Oppgave 1

1) Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Den augmenterte matrisen $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ er inkonsistent og følgelig er $\mathbf{b} \notin \text{Col}A$.

2) Eksempel på 4×3 matrise med $\text{rank}(A) = 1$:

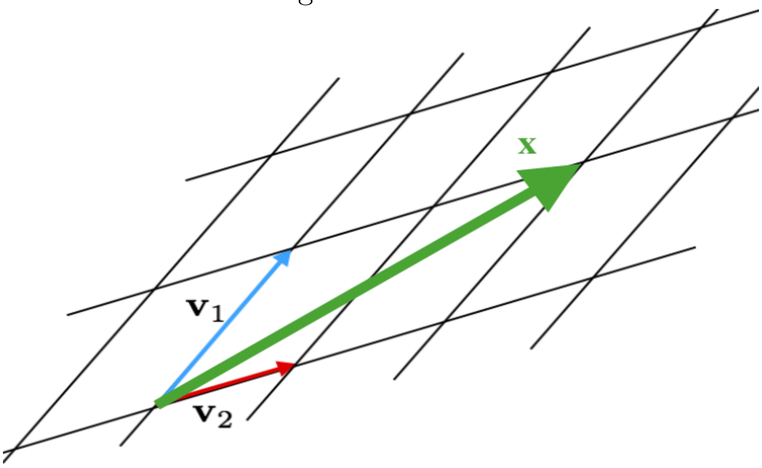
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Vi har at $A^2 = I$ er inverterbar per definisjon inverterbar med $A^{-1} = A$.

4) A er en 5×6 matrise og da vil Col $A \in \mathbb{R}^5 \neq \mathbb{R}^3$.
Vi har at dim Nul(A) = antall kolonner $-$ rank$(A) = 6 - 3 = 3$.

5) Vi har at rank(A) = antall kolonner $-$ dim Nul$(A) = 5 - 2 = 3$.

6) Vektoren $\mathbf{x}$ er vist i figuren:



7) Vi har at $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

8) Utfører rekkeoperasjoner på matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

Vi har at $(I - A) = I$ og $(I - A)^{-1} = I$. Det gir $(I - A)(I - A)^{-1} = I^2 = I$ og $(I - A)^{-1}(I - A) = I^2 = I$. Da følger det per definisjon av inverterbarhet at $(I - A)$ er inverterbar med $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^{p-1}$.