0, 1]$. Se quiere evaluar la variación del producto de f y la función característica $\mathbb{I}_{[a, b]}$. Sin pérdida de generalidad, se asume que la partición del intervalo $[0, 1]$ siempre contiene los puntos a y b . Entonces

$$s_{[0,1]}^n(f_n \mathbb{I}_{[a,b]}) \leq s_{[a,b]}^n(f) + |f(a)| + |f(b)| \quad (4.12)$$

Sea c un arbitrario punto en $[a, b]$. Entonces, de la inecuación anterior

$$\begin{aligned} &= s_{[a,b]}^n(f) + |(f(b) - f(c)) + f(c)| + |(f(c) + f(a)) - f(c)| \\ &\leq s_{[a,b]}^n(f) + |f(b) - f(c)| + |f(c) - f(a)| + 2|f(c)| \\ &\leq 2 \bigvee_a^b f + 2|f(c)| \end{aligned}$$

Siempre es posible elegir un punto c tal que

$$|f(c)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|dx$$

De modo que

$$s_{[a,b]}^n(f_n \mathbb{I}_{[a,b]}) \leq 2 \bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a} \int_a^b |f(x)|dx$$

Entonces queda

$$\bigvee_0^1 f \mathbb{I}_{[a,b]} \leq 2 \bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a} \int_a^b |f(x)|dx \quad (4.13)$$

4.2. Principio de Selección de Helly

Antes de enunciar el principio de Helly, se probaran unos lemas que serán útiles en la demostración del teorema de Lasota-Yoker.

Lema 4.2.1. Si $f \in C^1[a, b]$ con $|f'(x)| > 0$, entonces f es monótona sobre $[a, b]$.

Demostración. Sea $f \in C^1[a, b] \Rightarrow f' \in C[a, b]$. Por hipótesis, $f' \in (-\infty, 0)$ o $f' \in (0, \infty)$. Y como f' es continua, entonces solo es posible $f' < 0 \forall x \in [a, b]$ o $f' > 0 \forall x \in [a, b]$, en otra palabra que f' sea monótona. \square

Lema 4.2.2. Sea f un función diferenciable uno a uno, y sea $g = f^{-1}$. Si $|f'| \geq \alpha$ entonces $|g'| \leq \frac{1}{\alpha}$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x \\ f'(g(x))g'(x) &= 1 \\ |f'(g(x))| &= \frac{1}{g'(x)} \\ &\geq \alpha \end{aligned}$$

por lo tanto $|g'(x)| \leq \frac{1}{\alpha}$

\square

Lema 4.2.3. Si $\bigvee_0^1 f \leq a$ y $\|f\| \leq b$, donde $\|f\| = \int_0^1 |f|$ entonces $|f(x)| \leq a+b$ $\forall x$

Demostración. Si $\|f\| \leq b \Rightarrow \exists \alpha$ tal que $|f(\alpha)| \leq b$. Si no, entonces $|f(x)| > b \forall x \in [0, 1]$ y por lo tanto $\int_0^1 |f| > \int_0^1 b = b$ y tenemos una contradicción. Por lo tanto $|f(x) - f(\alpha)| \leq \bigvee_0^1 f \leq a$ por lo tanto

$$|f(x)| - |f(\alpha)| \leq a$$

y

$$|f(x)| \leq a + |f(\alpha)|$$

$$|f(x)| \leq a + b$$

\square

Teorema 4.2.1 (Helly). Sea \mathcal{F} una colección infinita de funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K \quad \bigvee_{[a,b]} f \leq K \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ que converge a todo punto $x \in [a, b]$ a una función f_* de variación acotada, tal que $\bigvee_{[a,b]} f_* \leq K$

4.3. Teorema de Mazur

Definición 4.3.1 (Clausura, \overline{E}). Si $\overline{E} = \{x \in \mathcal{X} : \forall B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset\}$

Observación 4.3.1. Equivalentemente la clausura se puede definir mediante $\overline{E} = E \cup E'$ donde E' es el conjunto de los puntos de acumulación de E . También, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E .

Definición 4.3.2 (Totalmente acotado). Si $\forall \epsilon > 0, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ tal que $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon) \supseteq \mathcal{X}$ siendo (\mathcal{X}, d) un espacio métrico.

Observación 4.3.2. Se cumple que todo espacio totalmente acotado es también acotado. Además, todo compacto es totalmente acotado. Esta propiedad es útil precisamente para demostrar compacidad, pues se tiene que existe equivalencia entre ser compacto y ser totalmente acotado y completo.

De hecho, para muchas demostraciones es precisamente ésta caracterización de compacidad la que se utiliza.

Definición 4.3.3 (Relativamente compacto). Si toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que converge en X . Siendo S un subconjunto de un espacio topológico \mathcal{X}

Observación 4.3.3. Para espacios $m\tilde{A}\otimes$ tricos tenemos definición equivalente. A es relativamente compacto si y solo si su clausura es un compacto

Definición 4.3.4 (Envolvente Convexa, $\text{co}(A)$). Es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A , es decir, el conjunto de todas las sumas $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ donde $x_i \in A$, $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$ para un n arbitrario.

Teorema 4.3.1 (Mazur). Sea \mathcal{X} un espacio de Banach con $A \subset \mathcal{X}$ es un compacto relativo, entonces $\overline{\text{co}}(A)$ es compacto.

Demostración. Por la definición de espacio Banach, $\overline{\text{co}}(A)$ es completo así que $\text{co}(A) \subset \mathcal{X}$. Por consiguiente, solo queda probar que $\text{co}(A)$ es totalmente acotado.

Como A es totalmente acotado entonces \overline{A} es compacto. Adicionalmente, se escoje $\epsilon > 0$, por lo tanto existe un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\epsilon}{4})$$

Sea $B = co\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y note que (eso no lo entiendo)

$$\overline{co}(A) \subset \cup_{i=1}^n B(co(A), \frac{\epsilon}{4})$$

Sea $v : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$g \in A \Rightarrow \|g - x_{v(g)}\| < \frac{\epsilon}{4}$$

Para $t \in co(A)$

$$t = \sum_{i=1}^m a_i t_i$$

donde $t_i \in A$, $a_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^m a_i = 1$
entonces

$$\begin{aligned} \|t - \sum_{i=1}^m a_i x_{v(t_i)}\| &= \|\sum_{i=1}^m a_i (t_i - x_{v(t_i)})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |a_i| \|x_{v(t_i)}\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

Esto es para $t \in co(A)$

$$d(x, B) < \frac{\epsilon}{4}$$

En consecuencia, $co(A) \subset \cup_{i=1}^n B(B, \frac{\epsilon}{4})$ entonces $\cup_{i=1}^n B(co(A), \frac{\epsilon}{4}) \subset \cup_{i=1}^n B(B, \frac{\epsilon}{4})$
y por lo tanto $\overline{co}(A) \subset \cup_{i=1}^n B(B, \frac{\epsilon}{2})$

Ahora, la transformación

$$\mu : (a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

es una transformación continua de un conjunto compacto

$$[0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = \prod_{i=1}^n [0, 1] \text{ sobre } B$$

En consecuencia, B es un compacto y por lo tanto es totalmente acotado.
Entonces existen $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ tal que

$$B \subset \cup_{i=1}^n B(b_i, \frac{\epsilon}{2})$$

Como $\overline{co}(A) \subset \cup_{i=1}^n B(B, \frac{\epsilon}{2}) \subset \cup_{i=1}^n B(b_i, \frac{\epsilon}{2})$. $\overline{co}(A)$ es totalmente acotado y por lo tanto es compacto

□

4.4. Teorema de Kakutani-Yosida

En esta sección se revisará algunas propiedades resaltantes de los promedios definidos como

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k f \quad f \in L^1 \quad (4.14)$$

Se asume que un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ y operador $\mathcal{P} : L^1 \rightarrow L^1$ de Markov.

Proposición 4.4.1. *Para todo $f \in L^1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n f - \mathcal{P} A_n f\| = 0 \quad (4.15)$$

Demostración. Por definición del promedio $A_n f$ se tiene

$$\begin{aligned} A_n f - \mathcal{P} A_n f &= \left(\frac{1}{n} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k f - \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P} \mathcal{P}^k f \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P} (f - \mathcal{P} f) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|A_n f - \mathcal{P} A_n f\| = \left\| \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P} (f - \mathcal{P} f) \right\|$$

es una proposición Markov elemental tal que $\|\mathcal{P}^n f\| \leq \|f\|$ se tiene

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{1}{n} \right) \|f - \mathcal{P} f\| \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \right) (\|f\| + \|\mathcal{P} f\|) \end{aligned}$$

usando nuevamente la propiedad contractiva

$$\|A_n f - \mathcal{P} A_n f\| \leq \left(\frac{2}{n} \right) \|f\| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, esto completa la prueba.

□

Este resultado y el próximo resultado son casos especiales del teorema de teorema abstracto Kakutani-Yosida. Aunque antes se debe presentar la siguiente definición dual de convergencia en precompacto.

