Convex Optimization Homework #5

1700012751

麦景

FYI

本次作业使用python完成, 并托管在Github上. 关于Python环境配置和所需安装包等, 请见code/README.md.

测试算例的生成代码如下, 其形式与默认随机种子与给定的matlab代码完全一致, 但是由于matlab和python在相同随机数生成器下生成正态分布的方式可能不完全相同, 因此生成的测试算例可能不同. 接下来同样会测试在其他种子下的数值表现情况.

```python
def gen_data(seed=97006855):
    n, m, l = 512, 256, 2
    mu = 1e-2
    generator = random.Generator(random.MT19937(seed=seed))
    A = generator.standard_normal(size=(m, n))
    k = round(n * 0.1)
    p = generator.permutation(n)[ :k ]
    u = np.zeros(shape=(n, l))
    u[ p, : ] = generator.standard_normal(size=(k, l))  # ground truth
    b = np.matmul(A, u)
    x0 = generator.standard_normal(size=(n, l))
    errfun = lambda x1, x2: norm(x1 - x2, 'fro') / (1 + norm(x1, 'fro'))
    errfun_exact = lambda x: norm(x - u, 'fro') / (1 + norm(x, 'fro'))
    sparsity = lambda x: np.sum(np.abs(x) > 1e-6 * np.max(np.abs(x))) / (n * l)
    return n, m, l, mu, A, b, u, x0, errfun, errfun_exact, sparsity
```

Problem #1

> Solve (1.1) using CVX by calling different solvers `mosek` and `gurobi`.

我们在python中使用了cvxpy来调用CVX, 并分别设置了使用`mosek`和`gurobi`来求解题目的优化问题, 相关代码分别为gl_cvx_mosek.py和gl_cvx_gurobi.py.

Problem #2

> First write down an equivalent model of (1.1) which can be solved by calling mosek and gurobi directly, then implement the codes.

使用`mosek` solver的代码在gl_mosek.py中. 对于$||A*x-b||_2^2$, 我们可以把其写成rotated quadratic cone的形式. 不妨设$A*x-b=z$和辅助变量$t^{(1)}\in R$, 则$(\frac{1}{2},t^{(1)},z)$构成一个rotated quadratic cone.

$$2\times\frac{1}{2}\times t^{(1)}\geq\sum_{i,j}z_{i,j}^2 \tag{1}$$

其在`mosek`中可以写成如下形式:

```
z = Expr.sub(Expr.mul(A, x), b)
flatten_z = Expr.flatten(z)
 M.constraint(Expr.vstack(0.5, t1, flatten_z), Domain.inRotatedQCone( ))
```

对于$||x||_{1,2}$, 我们可以写成若干个quadratic cone的形式. 设辅助变量$t^{(2)}\in R^n$, 则有

$$t_i^{(2)}\geq\sqrt{\sum_j x_{i,j}^2} \tag{2}$$

其核心代码为:

```
h = Expr.hstack(t2, x)
# If d=2, it means that each row of a matrix must belong to a cone.
M.constraint(h, Domain.inQCone( ))
```

使用`gurobi` solver的代码在`gl_gurobi.py`中, 与`mosek`类似, 可写成:

```
with gp.Model('Gurobi', env=env) as M:
    # The default lower bound is 0.
    x = M.addMVar(shape=(n, l), name='x', lb=-gp.GRB.INFINITY)
    t2 = M.addMVar(shape=(n,), name='t2')
    z = M.addMVar(shape=b.shape, name='z', lb=-gp.GRB.INFINITY)

    cost = mu * t2.sum( )
    for i in range(m):
      cost += z[ i, : ] @ z[ i, : ] * 0.5
     M.setObjective(cost)

     M.addConstrs(z[ :, i ] + b[ :, i ] == A @ x[ :, i ] for i in range(l))
     M.addConstrs(t2[ i ] @ t2[ i ] >= x[ i, : ] @ x[ i, : ] for i in range(n))

     M.optimize( )
```

目前以上四种方法在默认随机种子下的输出结果如下:

solver	cpu	iter	optval	sparsity	err-to-exact	err-to-cvx-mosek	err-to-cvx-gurobi
CVX-Mosek	0.31	-1	6.10377E-01	0.1201	4.02E-05	0.00E+00	3.33E-07
CVX-Gurobi	0.69	-1	6.10377E-01	0.1211	4.03E-05	3.33E-07	0.00E+00
Mosek	0.29	11	6.10377E-01	0.1201	4.03E-05	9.49E-08	2.79E-07
Gurobi	0.23	12	6.10378E-01	0.1182	4.01E-05	9.17E-07	9.85E-07

我们可以看到, 总体上看, Guribo在运行时间, 稀疏程度和恢复效果上均占有一定的优势.

