Obligatorisk innlevering –MNF130
Innlevering innen kl. 1200 den 25.april 2017

Eksamnene ligger på kursets hjemmeside under Filer og i folderen Eksamensoppgaver. Sjekk at du har riktig eksamenssett før du begynner. Skriv kandidatnummer på besvarelsen.

Del 1 Eksamen MNF 130 Høsten 2013 3.oktober 2013: Oppgavene 1,2,3,4 og 5 (ikke oppgave 6 og 7).

Del 2 Eksamen MNF 130 Høsten 2014 2.oktober 2014: Oppgavene 1,3,4,5,6 og 7 (ikke oppgave 2).

Oppgavene skannes og leveres på Mitt.uib.no innen tidsfristen.

Universitetet i Bergen
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet
Institutt for informatikk

BOKMÅL

EKSAMEN I EMNET MNF130 Diskrete strukturer
Torsdag 3. oktober 2013
Tid: 09:00–12:00

Tillatte hjelpemiddel: Ingen.

Oppgave 1 (15 %)

La p, q og r være proposisjoner. Bruk av sannhetstabeller til å svare på spørsmålene under gir bare halvparten av maksimal uttelling.

a) Vis at proposisjonene $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ og $p \vee \neg q \vee r$ er ekvivalente.

b) For hvilke verdier av p, q og r er proposisjonen $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ sann? For hvilke verdier av p, q og r er proposisjonen $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ sann? Begrunn svarene.

c) Vi slår mynt og kron tre ganger for å tildele proposisjonene p, q og r verdien sann eller usann, slik at hver av de med sannsynligheten $\frac{1}{2}$ får verdien sann. Hva er sannsynligheten for at $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ blir sann?

Oppgave 2 (12 %)

Nedenfor er det gitt noen kvantifiserte proposisjoner med mengden av positive heltall som diskursunivers. Du skal avgjøre om proposisjonene er sanne eller usanne. Hvert rett svar gir 2 poeng, blankt svar gir 0 poeng, og feil svar gir -2 poeng.

a) $\exists a \forall b\, (a < b)$

b) $\exists a \forall b\, (a \geq b)$

c) $\forall a \exists b\, (a > b)$

d) $\forall a \exists b\, (a < b)$

e) $\forall a \forall b \exists\, (c : c > 1)\, (a \equiv b \pmod{c})$

f) $\forall a \forall c \exists\, (b : b > a)\, (a \equiv b \pmod{c})$

Oppgave 3 (15 %)

Gitt mengdene $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ og $C = \{7, 8, 9\}$ og funksjonene $g : A \to B$ og $h : A \to C$, der $g(1) = 5$, $g(2) = 5$, $g(3) = 6$, $h(1) = 7$, $h(2) = 8$ og $h(3) = 9$.

a) For hver av funksjonene g og h, avgjør om de er injektive. Begrunn svarene.

b) Hvor mange injektive funksjoner $f : B \to C$ eksisterer det? Hvor mange av disse er også surjektive?

c) Finn en funksjon $f : B \to C$ slik at $h = f \circ g$, eller bevis at slike funksjoner ikke eksisterer.

Oppgave 4 (16 %)

a) La tallfølgen $\{a_1, a_2, \ldots\}$ være gitt ved $a_1 = 1$ og $a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ for $n > 1$. Bevis at $a_n = 2^{n-1}$ for alle $n = 1, 2, \ldots$.

b) Gitt fibonacci-tala $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, og $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Bevis at $f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Oppgave 5 (15 %)

a) La A være en mengde, og la $R \subseteq A \times A$ være en ekvivalensrelasjon på A. Forklar hva vi mener med *ekvivalensklassen* $[a]_R$, der $a \in A$.

b) La $A = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ være mengden med par av positive heltall, der vi har gitt ekvivalensrelasjonen $R = \{((a, b), (c, d)) : \text{lcm}(a, b) = \text{lcm}(c, d)\}$ (lcm betyr minste felles multiplum). Hvor mange medlemmer har ekvivalensklassen $[(3, 4)]_R$?

c) Beskriv ekvivalensklassene til relasjonen R gitt i oppgave b). Hvilken av påstandene (i)–(v) om mengden M av ekvivalensklasser til R er sann?

(i) $M = \emptyset$.

(ii) $|M| = 1$.

(iii) M er endelig, men $|M| > 1$.

(iv) M er uendelig, men tellbar.

(v) M er uendelig og ikke tellbar.

