Universitetet i Bergen

MNF130 | Diskrete strukturer

Våren 2017

# Obligatorisk oppgave

Magnus Øian

22. april 2017

# Oppgave 1

a) $p \vee \neg q \vee r \equiv (p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(p \vee \neg q) \to r \equiv \neg p \wedge q \to r \equiv (\neg p \wedge q) \to r$

b) 1) Forenkler uttrykket

$$(p \to q) \vee (q \to r) \equiv \neg p \vee q \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee T \vee r \equiv T,$$

og vi ser at den er sann uansett hvilke verdier for $p$, $q$, og $r$ vi velger (tautologi).

2) Forenkler uttrykket

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \equiv \neg p \vee q \wedge \neg q \vee r \equiv \neg p \vee F \vee r \equiv \neg p \vee r,$$

og vi ser at den er sann når $p$ er usann eller $r$ er sann.

c)

# Oppgave 2

a) Usann.

b) Usann.

c) Usann.

d) Sann.

e) Usann.

f) Sann.

# Oppgave 3

a) Vi ser at $g(1) = g(2) = 5$ og følgelig er ikke $g$ injektiv. Hvert element i kodomenet til $h$ avbildes av et unikt element i domenet til $h$, og følgelig er $h$ injektiv.

b) La $f : B \to C$ være en injektiv funksjon. Da kan $f(4)$ ta 3 verdier, $f(5)$ bare 2 verdier og $f(6)$ bare 1 verdi. Følgelig eksisterer det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ slike funksjoner $f$. Mengdene $B$ og $C$ har lik kardinalitet. Alle injektive funksjoner fra $B$ til $C$ vil dermed også være surjektive.

c)

# Oppgave 4

a) La $P(n)$ være påstanden $a_n = 2^{n-1}$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 1$.

**Basissteg** Vi ser at $a_1 = 1 = 2^{1-1}$ og $a_2 = 1 + 1 = 2^{2-1}$, så $P(1)$ og $P(2)$ er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at $P(j)$ er sann for all heltall $j$ med $1 \leq j \leq k$ for $k \geq 2$, altså at $a_j = 2^{j-1}$.

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $a_{k+1} = 2^{(k+1)-1} = 2^k$. Vi ser at

$$a_{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = a_k + a_k = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k.$$

b) La $P(n)$ være påstanden $f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

**Basissteg** Vi ser at $a_0 = 0 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^0$ og $a_1 = 1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^1$, så $P(0)$ og $P(1)$ er sann.

**Induksjonsshypotese** Anta at $P(j)$ er sann for alle heltall $j$ med $0 \leq j \leq k$ for $k \geq 1$, altså at $f_j \leq \left(\frac{7}{4}\right)^j$.

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $f_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$. Vi ser at

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{-2}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

# Oppgave 5

a) Gitt ekvivalensrelasjonen $R \subseteq A \times A$ på mengden $A$. Ekvivalensklassen $[a]_R$ med $a \in A$ er mengden av alle elementer som er relatert til $a$ i relasjonen $R$.

b) Vi ser at $(3,4), (1,12), (4,6) \in [(3,4)]_R$. Ekvivalensrelasjoner er symmetriske, så da har ekvivalensklassen $[(3,4)]_R$ 6 medlemmer.

c) Ekvivalensklassene til $R$ er mengder bestående av ordnede par $(a,b)$ med $a, b \in \mathbb{Z}_+$ som har samme minste felles multiplum. Det er uendelig mange positive heltall. Dermed finnes det uendelig mange mulige minste felles multiplum av positive heltall og følgelig uendelig mange ekvivalensklasser i $M$. Mengden $\mathbb{Z}_+$ er tellbar og dermed også $M$. Påstand (iv) stemmer.

# Oppgave 1

a) La $P(n)$ være påstanden $3^n < n!$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 7$.

**Basissteg** Vi ser at $3^7 < 7!$, altså at $P(1)$ er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 7$, altså at $3^k < k!$.