Problem #3 (a) & (b)

> (a) Subgradient method for the primal problem.
>
> (b) Gradient method for the smoothed primal problem.

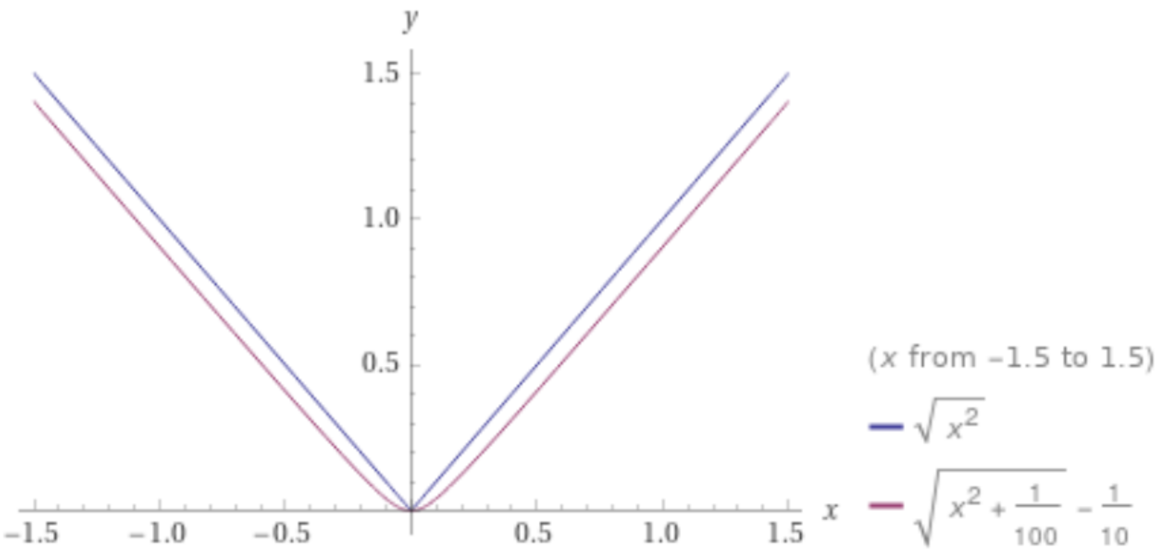
首先给出这两个问题的数学形式. 对于问题(a), 设目标函数为$f(x)=\frac{1}{2}\|Ax-b\|_F^2+\mu\|x\|_{1,2}$. 其中$\|Ax-b\|_F^2$部分可导, 其次梯度为$\partial\|Ax-b\|_F^2=\{A^T(Ax-b)\}$. 对于$\|x\|_{1,2}$我们分行考虑次梯度. 对于行向量$x(i,1:l)(1\le i\le n)$的范数$\|x(i,1:l)\|_2$, 其在$x(i,1:l)=0$处不可微, 经过计算我们可以求出在0是$x(i,1:l)=0$时的次梯度, 即

$$\partial\|x(i,1:l)\|_2=\begin{cases}\dfrac{x(i,1:l)}{\|x(i,1:l)\|_2} & ,\|x(i,1:l)\|_2\ne 0\\ 0 & ,\|x(i,1:l)\|_2=0\end{cases}$$

故

$$\partial f(x)=A^T(Ax-b)+\mu\begin{pmatrix}\partial\|x(1,1:l)\|_2\\ \partial\|x(2,1:l)\|_2\\ \dots\\ \partial\|x(n,1:l)\|_2\end{pmatrix}\tag{3}$$

对于问题(b), 我们重点考虑$\|x\|_{1,2}$我们分行考虑后的行向量范数$\|x(i,1:l)\|_2(1\le i\le n)$的平滑问题. 我们引入小参数$\delta>0$, 则$\|x(i,1:l)\|_2$可被平滑为$\sqrt{\|x(i,1:l)\|_2^2+\delta^2}-\delta$, 其中当$\delta$越小时, 平滑效果越不明显. 下图显示显示了$\delta=0.1$时的对$y=\sqrt{x^2}$的平滑效果:



下面介绍将算法的细节.问题(a)的代码在[gl_SGD_primal.py]()中. 这里传入的默认构造参数及其定义如下:

```
default_opts = {
    "maxit": 2100,                # 内循环最大迭代次数
    "thres": 1e-3,                # 判断小量是否被认为 0 的阈值
    "step_type": "diminishing",   # 步长衰减的类型（见辅助函数）
    "alpha0": 1e-3,               # 步长的初始值
}
```

这里使用了连续化次梯度策略, 重定义原问题的正则化系数为μ_0, 算法枚举了三个递减的正则化系数: $100\mu_0$, $10\mu_0$ 和 μ_0. 外循环按照递减顺序枚举构造的正则化系数(不妨在循环内部设为μ), 内循环默认运行$maxit$次迭代.

```
for mu in [ 100 * mu_0, 10 * mu_0, mu_0 ]:
    ......
    inn_iter = 0
    while inn_iter < maxit:
        .......
```

按照之前分析的数学形式, 其目标函数和梯度的计算如下:

```
def obj_func(x: np.ndarray):
    fro_term = 0.5 * np.sum((A @ x - b) ** 2)
    regular_term = np.sum(LA.norm(x, axis=1).reshape(-1, 1))
    return fro_term + mu * regular_term

def subgrad(x: np.ndarray):
    fro_term_grad = A.T @ (A @ x - b)
    regular_term_norm = LA.norm(x, axis=1).reshape(-1, 1)
    regular_term_grad = x / ((regular_term_norm < thres) + regular_term_norm)
    grad = fro_term_grad + mu * regular_term_grad
    return grad
```

关于步长的选择, 我们仅在连续化外层循环的最后一步使用步长衰减, 其余使用固定步长:

```
        def set_step(step_type):
            iter_hat = max(inn_iter, 1000) - 999
            if step_type == 'fixed' or mu > mu_0:
                return alpha0
            elif step_type == 'diminishing':
                return alpha0 / np.sqrt(iter_hat)
            elif step_type == 'diminishing2':
                return alpha0 / iter_hat
            else:
                logger.error("Unsupported type.")
```

在内循环内部, 我们使用次梯度法进行迭代; 同时, 对于绝对值小于给定阈值的分量, 我们直接设为0

```
    for mu in [ 100 * mu_0, 10 * mu_0, mu_0 ]:
        ......
        inn_iter = 0
        while inn_iter < maxit:
            .......
            inn_iter += 1
            x[ np.abs(x) < thres ] = 0
            sub_g = subgrad(x)
            alpha = set_step(opts[ "step_type" ])
            x = x - alpha * sub_g
            ......
```

问题(b)的代码在[gl_GD_primal.py]()中. 其默认参数为:

```
    default_opts = {
        "maxit": 2500,               # 最大迭代次数
        "thres": 1e-3,               # 判断小量是否被认为 0 的阈值
        "step_type": "diminishing",  # 步长衰减的类型（见辅助函数）
        "alpha0": 1e-3,              # 步长的初始值
        "delta": 1e-3,               # 光滑化参数
    }
```