Definición 4.4.1. El conjunto \mathcal{F} es llamado fuertemente o débilmente precompacto si cada sucesión de funciones $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{F}$, contiene una subsección convergente fuertemente o débilmente $\{f_{\alpha_n}\}$ que converge a un $\bar{f} \in L^p$

Proposición 4.4.2. Si para $f \in L^1$ existe una subsucesión $\{A_{\alpha_n}f\}$ de la sucesión $\{A_n f\}$ que converge débilmente a $f_* \in L^1$, entonces $\mathcal{P}f_* = f_*$

Demostración. Como $\mathcal{P}A_{a_n}f = A_{a_n}\mathcal{P}f$ entonces $\{A_{a_n}\mathcal{P}f\}$ converge débilmente a $\mathcal{P}f_*$. Entonces $\{A_{a_n}\mathcal{P}f\}$ entonces tiene al mismo limite $\{A_{a_n}f\}$, Se tiene $\mathcal{P}f_* = f_*$ \square

Teorema 4.4.1 (Kakutani-Yosida). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{P} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un operador de Markov. Si para una funcion dada $f \in L^1$ la sucesión $\{A_n f\}$ es débilmente precompacta, entonces esta converge fuertemente para algún $f_* \in L^1$ que es un punto fijo de \mathcal{P} , a saber, $\mathcal{P}f_* = f_*$. Adicionalmente, si $f \in D$, entonces $f_* \in D$, de modo que f_* es una densidad estacionaria.

Demostración. Como $\{A_n f\}$ es debilmente precompacto, por hipótesis, entonces una subsucesión $\{A_{n_k} f\}$ que converge débilmente a algun $f_* \in L^1$. Ademas, por la proposición ?? se tiene que $\mathcal{P}f_* = f_*$

Se escribe $f \in L^1$ en la siguiente forma

$$f = (f - f_*) + f_* \quad (4.16)$$

Para un tiempo inicial se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ la función $f - f_*$ puede ser escrita en la siguiente forma

$$f - f_* = \mathcal{P}g - g + r \quad (4.17)$$

donde $g \in L^1$ y $\|r\| < \epsilon$. Asi de las ecuaciones (4.16) y (4.17) se tiene

$$A_n f = A_n(\mathcal{P}g - g) + A_n r + A_n f_*$$

Como $\mathcal{P}f_* = f_*$, $A_n f_* = f_*$ se obtiene

$$\begin{aligned} \|A_n f - f_*\| &= \|A_n(f - f_*)\| \\ &\leq \|A_n(\mathcal{P}g - g)\| + \|A_n r\| \end{aligned}$$

Por la proposición (4.15) se sabe que $\|A_n(\mathcal{P}g - g)\|$ converge fuertemente a cero cuando n tiende a infinito por hipótesis $\|A_n r\| \leq \|r\| < \epsilon$. Entonces para un n lo suficientemente largo se tiene

$$\|A_n f - f_*\| \leq \epsilon$$

ya que ϵ es arbitrario, esto prueba que $\{A_n f\}$ converge fuertemente a f_*

Esto muestra que $f \in D$, entonces $f_* \in D$. Por efinicion $f \in D$ es $f \geq 0$ y $\|f\| = 1$, entonces $\mathcal{P}f \geq 0$ y $\|\mathcal{P}f\| = 1$ y por lo tanto $\mathcal{P}^n f \geq 0$ y $\|\mathcal{P}^n f\| = 1$.

Por consecuencia $A_n f \geq 0$ y $\|A_n f\| = 1$, como $\{A_n f\}$ converge fuertemente a f_* se debe tener que $f_* \in D$. Se completo la demostración bajo la hipótesis de que la representación (4.17) siempre es posible para cualquier ϵ .

Para verificar esta suposición, se usara la versión simplificada del teorema de Hahn-Banach. Supongase que no existe un r tal que la ecuación (4.17) sea cierta. En ese caso entonces, $f - f_* \in \text{ov}(P - I)L^1(\mathcal{X})$ y entonces, por el teorema de Hahn-Banach, se tiene que existe g_0 tal que

$$\langle f - f_*, g_0 \rangle \neq 0 \quad (4.18)$$

y

$$\langle h, g_0 \rangle = 0 \quad \text{para todo } h \in \overline{(P - I)L^1(\mathcal{X})}$$

en particular

$$\langle (P - I)\mathcal{P}^j f, g_0 \rangle = 0$$

Entonces

$$\langle \mathcal{P}^{j+1} f, g_0 \rangle = \langle \mathcal{P}^j f, g_0 \rangle \quad j = 0, 1, \dots$$

y por inducción se tiene

$$\langle \mathcal{P}^j f, g_0 \rangle = \langle f, g_0 \rangle$$

y en consecuencias

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \langle \mathcal{P}^j f, g_0 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, g_0 \rangle = \langle f, g_0 \rangle$$

o

$$\langle A_n f, g_0 \rangle = \langle f, g_0 \rangle \quad (4.19)$$

Como $\{A_{\alpha_n} f\}$ se asumió que converge débilmente a f_* , se tiene

$$\lim_n \langle A_{\alpha_n} f, g_0 \rangle = \langle f_*, g_0 \rangle$$

y por (4.19)

$$\langle f, g_0 \rangle = \langle f_*, g_0 \rangle$$

es equivalente a

$$\langle f - f_*, g_0 \rangle = 0$$

Sin embargo, esto contradice (4.18) por lo tanto se puede concluir que la representación (4.17) es siempre posible. \square

El teorema anterior reduce el problema de la existencia de una densidad estacionaria f_* para el operador \mathcal{P} , es decir, $\mathcal{P}f_* = f_*$. Al problema de demostrar la precompacidad débil de la sucesión $\{A_n f\}$. En el caso especial del operador \mathcal{P} de Perron-Frobenius es suficiente demostrar la existencia de medidas invariantes.

Corolario 4.4.1. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{P} : L^1 \rightarrow L^1$ un operador de Markov. Si para algún $f \in D$ existe un $g \in L^1$ tal que

$$\mathcal{P}^n f \leq g \quad (4.20)$$

Para toda n , entonces existe un $f_* \in D$ tal que $\mathcal{P}f_* = f_*$, es decir, f_* es una densidad estacionaria.

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{P}^n f \leq g$ entonces

$$0 \leq A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k f \leq g$$

y, entonces, $|A_n f| \leq g$. Por el primer criterio de débilmente precompacto, entonces $\{A_n f\}$ es débilmente precompacto. Con lo cual se concluye el argumento. \square

Corolario 4.4.2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{P} : L^1 \rightarrow L^1$ un operador de Markov. Si para algún $f \in D$ existe $M > 0$ y $p > 1$ tal que

$$\|\mathcal{P}^n f\|_{L^p} \leq M \quad (4.21)$$

Para todo n , entonces existe un $f_* \in D$ tal que $\mathcal{P}f_* = f_*$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \|A_n f\|_{L^p} &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}^k f \right\|_{L^p} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathcal{P}^k f\|_{L^p} \\ &\leq \frac{1}{n} (nM) \\ &= M \end{aligned}$$

Se tiene por el segundo criterio de precompacto, $\{A_n f\}$ es débilmente precompacto. \square

Capítulo 5

Existencia de Medidas Invariantes

En este capítulo se demostrará el teorema de Lasota-Yorke para lo cual se desarrollarán previos en los capítulos pasados. Adicionalmente se mostrará un contraejemplo que muestra que la hipótesis $\inf |\tau'| > 1$ es esencial.

Definición 5.0.2 (Funciones a trozos \mathcal{C}^2, τ). *Si existe una partición $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 1$ del intervalo unitario para cada entero $i = 1, \dots, p$ que verifique los τ_i de τ para el intervalo abierto (a_{i-1}, a_i) es una función \mathcal{C}^2 . La función τ no tiene que ser continua en los puntos a_i*

El siguiente Teorema garantiza que para transformaciones de clase \mathcal{C}^2 que cumplan a trozos $\inf |\tau'| > 1$ admiten una medida invariante absolutamente continua

Teorema 5.0.2. *Sea $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función a trozos de clase \mathcal{C}^2 tal que $\inf |\tau'| > 1$. Entonces para cualquier $f \in L^1$ la sucesión*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f$$

Es convergente en norma a la función $f^ \in L^1$. El límite de la función cumple las siguientes propiedades:*

- a) $f \geq 0 \Rightarrow$
- b) $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$
- c) $\mathcal{P}_\tau f^* = f^*$ y en consecuencia la medida $d\mu^* = f^* dm$ es invariante bajo τ .
- d) La función f^* es de variación acotada, por otra parte, existe una constante c independiente de la elección inicial de f tal que la variación de el límite

f^* satisface la inecuación

$$\bigvee_0^1 f^* \leq c \|f\|$$

Demostración. Sea $s = \inf |\tau'|$ y por hipótesis, $s = \inf |\tau'| > 1$, se puede elegir un entero $N > 1$ tal que $s^N > 2$. Denotemos la función τ_i sobre los intervalos abiertos (a_{i-1}, a_i) sobre la partición $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p = 1$. Como el producto de funciones C^2 es C^2 entonces $\tau_i^2 = \tau_i \times \tau_i$ es C^2 en (a_{i-1}, a_i) . Por lo tanto τ_i^2 es una función a trozos. Así mismo, por un argumento análogo al anterior $\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \times \tau_i$ es una función a trozos sobre la partición $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p = 1$. Sea $\phi = \tau^N$ una función C^2 a trozos, b_0, \dots, b_q . Como s es el infimo de τ' y este es mayor que 1, su producto n-esimo es necesariamente el menor de la partición ϕ'_i debido que la parábola es monotona creciente para $x \in (1, \dots, \infty)$. Por lo tanto se tiene:

$$|\phi'_i(x)| \geq S^N \quad x \in [b_{i-1}, b_i], \quad i = 1, \dots, q \quad (5.1)$$