Oppgave 6 (15 %)

La S være en mengde av binære strenger. Dersom $x, y \in S$, lar vi $x \preceq y$ bety at x forekommer som en delstreng av y.

a) Vis at $(S, \preceq)$ er en delvis ordning (poset).

b) I resten av oppgaven lar vi $S = \{01, 011, 001, 10011, 00110\}$. Tegn hassediagrammet til $(S, \preceq)$.

c) Finn alle minimale, maksimale, minste og største element til $(S, \preceq)$.

d) Forklar hvorfor $(S, \preceq)$ ikke er et gitter (lattice).

e) Finn to binære strenger x og y slik at $(S \cup \{x, y\}, \preceq)$ er et gitter.

Oppgave 7 (12 %)

a) Hvilke bitstrenger blir genererte av frasestrukturgrammatikken $G = (V, T, S, P)$ med alfabet (vokabular) $V = \{0, 1, S, A, B\}$, terminaler $T = \{0, 1\}$, startsymbol S og produksjoner $P = \{S \to AB, A \to \lambda, B \to \lambda, A \to 1A0, B \to 0B1\}$?

b) Er frasestrukturgrammatikken G gitt i oppgave a) kontekstfri? Begrunn svaret.

c) Finn produksjonene P i frasestrukturgrammatikken $G = (V, T, S, P)$, der $V = \{0, 1, S, A, B\}$ og $T = \{0, 1\}$, som genererer bitstrengene $\{(10)^n 1 : n = 0, 1, \ldots\}$.

Dag Haugland

Det matematisk–naturvitenskaplige fakultet
Universitetet i Bergen
Eksamen i MNF130 DISKRETE STRUKTURER
2.10 2014 9-12.

Oppgavesettet har 2 sider. Eneste tillattte hjelpemiddel er kalkulator. Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

Bevis ved induksjon at

a)
$$3^n < n! \text{ for alle heltall } n \geq 7$$

b)
$$\sum_{i=0}^{n} (-7)^i = \frac{1-(-7)^{n+1}}{8}, \quad \text{for alle heltall } n \geq 0$$

c)
$$10^n \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ for alle heltall } n \geq 0$$

.

Oppgave 2

a) Bevis
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
ved å benytte definisjonen av $\cup$ og $\cap$ samt de logiske operasjonene $\vee$ og $\wedge$.

b) Vis eller finn moteksempel
$$(A \cup C = B \cup C \ \wedge \ A \cap C = B \cap C) \rightarrow A = B.$$

c) Bevis ved induksjon at
$$A_0 \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A_0 \cup A_i)$$
hvor $n \geq 2$ og A_i $i \geq 0$ er delmengder av et univers U. Benytt Oppgave 2a som basistilfelle for induksjonen.

Oppgave 3

En *byte* er en streng med 8 bit. En *bit* er enten 0 eller 1. Angi antall byte som har

a) nøyaktig tre bit som er 1

b) høyst tre bit som er 1

c) minst tre bit som er 1

d) samme antall bit som er 0 og 1 (fire bit er 0 og fire bit er 1).

Oppgave 4

Bestem sannhetsverdien når domenene er alle heltall.

a) $\forall n \exists m (n^2 < m)$

b) $\exists n \forall m (n < m^2)$

c) $\forall n \exists m (n + m = 0)$

d) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$

e) La $P(n, m)$ være en predikatfunksjon som betegner utsagnet $(n + m = 4) \wedge (n - m = 1)$. Hva er sannhetsverdien av $\exists n\, P(n, 1)$?

Husk at alle svar skal begrunnes.

Oppgave 5

Hvilke av de tre følgende proposisjoner er logisk ekvivalente?

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r, \quad (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r, \quad \text{og} \quad (p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r$$

Oppgave 6

Gitt følgende algoritme A:

procedure $A(a_1, a_2, \ldots, a_n$: heltall hvor $n \geq 2)$
for $j = 2$ **to** n
    $i := 1$
    while $a_j > a_i$
        $i := i + 1$
    $m := a_j$
    for $k := 0$ **to** $j - i - 1$
        $a_{j-k} := a_{j-k-1}$
    $a_i := m$
    print $a_1, a_2 \ldots, a_n$
return $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

a) Beskriv hva algoritmen gjør. Hva kalles denne algoritmen?

b) Gitt en liste med tallene 7,5,8,3,9. Hva er utskriften (print)? (Kopier tabellen til besvarelsen)

$-$	7	5	8	3	9
$j = 2$					
$j = 3$					
$j = 4$					
$j = 5$					
return					

Oppgave 7

La $g : A \to B$ og $f : B \to C$

a) Vis at dersom både g og f er en-en-tydige (injeksjoner) da er den sammensatte funksjonen $f \circ g$ en-en-tydig.

b) Vis at dersom både g og f er surjeksjoner da er den sammensatte funksjonen $f \circ g$ en surjeksjon.

c) La $g(x) = 2x + 3$ og $f(x) = x^3$ hvor A, B og C er alle rasjonale tall. Hva er de sammensatte funksjonene $f \circ g$ og $g \circ f$? Avgjør om de sammesatte funksjonene er like.