

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

# Géométrie dans le plan et dans l'espace

Sarah Dijols

`sarah.dijols@univ-amu.fr`

MIASHS, 1ER SEMESTRE  
2017-2018

# Table des matières

I.	Vecteurs du plan et de l'espace . . . . .	2
1.	Opérations sur les vecteurs . . . . .	2
2.	Représentation graphique . . . . .	3
3.	Combinaisons linéaires . . . . .	4
4.	Bases de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	6
II.	Produit scalaire, orthogonalité et norme . . . . .	6
1.	Produit scalaire . . . . .	6
2.	Norme . . . . .	7
3.	Angle entre 2 vecteurs . . . . .	9
III.	Droites dans le plan et dans l'espace . . . . .	11
1.	Propriétés des droites de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
2.	Équations d'une droite de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	12
IV.	Produit vectoriel . . . . .	13
V.	Droites et plans de l'espace . . . . .	14
1.	Équation d'une droite de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
2.	Plan dans l'espace . . . . .	15
3.	Équations d'un plan de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	17

# Alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom
$\alpha$	A	alpha
$\beta$	B	béta
$\gamma$	$\Gamma$	gamma
$\delta$	$\Delta$	delta
$\varepsilon$ ou $\epsilon$	E	epsilon
$\zeta$	Z	dzêta
$\eta$	H	êta
$\theta$ ou $\vartheta$	$\Theta$	thêta
$\iota$	I	iota
$\kappa$	K	kappa
$\lambda$	$\Lambda$	lambda
$\mu$	M	mu

Minuscule	Majuscule	Nom
$\nu$	N	nu
$\xi$	$\Xi$	xi
$\omicron$	O	omicron
$\pi$	$\Pi$	pi
$\rho$	P	rhô
$\sigma$	$\Sigma$	sigma
$\tau$	T	tau
$\upsilon$	Y	upsilon
$\phi$ ou $\varphi$	$\Phi$	phi
$\chi$	X	khi
$\psi$	$\Psi$	psi
$\omega$	$\Omega$	omega

## I. Vecteurs du plan et de l'espace

### 1. Opérations sur les vecteurs

#### Définition 0.1

- Un scalaire est un nombre réel  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Un vecteur du plan est un couple de réels  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .
- Un vecteur de l'espace est un triplet de réels  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
- Les scalaires  $x, y$  (et  $z$ ) sont appelés composantes ou coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .
- L'ensemble des vecteurs du plan est noté  $\mathbb{R}^2$  et l'ensemble des vecteurs de l'espace est noté  $\mathbb{R}^3$ . On utilisera la notation  $\mathbb{R}^n$  si on veut parler de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

#### Notation 0.2

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

#### Remarques:

- L'égalité  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  signifie  $x = x'$  et  $y = y'$ . Donc  $\vec{u} \neq \vec{0}$  signifie que l'une des composantes est non nulle, pas nécessairement toutes ! Par exemple,  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ .
- On peut aussi écrire les vecteurs en ligne  $\vec{u} = (x, y)$ , cela prend moins de place, mais dans cette UE, l'écriture en colonne sera préférée pour favoriser le lien avec l'UE d'algèbre linéaire au semestre suivant.
- Sauf cas particulier, on notera désormais  $u$  au lieu de  $\vec{u}$  et c'est au lecteur de savoir s'il s'agit d'un scalaire ou d'un vecteur et si on travaille dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  !

### Définition 0.3

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit la somme de deux vecteurs par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et le produit par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit la somme de deux vecteurs par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

et le produit par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

### Proposition 0.4

Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ . Les opérations de somme (de deux vecteurs) et de produit (d'un vecteur par un scalaire) satisfont les propriétés suivantes :

- La somme est commutative :  $u + v = v + u$  ;
- La somme est associative :  $(u + v) + w = u + (v + w)$  ;
- la somme admet un élément neutre :  $u + \vec{0} = u$  ;
- Le produit (d'un vecteur par un scalaire) est distributif par rapport à la somme :  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  et  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  ;
- Le produit (d'un vecteur par un scalaire) est associatif :  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$  ;
- Le produit (d'un vecteur par un scalaire) admet un élément neutre :  $1u = u$ .
- Le produit (d'un vecteur par un scalaire) admet un élément absorbant à gauche et un élément absorbant à droite :  $0u = \vec{0} = \lambda \vec{0}$  .

**Démonstration :** Ces propriétés découlent directement des propriétés de la somme et du produit sur  $\mathbb{R}$ . ■

### Remarques:

- On ne peut pas multiplier ou diviser 2 vecteurs!!!
- On peut soustraire un vecteur à un autre puisque  $u - v = u + (-1)v$  !
- Dans le produit (d'un vecteur par un scalaire), on écrit toujours le scalaire avant le vecteur :  $\lambda u$  et non  $u\lambda$ .