Se calcula el operador de Perron Frobenius para ϕ . Observe que, para cualquier $x \in [0, 1]$

$$\phi^{-1}([0, x]) = \bigcup_{i=1}^q [b_{i-1}, \phi_i^{-1}(x)]$$

aplicando la propiedad (2.14) del operador de Perron-Frobenius se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\phi f(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\phi^{-1}([0, x])} f(u) du \\ &= \frac{d}{dx} \int_{\bigcup_{i=1}^q [b_{i-1}, \phi_i^{-1}(x)]} f(u) du \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^q \int_{b_{i-1}}^{\phi_i^{-1}(x)} f(u) du \\ &= \sum_{i=1}^q \frac{d}{dx} \int_{b_{i-1}}^{\phi_i^{-1}(x)} f(u) du \\ &= \sum_{i=1}^q f(\phi_i^{-1}) \left| \left(\frac{1}{\phi_i(x)} \right)' \right| \mathbb{I}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^q f(\psi_i(x)) \sigma_i(x) \mathbb{I}_i(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $\psi_i = \phi_i^{-1}$, $\sigma_i(x) = |\psi'_i(x)|$ y \mathbb{I}_i es una función característica de la función sobre el intervalo $J_i = \phi_i([b_{i-1}, b_i])$. Por el lema (4.2) se ϕ_i es monotoma. Inviertiendo la inecuación (5.1) se tiene que

$$|\sigma_i(x)| \leq s^{-N} \quad x \in J_i \quad i = 1, \dots, q \quad (5.3)$$

donde

$$\mathbb{I}_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in J_i = \phi_i([b_{i-1}, b_i]) \\ 0 & \text{en otro sitio} \end{cases}$$

Sea f una función de variación acotada sobre $[0, 1]$. De (5.2) se tiene

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\phi f &= \bigvee_0^1 \sum_{i=1}^q f(\phi_i(x)) \sigma_i(x) \mathbb{I}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^q \bigvee_0^1 f(\phi_i(x)) \sigma_i(x) \mathbb{I}_i(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^q \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} (f \circ \psi_i) \sigma_i + \sum_{i=1}^q (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \sigma_i \quad \text{por (4.12)} \\ &\leq \sum_{i=1}^q \bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i) \sigma_i + s^{-N} \sum_{i=1}^q (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Observe que la ecuación anterior se cumple por (5.3). Evaluando el primer término de (5.4)

$$\begin{aligned} \bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i) \sigma_i &= \sup_{J_i} \sum_{J_i} |(f \circ \psi_i) \sigma_i| \quad \text{definición (4.1.4)} \\ &= \int_{J_i} |d((f \circ \psi_i) \sigma_i)| \quad \text{definición de integral} \\ &\leq \int_{J_i} |f \circ \psi_i| |\sigma'_i| dm + \int_{J_i} \sigma_i |d(f \circ \psi_i)| \quad \text{diferenciando} \\ &\leq K \int_{J_i} |f \circ \psi_i| \sigma_i dm + s^{-N} \int_{J_i} |d(f \circ \psi_i)| \quad \text{por (5.3)} \end{aligned}$$

donde $K = \max |\sigma'_i| / \min(\sigma_i)$. Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} \bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i) \sigma_i &\leq K \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f| dm + s^{-N} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |df| \\ &\leq K \|f\| + s^{-N} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |df| \end{aligned} \quad (5.5)$$

Evaluando el segundo término de (5.4). Sea un c arbitrario entre $[b_{i-1}, b_i]$

$$\begin{aligned}
|f(b_{i-1})| + |f(b_i)| &= |f(b_{i-1}) - f(c) + f(c)| + |f(b_i) - f(c) + f(c)| \\
&= |f(b_{i-1}) - f(c)| + |f(b_i) - f(c)| + 2|f(c)| \quad \text{por (4.1.4)} \\
&\leq \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f + 2d_i \quad (5.6)
\end{aligned}$$

donde $d_i = \inf \{|f(x)| : x \in [b_{i-1}, b_i]\}$. Por otra parte, se tiene la siguiente inecuación

$$\begin{aligned}
d_i &= d_i(b_{i+1} - b_i) \\
&= d_i \int_{b_i}^{b_{i+1}} dx \\
&\leq h^{-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f| dm \quad (5.7)
\end{aligned}$$

donde $h = \min_i (b_i - b_{i-1})$. De (5.6), 5.7 se tiene

$$\sum_{i=1}^q (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \leq \bigvee_0^1 f + 2h^{-1} \|f\| \quad (5.8)$$

Sustituyendo (5.8) y (5.5) en (5.4) se obtiene $\bigvee_0^1 \mathcal{P}_\phi f \leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f$ donde $\alpha = (K + 2h^{-1})$ y $\beta = 2s^{-N} < 1$.

Ahora, para la misma función f , sea $f_k = \mathcal{P}_\tau^k f$. Ya que $\mathcal{P}_\tau^N = \mathcal{P}_\phi$ se tiene

$$\begin{aligned}
\bigvee_0^1 f_{Nk} &\leq \alpha \|f_{N(k-1)}\| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)} \\
&\leq \alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)} \quad \text{por contracción}
\end{aligned}$$

para la misma f , sea $f_k = \mathcal{P}_\tau^k f$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_{Nk} &= \mathcal{P}_\tau^{Nk} f \\
&= \mathcal{P}_\tau^N \mathcal{P}_\tau^{N(k-1)} f \\
&= \mathcal{P}_\phi f_{N(k-1)}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\bigvee_0^1 f_{Nk} &= \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\phi f_{N(k-1)} \\
&= \alpha \|f_{N(k-1)}\| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)}
\end{aligned}$$

por contracción de operador de Perron-Frobenius

$$\begin{aligned} &\leq \alpha \|f\| + \beta \left(\alpha \|f\| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-2)} \right) \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &\leq \sum_{n=0}^{k-1} \alpha \beta^n \|f\| + \beta^k \bigvee_0^1 f_0 \end{aligned}$$

y en consecuencia, tomado a $f_0 = f$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha(1 - \beta)^{-1} \|f\| \quad (5.9)$$

esta última ecuación y con $\|f_k\| \leq \|f\|$ por el lema (4.2)?? se tiene que $\forall k$

$$|f_{Nk}(x)| \leq \frac{\alpha \|\alpha\|}{1 - \beta} + \|f\|$$

como la subsección es monotona por ?? y tambien acotada prueba que el conjunto $C = \{f_{Nk}\}_{k=0}^{\infty}$ cada infinito subconjunto contiene una subsucesión convergente, osea, C es un compacto relativo en L_1 .

Como \mathcal{P}_τ es continua, $\mathcal{P}_\tau^k C$ es tambien un compacto relativo. Entonces

$$\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}_\tau^k C$$

Se tiene que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ es un compacto relativo, también.

Por el teorema de Mazur

$$co(C) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k \mid a_k \geq 0, \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 1 \right\}$$

es un compacto relativo tambien. Y como

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f \right\} \subset co(C) \quad (5.10)$$

Es también un compacto relativo. Finalmente, por el Teorema de Kakutani-Yosida

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f \rightarrow f_* \in L_1[0, 1]$$

donde

$$\mathcal{P}_\tau f_* = f_*$$

Las propiedades 1, 2, 3 ya quedarón demostradas. Solo falta probar la propiedad 4. Se sabe que $f^* \in L_1[0, 1]$ Solo hace falta mostrar que $f^* < \infty$ y que $\exists c \ni \bigvee_0^1 \leq c\|f\|$

Se define $\alpha_i = \tau_i^{-1}$, $\beta_i = |\alpha'_i|$ se redefine

$$\mathbb{I}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in I_i = \text{tau}([a_{i-1}, a_i]) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

calculando nuevamente el operador de Perron-Frobenius

$$\mathcal{P}_\tau f(x) = \sum_{i=1}^p f(\alpha_i(x)) \beta_i(x) \mathbb{I}_i(x)$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau f &\leq \sum_{i=1}^p \bigvee_{I_i} (f \circ \alpha_i) \beta_i + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^p (|f(a_{i-1})| + |f(a_i)|) \\ &\leq c_1 \bigvee_0^1 f + c_2 \|f_2\| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 f_{N(k+1)} &= \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau f_{Nk} \\ &\leq c_1 \bigvee_0^1 f_{Nk} + c_2 \|f\| \end{aligned}$$