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $3^{k+1} < (k+1)!$. Vi ser at

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 < k! \cdot 3 < k! \cdot (k+1) = (k+1)!.$$

b) La $P(n)$ være påstanden

$$\sum_{i=0}^{n} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{8}.$$

Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

**Basissteg** Vi ser at $\frac{1-(-7)^{0+1}}{8} = \frac{8}{8} = 1 = (-7)^0$, altså at $P(0)$ er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 0$, altså at

$$\sum_{i=0}^{k} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8}.$$

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i &= \sum_{i=0}^{k} (-7)^i + (-7)^{k+1} \\
&= \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8} + \frac{8 \cdot (-7)^{k+1}}{8} \\
&= \frac{1 + 7 \cdot (-7)^{k+1}}{8} \\
&= \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8}
\end{aligned}$$

c) La $P(n)$ være påstanden $10^n \equiv 1 (\mod 3)$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

**Basissteg** Vi ser at 3 deler $1 - 1 = 0$, altså at $P(0)$ er sann.

**Induksjonshypotese** Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 0$, altså at $10^k \equiv 1 (\mod 3)$.

**Induksjonssteg** Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $10^{k+1} \equiv 1 (\mod 3)$. Fra induksjonshypotesen har vi at $10^k \equiv 1 (\mod 3)$ og $10 \equiv 1 (\mod 3)$. Da følger det at

$$10^k \cdot 10 \equiv 1 \cdot 1 (\mod 3) \iff 10^{k+1} \equiv 1 (\mod 3).$$

# Oppgave 3

a) Antall byte (8 bit) med nøyaktig tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\binom{8}{3} = 56.$$

b) Antall byte med høyst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{8}{i} = 93.$$

c) Antall byte med minst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=3}^{8} \binom{8}{i} = 219.$$

d) Antall byte med samme antall 0ere og 1ere er gitt ved

$$\binom{8}{4} = 70.$$

# Oppgave 4

a) Sann. Vi kan velge $m = n^2 + 1$.

b) Sann. Vi kan velge $n < 0$ ettersom $m^2 \geq 0$.

c) Sann. Hvert heltall $n$ har en additiv invers $m$ slik at $n + m = 0$, og vi kan dermed velge $m = -n$.

d) Sann. Vi kan velge $n = \pm\sqrt{2,5}$ og $m = \pm\sqrt{2,5}$.

e) Usann. Ingen løsning av likningssystemet $n + 1 = 4$ og $n - 1 = 1$.

# Oppgave 5

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r \equiv (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r$$

# Oppgave 6

a) Algoritmen er en sorteringsalgoritme av typen *insertion sort*. Den går igjennom hvert tall i en liste av tall. Dersom tallet er mindre enn noen av de foregående tallene tas det ut. Hele listen forskyves mot høyre og tallet settes inn i den tidligere posisjonen til det første tallet som var mindre.

b)

| – | 7 | 5 | 8 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $j = 2$ | 5 | 7 | 8 | 3 | 9 |
| $j = 3$ | 5 | 7 | 8 | 3 | 9 |
| $j = 4$ | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| $j = 5$ | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| **return** | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |

# Oppgave 7

a) La $a, b \in B$ slik at $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$. Fra definisjonen av sammensatte funksjoner har vi at $g(f(a)) = g(f(b))$. $g$ er en-entydig, altså må $f(a) = f(b)$. Siden $f$ er en-entydig må $a = b$, som viser at $(f \circ g)$ er en-entydig.

b) Gitt en vilkårlig $c \in C$ har vi fra surjektivitet til $f$ at det eksisterer en $b \in B$ slik at $f(b) = c$. Likeledes kan vi konkludere at det eksisterer en $a \in A$ for en vilkårlig $b \in B$ slik at $g(a) = b$. Da følger det at det for en vilkårlig $c \in C$ eksisterer en $a \in A$ slik at $(f \circ g)(a) = c$, altså at $f \circ g$ er surjektiv.

c) Vi har

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) = (2x + 3)^3$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2(x^3) + 3$$

For $x = 0$ har vi at

$$(f \circ g)(0) = (2 \cdot 0 + 3)^3 = 3^3 \neq (g \circ f)(0) = 3,$$

funksjonene er altså ikke like.