## 2. Représentation graphique

On se place dans le plan, mais les choses sont similaires dans l'espace (mais plus difficiles à dessiner!).

On munit le plan du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . À un couple de réels  $(x, y)$ , on associe un point  $M$  d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$ . On le note  $M(x, y)$ . On représente souvent le vecteur  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  par une flèche qui part de  $O$  et arrive au point  $M(x, y)$ . D'autre part, pour 2 points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ , on définit le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  et on le représente comme une flèche partant de  $A$  et allant en  $B$ .

**Exemple:** Pour  $A(1, 2)$  et  $B(3, 5)$ , on a  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Remarque:**  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

### Proposition 0.5 (*Relation de Chasles*)

Soient  $A, B$  et  $C$  3 points du plan ou de l'espace. On a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Démonstration :** Il suffit de l'écrire! ■

### Définition 0.6

Quatre points (ordonnés)  $A, B, C, D$  de  $\mathbb{R}^n$  forment un parallélogramme si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Alors par Chasles,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , car  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .

**Remarque:** Cette définition du parallélogramme donne une méthode graphique pour dessiner la somme de 2 vecteurs.

## 3. Combinaisons linéaires

### Définition 0.7

Soient  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  une famille finie de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Une combinaison linéaire de  $u_1, u_2, \dots, u_k$  est un vecteur qui peut s'écrire sous la forme  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$  avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des scalaires.

**Exemple:** En prenant  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , on voit que  $\vec{0}$  est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs.

En prenant  $\lambda_i = 1$  et  $\lambda_j = 0$  pour  $j \neq i$ , on voit que tout vecteur  $u_i$  est combinaison linéaire d'une famille qui le contient  $u_1, \dots, u_k$ .

### Définition 0.8

Pour  $n = 2$  ou  $3$ , une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  si tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

**Remarque:** Au second semestre, on verra qu'il suffit de vérifier l'existence de combinaison linéaire pour tout vecteur et alors l'unicité est assurée.

**Exemple:** La famille  $\left( \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, prenons  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  quelconque. On cherche toutes les possibilités d'écrire ce vecteur comme combinaison linéaire de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , c'est à dire qu'on cherche  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ .

D'après les règles sur les opérations, cela se réécrit

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = x \text{ et } \mu = y.$$

Il y a donc bien une unique possibilité.

De même, on peut montrer que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Ces bases sont appelées bases canoniques.

**Exemple:** La famille  $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  quelconque. On cherche toutes les possibilités d'écrire ce vecteur comme combinaison linéaire de  $e_1$  et  $e_2$ , c'est à dire qu'on cherche  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda + \mu = x \text{ et } \lambda - \mu = y \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+y}{2} \text{ et } \mu = \frac{x-y}{2}.$$

Il y a donc bien une unique possibilité.

### Proposition et définition 0.9

Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $u = \vec{0}$  ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda u$  ;
- ii) il existe  $w \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $u = \alpha w$  et  $v = \beta w$  ;
- iii) il existe  $\mu$  et  $\nu \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que  $\mu u + \nu v = 0$ .

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que  $u$  et  $v$  sont colinéaires. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on dit que  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendants ou non colinéaires.

**Démonstration :**  $i) \Rightarrow ii)$  On suppose  $i)$  et on souhaite démontrer  $ii)$ . Si  $u = \vec{0}$ , on a bien  $u = \alpha v$  et  $v = \beta v$  avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ . Et sinon, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda u$  donc  $u = \alpha u$  et  $v = \beta u$  avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = \lambda$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  On suppose qu'on a  $ii)$  et on souhaite montrer  $iii)$ . Si  $\alpha = \beta = 0$ , alors  $u = v = \vec{0}$ . Et dans ce cas, on a  $\mu u + \nu v = \vec{0}$  en posant par exemple  $\mu = \nu = 1$ . Sinon comme  $u = \alpha w$  et  $v = \beta w$ , on choisit  $\mu = \beta$  et  $\nu = -\alpha$  qui ne sont pas tous les deux nuls, alors  $\mu u + \nu v = \beta \alpha w - \alpha \beta w = \vec{0}$ .