Para algun $c_1, c_2 > 0$. También

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 f_{N(k+2)} &\leq c_1 \bigvee_0^1 f_{N(k+1)} + c_2 \|f\| \\ &\leq c_1 (c_1 \bigvee_0^1 f_{Nk} + c_2 \|f\|) + c_2 \|f\| \\ &= c_1^2 \bigvee_0^1 f_{Nk} + (c_1 c_2 + c_2) \|f\| \end{aligned}$$

En consecuencia, para $m = 1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 f_{N(k+m)} &\leq c_1^m \bigvee_0^1 f_{N(k)} + c_2 \sum_{j=0}^{m-1} c_1^j \|f\| \\ &\leq c_1^m \bigvee_0^1 f_{N(k)} + c_2 \frac{1 - c_1^N}{1 - c_1} \|f\| \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \bigvee_0^1 f_{N(k+m)} \leq c_1^m \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \bigvee_0^1 f_{Nk} + c_2 \frac{1 - c_1^N}{1 - c_1} \|f\|$$

junto con ?? se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau^k f \leq c \|f\| \quad c > 0$$

Para una función de variación finita en $[0, 1]$. Donde c es independiente de f . Para tal f y para cualquier n , s tiene

$$\begin{aligned} \bigvee_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f \right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau^k f \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c \|f\| \\ &\leq c \|f\| \end{aligned}$$

Sea

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k$$

entonces

$$\bigvee_0^1 T_n f \leq c \|f\| \quad (5.11)$$

para f de variación finita en $[0, 1]$. Ahora

$$\begin{aligned} \|T_n f\| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathcal{P}_\tau^k f\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\| \\ &\leq \|f\| \end{aligned}$$

Por lo tanto (5.11) junto al lema (4.2) se tiene

$$|T_n f(x)| \leq (c + 1) \|f\| \quad (5.12)$$

De (5.11) a (5.12) y el teorema 4.2 de helly se tiene que existe una subsección $\{T_{n_k} f\}$ que converge sobre todo $[0, 1]$ a una función de variación acotada. Como $T_n f$ converge fuertemente, entonces

$$\bigvee_0^1 T f \leq c \|f\| \quad (5.13)$$

donde

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

para $\psi, \phi \in L_1[0, 1]$

$$\begin{aligned} T(\psi + \phi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k(\psi + \phi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k(\psi) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k(\phi) \\ &= T(\psi) + T(\phi) \end{aligned}$$

Entonces T es lineal.

Notese que el espacio L_1 esta contenido en el espacio de variacion acotada finita ambos con soporte $[0, 1]$ por lo tanto para cualquier $f \in L_1[0, 1]$ existe un sucesión $\{\phi_n\}$ contenida en el espacio de variacion acotada finita tal que $\phi_n \rightarrow f$ por (5.13)

$$\bigvee_0^1 T\phi_n \leq c\|\phi_n\|$$

Ya que

$$\|T\phi_n\| \leq \|\phi_n\|$$

por el lema (4.2), se tiene

$$|T\phi_n(x)| \leq (c+1)\|\phi_n\|$$

Para $\epsilon > 0$, $\exists N$ tal que $\forall n > N$

$$\|f - \phi_n\| \leq \epsilon$$

por lo tanto para *forall* $n > N$

$$\bigvee_0^1 T\phi_n \leq c(\epsilon + \|f\|)$$

y

$$|T\phi_n(x)| \leq (c+1)(\epsilon + \|f\|)$$

Usando nuevamente el teorema 4.2 se tiene que existe subsucesiones $\{\phi_{n_k}\} \subset \{\phi_n\}$ con $n_k > N$ tal que

$$T\phi_{n_k} \rightarrow f^*$$

Para algun f^* de variación acotada. Pero $T\phi_n \rightarrow Tf$ y $\{T\phi_{n_k}\} \subset \{T\phi_n\}$ así T es continua y $Tf = f^*$ y pertenece al conjunto de funciones de variación acotada finita con soporte $[0, 1]$ para $f \in L_{[0,1]}$ \square

Un contraejemplo Veamos la razón que la hipótesis $\inf |\tau'| > 1$ es esencial. Considere la transformación:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Observe que $|\gamma'(0)| = 1$ pero $|\gamma'(x)| > 1$ para todo $x \in (0, 1]$. Se probará que para cualquier $f \in L^1$ la sucesión $\mathcal{P}_\gamma^n f$ converge en medida cero. Sin embargo, la ecuación $\mathcal{P}_\gamma f = f \gamma$ solo tiene soluciones triviales, es decir, que no existe una medida invariante absolutamente continua sobre γ .

La prueba se realizará en varios pasos. Primero, se probará que para $f_0 \equiv 1$ la sucesión $g_n(x) = x f_n(x)$ donde $f_n = \mathcal{P}_\gamma^n f_0$ converge a una constante c_0 . Entonces usando la condición $\|f_n\| = 1$ se deriva $c_0 = 0$ y en consecuencia $f_n \rightarrow 0$. Finalmente, por un argumento similar se extiende este resultado para arbitrarias sucesiones $\mathcal{P}_\gamma^n f$ con $f \in L_1$.

Sea $\gamma_1(x) = \frac{x}{1-x}$ sobre $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ despenjado se tiene $\gamma_1^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$. Así mismo, $\gamma_2(x) = 2x-1$ sobre $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ despejado se tiene $\gamma_2^{-1}(x) = \frac{1+x}{2}$.

Derivando $\gamma_1(x)$ se tiene $\frac{1}{(1+x)^2}$. De igual forma, $\gamma_2(x)$ se tiene $\frac{1}{2}$. Usando la formula (2.14) el operador de Perron-Frobenius se escribe de la siguiente forma

$$\mathcal{P}_\gamma f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= x f_{n+1}(x) \\ &= x \mathcal{P}_\gamma f_n(x) \\ &= x \left[\frac{1}{(1+x)^2} f_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2} f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{(1+x)} \frac{x}{(1+x)} f_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x}{1+x} \frac{1+x}{2} f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

en consecuencia

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x} g_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x}{1+x} g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad (5.14)$$

Para $g_0(x) \equiv x$. Por otro lado, si $g'_n(x) \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} g'_{n+1}(x) &= \frac{1}{(1+x)^3} g'_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x}{4(x+1)} g'_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(1+x)^2} \left[g_n\left(\frac{x+1}{2}\right) - g_n\left(\frac{x}{1+x}\right) \right] \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (x+1)^2 \geq 2x &\Rightarrow \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{1+x} \\ &\Rightarrow g_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \geq g_n\left(\frac{x}{1+x}\right) \end{aligned}$$

Así g_n no es decreciente. Por lo tanto $\forall x \in [a, b]$ se tiene

$$\begin{aligned} g'_n(x) \geq 0 &\Rightarrow g'_{n+1}(x) \geq 0 \\ g'_0(x) &= x f_0(x) \\ &= x \\ g'_0(x) &= 1 \geq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, $\forall n$ se tiene

$$g'_n(x) \geq 0$$

debido que todas las funciones g_n son positivas y crecientes. Evaluando en (5.14) se tiene

$$\begin{aligned} g_{n+1}(1) &= \frac{1}{2} g_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} g_n(1) \\ &\leq \frac{1}{2} g_n(1) + \frac{1}{2} g_n(1) \\ &\leq g_n(1) \end{aligned}$$

Esto prueba que la existencia del límite $\lim_n g_n(1) = C_0$. Sea $z_0 = 1$ y $z_{k+1} = \frac{z_k}{1+z_k}$ sustituyendo en (5.14) obtenemos

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z_0) &= \frac{1}{1+z_k} g_n\left(\frac{z_k}{1+z_k}\right) + \frac{z_k}{1+z_k} g_n\left(\frac{1+z_k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{1+z_k} g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} g_n\left(\frac{1}{2} + \frac{z_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Se observa que $\frac{1+z_0}{2} \in [x_k, 1]$. Sea $z_k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z_k$. Entonces tomando el límite en ambos lados se obtiene $k \lim_n g_n(x) = C_0$ $z_k \leq x \leq 1$. $k = 0$ $z_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z_k$ $n \rightarrow \infty$

$$C_0 = \frac{1}{1+z_k} \lim_n g_n(z_{k+1}) + \frac{z_k}{1+z_k} C_0$$

En consecuencia $\lim_n g_n(z_{k+1}) = C_0$. Ya que g_n es creciente, esto prueba que $\lim_n g_n(x) = C_0$ converge uniformemente para $x \in [z_{k+1}, 1]$. Se tiene que

$$g_n(x) \rightarrow C_0$$

por lo tanto, $\forall x \in [0, 1]$ se tiene

$$f_n(x) \rightarrow \frac{C_0}{x}$$

Se asume que $C_0 > 0$. Entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{C_0}{x} dx > 1$$

Esto es que

$$\lim_n \int_{\epsilon}^1 f_n(x) dx > 1$$

Lo cual es imposible ya que $\|f(x)\| = 1$ para cada n . Debido a que se tiene $f_0 \geq 0$ y por lo tanto $f_n \geq 0$. Por lo tanto C_0 debe ser 0 Suponiendo que $f'_n \leq 0$

