Revisión sobre la existencia de medidas invariantes para transformaciones monótonas a trozos

Br. Magdiel Márquez. Tutor: Dr. Luis-Angel Rodríguez

11 de agosto de 2013

La Conjetura de Ulam

En 1957 S. Ulam propuso el problema de la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas para funciones definidas por funciones suficientemente simples donde el gráfico no corte la línea $y = x$ con una pendiente de valor absoluto menor que 1.

Definamos:

- Transformación Invariante si no cambia su medida.

La Conjetura de Ulam

En 1957 S. Ulam propuso el problema de la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas para funciones definidas por funciones suficientemente simples donde el gráfico no corte la línea $y = x$ con una pendiente de valor absoluto menor que 1.

Definamos:

- Transformación Invariante si no cambia su medida.
- (Medida Invariante Sobre S) Si $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$ donde $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ es una transformación medible y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

La Conjetura de Ulam

En 1957 S. Ulam propuso el problema de la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas para funciones definidas por funciones suficientemente simples donde el gráfico no corte la línea $y = x$ con una pendiente de valor absoluto menor que 1.

Definamos:

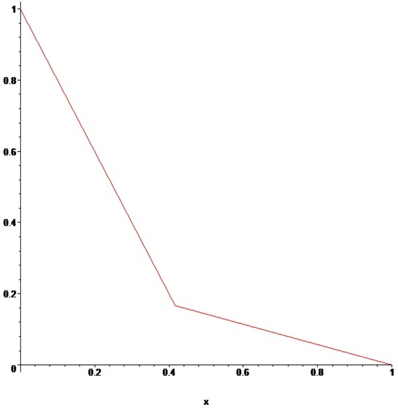
- Transformación Invariante si no cambia su medida.
- (Medida Invariante Sobre S) Si $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$ donde $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ es una transformación medible y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.
- (Absolutamente continua,μ_f) Sea $\mu_f = \int S(x)\mu(dx)$ la medida para $A \in \mathcal{A}$ donde $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ es una transformación medible y $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

La respuesta literal de esta pregunta es negativa. Se puede ilustrar

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq \frac{5}{12} \\ (2 - 2x)/7 & \frac{5}{12} < x \leq 1 \end{cases}$$

La respuesta literal de esta pregunta es negativa. Se puede ilustrar

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & 0 \leq x \leq \frac{5}{12} \\ (2-2x)/7 & \frac{5}{12} < x \leq 1 \end{cases}$$



Muchos resultados en relación de la existencia de medidas absolutamente continúas para ciertas clases de transformaciones del intervalo unitario en si mismo han sido proporcionadas (A. Rényi, Parry, Krzyzewski/Szlenk). Sin embargo, se puede señalar que el mejor resultado en esta dirección fue obtenido por A. Lasota y J. Yorke

Muchos resultados en relación de la existencia de medidas absolutamente continúas para ciertas clases de transformaciones del intervalo unitario en si mismo han sido proporcionadas (A. Rényi, Parry, Krzyzewski/Szlenk). Sin embargo, se puede señalar que el mejor resultado en esta dirección fue obtenido por A. Lasota y J. Yorke

Teorema (de Lasota-Yorke)

Sea $S : [0,1] \to [0,1]$ *una función a trozos de clases* C^2 *que satisfaga la condición*

$$\inf_{x\in[0,1]} \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| > 1$$

Entonces existe una medida invariante absolutamente continua sobre f

Bozeto de la prueba

- Se usa el hecho que operador de Perron-Frobenius, correspondiente a la transformación, tiene la propiedad de contracción en la variación de la función.

Bozeto de la prueba

- Se usa el hecho que operador de Perron-Frobenius, correspondiente a la transformación, tiene la propiedad de contracción en la variación de la función.
- Se construye una sucesión es relativamente compacta, cumpliendo asi la hipótesis del teorema de Mazur.