$iii) \Rightarrow i)$  On suppose qu'on a  $iii)$  et on veut montrer  $i)$ . Si  $u = \vec{0}$ ,  $i)$  est vrai. On suppose maintenant  $u \neq \vec{0}$ . Si  $\nu = 0$ , on a alors  $\mu u = 0$  donc  $\mu = 0$  mais cela contredit le fait que  $\mu$  et  $\nu$  doivent être non tous nuls, donc  $\nu \neq 0$ , alors  $v = -\frac{\mu}{\nu}u$  donc on a bien  $i)$  avec  $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$ . ■

**Exemple:**

- Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$  sont colinéaires car  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{0}$  sont colinéaires.
- Les vecteurs  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires car  $u \neq \vec{0}$  et s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ , alors  $\lambda = 1$  d'après la première coordonnée mais  $\lambda = 2$  d'après la seconde coordonnée : impossible !

## 4. Bases de $\mathbb{R}^2$

### Définition 0.10

Soient  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . On appelle déterminant de  $u$  et  $v$  le scalaire  $\det(u, v) = ad - bc$ .

### Proposition 0.11

Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La famille  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  ;
- ii)  $u$  et  $v$  sont non colinéaires.
- iii)  $\det(u, v) \neq 0$  ;

**Démonstration :** **non ii)  $\Rightarrow$  non i)** On montre plus précisément que  $u$  et  $v$  colinéaires équivaut à  $u$  et  $v$  ne forment pas une base. En effet,  $u$  et  $v$  colinéaires équivaut à l'existence de  $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$  tels que  $\mu u + \nu v = \vec{0}$ , mais on a aussi  $0u + 0v = \vec{0}$  donc le vecteur  $\vec{0}$  peut s'écrire de 2 façons différentes comme combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ . Par définition,  $(u, v)$  ne forme pas une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**non ii)  $\Rightarrow$  non iii)** On pose  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $u$  et  $v$  sont colinéaires, soit  $u = \vec{0}$  mais alors  $a = b = 0$  et  $\det(u, v) = ad - bc = 0$ , soit il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = \lambda u$  et alors  $c = \lambda a$  et  $d = \lambda b$ , mais alors  $\det(u, v) = ad - bc = \lambda ab - \lambda ab = 0$  !

**non iii)  $\Rightarrow$  non ii)** On pose à nouveau  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\det(u, v) = ad - bc = 0$ , alors :

- soit  $a = 0$  et  $b = 0$  mais alors  $u = \vec{0}$  et  $u$  et  $v$  sont bien colinéaires,
- soit  $a = 0$  et  $b \neq 0$  mais alors  $\det(u, v) = 0$  implique  $c = 0$  donc  $v = \frac{d}{b}u$ ,
- soit enfin  $a \neq 0$ , donc  $d = \frac{bc}{a}$  donc  $v = \frac{c}{a}u$ .

Le reste de la démonstration est repoussé au semestre suivant. ■

**Exemple :** Les vecteurs  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires car  $\det(u, v) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 \neq 0$  !  
Ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .

## II. Produit scalaire, orthogonalité et norme

Dans cette partie,  $n = 2$  ou  $3$ .

### 1. Produit scalaire

#### Définition 0.12

Pour deux vecteurs  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  (resp.  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ), on définit le produit scalaire de  $u$  et  $v$  par

$$u \cdot v = xx' + yy' \quad (\text{resp. } u \cdot v = xx' + yy' + zz').$$

**Exemple:** Pour  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , on a  $u \cdot v = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$ .

**Exemple:** Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ .

**Remarque:** Dans la littérature, on utilise aussi les notations  $\langle u, v \rangle$  ou  $\langle u|v \rangle$  pour le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$ .

### Proposition 0.13

Soient  $u, v$  et  $w \in \mathbb{R}^n$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ . Le produit scalaire a les propriétés suivantes :

- (symétrie)  $u \cdot v = v \cdot u$  ;
- (linéarité à gauche)  $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$  et  $(\lambda u) \cdot w = \lambda(u \cdot w)$ , ce qui entraîne également la linéarité à droite par symétrie :  $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$  et  $u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$ . On dit que le produit scalaire est bilinéaire ;
- (positivité)  $u \cdot u \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ , et de plus  $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$ .

**Démonstration :** Il suffit de l'écrire avec les coordonnées ! ■

**Remarque:** On a  $\vec{0} \cdot u = 0 = u \cdot \vec{0}$ .

### Définition 0.14

On dit que deux vecteurs  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  sont orthogonaux si  $u \cdot v = 0$ . On note  $u \perp v$ .

**Exemple:** Les vecteurs  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont orthogonaux car  $u \cdot v = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0$ .