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= -\frac{2}{(1+x)^3} f_n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{(1+x)^4} f'_n\left(\frac{x}{1+x}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4} f'_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f'_n son funciones decrecientes que convergen uniformemente a 0 en el intervalo $[\epsilon, 1]$ para un $\epsilon > 0$.

para $f \in L_1[0, 1]$ con $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(0, -f)$ y dado un $\epsilon > 0$

$$\int_0^1 (f^- - r)^+ dm + \int_0^1 (f^+ - r)^+ dm \leq \epsilon \quad (5.15)$$

Observese que si ϕ una función simple acotada tal que $\phi > 0$ y sea $M = \max \phi(x)$. Entonces $\phi - r \leq M - r$

$$(\phi - r)^+ \leq (M - r)^+ = \begin{cases} M - r & \text{Si } M > r \\ 0 & \text{Si } M \leq r \end{cases}$$

Dado un $\epsilon > 0$ se puede definir un r tal que $r \geq M - \epsilon$. Entonces $M - r \leq \epsilon$ por lo tanto, $(M - r)^+ \leq \epsilon$ y así $\int_0^1 (M - r)^+ = (M - r)^+ \leq \epsilon$ y como $(M - r)^+ \geq (\phi - r)^+$ se tiene $\int_0^1 (\phi - r)^+ \leq \epsilon$ así se prueba el resultado para funciones simples y acotadas

Como el conjunto de funciones simples es denso en $L_1[0, 1]$ para $f \in L_1[0, 1]$ y $\epsilon > 0$, se puede elegir funciones ϕ y ψ simples y acotadas tal que

$$\|f^+ - \phi\| \leq \frac{\epsilon}{4} \quad y \quad \|f^- - \psi\| \leq \frac{\epsilon}{4} \quad \phi, \psi \geq 0$$

Para ψ, ϕ se probó se que puede elegir r_1, r_2 tal que

$$\int_0^1 (\phi - r_1)^+ \leq \frac{\epsilon}{4} \quad y \quad \int_0^1 (\psi - r_2)^+ \leq \frac{\epsilon}{4}$$

entonces para $r \geq \max(r_1, r_2)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f^+ - r)^+ + \int_0^1 (f^- - r)^+ &= \int_0^1 (f^+ - \phi + \phi - r)^+ \\ &\quad + \int_0^1 (f^- - \psi + \psi - r)^+ \\ &\leq \int_0^1 (f^+ - \phi)^+ + \int_0^1 (\phi - r)^+ \\ &\quad + \int_0^1 (f^- - \psi)^+ + \int_0^1 (\psi - r)^+ \\ &\leq \int_0^1 |f^+ - \phi| + \int_0^1 (\phi - r)^+ \\ &\quad + \int_0^1 |f^- - \psi| + \int_0^1 (\psi - r)^+ \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \end{aligned}$$

Así se prueba la ecuación (5.15) por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 |\mathcal{P}_\gamma^n f| dm &= \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\gamma^n f^+ dm + \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\epsilon^n f^- dm \\ &= \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\gamma^n (f^+ + r - r) dm + \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\epsilon^n f^- + r - r dm \\ &\leq 2 \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\gamma^n r dm + \int_\epsilon^1 \mathcal{P}^n (f^+ - r) dm + \int_\epsilon^1 \mathcal{P}^n (f^- - r) dm \\ &\leq 2r \int_\epsilon^1 \mathcal{P}_\gamma^n 1 dm + \epsilon \end{aligned}$$

Como $f_n \rightarrow 0$ uniformemente en $[\epsilon, 1]$, entonces $\mathcal{P}_\gamma^n 1$ converge en $[\epsilon, 1]$ uniformemente a cero por el teorema de convergencia dominada. Así mismo

$$\lim_n \int_\epsilon^1 |\mathcal{P}_\gamma^n f| dm \leq 0 + \epsilon \quad \epsilon > 0$$

Entonces la sucesión $\mathcal{P}_\gamma^n f$ converge en medida a cero.

Apéndice A

Sistema dinámicos discretos

Se asume que el lector está familiarizado con la definiciones básicas de algebra como: grupo, subgrupo, grupo cociente, etc. La noción de grupos de acción $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \cdot)$ está estrechamente relacionada con los grupos, pero difiere en un par de aspectos interesante; primeramente se tiene una ley de composición externa osea, sobre las que se cumple la asociatividad y el elemento neutro. La definición se asemeja a la de espacio vectorial pero más general debido a la ausencia de axiomas.

Definición A.0.3 (Grupo de acción, $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \cdot)$). Se dice que el grupo ¹ \mathcal{G} actúa sobre el conjunto \mathcal{X} si

$$\begin{aligned} \text{Para cada } g \in \mathcal{G} \text{ y } x \in \mathcal{X} : & \quad g \cdot x \in \mathcal{X} \\ \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} \text{ y } \forall x \in \mathcal{X} : & \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x \\ \forall x \in \mathcal{X} / \exists e \in \mathcal{G} : & \quad e \cdot x = x \cdot e = x \end{aligned}$$

Donde viene determinada por $\cdot : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$

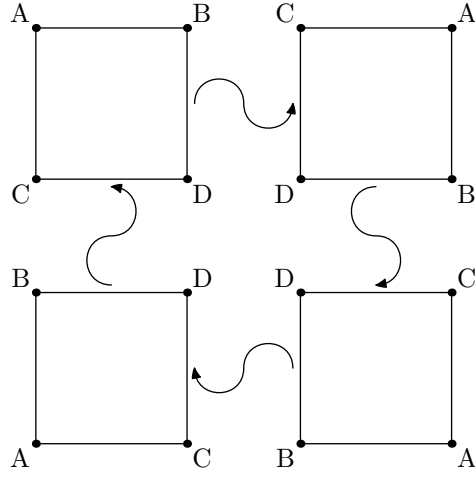
Observación Sea $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ función invertible. Se entenderá $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ y \cdot como la composición iterada de S consigo misma. Por consiguiente; la propiedades de grupo de acción se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \text{Para cada } x \in \mathcal{X} : & \quad S^n(x) \in \mathcal{X} \text{ con } n \in \mathbb{Z} \\ \forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } \forall x \in \mathcal{X} : & \quad S^n(S^m(x)) = S^{n+m}(x) \\ \forall x \in \mathcal{X} / \exists 0 \in \mathbb{Z} : & \quad S^0(x) = id(x) = x \end{aligned}$$

Resaltando, los sistemas dinámicos están compuestos principalmente por tres objetos:

Espacio de fases, \mathcal{X} cuyos elementos o “puntos ” representas los posibles estados del sistema.

¹Ley de composicion interna, asociativa, con elemento neutro e inverso



Tiempo, \mathbb{Z} o “reloj” el cual puede ser discreto o continuo; el cual caracteriza la evolución del estado x en el tiempo j o sea el estado x_j

Ley de evolución temporal, S la describe el cambio del estado x_i al estado x_j estado $\forall i \neq j$.

Ejemplo A.0.1. Sea $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_4$ y \mathcal{X} los vertices $A, B, C \& D$ de el siguiente cuadrilátero. Gracias a la siguiente Figura (label) es facil darse cuenta que $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ es un grupo de acción.

Definición A.0.4 (Sistema dinamico, $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, T)$). Sea X un espacio topológico, \mathcal{G} un grupo topológico y $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ un grupo de acción donde $T : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ que cumple

Una órbita es el conjunto de puntos que definen la evolución de un sistema en el espacio de estados a partir de un estado inicial x_0 .

Definición A.0.5 (Órbitas de x_0). Sea un endomorfismo $T : X \rightarrow X$ se define los siguientes conjuntos:

- a) (Órbita del futuro de x_0 , $\mathcal{O}^+(x_0)$) $\{T^n(x_0) : n \geq 0\}$
- b) (Órbita del pasado de x_0 , $\mathcal{O}^-(x_0)$) $\{T^n(x_0) : n \leq 0\}$. Si T es invertible.
- c) (Órbita de x_0 , $\mathcal{O}(x_0)$) $\{T^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\}$

El tipo de órbita más simple son los *puntos fijos* o *puntos de equilibrio*, los cuales son las raíces de la ecuación $T(x) = x$. Por otro lado se puede tener que un punto sea periódico después de cierto tiempo, en ese caso tenemos un *punto eventualmente fijo*. El tipo de órbita que sigue en complejidad al equilibrio es el ciclo. Un punto es cíclico o periódico si se aplicará así mismo después de un tiempo N , al mínimo N con esta propiedad se le conoce como el período.

Similarmente un punto es *eventualmente periódico* si después de cierto tiempo se convierte en punto periódico.

Definición A.0.6 (Puntos y conjuntos de interés). *Son los puntos p que cumple las siguientes condiciones:*

a) (Puntos fijos) Si
$$T(p) = p \tag{A.1}$$

† (Órbitas fijas, $\text{Fix}(T)$) El conjunto formado por todos los puntos fijos de T

b) (Puntos eventualmente fijos) Si $\exists N > 0 / T^n(p) = p, \forall n \geq N$.

c) (Puntos periódicos) Si $\exists n > 0 / T^n(p) = p$. El menor entero negativo con esta propiedad se llama el período primo de p .