Bozeto de la prueba

- Se usa el hecho que operador de Perron-Frobenius, correspondiente a la transformación, tiene la propiedad de contracción en la variación de la función.
- Se construye una sucesión es relativamente compacta, cumpliendo asi la hipótesis del teorema de Mazur.
- Con lo cual, que el promedio de las orbitas convergen fuertemente a una función limite, debido al de teorema de Kakutani-Yosida

Bozeto de la prueba

- Se usa el hecho que operador de Perron-Frobenius, correspondiente a la transformación, tiene la propiedad de contracción en la variación de la función.
- Se construye una sucesión es relativamente compacta, cumpliendo asi la hipótesis del teorema de Mazur.
- Con lo cual, que el promedio de las orbitas convergen fuertemente a una función limite, debido al de teorema de Kakutani-Yosida
- Repitiendo este proceso se consigue una familia de funciones que acotan a la variación del operador de Perron-Frobenius es el promedio de las n estimaciones

Bozeto de la prueba

- Se usa el hecho que operador de Perron-Frobenius, correspondiente a la transformación, tiene la propiedad de contracción en la variación de la función.
- Se construye una sucesión es relativamente compacta, cumpliendo asi la hipótesis del teorema de Mazur.
- Con lo cual, que el promedio de las orbitas convergen fuertemente a una función limite, debido al de teorema de Kakutani-Yosida
- Repitiendo este proceso se consigue una familia de funciones que acotan a la variación del operador de Perron-Frobenius es el promedio de las n estimaciones
- Usando el principio de selección de Helly se puede conseguir una sucesión de funciones, que convergen a una función de variación finita.

La tasa de crecimiento en la población de una especie es proporcional a la población real en cualquier instante dado. Si x representa la cantidad de especímenes en cualquier instante dado y t las unidades de tiempo, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

representa la dinámica de una población. Donde α es una contante; si $\alpha > 0$ se tiene una ley de crecimiento natural y si $\alpha < 0$ se tiene una ley de decrecimiento natural.

La tasa de crecimiento en la población de una especie es proporcional a la población real en cualquier instante dado. Si x representa la cantidad de especímenes en cualquier instante dado y t las unidades de tiempo, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

representa la dinámica de una población. Donde α es una contante; si $\alpha > 0$ se tiene una ley de crecimiento natural y si $\alpha < 0$ se tiene una ley de decrecimiento natural.

$x(t) > \alpha$, la tasa sería negativa y la población decrecería acercandose a α.

$x(t) = \alpha$, la tasa sería nula y, por lo tanto, la población constante.

La tasa de crecimiento en la población de una especie es proporcional a la población real en cualquier instante dado. Si x representa la cantidad de especímenes en cualquier instante dado y t las unidades de tiempo, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

representa la dinámica de una población. Donde α es una contante; si $\alpha > 0$ se tiene una ley de crecimiento natural y si $\alpha < 0$ se tiene una ley de decrecimiento natural.

- $x(t) > \alpha$, la tasa sería negativa y la población decrecería acercandose a α.
- $x(t) = \alpha$, la tasa sería nula y, por lo tanto, la población constante.
- $x(t) < \alpha$, la tasa sería positiva, creciendo entonces la población, aunque más lentamente cuando más proxima esté del valor de α.

Por consiguiente, podemos considera la siguiente definición

Definición (Familia Logística)

Es la transformación definida como:

$$S(x) = \alpha x(1 - x) \qquad \textit{para } 0 \leq x \leq 1$$

Por consiguiente, podemos considera la siguiente definición

Definición (Familia Logística)

Es la transformación definida como:

$$S(x) = \alpha x(1-x) \qquad \textit{para } 0 \leq x \leq 1$$

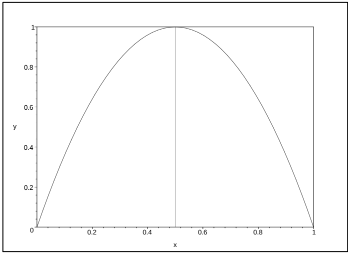


Figura : Gráfica $S(x) = 4x(1-x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Se observa como la población crece y decrece alrededor de α

Al examinar la población de una especie, se puede considerar la variable t como las generaciones de la misma. La cantidad de población de la siguiente generación dependerá de la cantidad de población actual mediante la transformación S.

Al examinar la población de una especie, se puede considerar la variable t como las generaciones de la misma. La cantidad de población de la siguiente generación dependerá de la cantidad de población actual mediante la transformación S.

Definición (Trayectoria de x^0)

Es la sucesión de estado definidos como

$$x^0, S(x^0), \quad S(S(x^0)) = S^2(x^0), \quad S(S(S(x^0))) = S^3(x^0), \ldots$$

donde $x^0 \in [0, 1]$ *en los tiempos* $1, 2, 3, \ldots$

Se presenta las gráficas de la trayectorias para los valores $x^0 = \pi/10$ y $x^1 = \pi/10 + 0{,}001$.