**Exemple:** Les vecteurs de la base canonique sont 2 à 2 orthogonaux.

### Proposition 0.15

Deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls et orthogonaux forment une base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Démonstration :** On montre la contraposée, c'est à dire qu'on suppose que deux vecteurs  $u$  et  $v$  non nuls ne forment pas une base de  $\mathbb{R}^2$  (c'est à dire qu'ils sont colinéaires) et on montre qu'ils ne sont pas orthogonaux.

Si  $u \neq \vec{0}$  et  $v \neq \vec{0}$  sont colinéaires, alors il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $v = \lambda u$ . Alors  $u \cdot v = \lambda u \cdot u \neq 0$  d'après les propriétés précédentes. ■

### Proposition 0.16

Trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non nuls et deux à deux orthogonaux forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Démonstration :** Cf semestre suivant ■

## 2. Norme

### Définition 0.17

La norme d'un vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$  est définie par  $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  alors  $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  alors  $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Exemple:**  $\|\vec{i}\| = 1$  dans  $\mathbb{R}^2$  comme dans  $\mathbb{R}^3$ . Idem pour  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .

Si  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\|u\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ .

**Remarque:** Graphiquement, d'après Pythagore, la norme représente la longueur du vecteur. On note aussi  $AB = \|\vec{AB}\|$  la longueur du segment entre  $A$  et  $B$ .

### Proposition 0.18

Soient  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a les propriétés suivantes :

- $\|u\| \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  ;
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$  ;
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ .

**Démonstration :** Il suffit de l'écrire avec les coordonnées. ■

### Proposition 0.19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

De plus l'inégalité est une égalité si et seulement si les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

**Démonstration :** Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on définit  $P(t) = \|u + tv\|^2 \geq 0$ . Mais on peut aussi réécrire

$$P(t) = (u + tv) \cdot (u + tv) = u \cdot u + 2tu \cdot v + (tv) \cdot (tv) = \|u\|^2 + 2tu \cdot v + t^2 \|v\|^2.$$

C'est un polynôme du second degré avec  $\Delta = 4((u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2)$ . Comme  $P \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a forcément  $\Delta \leq 0$  d'où  $(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$  et on obtient l'inégalité en prenant la racine carrée.

Le cas d'égalité (hormis  $u = 0$  ou  $v = 0$ ) correspond au cas où  $\Delta = 0$ , ce qui signifie qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $P(t) = 0$  ou encore  $\|u + t_0 v\|^2 = 0 \Leftrightarrow u + t_0 v = \vec{0} \Leftrightarrow u = -t_0 v$  donc  $u$  et  $v$  sont colinéaires. ■

### Proposition 0.20 (Inégalité triangulaire)

Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ . Alors

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

**Démonstration :** On a  $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$  d'après Cauchy-Schwarz. D'où le résultat en prenant la racine carrée. ■

### Définition 0.21

On dit qu'une base de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

**Exemple:** La base canonique de  $\mathbb{R}^2$  ( $\vec{i}, \vec{j}$ ) est orthonormée.

La base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) est orthonormée.

### Proposition et définition 0.22

Soient  $u \neq \vec{0}$  et  $v$  des vecteurs.  
 Le projeté orthogonal de  $v$  sur  $u$  est le vecteur  
 $v'$  colinéaire à  $u$  tel que  $v - v'$  soit orthogonal  
 à  $u$ . On a  $v' = \frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} u$ .

**Démonstration :** (Existence) Avec cette formule,  $v'$  est bien colinéaire à  $u$  car  $\frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$ . Et de plus  
 $(v - v') \cdot u = v \cdot u - \frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} u \cdot u = v \cdot u - \frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} \|u\|^2 = 0$ . Donc  $v'$  convient.

(Unicité) Supposons qu'il existe un autre vecteur  $v''$  tel que  $v''$  soit colinéaire à  $u$  et  $v - v''$  soit orthogonal à  $u$ . Alors  $v' - v''$  est colinéaire à  $u \neq \vec{0}$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v' - v'' = \lambda u$ . Alors  
 $(v' - v'') \cdot u = \lambda \|u\|^2 = (v' - v + v - v'') \cdot u = -(v - v') \cdot u + (v - v'') \cdot u = 0 + 0 = 0$  d'où  $\lambda = 0$  et  
 $v' - v'' = \vec{0}$  ! ■

### Proposition et définition 0.23

Dans  $\mathbb{R}^n$ , le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $M$  situés à une distance  $r$  de  $\Omega$ , c'est à dire tels que  $\Omega M = r$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ , si les coordonnées de  $\Omega$  sont  $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ , le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartient au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  ssi

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , si les coordonnées de  $\Omega$  sont  $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{pmatrix}$ , le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  appartient au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  ssi

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2.$$

**Démonstration :** On  $\Omega M = \|\vec{\Omega M}\| = \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2} = r$  d'où le résultat en prenant le carré. ■

## 3. Angle entre 2 vecteurs

### Définition 0.24

Grâce au théorème de Thalès, on peut définir pour  $\hat{A} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

On généralise la définition du cosinus et du sinus pour  $\theta \in \mathbb{R}$  à l'aide du cercle trigonométrique.