† (Órbitas n -periódicas, $\text{Per}_n(T)$) Es el conjunto formado por todas las órbitas periódicas de periodo n

† (Órbitas periódicas, $\text{Per}(T)$) $\bigcup_{n \geq 1} \text{Per}_n(T)$

d) (Puntos eventualmente periódicos) Si $\exists N > 0 / T^N(p)$ es periódico.

Es de mayor interés estudiar hacen de orbitas particulares. Esto estimula la siguiente definición

Definición A.0.7 (Conjuntos invariantes). *Un conjunto $(A \subseteq \mathcal{X})$ es positivamente invariante si $T(A) \subseteq A$ y negativamente invariante si $T^{-1}(A) \subseteq A$. Un conjunto es invariante si $T(A) = A$.*

Apéndice B

Teoría de la Medida

En esta sección expondremos las nociones básicas de Teoría de la Medida que necesitaremos en los capítulos posteriores. Con la intención de tener un marco de referencia en el cual se pueda apoyar las ideas a desarrollar. En consecuencias, se comentarán superficialmente algunos resultados de teoría de la medida.

B.1. Espacios Medibles y Medidas

Hace más de 5000 años, el hombre primitivo percibe la necesidad de medir. Interrogantes como ¿Qué tan lejos? , ¿Qué tan grande es?, ¿Cual es la capacidad? son naturales en actividad cotidianas. De esta forma surge el manejo de longitudes, áreas y volúmenes con la necesidad de su cálculo. El papiro de Moscú considerado del 1800 A.C. es uno de los documentos egipcios con problemas matemáticos más antiguos que se conoce.

A Eudoxo (408 a.C. al 355 a.C.) se le atribuye la demostración del volumen de un cilindro. No obstante, es en el libro de Euclides (325 a.C. al 265 a.C) “Los Elementos” en que aparecen las primeras demostraciones satisfactorias junto al método científico sistemático. No se define la longitud, área o volumen; se les considera características que se puede medir de las figuras que define como línea, superficie y solido.

La palabra medir se utiliza indistintamente para estas magnitudes como para los números. Por lo que medir, para Euclides, es un proceso de comparación entre la figura y el segmento, cuadrado o cubo unitario. Un proceso similar al usado aun actualmente en la física para medir cantidades físicas. En el cual se elige un patrón ¹ y el objeto a medir se compara con este patrón.

Arquímedes (287 a. C. al 212 a. C.) descubrió el área del círculo mediante el método de exclusión. Método del cual se baso Newton (1642-1727) para del descubrimiento de la integral la cual permitió el cálculo de longitudes, área o superficies curvilíneas. Descubrimiento que permite ampliar las posibilidades de objetos a medir y minimiza el esfuerzo de su cálculo. Observe que aunque la

¹El segundo es 9,192,631,770 ciclos de radiación del cesio.

técnica de medir cambió la medida seguía siendo la misma. En otras palabras, la regla se hizo elástica o flexible para poder medir objetos de intrincado perfil pero se continúa usando la misma regla.

B.1.1. Espacios Medible

En 1883, G. Cantor (1845-1918) proporciona la primera definición de medida $\mu(A)$ de un conjunto arbitrario (acotado) $A \subset \mathbb{R}$. Otros autores como Stoloz en 1884 y Harnack en 1885 dan definiciones equivalentes en \mathbb{R} . Estas definiciones consideraban la propiedad adictiva $m[A \cup B] = m[A] + m[B]$ para un par de conjuntos disjuntos.

Sin embargo, fallaban ya que en general un conjunto y su adherencia medía lo mismo y por tanto los racionales y los irracionales median 1 ambos, sobre $[0, 1]$. Contradiendo el concepto de cardinal desarrollado y propuesto por el mismo Cantor 9 años atrás. En el cual los irracionales son mayores en cardinalidad \aleph_1 que la cardinalidad de los racionales \aleph_0 . La definición moderna de conjunto medible, se presenta a continuación, se basa en la idea σ -álgebra; En la cual no presenta dicho inconveniente.

Definición B.1.1 (σ -Álgebra, \mathcal{A}). *Es una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ de subconjuntos de \mathcal{X} que verifican las siguientes condiciones*

- a) $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$
- b) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$,
- c) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos en X , entonces la unión $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Siendo \mathcal{X} un conjunto no vacío.

Propiedades de σ -Álgebra De la definición se deducen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^c = \emptyset &\in \mathcal{A} && \text{debido a (a) y (b)} \\ A \cup (\mathcal{X} \setminus B) &= A \setminus B \in \mathcal{A} && \text{por (b) y (c)} \\ (\cap_k (A_k)^c)^c &= \cap_k A_k \in \mathcal{A} && \text{gracias a (c) y (b)} \end{aligned}$$

Definición B.1.2 (Espacio Medible, (X, \mathcal{X})). *Es el par (X, \mathcal{X}) donde X es un conjunto y \mathcal{X} una σ -Álgebra.*

Ejemplo B.1.1. *Sea \mathcal{X} cualquier conjunto entonces $(X, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$ es un espacio medible. Por otro lado $(\mathcal{X}, \{\mathcal{X}, \emptyset\})$ también es un espacio medible.*

El concepto de función es fundamental en la matemática. Este concepto nace en el análisis, pero se extiende en otras áreas como el Álgebra, Topología, Geometría Diferencial entre otras. Estimuladas por la definición general, que no depende de entes numéricos, aportes el trabajo de Teoría de Conjuntos de Cantor. Una función que preserve la estructura a estudio, es un tema recurrentes en dichas áreas, lo cual trae asociadas definiciones como Homomorfismo o la Continuidad. En nuestro caso se habla de función medible.

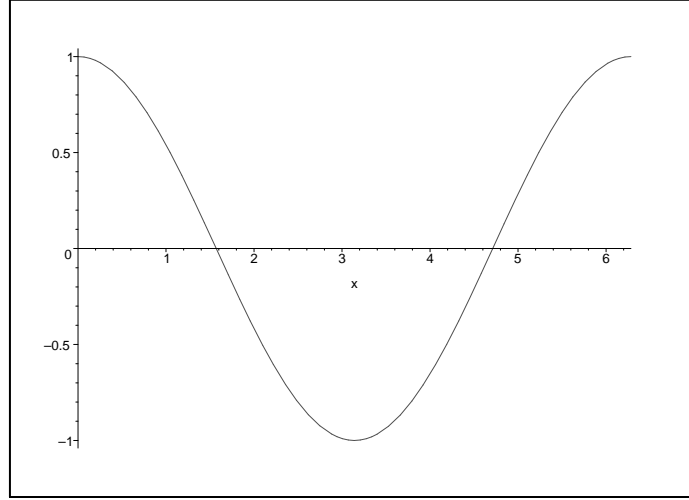


Figura B.1: $S(x) = 4x(1 - x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Se observa como la población crece y decrece alrededor de α

Definición B.1.3 (Función Medible, f). Si el conjunto

$$f^{-1} = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in E\}$$

pertenece a \mathcal{X} para cada conjunto E que pertenesca a \mathcal{Y} . Siendo $f : (X, \mathcal{X}) \rightarrow (Y, \mathcal{Y})$ una función entre un para de espacios medibles.

Observación B.1.1. Una función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cada cualquier números real α el conjunto

$$\{x \in \mathcal{X} : f(x) > \alpha\}$$

Pertenece \mathcal{A}

Definición B.1.4 (Parte positiva, $f^+(x)$). Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la parte positiva es el subconjunto de función definido como:

$$f^+(x) = \max(0, f(x))$$

Definición B.1.5 (Parte negativa, $f^-(x)$). Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la parte negativa es el subconjunto de función definido como:

$$f^-(x) = \max(0, -f(x))$$

Apartir de las definiciones presententes se puede deducir las siguiente propiedades

Corolario B.1.1. Para cualquier $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

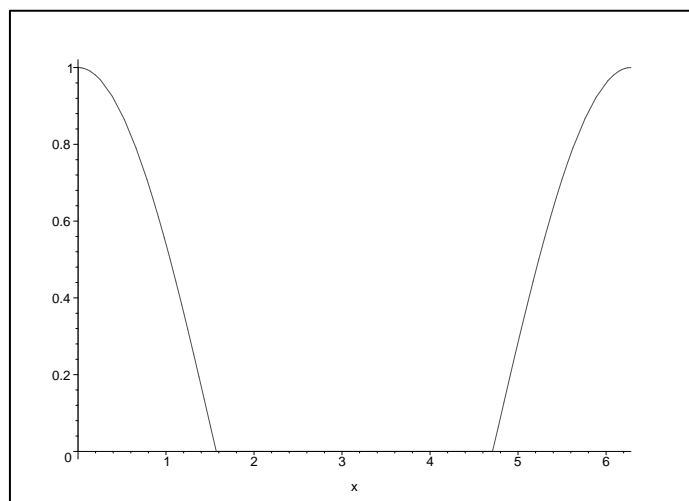


Figura B.2: $S(x) = 4x(1 - x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Se observa como la población crece y decrece alrededor de α