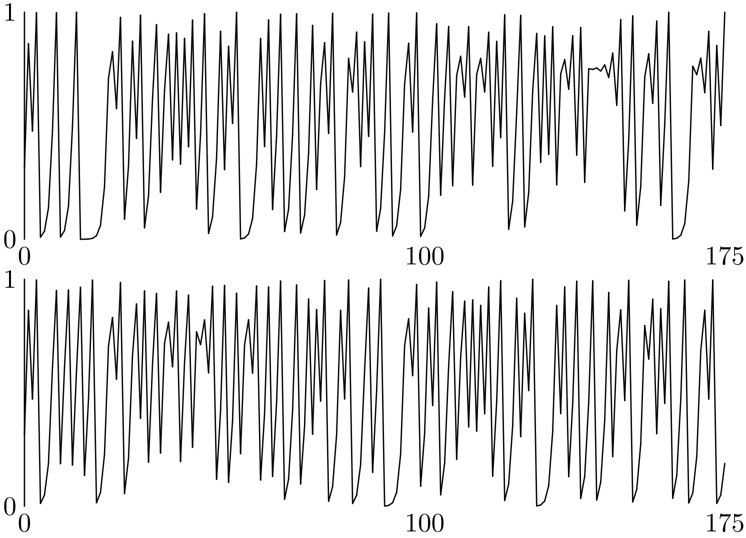
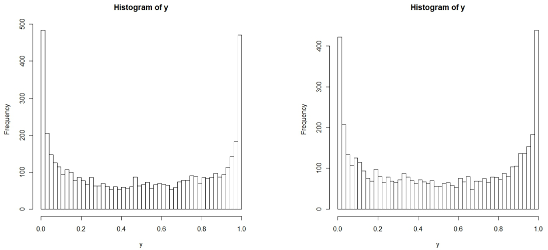


Figura : (Arriba) La trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^0 = \pi/10$. (Abajo) Trayectoria de $S(x)$ con condición inicial $x^1 = \pi/10 + 0.001$

Se calcula la norma 2, osea

$$||x^0 - x^1|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x^0(i) - x^1(i)} = 35,909$$

Por otro lado, considerando el histograma de frecuencia



Cuadro : (Izquierda) Histograma de frecuencia para $S(x^0)$ con $x^0 = \pi/2$.(Derecha) Histograma de frecuencia para $S(x^0)$ con $x^0 = \pi/2 + 0{,}001$.

El Operador de Perron-Frobenius

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \qquad para\ A \in \mathcal{A}$$

El Operador de Perron-Frobenius

$$\int_A \mathcal{P}f(x)\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \qquad \textit{para } A \in \mathcal{A}$$

Proposición

Sea $S \circlearrowleft$ una una transformación real diferenciable e invertible, con derivada continua y creciente entonces el operador de Perron-Frobenius se expresa como:

$$\mathcal{P}f(x) = f(S^{-1})\left|\frac{d}{dx}[S^{-1}(x)]\right| \tag{1}$$

Invirtiendo la transfomación logistica $x = \frac{2 \mp 2\sqrt{(1-y)}}{4}$ nos queda:

$$\mathcal{P}f(x)F = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left\{ f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)\right\}$$

Invirtiendo la transfomación logistica $x = \frac{2 \mp 2\sqrt{(1-y)}}{4}$ nos queda:

$$\mathcal{P}f(x)F = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left\{f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)+f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)\right\}$$

Supongamos que $f(x) = 1$ para $x \in [0,1]$

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Invirtiendo la transfomación logistica $x = \frac{2 \mp 2\sqrt{(1-y)}}{4}$ nos queda:

$$\mathcal{P}f(x)F = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left\{ f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)\right\}$$

Supongamos que $f(x) = 1$ para $x \in [0,1]$

$$\mathcal{P}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Se calcula nuevamente $\mathcal{P}$ con el valor de $\mathcal{P}f$

$$\mathcal{P}^2 f(x) = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}}\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} \right\}$$

Se puede mostra que para este ejemplo en especifico la sucesión de orbitas converge a una densidad limite dada por:

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

Se puede mostra que para este ejemplo en especifico la sucesión de orbitas converge a una densidad limite dada por:

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

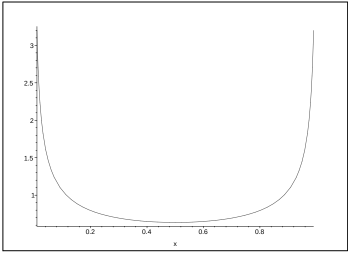


Figura : Gráfica $f_*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$. Se observa como la función predice la probabilidad empírica conseguída en los histogramas 1

$$||\mathcal{P}f|| \leq ||f||$$

A esta propiedad se le conoce con el nombre de contractiva. Se ilustra la importancia de la propiedad

$$|\mathcal{P}^{n+1}f|| = ||\mathcal{P}(\mathcal{P}^n f)|| \leq ||\mathcal{P}^n f||$$

