# Universitetet i Bergen

# MNF130 | DISKRETE STRUKTURER VÅREN 2017

# Obligatorisk oppgave

Magnus ØIAN

20. april 2017

#### Oppgave 1

- a)  $p \vee \neg q \vee r \equiv (p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg (p \vee \neg q) \rightarrow r \equiv \neg p \wedge q \rightarrow r \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow r$
- b) 1) Forenkler uttrykket

$$(p \to q) \lor (q \to r) \equiv \neg p \lor q \lor \neg q \lor r \equiv \neg p \lor T \lor r \equiv T,$$

og vi ser at den er sann uansett hvilke verdier for p, q, og r vi velger (tautologi).

2) Forenkler uttrykket

$$(p \to q) \land (q \to r) \equiv \neg p \lor q \land \neg q \lor r \equiv \neg p \lor F \lor r \equiv \neg p \lor r,$$

og vi ser at den er sann når p er usann eller r er sann.

c)

#### Oppgave 2

- a) Usann.
- b) Usann.
- c) Usann.
- d) Sann.
- e) Usann.
- f) Sann.

#### Oppgave 3

- a) Vi ser at g(1) = g(2) = 5 og følgelig er ikke g injektiv. Hvert element i kodomenet til h avbildes av et unikt element i domenet til h, og følgelig er h injektiv.
- b) La  $f: B \to C$  være en injektiv funksjon. Da kan f(4) ta 3 verdier, f(5) bare 2 verdier og f(6) bare 1 verdi. Følgelig eksisterer det  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  slike funksjoner f. Mengdene B og C har lik kardinalitet. Alle injektive funksjoner fra B til C vil dermed også være surjektive.

c)

#### Oppgave 4

a) La P(n) være påstanden  $a_n = 2^{n-1}$ . Vil vise ved induksjon at P(n) er sann for alle heltall  $n \ge 1$ .

**Basissteg** Vi ser at  $a_1 = 1 = 2^{1-1}$  og  $a_2 = 1 + 1 = 2^{2-1}$ , så P(1) og P(2) er sann.

Induksjonshypotese Anta at P(j) er sann for all heltall  $j \text{ med } 1 \leq j \leq k$  for  $k \geq 2$ , altså at  $a_j = 2^{j-1}$ .

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at P(k+1) er sann, altså at  $a_{k+1} = 2^{(k+1)-1} = 2^k$ . Vi ser at

$$a_{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = a_k + a_k = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k.$$

b) La P(n) være påstanden  $f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ . Vil vise ved induksjon at P(n) er sann for alle heltall  $n \geq 0$ .

**Basissteg** Vi ser at  $a_0 = 0 \le \left(\frac{7}{4}\right)^0$  og  $a_1 = 1 \le \left(\frac{7}{4}\right)^1$ , så P(0) og P(1) er sann.

Induksjonsshypotese Anta at P(j) er sann for alle heltall  $j \mod 0 \le j \le k$  for  $k \ge 1$ , altså at  $f_j \le \left(\frac{7}{4}\right)^j$ .

Induksjonssteg Ønsker å vise at P(k+1) er sann, altså at  $f_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$ . Vi ser at

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \le \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{-2}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

#### Oppgave 5

### Oppgave 1

a) La P(n) være påstanden  $3^n < n!$ . Vil vise ved induksjon at P(n) er sann for alle heltall  $n \ge 7$ .

Basissteg Vi ser at  $3^7 < 7!$ , altså at P(1) er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at P(k) er sann for  $k \geq 7$ , altså at  $3^k < k!$ .

Induksjonssteg Ønsker å vise at P(k+1) er sann, altså at  $3^{k+1} < (k+1)!$ . Vi ser at

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 < k! \cdot 3 < k! \cdot (k+1) = (k+1)!$$

b) La P(n) være påstanden

$$\sum_{i=0}^{n} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{8}.$$

Vil vise ved induksjon at P(n) er sann for alle heltall  $n \geq 0$ .

**Basissteg** Vi ser at  $\frac{1-(-7)^{0+1}}{8} = \frac{8}{8} = 1 = (-7)^0$ , altså at P(0) er sann.

Induksjonshypotese Anta at P(k) er sann for  $k \geq 0$ , altså at

$$\sum_{i=0}^{k} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8}.$$

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at P(k+1) er sann, altså at

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8}.$$

Vi ser at

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i = \sum_{i=0}^k (-7)^i + (-7)^{k+1}$$

$$= \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8} + \frac{8 \cdot (-7)^{k+1}}{8}$$

$$= \frac{1 + 7 \cdot (-7)^{k+1}}{8}$$

$$= \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8}$$

c) La P(n) være påstanden  $10^n \equiv 1 \pmod{3}$ . Vil vise ved induksjon at P(n) er sann for alle heltall  $n \geq 0$ .

**Basissteg** Vi ser at 3 deler 1 - 1 = 0, altså at P(0) er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at P(k) er sann for  $k \ge 0$ , altså at  $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ .

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at P(k+1) er sann, altså at  $10^{k+1} \equiv 1 \pmod{3}$ . Fra induksjonshypotesen har vi at  $10^k \equiv 1 \pmod{3}$  og  $10 \equiv 1 \pmod{3}$ . Da følger det at

$$10^k \cdot 10 \equiv 1 \cdot 1 \pmod{3} \iff 10^{k+1} \equiv 1 \pmod{3}.$$

#### Oppgave 3

a) Antall byte (8 bit) med nøyaktig tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\binom{8}{3} = 56.$$

b) Antall byte med høyst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{8}{i} = 93.$$

c) Antall byte med minst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=3}^{8} \binom{8}{i} = 219.$$

d) Antall byte med samme antall 0ere og 1ere er gitt ved

$$\binom{8}{4} = 70.$$

# Oppgave 4

- a) Sann. Vi kan velge  $m = n^2 + 1$ .
- b) Sann. Vi kan velge n < 0 ettersom  $m^2 \ge 0$ .
- c) Sann. Hvert heltall n har en additiv invers m slik at n+m=0, og vi kan dermed velge m=-n.
- d) Sann. Vi kan velge  $n = \pm \sqrt{2,5}$  og  $m = \pm \sqrt{2,5}$ .
- e) Usann. Ingen løsning av likningssystemet n + 1 = 4 og n 1 = 1.

#### Oppgave 5

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv \neg (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r \equiv (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r$$

## Oppgave 6

a) Algoritmen er en sorteringsalgoritme av typen *insertion sort*. Den går igjennom hvert tall i en liste av tall. Dersom tallet er mindre enn noen av de foregående tallene tas det ut. Hele listen forskyves mot høyre og tallet settes inn i den tidligere posisjonen til det første tallet som var mindre.

b)

_	7	5	8	3	9
j=2	7	5	8	3	9
j=3	5	7	8	3	9
j=4	5	7	8	3	9
j=5	3	5	7	8	9
return	3	5	7	8	9

# Oppgave 7

- a)
- b)
- c)