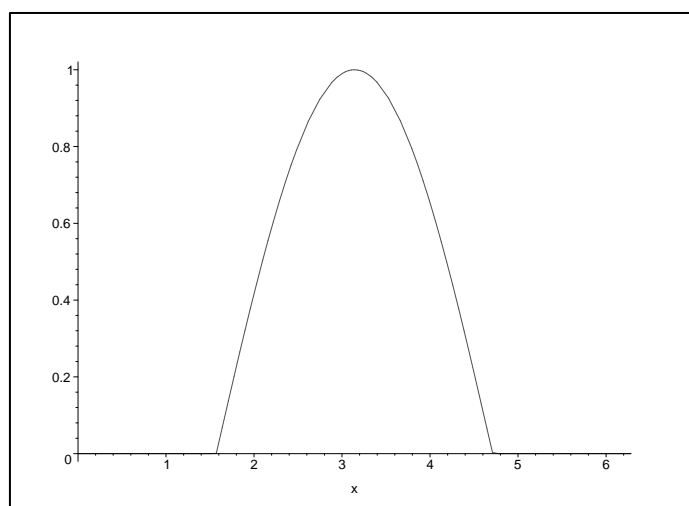


Figura B.3: $S(x) = 4x(1 - x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Se observa como la población crece y decrece alrededor de α

B.1.2. Espacios de Media

Continuando con la evolución historia de la medida, un tratamiento moderno fué proporcionado por Peano (1858-1932), el cual consideró cuando un conjunto es medible. Tomando inspiración de las aproximaciones poligonales por exceso y defecto. Definió la medida exterior y la medida interior para definir un conjunto medible, en el caso en que ambas medidas coinciden. Partiendo de esa definición probó que la medida era aditiva; es más explicó la relación existente entre la medida e integración. Demostrando que una función acotada era Riemann integrable si y solo si el conjunto E de \mathbb{R}^2 limitado por la gráficas de f y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ era medible, en cuyo caso

$$\int_a^b f(x)dx = m[E]$$

En 1892 Jordan (1838-1922) proporciona una definición más sencilla utilizando una malla de cuadrados de igual lado, en lugar de polígonos para aproximar el conjunto. No obstante, aun se requería refinar la definición de medida debido que en ambos casos ejemplo los racionales ya no eran medible.

Se sabía desde la época de Cantor, que todo abierto $A \subset \mathbb{R}$ era unión, $A = \cup I_n$ a lo sumo numerable de intervalos abiertos I_n disjuntos. Partiendo de ese hecho Borel (1871-1956) dio, en su doctorado de 1894, el importante pasó al considerar la numerabilidad aditiva para la medida. Considerar la numerabilidad aditiva fue un paso esencial en teoría de la integral abstracta presentado por Lebesgue (1875-1941) en 1902. El paso al límite de la integral se obtiene como consecuencia inmediata esta propiedad. Con lo cual, se llega a la definición moderna de medida.

Definición B.1.6 (Medida, μ). *Es la función $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \supset \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

- a) $\mu(\emptyset) = 0$
- b) $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$
- c) $\mu(\bigcup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k)$ donde $\{A_k\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos a pares

Propiedades de la Medida Sea E y $F \in \mathcal{A}$

Si $E \subset F$ entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$ Monótona

Si $\mu(E) < +\infty$ entonces $\mu(F/E) = \mu(F) - \mu(E)$

Definición B.1.7 (Espacio Medible, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$). *Si \mathcal{A} es una sigma-Algebra y μ es una medida. A los conjuntos que pertenece a \mathcal{A} se les llama conjuntos medible.*

Ejemplo B.1.2. *Sea $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, \mathcal{A} son los intervalos de \mathbb{R} y $\mu([a, b]) = |b - a|$ define un espacio medible. Este espacio conocido como la medida de Borel.*

Observación B.1.2. Si X e Y son espacios topológicos \mathcal{A} , \mathcal{B} sus respectivas σ -álgebras de Borel, entonces toda función continua $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es medible. Ya que los Borelianos son la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos del espacio topológico. En ese caso, la definición de función continua y función medible coinciden.

Definición B.1.8 (Medida Finita). Si $\mu(X) < \infty$ siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida

Definición B.1.9 (Espacio de Probabilidad). Si la medida es finita y $\mu(\mathcal{X}) = 1$

Observación B.1.3. Todo espacio de media finita puede ser de probabilidades. En efecto, se puede definir una medida

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Este proceso se le conoce como normalización.

Definición B.1.10 (Medida σ -Finita). Si la sucesión $\{A_k\}$ con $A_k \in \mathcal{A}$ y satisface

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \mu(A_k) < \infty \quad \text{para todo } k$$

siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida

Ejemplo B.1.3. Sean los reales \mathbb{R} , con μ la medida de Borel es un espacio σ -finito. Debido que se puede escoger intervalos A_k de la forma $[-k, k]$ con $k \in \mathbb{N}$, donde su unión numerable es \mathbb{R} y la medida para cada A_k es finita.

Definición B.1.11 (Casi Seguramente, c.s). Si alguna propiedad se cumple en todos los subconjuntos de un espacio de medida excepto en los de medida cero.

B.2. Integración

Definición B.2.1 (Función Simple, ϕ). Es una función a valores real $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que sólo toma un número finito de valores.

Definición B.2.2 (Representación estándar). Una función simple se puede representar de la siguiente forma

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

Donde $a_j \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{1}_{E_i}$ es una función características de los conjuntos E_j . Los E_i son subconjuntos disjuntos de \mathcal{X} tal que $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^n E_j$

Observación B.2.1. Se puede probar que la representación estándar no depende de los representantes, osea, de la escogencia de los E_j

Definición B.2.3 (Integral de Lebesgue, $\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx)$). *Se define como*

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \phi_n(x)\mu(dx)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, arbitraria, medible, no-negativa. Una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones simples que convergen uniformemente a f .

Observación B.2.2. *Se puede mostrar que el límite en la Definición (B.2.3) existe y es independiente de la elección de la sucesiones de funciones simples $\{\phi_n\}$ que convergen uniformemente a f .*

Definición B.2.4 (Integral de Lebesgue, $\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx)$). *Se define como*

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_M(x)\mu(dx)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, medible, no-negativa definida de la siguiente forma

Observación B.2.3. *Note como $\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx)$ es una función creciente de M de modo que el límite en la definición siempre existe aunque podría ser infinito.*

Definición B.2.5 (La integral de Lebesgue General). *Se define como*

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} f^+(x)\mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f^-(x)\mu(dx)$$

Definición B.2.6 (Función Integrable). *Si los términos ambos*

$$\int_{\mathcal{X}} f^+(x)\mu(dx) \quad \int_{\mathcal{X}} f^-(x)\mu(dx)$$

Son finitos

Observación B.2.4. *Todas las definiciones de integrales están definidas sobre el espacio \mathcal{X} entero. Para $A \in \mathcal{A}$ se tiene, la siguiente definición*

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\mathbb{I}_A(x)\mu(dx)$$

Propiedades de la integral de Lebesgue Se asume $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ el espacio de medida.

† Si $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ son medible, g es integrable y $|f(x)| \leq g(x)$, entonces f es integrable y

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) \right| \leq \int_{\mathcal{X}} g(x)\mu(dx) \quad (\text{B.1})$$

† Si f es una función medible

$$\int_{\mathcal{X}} |f(x)| \mu(dx) = 0 \text{ si y solo si } f(x) = 0 \text{ c.s.} \quad (\text{B.2})$$

† Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y los conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots$, disjuntos. Si $A = \cup_i A_i$, entonces

$$\int_{\mathcal{X}} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} \lambda_1 f_1(x) \mu(dx) + \int_{\mathcal{X}} \lambda_2 f_2(x) \mu(dx) \quad (\text{B.3})$$

† Si $f_1, f_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables y λ_1, λ_2 , entonces Sea $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles y una sucesión $f_n : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones medibles tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ con $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.s. Si g es integrable, entonces f y f_n son también integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n(x) \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \quad (\text{B.4})$$

A esta propiedad se le conoce como el Teorema de Convergencia Dominada.

† Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y los conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$ con $i = 1, 2, \dots$ disjuntos. Si $A = \cup_i A_i$ entonces

$$\sum_i \int_{A_i} f(x) \mu(dx) = \int_A f(x) \mu(dx) \quad (\text{B.5})$$

† Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles y una sucesión $f_n : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones medibles tal que $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ con $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.s. Entonces f y f_n son también integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n(x) \mu(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \quad (\text{B.6})$$

A esta propiedad se le conoce como el Teorema de Convergencia Monótona.