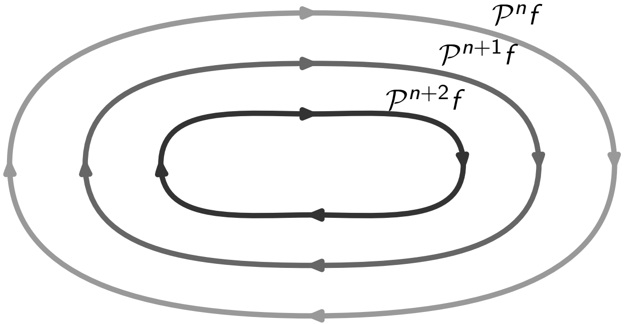
Graficando la inecuación

$$||\mathcal{P}f|| \leq ||f||$$

A esta propiedad se le conoce con el nombre de contractiva. Se ilustra la importancia de la propiedad

$$|\mathcal{P}^{n+1}f|| = ||\mathcal{P}(\mathcal{P}^n f)|| \leq ||\mathcal{P}^n f||$$

Graficando la inecuación



Definición (Puntos fijos)

Son los puntos x que cumple

$$T(x) = x$$

Definición (Puntos fijos)

Son los puntos x que cumple

$$T(x) = x$$

Teorema

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ una transformación no singular, y $\mathcal{P}$ el operador de Perron-Frobenius asociado con S. Considere $f \in L^1$ entonces μ_f una medida dada por

$$\mu_f = \int_A f(x)\mu(dx) \tag{2}$$

Es invariante si y solo si es un punto fijo de $\mathcal{P}$

Definición (Transformaciones Ergódicas)

Si para cada conjunto invariante $A \in \mathcal{A}$ *se cumple* $\mu(A) = 0$ *o* $\mu(\mathcal{X} \backslash \mathcal{A})$

Si S es ergódica se dice que todos los conjuntos invariantes son subconjuntos *triviales* de $\mathcal{X}$.

Teorema

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ *una transfomación no singular.* S *es ergodico si y solo si, para cada función medible* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$*,*

Definición (Transformaciones Ergódicas)

Si para cada conjunto invariante $A \in \mathcal{A}$ *se cumple* $\mu(A) = 0$ *o* $\mu(\mathcal{X} \backslash \mathcal{A})$

Si S es ergódica se dice que todos los conjuntos invariantes son subconjuntos *triviales* de $\mathcal{X}$.

Teorema

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ *una transfomación no singular. S es ergodico si y solo si, para cada función medible* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$,

$$f(S(x)) = f(x) \qquad \text{para casi todos los } x \in \mathcal{X} \tag{3}$$

Implica que f es constante $\mathfrak{c.s}$

Definición (Transformación Mezclante)

Si S cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \qquad \textit{para todo} A, B \in \mathcal{A} \quad (4)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un espacio de medida probabilidad, y $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ una transformación que preserva la medida.

Definición (Transformación Mezclante)

Si S cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B) \qquad \textit{para todo} A, B \in \mathcal{A} \quad (4)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un espacio de medida probabilidad, y $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ una transformación que preserva la medida.

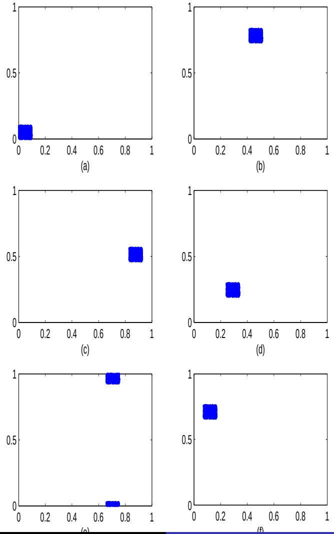
Definición (Transformación Exactas)

Si S cumple que

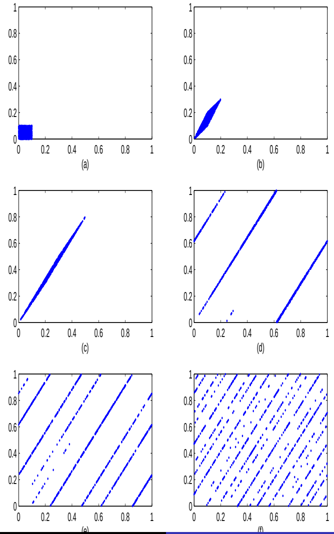
$$\lim_{n\to\infty} \mu(S^{n}(A)) = 1 \qquad \textit{para cada } A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0 \qquad (5)$$

Siendo $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un espacio de medida probabilidad, y $S : \mathcal{X} \circlearrowleft$ una transformación que preserva la medida.