**Proposition 0.25**

Les fonctions  $\cos$ ,  $\sin$  et  $\tan$  sont  $2\pi$  périodiques :

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ ,  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$  et  $\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$ .

La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires :

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$  et  $\tan(-x) = -\tan x$ .

Par Pythagore, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Les formules d'addition sont

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

(démonstration par Thalès sur l'image ci-contre)

D'où  $\cos(x + \pi) = -\cos x$ ,  $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ ,  $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ , ... À retrouver avec le cercle trigonométrique !

**Remarque:** Un tableau de valeurs particulières à connaître

$x$	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\pi/2$	0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi$	-1	0

Il suffit de retenir l'une des valeurs pour  $\cos$  ou  $\sin$  (s'aider du cercle trigonométrique) et on retrouve l'autre avec la formule  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  !

**Définition 0.26**

Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  deux vecteurs non nuls. On définit l'angle (non orienté) entre  $u$  et  $v$  comme le nombre  $\alpha \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

**Exemple:** On pose  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Alors  $\|u\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  et  $\|v\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ .

D'autre part,  $u \cdot v = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$ . Donc l'angle  $\alpha$  entre  $u$  et  $v$  vérifie  $\cos \alpha = \frac{6}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  !

**Définition 0.27**

Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha$  l'angle non orienté entre  $u$  et  $v$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut définir l'angle orienté entre  $u$  et  $v$ , et on le notera  $(u, v)$ , comme  $\alpha$  si on passe de  $u$  à  $v$  en décrivant un angle  $\alpha$  et en tournant dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) ou  $-\alpha$ , si on passe de  $u$  à  $v$  en décrivant un angle  $\alpha$  dans le sens anti-trigonométrique (sens des aiguilles d'une montre).

**Remarque:** Pour  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a  $(u, v) = -(v, u)$ .

Et on admettra que pour  $w \in \mathbb{R}^2$ ,  $(u, v) = (u, w) + (w, v)$ .

### III. Droites dans le plan et dans l'espace

#### 1. Propriétés des droites de $\mathbb{R}^n$

##### Définition 0.28

Soit  $A$  un point de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^n$  un vecteur non nul. On définit la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  de vecteur directeur  $u$  comme l'ensemble des points  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda u \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Remarque:** Par abus, on note souvent  $M = A + \lambda u$  même si on ne peut pas sommer un point et un vecteur ! Du coup, on note souvent  $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}u$ .

##### Définition 0.29

On dit qu'une droite est vectorielle si elle contient l'origine  $O(0, 0)$ .

##### Proposition 0.30

- Si  $M$  et  $P \in \mathcal{D}$ , alors  $\overrightarrow{MP}$  et  $u$  sont colinéaires.
- Deux droites sont égales si elles ont un point commun et des vecteurs directeurs colinéaires.
- Si  $A \neq B$ , il y a une unique droite qui les contient, c'est la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ .

**Démonstration :** Pour le premier point, on utilise la relation de Chasle,  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\lambda_M u + \lambda_P u$  par définition de  $M$  et  $P \in \mathcal{D}$  donc  $\overrightarrow{MP} = (-\lambda_M + \lambda_P)u$  et les vecteurs sont bien colinéaires.

Les démonstrations des autres points sont laissées au lecteur. ■

**Remarque:** Attention, il n'y a pas d'unicité du vecteur directeur ni du point "définissant" la droite !

##### Définition 0.31

Trois points  $A, B$  et  $C \in \mathbb{R}^n$  sont alignés s'il existe une droite de  $\mathbb{R}^n$  qui les contient, c'est à dire si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

##### Définition 0.32

On dit que deux droites sont parallèles si leur vecteurs directeurs sont colinéaires.

On dit que deux droites sont perpendiculaires si leur vecteurs directeurs sont orthogonaux.

##### Proposition 0.33

Deux droites parallèles distinctes n'ont aucun point commun.

**Démonstration :** Si les droites sont parallèles alors leur vecteurs directeurs sont colinéaires et si elles ont un point commun, alors les droites sont confondues d'après la proposition précédente. ■

##### Corollaire 0.34

Il existe une unique droite parallèle à une autre et passant par un point donné.

