Oppgave 1

Lï¿½sningene av likningssystemet er gitt ved den augmenterte matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & a-4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2(2-a)/3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

a) Ved ï¿½ la $a \neq 2$ fï¿½r vi en rad pï¿½ formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ hvor $b \neq 0$. Altsï¿½ har likningssystemet ingen lï¿½sning.

b) Systemet har ingen frie variabler. Ved ï¿½ la $a = 2$ har vi ikke en rekke pï¿½ formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ med $b \neq 0$, og fï¿½lgelig har likningssystemet kun ï¿½n lï¿½sning.

c) Ingen verdier av a gjï¿½r at likningssystemet har uendelig mange lï¿½sninger ettersom det ikke har frie variabler.

d) Fra (1) ser vi for $a = 2$ at likningssystemet har lï¿½sningene $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$ og $x_3 = 2/3$.

Oppgave 2

a) $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ dersom $\mathbf{b}$ er en lineï¿½r kombinasjon av $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$.

b)

$$3\mathbf{v_1} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } (-1)\mathbf{v_1} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$0 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{0}, \quad 0 \cdot \mathbf{v_1} + 1 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$1 \cdot \mathbf{v_1} + 1 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Eksempel pï¿½ vektor $\mathbf{u} \notin \text{Span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser av den augmenterte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

at det ikke finnes vekter c_1 og c_2 slik at $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = \mathbf{u}$ ettersom vi har en rad pï¿½ formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ med $b \neq 0$.

Oppgave 3

a) Vektorene $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ er lineï¿½rt uavhengige dersom ingen av vektorene er en multippel av noen av de andre vektorene.

b) Minst ï¿½n av vektorene $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ er en multippel av de andre vektorene.

c) Eksempel pï¿½ 4 uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Vektorene har verdi ulik null i ulike rader og vil dermed ikke kunne uttrykkes som en multippel av de andre vektorene (vektorene til identitetsmatrisen I_4).

Oppgave 4

a) Fra-mengde: $\mathbb{R}^3$, til-mengde: $\mathbb{R}^2$.

b) La $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ vï¿½re vektorer i $\mathbb{R}^3$ og c og d skalarer. Da har vi at

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = T\left(c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}cu_1 + dv_1\\cu_2 + dv_2\\cu_3 + dv_3\end{bmatrix}\right)$$
$$\frac{1}{2} = \begin{bmatrix}3(cu_1 + dv_1) + 2(cu_2 + dv_2)\\-(cu_2 + dv_2) + cu_3 + dv_3\end{bmatrix}$$

$$cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v}) = cT\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) = c\begin{bmatrix}3u_1 + 2u_2\\-u_2 + u_3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}3v_1 + 2v_2\\-v_2 + v_3\end{bmatrix}$$
$$\frac{1}{2} = \begin{bmatrix}3(cu_1 + dv_1) + 2(cu_2 + dv_2)\\-(cu_2 + dv_2) + cu_3 + dv_3\end{bmatrix}$$

Vi har vist at $T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$. Transformasjonen T er dermed per definisjon lineï¿½r.

c) Vi har at

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

La

$$\boldsymbol{\ell_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\ell_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ï¿}\frac{1}{2}\text{og } \boldsymbol{\ell_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= T\left(x_1\boldsymbol{\ell_1} + x_2\boldsymbol{\ell_2} + x_3\boldsymbol{\ell_3}\right) = x_1 T\left(\boldsymbol{\ell_1}\right) + x_2 T\left(\boldsymbol{\ell_2}\right) + x_3 T\left(\boldsymbol{\ell_3}\right) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Standardmatrisen til T er altsï¿½ gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

d) La A vï¿½re matrisen (2) og $\boldsymbol{b}$ vektor i $\mathbb{R}^2$. Reduserer den augmenterte matrisen $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3(b_1 + 2b_2) \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Vi ser at (3) har ï¿½n fri variabel og ingen rad pï¿½ formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ med $c \neq 0$. Det gir at:

- Likningen $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ har lï¿½sning for hver $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, og T er dermed pï¿½.
- Likningen $T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ har flere enn den trivielle lï¿½sningen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, og T er dermed ikke ï¿½n-til-ï¿½n.