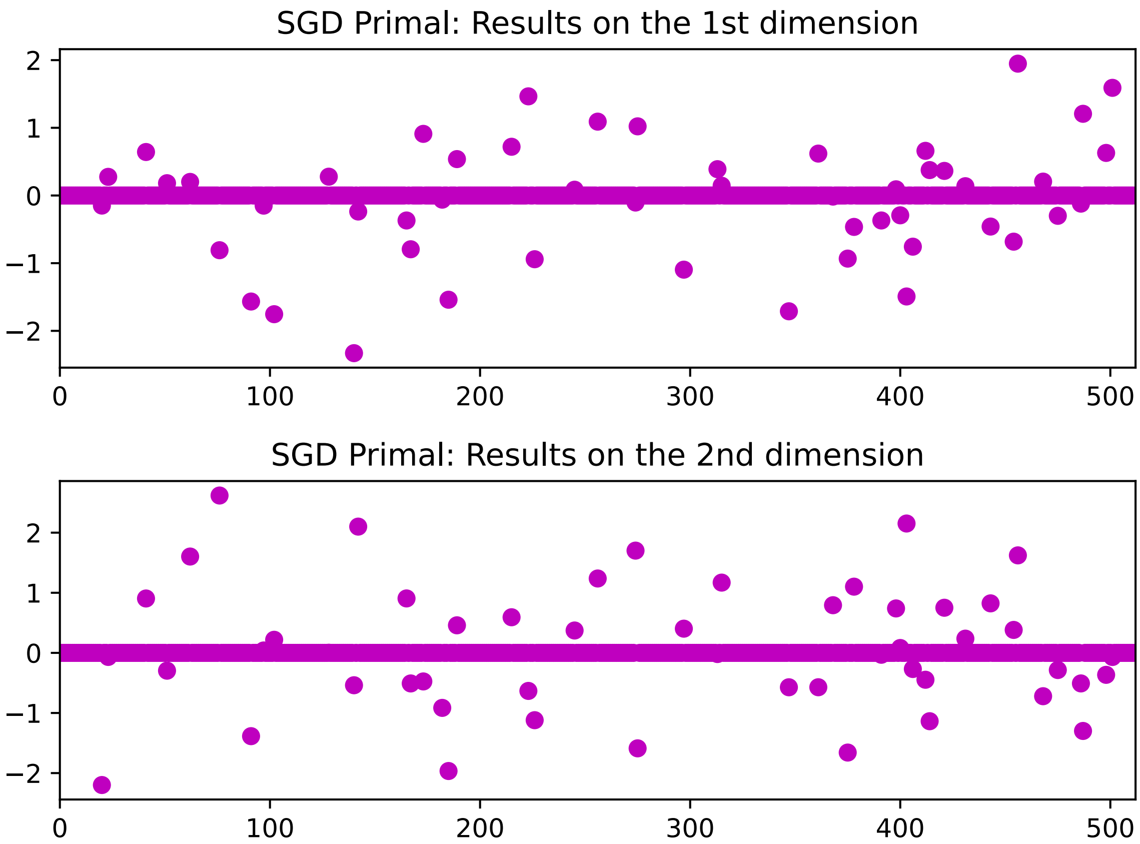
问题(b)的代码与问题(a)的类似, 与问题(a)的主要区别在于梯度的计算上:

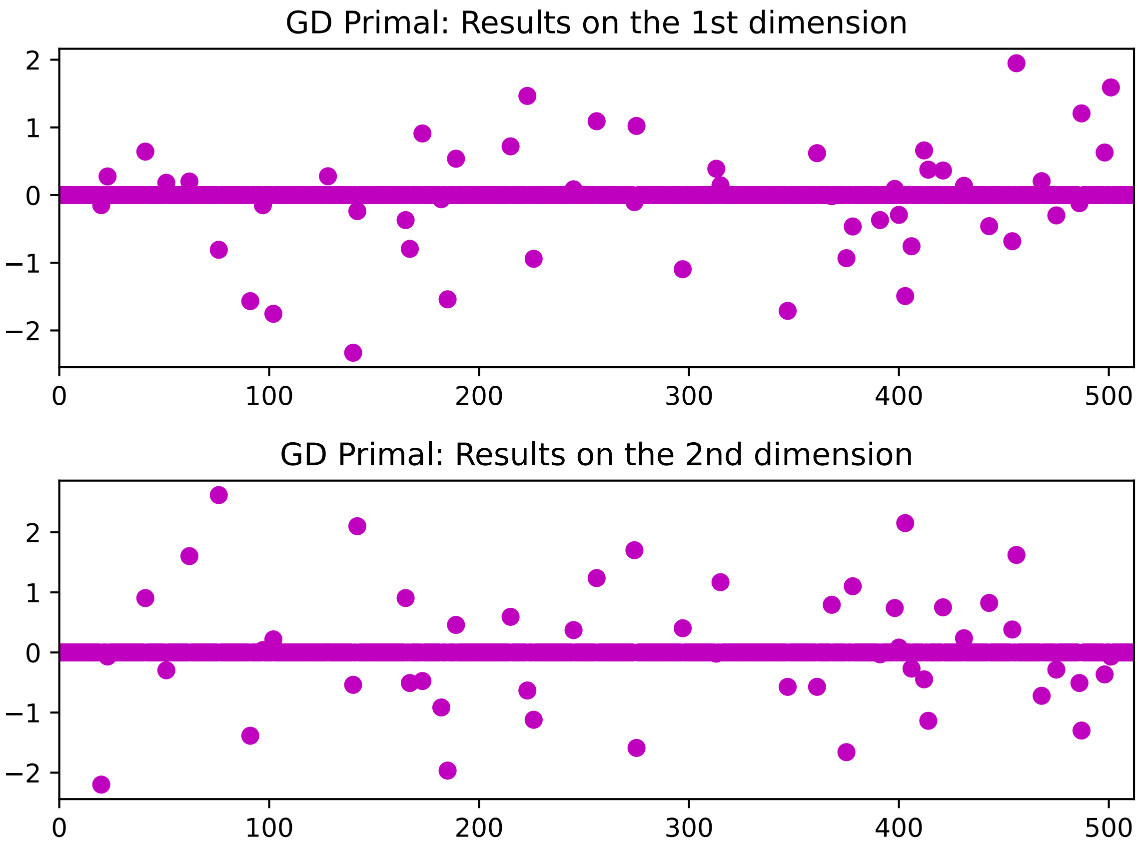
```
        def subgrad(x: np.ndarray):
            fro_term_grad = A.T @ (A @ x - b)
            regular_term_grad = x / np.sqrt(np.sum(x ** 2, axis=1).reshape(-1, 1) + delta * delta)
            grad = fro_term_grad + mu * regular_term_grad
            return grad
```

