

Oppgave 1

Løsningene av likningssystemet er gitt ved den augmenterte matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & a-4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2(2-a)/3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Ved å la $a \neq 2$ får vi en rad på formen $[0 \ 0 \ 0 \ b]$ hvor $b \neq 0$. Altså har likningssystemet ingen løsning.
- Systemet har ingen frie variabler. Ved å la $a = 2$ har vi ikke en rekke på formen $[0 \ 0 \ 0 \ b]$ med $b \neq 0$, og følgelig har likningssystemet kun én løsning.
- Ingen verdier av a gjør at likningssystemet har uendelig mange løsninger ettersom det ikke har frie variabler.
- Fra (1) ser vi for $a = 2$ at likningssystemet har løsningene $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$ og $x_3 = 2/3$.

Oppgave 2

- $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dersom \mathbf{b} er en lineær kombinasjon av $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

b)

$$3\mathbf{v}_1 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad (-1)\mathbf{v}_1 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad 2 \cdot \mathbf{v}_1 + 2 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Eksempel på vektor $\mathbf{u} \notin \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser av den augmenterte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

at det ikke finnes vektorer c_1 og c_2 slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$ ettersom vi har en rad på formen $[0 \ 0 \ b]$ med $b \neq 0$.

Oppgave 3

- a) Vektorene $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært uavhengige dersom ingen av vektorene er en multiplum av noen av de andre vektorene.
- b) Minst én av vektorene $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er en multiplum av de andre vektorene.
- c) Eksempel på 4 uavhengige vektorer i \mathbb{R}^4 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorene har verdi ulik null i ulike rader og vil dermed ikke kunne uttrykkes som en multiplum av de andre vektorene (vektorene til identitetsmatrisen I_4).

Oppgave 4

- a) Fra-mengde: \mathbb{R}^3 , til-mengde: \mathbb{R}^2 .

- b) La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ være vektorer i \mathbb{R}^3 og c og d skalarer. Da har vi at

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) &= T\left(c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 + dv_1 \\ cu_2 + dv_2 \\ cu_3 + dv_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 3(cu_1 + dv_1) + 2(cu_2 + dv_2) \\ -(cu_2 + dv_2) + cu_3 + dv_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) &= cT\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = c \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ -u_2 + u_3 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3v_1 + 2v_2 \\ -v_2 + v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(cu_1 + dv_1) + 2(cu_2 + dv_2) \\ -(cu_2 + dv_2) + cu_3 + dv_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har vist at $T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$. Transformasjonen T er dermed per definisjon lineær.

- c) Vi har at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La

$$\ell_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ell_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \ell_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$\begin{aligned} T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) &= T(x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + x_3 \ell_3) = x_1 T(\ell_1) + x_2 T(\ell_2) + x_3 T(\ell_3) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Standardmatrisen til T er altså gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

d) La A være matrisen (2) og \mathbf{b} vektor i \mathbb{R}^2 . Reduserer den augmenterte matrisen $[A \ \mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3(b_1 + 2b_2) \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Vi ser at (3) har én fri variabel og ingen rad på formen $[0 \ 0 \ 0 \ c]$ med $c \neq 0$. Det gir at:

- Likningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ har løsning for hver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, og T er dermed på.
- Likningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ har flere enn den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og T er dermed ikke én-til-én.