Oppgave 1

Løsningene av likningssystemet er gitt ved den augmenterte matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & a-4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2(2-a)/3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

a) Ved å la $a \neq 2$ får vi en rad på formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ hvor $b \neq 0$. Altså har likningssystemet ingen løsning.

b) Systemet har ingen frie variabler. Ved å la $a = 2$ har vi ikke en rekke på formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ med $b \neq 0$, og følgelig har likningssystemet kun én løsning.

c) Ingen verdier av a gjør at likningssystemet har uendelig mange løsninger ettersom det ikke har frie variabler.

d) Fra (1) ser vi for $a = 2$ at likningssystemet har løsningene $x_1 = 1$, $x_2 = 1/3$ og $x_3 = 2/3$.

Oppgave 2

a) $\mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ dersom $\mathbf{b}$ er en lineær kombinasjon av $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$.

b)

$$3\mathbf{v_1} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } (-1)\mathbf{v_1} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$0 \cdot \mathbf{v_1} + 0 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{0}, \quad 0 \cdot \mathbf{v_1} + 1 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$1 \cdot \mathbf{v_1} + 1 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad 2 \cdot \mathbf{v_1} + 2 \cdot \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

a) Vektorene $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ er lineært uavhengige dersom ingen av vektorene er en multippel av noen av de andre vektorene.

b) Minst én av vektorene $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_p}\}$ er en multippel av de andre vektorene.

c) Eksempel på 4 uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Vektorene har verdi ulik null i ulike rader og vil dermed ikke kunne uttrykkes som en multippel av de andre vektorene (vektorene til identitetsmatrisen I_4).

Oppgave 4

a) Fra-mengde: $\mathbb{R}^3$, til-mengde: $\mathbb{R}^2$.

b) La $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$ og c og d skalarer. Da har vi at

$$\begin{aligned} T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = T\left(c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix}cu_1+dv_1\\cu_2+dv_2\\cu_3+dv_3\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}3(cu_1+dv_1)+2(cu_2+dv_2)\\-(cu_2+dv_2)+cu_3+dv_3\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v}) = cT\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) &= c\begin{bmatrix}3u_1+2u_2\\-u_2+u_3\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}3v_1+2v_2\\-v_2+v_3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}3(cu_1+dv_1)+2(cu_2+dv_2)\\-(cu_2+dv_2)+cu_3+dv_3\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har vist at $T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$. Transformasjonen T er dermed per definisjon lineær.

c) Vi har at

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

La

$$\boldsymbol{\ell_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\ell_2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ og } \boldsymbol{\ell_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Det gir at

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) &= T\left(x_1\boldsymbol{\ell_1} + x_2\boldsymbol{\ell_2} + x_3\boldsymbol{\ell_3}\right) = x_1T\left(\boldsymbol{\ell_1}\right) + x_2T\left(\boldsymbol{\ell_2}\right) + x_3T\left(\boldsymbol{\ell_3}\right) \\ &= x_1\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Standardmatrisen til T er altså gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

d) La A være matrisen (2). Reduserer den augmenterte matrisen $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3(b_1 + 2b_2) \\ 0 & 1 & -1 & -b_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Vi ser at (3) har én fri variabel og ingen rad på formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ med $c \neq 0$. Det gir at:

- Likningen $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ har løsning for hver $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, og T er dermed på.
- Likningen $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ har flere enn den trivielle løsningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, og T er dermed ikke én-til-én.