以下列出这两个问题的统计数据. 在默认随机种子下, 相比于CVX mosek/gurobi, 其运行时间, 稀疏程度, 恢复效果, 迭代次数等如下. 其中运行时间约CVX-Gurobi的三倍, 最优函数值与CVX mosek/gurobi相当, 稀疏程度达到构造数据时期望的0.1, 甚至小于CVX mosek/gurobi的稀疏程度, 与CVX mosek/gurobi的恢复效果也相当接近.

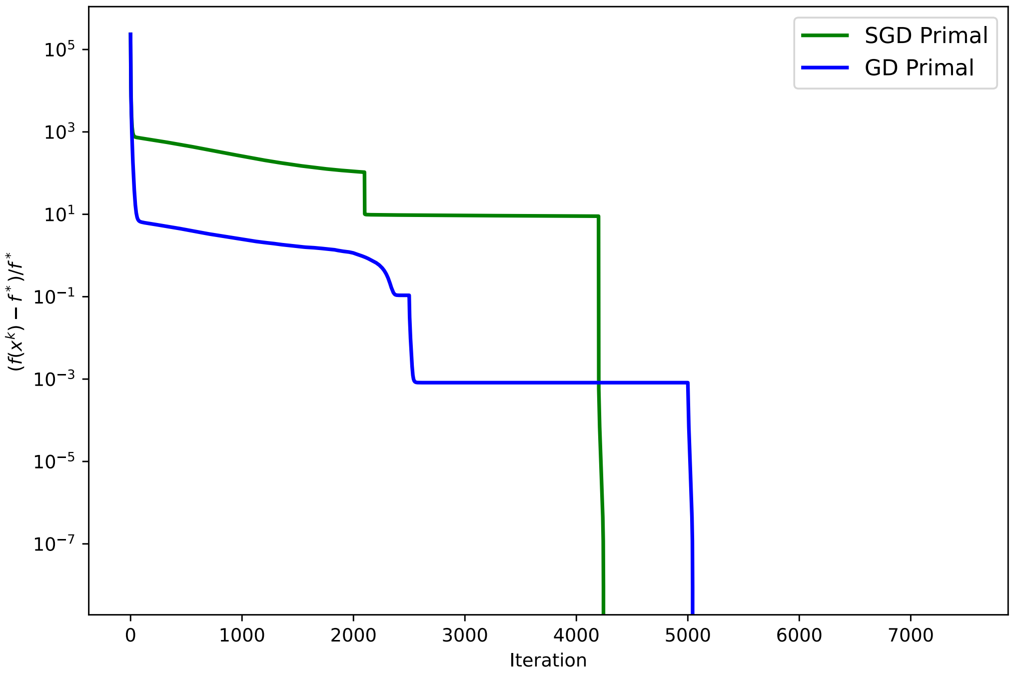
solver	cpu	iter	optval	sparsity	err-to-exact	err-to-cvx-mosek	err-to-cvx-gurobi
CVX-Mosek	0.33	-1	6.10377E-01	0.1201	4.02E-05	0.00E+00	3.33E-07
CVX-Gurobi	0.71	-1	6.10377E-01	0.1211	4.03E-05	3.33E-07	0.00E+00
SGD Primal	2.08	6300	6.10378E-01	0.0996	3.79E-05	4.30E-06	4.43E-06
GD Primal	2.44	7500	6.10378E-01	0.0996	3.79E-05	4.31E-06	4.44E-06

SGD Primal和GD Primal的结果与ground truth u的比较如下. 我们可以看到, 基本上绝大部分的ground truth的分量都可以还原.