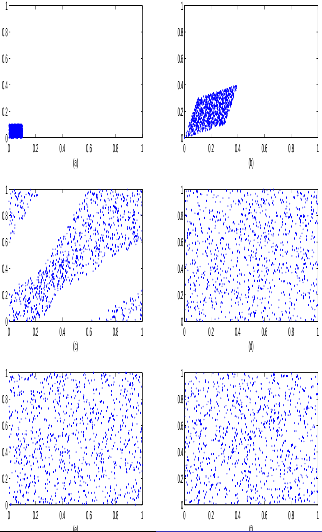
La transformación $S(x,y) = (\sqrt{2}+x, \sqrt{3}+y) \quad (mod\ 1)$



La transformación $S(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod 1$



La transformación $S(x,y) = (3x + y, x + 3y) \pmod 1$



Definición (Variación acotada, $s_n(f)$)

Se define como $s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ *Siendo* f *una función real definida en el intervalo* $\triangle \subset \mathbb{R}$ *y sea* $[a, b]$ *un subintervalo de* $\triangle$*. Así mismo, considerando la partición de* $[a, b]$ *dada por* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *En donde todas las posibles sumas* $s_n(f)$*, corresponden a todas la divisiones de* $[a, b]$*, son acotadas por un número que no depende de la subdivisión.*

Definición (Variación acotada, $s_n(f)$)

Se define como $s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ *Siendo f una función real definida en el intervalo* $\triangle \subset \mathbb{R}$ *y sea* $[a, b]$ *un subintervalo de* $\triangle$. *Así mismo, considerando la partición de* $[a, b]$ *dada por* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *En donde todas las posibles sumas* $s_n(f)$, *corresponden a todas la divisiones de* $[a, b]$, *son acotadas por un número que no depende de la subdivisión.*

Definición (Variación Total, $\bigvee f(x)$)

Se define como

$$\bigvee_a^b f = \sup s_n(f)$$

donde el supremo se toma sobre todas la posibles particiones

La Variación de la Suma

$$\bigvee_a^b (f_1 + \ldots + f_n) \leq \bigvee_a^b f_1 + \ldots + \bigvee_a^b f_n$$

La Variación de la Suma

$$\bigvee_a^b (f_1 + \ldots + f_n) \leq \bigvee_a^b f_1 + \ldots + \bigvee_a^b f_n$$

Variación sobre la union de intervalo

$$\bigvee_{a_0}^{a_1} f + \ldots + \bigvee_{a_{n-1}}^{a_n} f = \bigvee_{a_0}^{a_n} f$$

La Variación de la Suma

$$\bigvee_a^b (f_1 + \ldots + f_n) \leq \bigvee_a^b f_1 + \ldots + \bigvee_a^b f_n$$

Variación sobre la union de intervalo

$$\bigvee_{a_0}^{a_1} f + \ldots + \bigvee_{a_{n-1}}^{a_n} f = \bigvee_{a_0}^{a_n} f$$

Variación de la composición de funciones

$$s_n(f \circ g) \leq \bigvee_a^b f$$

Variación del Producto

$$\bigvee_a^b g \leq \int_a^b |g'(x)| dx$$

Variación del Producto

$$\bigvee_a^b g \leq \int_a^b |g'(x)| dx$$

Desigualdad de Yorke

$$\bigvee_0^1 f \mathbb{1}_{[a,b]} \leq 2 \bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx$$

Variación del Producto

$$\bigvee_a^b g \leq \int_a^b |g'(x)|dx$$

Desigualdad de Yorke

$$\bigvee_0^1 f\,\mathbb{I}_{[a,b]} \leq 2\bigvee_a^b f + \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx$$

Definición (Funciones a trozos $\mathcal{C}^2$,τ)

Si existe una partición $0 = a_0 < a_1 < ... < a_p = 1$ del intervalo unitario para cada entero $i = 1, \dots, p$ que verifique los τ_i de τ para el intervalo abierto (a_{i-1}, a_i) es una función C^2. La función τ no tiene que ser continua en los puntos a_i

Definición (Clausura, $\overline{E}$)

Si $\overline{E} = \{x \in \mathcal{X} : \forall B(x,\epsilon) \cap E \neq \emptyset\}$

Equivalentemente la clausura se puede definir mediante $\overline{E} = E \cup E'$ donde E' es el conjunto de los puntos de acumulación de E. También, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E.