**Démonstration :** Laissez au lecteur ! ■

### Proposition et définition 0.35

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathbb{R}^n$  de vecteur directeur  $u \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $A$  un point de  $\mathbb{R}^n$ . Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  est l'unique point  $H \in \mathcal{D}$  tel que  $\overrightarrow{AH} \perp u$ .

**Démonstration :** (existence) Soit  $O$  un point quelconque de  $\mathcal{D}$ . On définit  $H$  tel que  $\overrightarrow{OH} = \left( \overrightarrow{OA} \cdot \frac{u}{\|u\|} \right) \frac{u}{\|u\|}$ .  
C'est bien un point de  $\mathcal{D}$  et on a

$$\overrightarrow{AH} \cdot u = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot u = -\overrightarrow{OA} \cdot u + (\overrightarrow{OA} \cdot u) \frac{u \cdot u}{\|u\|^2} = 0.$$

(unicité) Supposons qu'il existe deux points  $H_1$  et  $H_2$  de  $\mathcal{D}$  tels que  $\overrightarrow{AH_1} \perp u$  et  $\overrightarrow{AH_2} \perp u$ . Alors  $\overrightarrow{H_1H_2}$  est colinéaire à  $u$  c'est à dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{H_1H_2} = \lambda u$ . Mais  $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot u = (\overrightarrow{H_1A} + \overrightarrow{AH_2}) \cdot u = 0$  donc  $\lambda u \cdot u = \lambda \|u\|^2 = 0$ . Comme  $u \neq \vec{0}$ , on a  $\|u\|^2 > 0$  donc  $\lambda = 0$  et  $\overrightarrow{H_1H_2} = \vec{0}$  d'où l'unicité! ■

### Proposition et définition 0.36

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathbb{R}^n$  et  $A$  un point de  $\mathbb{R}^n$ . La distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$  est définie par

$$d(A, \mathcal{D}) = \min_{M \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$ , on a  $d(A, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AH}\|$ .

**Démonstration :** On cherche à minimiser  $\|\overrightarrow{AM}\|$  ce qui revient à minimiser  $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2$  car  $H$  et  $M \in \mathcal{D}$  donc par définition du projeté orthogonal  $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ . Maintenant d'après les propriétés de la norme  $\|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq 0$  et  $\|\overrightarrow{HM}\|^2 = 0$  si et seulement si  $M = H$ . D'où le résultat. ■

## 2. Équations d'une droite de $\mathbb{R}^2$

### Méthode 1

Soit  $A(a_1, a_2)$  un point de  $\mathbb{R}^2$  et  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . On considère  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  de vecteur directeur  $u$ . Soit  $M(x, y)$  un point quelconque de  $\mathcal{D}$ . La définition de la droite  $\mathcal{D}$  se réécrit en termes de coordonnées :

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \end{cases} \quad \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + t u_1 \\ y = a_2 + t u_2 \end{cases} \quad \text{pour un } t \in \mathbb{R}$$

C'est l'équation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exemple:** Soit  $A(1, 2)$  et  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Une équation paramétrique de la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $u$  est  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, on lit sur l'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 7t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  que la droite correspondante passe par le point  $(2, -1)$  et admet pour vecteur directeur  $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

**Remarque:** Attention, il n'y a pas d'écriture unique de ces équations ! Les droites  $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  et  $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 0 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$  sont bien les mêmes, c'est l'axe des abscisses ! On a juste "changer le paramètre pour la décrire".

### Méthode 2

Comme  $u \neq \vec{0}$ , on peut isoler  $t$  dans l'une des équations et l'injecter dans l'autre pour obtenir l'équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D} : ax + by = c$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

**Exemple:** Pour la droite  $\mathcal{D}$  d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ , avec la deuxième équation, on a  $t = 2 - y$  donc en injectant cette valeur dans la première équation, on obtient  $x = 1 + 3(2 - y)$  ou encore  $x + 3y = 7$ . C'est l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

**Remarque:** A nouveau, il n'y a pas d'équation cartésienne unique pour une droite donnée. Si la droite vérifie  $x + y = 2$ , elle vérifie aussi  $2x + 2y = 4$  !

### Méthode 3

Réciproquement, si on dispose d'une équation cartésienne d'une droite :  $ax + by = c$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  et que l'on souhaite retrouver une équation paramétrique, on pose  $x = t$  si  $b \neq 0$  (sinon on pose  $y = t$  !) et on calcule  $y$  en fonction de  $t$  en remplaçant  $x$  par  $t$  dans l'équation cartésienne.