Observación B.2.5. *Notese que f es integrable si y solo si $|f|$ es integrable. Esto se puede apreciar fácilmente viendo que $|f| = \int_{\mathcal{X}} f^+ \mu(dx) + \int_{\mathcal{X}} f^- \mu(dx)$. Si f es integrable entonces f^+ y f^- también es finito.*

Observación B.2.6. *La integral de Lebesgue está dada en varios pasos. Para cada función integrable f se existe una sucesión de funciones simples*

$$f_n(x) = \sum_i \lambda_{i,n} \mathbb{I}_{A_{i,n}}(x)$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x) \quad \text{c.s.} \quad |f_n(x)| \leq |f(x)|$$

Así, por el Teorema de Convergencia Dominada, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

Por lo tanto, usualmente para simplificar la prueba se verifican para funciones simples y luego se para al límite para extenderlo a toda las funciones.

Observación B.2.7. La noción de la integral de Lebesgue es muy importante debido que solo requiere de la definición de un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ sin la necesidad de introducir alguna otra estructura. En cálculo la definición de la integral de Riemann está íntimamente relacionada con propiedades algebraicas de la recta real. Es fácil establece una conexión entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann. Por ejemplo, si se define μ como en el ejemplo B.1.2 entonces

$$\int_{[a,b]} f(x) \mu(dx) = \int_a^b f(x) dx$$

Donde la primera es una la integral de Lebesgue y la segunda es la integral de Riemann. Esta igualdad es cierta para cualquier función f Riemman integrable la cual es automáticamente una Lebesgue integrable. Una análogo para dimensiones superiores también es cierto.

B.3. Derivación

A partir de las propiedades de Lebesgue es fácil probar que si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es una no negativa función integrable entonces $\mu_f(A)$, definido por

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) \mu(dx)$$

Es una medida. De hecho, por la definición de la integral de Lebesgue claro que $\mu_f(A)$ es no negativo y finita, usando la propiedad L5 es también aditiva. Además, de L2 si $\mu(A) = 0$ entonces

$$\mu_f(A) = \int_A \mathbb{I}_A(x) f(x) \mu(dx) = 0$$

Por lo tanto $\mathbb{I}_A(x) f(x) = 0$ c.s. Así mismo $\mu_f(A)$ satisface todas las propiedades de la medida y $\mu_f(A) = 0$ donde sea $\mu(A) = 0$. Cada función integrable no negativa define una medida finita puede invertirse las hipótesis. Eso es garantizado por el siguiente teorema.

Teorema B.3.1 (Radon-Nikodym). Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ un espacio de medida y sea ν una segunda medida finita con la propiedad que $\nu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$. Entonces existe una función no negativa integrable $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nu(A) = \int_A f(x) \mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

El teorema de Radon-Nikodym será fundamental en el estudio del operador de Perron-Forbenius.

Corolario B.3.1. *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y ν es una medida finita sobre \mathcal{A} tal que $\nu(\mathcal{A}) = 0$ (mmmm no se) $\mu(\mathcal{A}) = 0$, entonces existe un unico elemento $f \in L^1$ tal que:*

$$\nu(A) = \int_A f(x) \mu(dx) \quad \text{para } A \in \mathcal{A}$$

Definición B.3.1 (Absolutamente continua, μ_f). *Sea la densidad*

$$\mu_f = \int f(x) \mu(dx) \text{ para } A \in \mathcal{A}$$

donde $f \in D(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$. En este caso f es llamada la densidad de $\mu_f(A)$

Observación B.3.1. *Si f es integrable si y solo si $-f(x)$ es integrable.*

B.4. Espacios L^p

Definición B.4.1 (Espacios L^p , $L^p(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ o L^p). *La familia de todas la posible funciones reales medible $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \mu(dx) < \infty$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y p un número real tal que $1 \leq p < \infty$

Observación B.4.1. *Si $p = 1$ es habla del conjunto de todas las funciones integrables.*

Definición B.4.2 (Norma de f , $\|f\|_{L^p}$). *Es el funcional*

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p \mu(dx) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{B.7})$$

Propiedades de la Norma

† Dado $f \in L^p$

$$\|f\|_{L^p} = 0 \quad \text{si y solo si } f(x) = 0 \text{ c.s} \quad (\text{B.8})$$

† Sea $f \in L^p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L^p} \quad f \in L^p, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{B.9})$$

† Siendo $f, g \in L^p$

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad f, g \in L^p \quad (\text{B.10})$$

De la propiedad L3 se deduce que L^p es un espacio vectorial, ya que, para $f, g \in L^p$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $(f + g) \in L^p$ y $\alpha f \in L^p$

Definición B.4.3 (Distancia entre f y g , $\|f + g\|_{L^p}$). *Es el funcional*

$$\|f + g\|_{L^p} = \left[\int_{\mathcal{X}} |f(x) - g(x)|^p \mu(dx) \right]^{\frac{1}{p}}$$

Observación B.4.2. *Es importante observar que el producto fg de dos funciones $f, g \in L^p$ no es necesariamente un elemento de L^p*

Definición B.4.4 (Espacio adjunto). *Es $L^q(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ donde*

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

Observación B.4.3. *El operador adjunto de L_1 es L_∞ , osea, las funciones medibles acotadas salvo en un conjunto de medida cero.*

Definición B.4.5 (Producto escalar, $\langle f, g \rangle$). *De dos funciones de producto integrable se define como*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)\mu(dx)$$

siendo $f \in L^p$ y $g \in L^q$

Definición B.4.6 (Inecuación de Cauchy-Hölder). *Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Observación B.4.4. *Para que la inecuación tenga sentido cuando $f \in L^1$, $g \in L^\infty$, se toma para la norma L^∞ la más pequeña constante c tal que*

$$|g(c)| \leq c$$

Para casi todos $x \in \mathcal{X}$. Esta constante es llamada el supremo esencial de g . También es una forma alternativa para definir las funciones de $L_{p\infty}$.

Observación B.4.5. *Se trabajará la mayoría de la veces en L^1 ; se indicará en caso que la norma a usar sea contraria a la de L^1 . En otras palabras, $\|f\| = \|f\|_{L^1}$. Observe que la desigualdad triangular en la norma L^1 es algunas veces una igualdad. Partiendo de la propiedad tenemos*

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| \quad f \geq 0, g \geq 0; f, g \in L^1$$

Y para finalizar utilizaremos el concepto de L^1 para simplificar el teorema de Radon-Nikodym mostrado en el siguiente corolario 2

Proposición B.4.1. *Si f_1 y f_2 son funciones integrable tal que*

$$\int_A f_1(x)\mu(dx) = \int_A f_2(x)\mu(dx) \quad A \in \mathcal{A}$$

Entonces $f_1 = f_2$ c.s.

B.5. Convergencia de sucesiones de funciones

Definición B.5.1 (Convergencia Cesaro). *La sucesión de funciones $\{f_n\} \rightarrow f$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle f_k, g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall g \in L^p \quad (\text{B.11})$$

donde $f_n, f \in L^p$ y $1 \leq p < \infty$.

Definición B.5.2 (Convergencia Débil). *La sucesión de funciones $\{f_n\} \rightarrow f$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall g \in L^p \quad (\text{B.12})$$

donde $f_n, f \in L^p$ y $1 \leq p < \infty$.

Definición B.5.3 (Convergencia Fuerte). *La sucesión de funciones $\{f_n\} \rightarrow f$ si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0 \quad (\text{B.13})$$

donde $f_n, f \in L^p$ y $1 \leq p < \infty$.

Observación B.5.1. *De la inecuación de Cauchy-Hölder, se tiene*

$$|\langle f_n - f, g \rangle| \leq \|f_n - f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^p}$$

Y, así, si $\|f_n - f\|_{L^p}$ converge a cero, entonces $\langle f_n - f, g \rangle$ también. Entonces la convergencia fuerte implica convergencia débil. Usualmente la convergencia fuerte es más sencillo de probar. Sin embargo, la convergencia débil requiere la demostración que asegure que para toda $g \in L^p$, que parece difícil de hacer en principio. Para algunos caso especiales e importantes espacios, es suficiente verificar la convergencia débil para una clase restringida de funciones, definidas como lo siguiente.

Proposición B.5.1. *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un medida finita y $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ entonces*

$$\|f\|_{L^{p_1}} \leq c \|f\|_{L^{p_2}} \quad \text{Para cada } f \in L^{p_2} \quad (\text{B.14})$$

donde c depende de $\mu(\mathcal{X})$. Así cada elemento de L^{p_2} pertenece a L^{p_1} , y la convergencia fuerte en L^{p_2} implica convergencia fuerte en L^{p_1}

Demostración. Sea $f \in L^{p_2}$ con $p_2 < \infty$. Tomando $g = |f|^{p_1}$, se obtiene \square

Teorema B.5.1. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\{f_n\}$ una sucesión de $f \in L^p(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$*

Bibliografía

- [1] LASOTA, A Y YORKE, J.A., *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations*” Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973) 481-486.
- [2] LASOTA, A Y MACKEY M.C., *Probabilistic properties of deterministic systems*” Cambridge University Press 1985.
- [3] PAPADAKIS S, *The existence of absolutely continuous invariant measures for a class of piecewise monotonic transformations*” A thesis. Concordia University 1979.