Definición (Clausura, $\overline{E}$)

Si $\overline{E} = \{x \in \mathcal{X} : \forall B(x,\epsilon) \cap E \neq \emptyset\}$

Equivalentemente la clausura se puede definir mediante $\overline{E} = E \cup E'$ donde E' es el conjunto de los puntos de acumulación de E. También, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E.

Definición (Totalmente acotado)

Si $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ *tal que* $\cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) \supseteq \mathcal{X}$ *siendo* $(\mathcal{X}, d)$ *un espacio métrico.*

Definición (Relativamente compacto)

Si toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que converge en X. Siendo S un subconjunto de un espacio topológico $\mathcal{X}$

Para espacios métricos tenemos definición equivalente. A es relativamente compacto si y solo si su clausura es un compacto

Definición (Relativamente compacto)

Si toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que converge en X. Siendo S un subconjunto de un espacio topológico $\mathcal{X}$

Para espacios métricos tenemos definición equivalente. A es relativamente compacto si y solo si su clausura es un compacto

Definición (Envolvente Convexa, co(A))

Es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A, es decir, el conjunto de todas las sumas $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ donde $x_i \in A,\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1$ para un n arbitrario.

Lema

Si $f \in C^1[a,b]$ *con* $|f'(x)| > 0$, *entonces* f *es monótona sobre* $[a,b]$.

Lema

Si $f \in C^1[a,b]$ *con* $|f'(x)| > 0$, *entonces* f *es monótona sobre* $[a,b]$.

Lema

Sea f *un función diferenciable uno a uno, y sea* $g = f^1$. *Si* $|f'| \geq \alpha$ *entonces* $|g'| \leq \frac{1}{\alpha}$

Lema

Si $f \in C^1[a,b]$ *con* $|f'(x)| > 0$, *entonces f es monótona sobre* $[a,b]$.

Lema

Sea f un función diferenciable uno a uno, y sea $g = f^1$. *Si* $|f'| \geq \alpha$ *entonces* $|g'| \leq \frac{1}{\alpha}$

Lema

Si $\bigvee_0^1 f \leq a$ *y* $||f|| \leq b$, *donde* $||f|| = \int_0^1 |f|$ *entonces* $|f(x)| \leq a + b \; \forall x$

Teorema (Helly)

Sea $\mathcal{F}$ *una colección infinita de de funciones de variación acotada en un intervalo* $[a, b]$ *y supongamos que existe* $K > 0$ *tal que*

$$|f(x)| \leq K \quad \bigvee_{[a,b]} f \leq K \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ *que converge a todo punto* $x \in [a, b]$ *a una función* f_* *de variación acotada, tal que* $\bigvee_{[a,b]} f_* \leq K$

Teorema (Helly)

Sea$\mathcal{F}$ una colección infinita de de funciones de variación acotada en un intervalo $[a,b]$ y supongamos que existe $K>0$ tal que

$$|f(x)| \leq K \quad \bigvee_{[a,b]} f \leq K \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ que converge a todo punto $x \in [a,b]$ a una función f_* de variación acotada, tal que $\bigvee_{[a,b]} f_* \leq K$

Teorema (Mazur)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de banach con $A \subset \mathcal{X}$ es un compacto relativo, entonces $\overline{co}(A)$ es compacto.

Los promedios se define como:

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P} f \qquad f \in L^1$$

Los promedios se define como:

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P} f \qquad f \in L^1$$

Teorema (Kakatani-Yosida)

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{P} : \mathcal{X} \circlearrowleft$ un operador de Markov. Si para una funcion dada $f \in L^1$ la sucesión $\{A_f\}$ es débilmente precompacta, entonces esta converge fuertemente para algún $f_* \in L^1$ que es un punto fijo de $\mathcal{P}$, a saber, $\mathcal{P} f_* = f_*$. Adicionalmente, si $f \in D$, entonces$f_* \in D$, de modo que f_* es una densidad estacionaria.