**Exemple:** Soit  $\mathcal{D}$  l'équation définie par  $2x + y = 5$ . On pose  $x = t$  et on a alors  $2t + y = 5$ , c'est à dire  $\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{D}'$  l'équation définie par  $2x = 5$ . On pose alors  $y = t$  et on a alors  $2x = 5$ , c'est à dire  $\begin{cases} x = 5/2 \\ y = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ .

### Proposition et définition 0.37

Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathbb{R}^2$ . Un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  est un vecteur  $n \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tous points  $M$  et  $P \in \mathcal{D}$ , on a  $\overrightarrow{MP} \perp n$ .

Si l'équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  est  $ax + by = c$ ,  $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à la droite  $\mathcal{D}$ .

**Démonstration :** Soit  $M(x_M, y_M)$  et  $P(x_P, y_P) \in \mathcal{D}$ . On a alors  $ax_M + by_M = ax_P + by_P = c$  donc en faisant la différence  $a(x_P - x_M) + b(y_P - y_M) = 0$  ce qui correspond exactement à  $\overrightarrow{MP} \cdot n = 0$ . ■

## IV. Produit vectoriel

### Définition 0.38

Soit  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Le produit vectoriel de  $u$  par  $v$  est le vecteur

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

**Exemple:** On a  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

**Exemple:**  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$  mais  $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

### Proposition 0.39

Soient  $u, v$  et  $w \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ . On a les propriétés suivantes :

- Anti-symétrie :  $u \wedge v = -v \wedge u$  ;
- Bilinearité :  $(u+v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$  et  $(\lambda u) \wedge w = \lambda(u \wedge w)$  ainsi que  $u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w$  et  $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$  ;
- Orthogonalité :  $u \cdot (u \wedge v) = 0$  et  $v \cdot (u \wedge v) = 0$  ;
- $u \wedge v = \vec{0}$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires ;
- Si  $\alpha \in [0, \pi]$  est l'angle entre  $u$  et  $v$ , alors  $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \alpha$ .
- $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$  représente l'aire du parallélogramme  $ABCD$ .

**Démonstration :** Il suffit de l'écrire... ■

### Définition 0.40

Une base est directe si on peut la représenter avec les 3 premiers doigts de la main droite. Sinon, on dit qu'elle est indirecte.

### Proposition 0.41

Si  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  sont non colinéaires,  $(u, v, u \wedge v)$  forment une base directe de  $\mathbb{R}^3$ .

### Définition 0.42

Soient  $u, v$  et  $w \in \mathbb{R}^3$ . Le produit mixte de  $u, v$  et  $w$  est le scalaire  $(u \wedge v) \cdot w$ .

### Proposition 0.43

Soient  $u, v$  et  $w \in \mathbb{R}^3$ . Le volume du parallélépipède déterminé par les 3 vecteurs vaut  $|(u \wedge v) \cdot w|$ .  
Les 3 vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.

**Démonstration :** Laissée en exercice... ■

## V. Droites et plans de l'espace

### 1. Équation d'une droite de $\mathbb{R}^3$

Soit  $A(a_1, a_2, a_3)$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur. On considère  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $u$ , c'est à dire l'ensemble des point  $M(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tel qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{AM} = \lambda u$ . En écrivant cette équation en terme de coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \\ z - a_3 = \lambda u_3 \end{cases} \quad \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + t u_1 \\ y = a_2 + t u_2 \\ z = a_3 + t u_3 \end{cases} \quad \text{pour un } t \in \mathbb{R}$$

C'est l'équation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exemple:** Soit  $A(1, 2, 3)$  et  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Une équation paramétrique de la droite passant par  $A$  et de

vecteur directeur  $u$  est  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, on lit sur l'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 7t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  que la droite corres-

pondante passe par le point  $(2, -1, 1)$  et admet pour vecteur directeur  $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Comme  $u \neq \vec{0}$ , on peut isoler  $t$  dans l'une des équations et l'injecter dans les autres pour obtenir **les équations cartésiennes** de la droite  $\mathcal{D}$  (ou un système d'équations cartésiennes) :

$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$  avec  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  non colinéaires.

**Exemple:** Pour la droite  $\mathcal{D}$  d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ , avec la deuxième

équation, on a  $t = 2 - y$  donc en injectant cette valeur dans la première équation, on obtient  $x = 1 + 3(2 - y)$  ou encore  $x + 3y = 7$ . Et en injectant la valeur de  $t$  dans la 3ème équation, on a  $z = -2 + 2(2 - y)$  soit  $z + 2y = 2$ . Les équations cartésiennes de  $\mathcal{D}$  s'écrivent donc  $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ z + 2y = 2 \end{cases}$

Réciproquement, si on dispose d'une équation cartésienne d'une droite :  $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

avec  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  non colinéaires et que l'on souhaite retrouver une équation paramétrique, on

pose  $x = t$  si  $b \neq 0$  (sinon on pose  $y = t$  ou  $z = t$ !) et on résout le système d'inconnu  $y$  et  $z$  en fonction du paramètre  $t$  obtenu en remplaçant  $x$  par  $t$  dans les 2 équations cartésiennes.

