

UNIVERSITETET I BERGEN

MNF130 | DISKRETE STRUKTURER

VÅREN 2017

Obligatorisk oppgave

Magnus ØIAN

22. april 2017

Oppgave 1

a) $p \vee \neg q \vee r \equiv (p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(p \vee \neg q) \rightarrow r \equiv \neg p \wedge q \rightarrow r \equiv (\neg p \wedge q) \rightarrow r$

b) 1) Forenkler uttrykket

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee q \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee T \vee r \equiv T,$$

og vi ser at den er sann uansett hvilke verdier for p , q , og r vi velger (tautologi).

2) Forenkler uttrykket

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \neg p \vee q \wedge \neg q \vee r \equiv \neg p \vee F \vee r \equiv \neg p \vee r,$$

og vi ser at den er sann når p er usann eller r er sann.

c)

Oppgave 2

a) Usann.

b) Usann.

c) Usann.

d) Sann.

e) Usann.

f) Sann.

Oppgave 3

a) Vi ser at $g(1) = g(2) = 5$ og følgelig er ikke g injektiv. Hvert element i kodomenet til h avbildes av et unikt element i domenet til h , og følgelig er h injektiv.

b) La $f : B \rightarrow C$ være en injektiv funksjon. Da kan $f(4)$ ta 3 verdier, $f(5)$ bare 2 verdier og $f(6)$ bare 1 verdi. Følgelig eksisterer det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ slike funksjoner f . Mengdene B og C har lik kardinalitet. Alle injektive funksjoner fra B til C vil dermed også være surjektive.

c)

Oppgave 4

- a) La $P(n)$ være påstanden $a_n = 2^{n-1}$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 1$.

Basissteg Vi ser at $a_1 = 1 = 2^{1-1}$ og $a_2 = 1 + 1 = 2^{2-1}$, så $P(1)$ og $P(2)$ er sann.

Induksjonshypotese Anta at $P(j)$ er sann for all heltall j med $1 \leq j \leq k$ for $k \geq 2$, altså at $a_j = 2^{j-1}$.

Induksjonssteg Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $a_{k+1} = 2^{(k+1)-1} = 2^k$. Vi ser at

$$a_{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^k a_i = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k = a_k + a_k = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k.$$

- b) La $P(n)$ være påstanden $f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

Basissteg Vi ser at $a_0 = 0 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^0$ og $a_1 = 1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^1$, så $P(0)$ og $P(1)$ er sann.

Induksjonshypotese Anta at $P(j)$ er sann for alle heltall j med $0 \leq j \leq k$ for $k \geq 1$, altså at $f_j \leq \left(\frac{7}{4}\right)^j$.

Induksjonssteg Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $f_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$. Vi ser at

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

Oppgave 5

- a) Gitt ekvivalensrelasjonen $R \subseteq A \times A$ på mengden A . Ekvivalensklassen $[a]_R$ med $a \in A$ er mengden av alle elementer som er relatert til a i relasjonen R .
- b) Vi ser at $(3, 4), (1, 12), (4, 6) \in [(3, 4)]_R$. Ekvivalensrelasjoner er symmetriske, så da har ekvivalensklassen $[(3, 4)]_R$ 6 medlemmer.
- c) Ekvivalensklassene til R er mengder bestående av ordnede par (a, b) med $a, b \in \mathbb{Z}_+$ som har samme minste felles multiplum. Det er uendelig mange positive heltall. Dermed finnes det uendelig mange mulige minste felles multiplum av positive heltall og følgelig uendelig mange ekvivalensklasser i M . Mengden \mathbb{Z}_+ er tellbar og dermed også M . Påstand (iv) stemmer.

Oppgave 1

- a) La $P(n)$ være påstanden $3^n < n!$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 7$.

Basissteg Vi ser at $3^7 < 7!$, altså at $P(7)$ er sann.

Induksjonshypotese Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 7$, altså at $3^k < k!$.

Induksjonssteg Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $3^{k+1} < (k+1)!$. Vi ser at

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 < k! \cdot 3 < k! \cdot (k+1) = (k+1)!.$$

b) La $P(n)$ være påstanden

$$\sum_{i=0}^n (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{8}.$$

Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

Basissteg Vi ser at $\frac{1 - (-7)^{0+1}}{8} = \frac{8}{8} = 1 = (-7)^0$, altså at $P(0)$ er sann.

Induksjonshypotese Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 0$, altså at

$$\sum_{i=0}^k (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8}.$$

Induksjonssteg Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i = \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8}.$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} (-7)^i &= \sum_{i=0}^k (-7)^i + (-7)^{k+1} \\ &= \frac{1 - (-7)^{k+1}}{8} + \frac{8 \cdot (-7)^{k+1}}{8} \\ &= \frac{1 + 7 \cdot (-7)^{k+1}}{8} \\ &= \frac{1 - (-7)^{k+2}}{8} \end{aligned}$$

c) La $P(n)$ være påstanden $10^n \equiv 1 \pmod{3}$. Vil vise ved induksjon at $P(n)$ er sann for alle heltall $n \geq 0$.

Basissteg Vi ser at 3 deler $1 - 1 = 0$, altså at $P(0)$ er sann.

Induksjonshypotese Anta at $P(k)$ er sann for $k \geq 0$, altså at $10^k \equiv 1 \pmod{3}$.

Induksjonssteg Ønsker å vise at $P(k+1)$ er sann, altså at $10^{k+1} \equiv 1 \pmod{3}$. Fra induksjonshypotesen har vi at $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ og $10 \equiv 1 \pmod{3}$. Da følger det at

$$10^k \cdot 10 \equiv 1 \cdot 1 \pmod{3} \iff 10^{k+1} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Oppgave 3

- a) Antall byte (8 bit) med nøyaktig tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\binom{8}{3} = 56.$$

- b) Antall byte med høyst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=0}^3 \binom{8}{i} = 93.$$

- c) Antall byte med minst tre bit med verdi 1 er gitt ved

$$\sum_{i=3}^8 \binom{8}{i} = 219.$$

- d) Antall byte med samme antall 0ere og 1ere er gitt ved

$$\binom{8}{4} = 70.$$

Oppgave 4

- a) Sann. Vi kan velge $m = n^2 + 1$.
- b) Sann. Vi kan velge $n < 0$ ettersom $m^2 \geq 0$.
- c) Sann. Hvert heltall n har en additiv invers m slik at $n + m = 0$, og vi kan dermed velge $m = -n$.
- d) Sann. Vi kan velge $n = \pm\sqrt{2,5}$ og $m = \pm\sqrt{2,5}$.
- e) Usann. Ingen løsning av likningssystemet $n + 1 = 4$ og $n - 1 = 1$.

Oppgave 5

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r \equiv (\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg r$$

Oppgave 6

- a) Algoritmen er en sorteringsalgoritme av typen *insertion sort*. Den går igjennom hvert tall i en liste av tall. Dersom tallet er mindre enn noen av de foregående tallene tas det ut. Hele listen forskyves mot høyre og tallet settes inn i den tidligere posisjonen til det første tallet som var mindre.

- b)

–	7	5	8	3	9
$j = 2$	5	7	8	3	9
$j = 3$	5	7	8	3	9
$j = 4$	3	5	7	8	9
$j = 5$	3	5	7	8	9
return	3	5	7	8	9

Oppgave 7

a)

b)

c)