Teorema

Sea $\tau : [0,1] \circlearrowleft$ *una función a trozos de clase* C^2 *tal que* $\inf |\tau'| > 1$. *Entonces para cualquier* $f \in L^1$ *la sucesión* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f$ *es convergente en norma a la función* $f^* \in L^1$. *El límite de la función cumple las siguientes propiedades:*

1. $f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0$

Teorema

Sea $\tau : [0,1] \circlearrowleft$ *una función a trozos de clase* C^2 *tal que* $\inf |\tau'| > 1$. *Entonces para cualquier* $f \in L^1$ *la sucesión* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f$ *es convergente en norma a la función* $f^* \in L^1$. *El límite de la función cumple las siguientes propiedades:*

1. $f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0$
2. $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$

Teorema

Sea $\tau : [0,1] \circlearrowleft$ *una función a trozos de clase* C^2 *tal que* $\inf|\tau'| > 1$. *Entonces para cualquier* $f \in L^1$ *la sucesión* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f$ *es convergente en norma a la función* $f^* \in L^1$. *El límite de la función cumple las siguientes propiedades:*

1. $f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0$
2. $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$
3. $\mathcal{P}_\tau f^* = f^*$ *y en consecuencia la medida* $d\mu^* = f^* dm$ *es invariante bajo* τ.

Teorema

Sea $\tau : [0,1] \circlearrowleft$ *una función a trozos de clase* C^2 *tal que* $\inf |\tau'| > 1$. *Entonces para cualquier* $f \in L^1$ *la sucesión* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f$ *es convergente en norma a la función* $f^* \in L^1$. *El límite de la función cumple las siguientes propiedades:*

1. $f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0$
2. $\int_0^1 f^* dm = \int_0^1 f dm$
3. $\mathcal{P}_\tau f^* = f^*$ *y en consecuencia la medida* $d\mu^* = f^* dm$ *es invariante bajo* τ.
4. *La función* f^* *es de variación acotada, por otra parte, existe una constante c independiente de la elección inicial de f tal que la variación de el limite* f^* *satisface la inecuación*

$$\bigvee_0^1 f^* \leq c||f||$$

Notese que Sea $\phi = \tau^N$ una función C^2, por lo tanto se tiene:

$$|\phi_i'(x)| \geq S^N \quad x \in [b_{i-1}, b_i], \quad i = 1, \ldots, q \tag{6}$$

Se calcula el operador de Perron Frobenius para ϕ. Observe que, para cualquier $x \in [0,1]$ en $\phi^{-1}([0,x]) = \bigcup_{i=1}^{q} [b_{i-1}, \phi_i^{-1}(x)]$

$$\mathcal{P}_\phi f(x) = \sum_{i=1}^{q} f(\psi_i(x))\sigma_i(x)\mathbb{I}_i(x)$$

donde $\psi_i = \phi_i^{-1}$, $\sigma_i(x) = |\psi_i'(x)|$ yla función sobre el intervalo $J_i = \phi_i([b_{i-1}, b_i])$.

$$|\sigma_i(x)| \leq s^{-N} \quad x \in J_i \quad i = 1, \ldots, q \tag{7}$$

Calculando la variación sobre el intervalo $[0, 1]$

$$\bigvee_0^1 \mathcal{P}_\phi f \leq \sum_{i=1}^q \bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i)\sigma_i + s^{-N} \sum_{i=1}^q (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \quad (8)$$

Observe que la ecuación anterior se cumple por (7). Evaluando el primer término de (8)

$$\bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i)\sigma_i \leq K \int_{J_i} |f \circ \psi_i| \sigma_i dm + s^{-N} \int_{J_i} |d(f \circ \psi_i)|$$

donde $K = \max |\sigma_i'| / \min (\sigma_i)$. Haciendo el cambio de variables

$$\bigvee_{J_i} (f \circ \psi_i)\sigma_i \leq K||f|| + s^{-N} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |df| \quad (9)$$

Evaluando el segundo término de (8). Sea un c arbitrario entre $[b_{i-1}, b_i]$

$$|f(b_{i-1})| + |f(b_i)| \leq \bigvee_{b_{i-1}}^{b_i} f + 2d_i \tag{10}$$

donde $d_i = \inf\{|f(x)| : x \in [b_{i-1}, b_i]\}$. Por otra parte, se tiene la siguiente inecuación

$$d_i \leq h^{-1} \int_{b_{i-1}}^{b_i} |f| dm \tag{11}$$

donde $h = \text{mini}_i\,(b_i - b_{i-1})$. De (10), 11 se tiene

$$\sum_{i=1}^{q} (|f(b_{i-1})| + |f(b_i)|) \leq \bigvee_0^1 f + 2h^{-1}||f|| \tag{12}$$

Sustituyendo (12) y (9) en (8) se obtiene
$\bigvee_0^1 \mathcal{P}_\phi f \leq \alpha||f|| + \beta \bigvee_0^1 f$ donde $\alpha = (K + 2h^{-1})$ y $\beta = 2s^{-N} < 1$.