**Exemple:** Soit  $\mathcal{D}$  l'équation définie par  $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ . On pose  $x = t$  et on a alors  $\begin{cases} 2t + y + z = 5 \\ t + y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y + z = 5 - 2t \\ y - z = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \\ z = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$ , c'est à dire  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \\ z = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

## 2. Plan dans l'espace

### Définition 0.44

Soit  $A$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $u$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  deux vecteurs non colinéaires. On appelle plan engendré par  $u$  et  $v$  et passant par  $A$ , l'ensemble  $\mathcal{P}$  des points de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $\overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$  pour des  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .



**Remarque:** Comme pour les droites, on note souvent par abus  $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ .

#### Définition 0.45

On dit qu'un plan est vectoriel s'il contient l'origine.

#### Proposition 0.46

- Si  $M$  et  $P \in \mathcal{P}$ , alors  $\overrightarrow{MP}$  est combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .
- Deux plans sont égaux s'ils ont un point commun et que les vecteurs qui engendrent l'un sont combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent l'autre.
- Si  $A, B$  et  $C$  sont 3 points non alignés de  $\mathbb{R}^3$ , il existe un unique plan qui les contient, c'est la plan passant par  $A$  et engendré par  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

**Démonstration :** Exercice. ■

#### Définition 0.47

Quatre points de  $\mathbb{R}^3$  sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.

#### Définition 0.48

Deux plans sont parallèles si les vecteurs qui engendrent l'un sont combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent l'autre.

#### Proposition 0.49

- Tout plan est parallèle à lui-même.
- Pour  $A$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{P}$  un plan fixé, il existe un unique plan parallèle à  $\mathcal{P}$  et passant par  $A$ .
- Deux plans parallèles et non confondus n'ont aucun point commun.

**Démonstration :** Similaire au cas de la droite de  $\mathbb{R}^2$ . ■

#### Proposition et définition 0.50

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $u$  et  $v$ . Soit  $A$  un point de  $\mathbb{R}^3$ .  
Il existe un unique point  $H \in \mathcal{P}$  tel que  $\overrightarrow{AH} \perp u$  et  $\overrightarrow{AH} \perp v$ . Ce point  $H$  est appelé projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

**Démonstration :** Exercice ■

#### Proposition et définition 0.51

Soit  $\mathcal{P}$  une droite de  $\mathbb{R}^3$  et  $A$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . La distance de  $A$  à  $\mathcal{P}$  est définie par

$$d(A, \mathcal{P}) = \min_{M \in \mathcal{P}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ , on a  $d(A, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{AH}\|$ .

**Démonstration :** Exercice ■

### 3. Équations d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Soit  $A(a_1, a_2, a_3)$  un point de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ . Comme pour les droites de  $\mathbb{R}^2$ , on obtient **l'équation paramétrique** du plan  $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ , en écrivant en coordonnées la relation de définition du plan. On obtient  $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$  si et seulement si

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad \text{pour } t \text{ et } s \in \mathbb{R}$$

**Remarque:** Pour l'équation paramétrique d'un plan, il y a donc 2 paramètres !

Pour obtenir **l'équation cartésienne** du plan  $\mathcal{P}$ , on calcule les paramètres  $s$  et  $t$  à l'aide de deux des équations puis on injecte leur valeur dans la 3ème équation. On obtient une équation de la forme  $ax + by + cz = d$  avec  $a, b, c$  non tous nuls.

Pour passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique, on choisit deux coordonnées comme paramètres et on injecte dans l'équation cartésienne pour obtenir la 3ème coordonnée en fonction de ces paramètres. Par exemple si  $a$  est non nul, on pose  $y = t$ ,  $z = s$  et avec l'équation cartésienne, on a  $x = \frac{d-bt-cs}{a}$ .

#### Proposition et définition 0.52

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathbb{R}^3$ . Un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  est un vecteur  $n \in \mathbb{R}^3$  tel que pour tous points  $M$  et  $P \in \mathcal{P}$ , on a  $\overrightarrow{MP} \perp n$ .

Si l'équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  est  $ax + by + cz = d$ ,  $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

**Démonstration :** Identique à celle d'une droite de  $\mathbb{R}^2$ . ■

#### Définition 0.53

On dit que deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.