Ahora, para la misma función f, sea $f_k = \mathcal{P}_\tau^k f$.Ya que $\mathcal{P}_\tau^N = \mathcal{P}_\phi$ se tiene

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha ||f|| + \beta \bigvee_0^1 f_{N(k-1)}$$

para la misma f, sea $f_k = \mathcal{P}_\tau^k f$. Entonces

$$f_{Nk} = \mathcal{P}_\phi f_{N(k-1)}$$

por lo tanto

$$\bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \sum_{n=0}^{k-1} \alpha\beta^n ||f|| + \beta^k \bigvee_0^1 f_0$$

y en consecuencia, tomado a $f_0 = f$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \sup \bigvee_0^1 f_{Nk} \leq \alpha(1-\beta)^{-1} ||f|| \tag{13}$$

esta última ecuación y con $||f_k|| \leq ||f||$ por el lema (27) se tiene que $\forall k$

$$|f_{Nk}(x)| \leq \frac{\alpha||\alpha||}{1-\beta} + ||f||$$

como la subsección es monotona por ?? y tambien acotada prueba que el conjunto $C = \{f_{N_k}\}_{k=0}^{\infty}$ cada infinito subconjuto contiene una subsucesión convergente, osea, C es un compacto relativo en L_1. Como $\mathcal{P}_\tau$ es continua, $\mathcal{P}_\tau^k C$ es tambien un compacto relativo. Entonces

$$\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \cup_{k=0}^{N-1} \mathcal{P}_\tau^k C$$

Se tiene que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ es un compacto relativo, también.

Por el teorema de Mazur

$$co(C) = \{\sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k | a_k \geq 0, \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 1\}$$

es un compacto relativo tambien. Y como

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f\right\} \subset co(C) \tag{14}$$

Es también un compacto relativo. Finalmente, por el Teorema de Kakutani-Yosida

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f \to f_* \in L_1[0,1]$$

donde

$$\mathcal{P}_\tau f^* = f^*$$

Aplicando el mismo procedimiento anterior

$$\bigvee_0^1 f_{N(k+m)} \leq c_1^m \bigvee_0^1 f_{N(k)} + c_2 \frac{1-c_1^N}{1-c_1} ||f||$$

y por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \sup \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau^k f \leq c||f|| \qquad c > 0$$

Para una función de variación finita en $[0,1]$.

$$\bigvee_0^1 \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_\tau^k f\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \bigvee_0^1 \mathcal{P}_\tau^k f$$

$$\bigvee_0^1 T_n f \leq c||f|| \tag{15}$$

para f de variación finita en $[0,1]$. Ahora

$$||T_n f|| \leq ||f||$$

Por lo tanto (15) junto al lema (27) se tiene

$$|T_n f(x)| \leq (c+1)||f|| \tag{16}$$

De (15) a (16) y el teorema de helly se tiene que existe una subseción $\{T_{n_k} f\}$ que converge sobre todo $[0,1]$ a una función de variación acotada. Como $T_n f$ converge fuertemente, entonces

$$\bigvee_0^1 Tf \leq c||f|| \tag{17}$$

donde

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n$$

Se puede probar que el operador T es lineal. Notese que el espacio L_1 esta contenido en el espacio de variacion acotada finita ambos con soporte $[0, 1]$ por lo tanto para cualquier $f_{\in} L_{[}0, 1]$ existe un sucesión $\{\phi_n\}$ contenida en el espacio de variacion acotada finita tal que $\phi_n \to f$ por (17)

$$\bigvee_0^1 T\phi_n \leq c||\phi_n||$$

$$|T\phi_n(x)| \leq (c+1)(\epsilon + ||f||)$$

Usando nuevamente el teorema Helly se tiene que existe subsucesiones $\{\phi_{n_k}\} \subset \{\phi_n\}$ con $n_k > N$ tal que

$$T\phi_{n_k} \to f^*$$

Para algun f^* de variación acotada. Pero $T\phi_n \to Tf$ y $\{T\phi_{n_k}\} \subset \{T\phi_n\}$ asi T es continua y $Tf = f^*$ y pertenece al conjunto de funciones de variación acotada finita con soporte $[0,1]$ para $f \in L_{[0,1]}$

Un contraejemplo

La hipótesis $\inf |\tau'| > 1$ es esencial

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$