下图是分别是SGD Primal和GD Primal的$(f(x^k) - f^*)/f^*$随iteration变化的曲线, 其中$f^* = f(u)$. 这里垂直的线出现的原因是由于目标函数中的正则项的存在, ground truth u不一定最小化目标函数, 因此$f(x^k) - f^*$可能为负数. 这也从侧面说明, 我们的实现如果仅关注此目标函数下, 可以得到比原问题得到的函数值更小的解.



为说明算法在其他种子下的表现情况, 使用其他随机种子$seed = 114514$, 其得到的结果如下: 我们可以看到算法在其他种子下表现稳定.

solver	cpu	iter	optval	sparsity	err-to-exact	err-to-cvx-mosek	err-to-cvx-gurobi
CVX-Mosek	0.33	-1	6.19068E-01	0.1064	4.03E-05	0.00E+00	8.48E-07
CVX-Gurobi	0.70	-1	6.19068E-01	0.1064	4.10E-05	8.48E-07	0.00E+00
SGD Primal	2.09	6300	6.19068E-01	0.0996	3.97E-05	1.21E-06	1.84E-06
GD Primal	2.43	7500	6.19068E-01	0.0996	3.97E-05	1.21E-06	1.84E-06

Problem #3 (c) (d) & (e)

> (c) Fast (Nesterov/accelerated) gradient method for the smoothed primal problem.
>
> (d) Proximal gradient method for the primal problem.
>
> (e) Fast proximal gradient method for the primal problem.

(c) 首先讨论在光滑化后的问题上使用Nesterov梯度算法, 此部分代码在gl_FGD_primal.py中. 原目标函数经过光滑化后为

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|_F^2 + \mu\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\|x(i;1:l)\|_2^2+\delta^2}-\delta) \tag{4}$$

其中$\delta > 0$ 为光滑化参数. 经过光滑化后, 整个目标函数处处光滑, 类似于Nesterov梯度算法的常见形式. 我们可以将光滑化后的优化问题写为

$$\min f(x) = g(x) + h(x) \tag{5}$$

其中$g(x) = f(x)$是光滑的凸函数, $h(x) = 0$是闭凸函数. 容易写出此时$h(x)$的近似点算子即为$prox_{th}(x) = x$.此部分在代码中核心部分如下:

```
        def g_func(x: np.ndarray):
            fro_term = 0.5 * np.sum((A @ x - b) ** 2)
            regular_term = np.sum(np.sqrt(np.sum(x ** 2, axis=1).reshape(-1, 1) + delta * delta) - delta)
            return fro_term + mu * regular_term

        def grad_g_func(x: np.ndarray):
            fro_term_grad = A.T @ (A @ x - b)
            regular_term_grad = x / np.sqrt(np.sum(x ** 2, axis=1).reshape(-1, 1) + delta * delta)
            return fro_term_grad + mu * regular_term_grad

        ......

        def prox_th(x: np.ndarray, t):
            """ Proximal operator of t * mu * h(x).
            """
            return x
```

不妨设选择$v^{(0)} = x^{(0)}$, 以及定义$\theta_k = \frac{2}{k+1}$, 重复以下的迭代过程:

$$\begin{aligned} y &= (1-\theta_k)x^{(k-1)} + \theta_k v^{(k-1)} \\ x^{(k)} &= prox_{t_k h}(y - t_k \nabla g(y)) \\ v^{(k)} &= x^{(k-1)} + \frac{1}{\theta_k}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \end{aligned}$$

其中t_k通过线搜索的方式得到. 此部分的核心代码如下:

```
theta = 2 / (inner_iter + 1)
y = (1 - theta) * x_k + theta * v_k
grad_g_y = grad_g_func(y)

t = set_step(step_type)
x = prox_th(y - t * grad_g_y, t)
v = x_k + (x - x_k) / theta

x_k, v_k, t_k = x, v, t
```

(d) 线搜索部分的算法框架与核心代码如下:

$$\begin{aligned} & t := t_{k-1} \quad \left(\text{define } t_0 = \hat{t} > 0\right) \\ & x := \text{prox}_{th}(y - t\nabla g(y)) \\ & \text{while } g(x) > g(y) + \nabla g(y)^T(x-y) + \tfrac{1}{2t}\|x-y\|_2^2 \\ & \qquad t := \beta t \\ & \qquad x := \text{prox}_{th}(y - t\nabla g(y)) \end{aligned}$$

```
t = t_k
```

```
g_y = g_func(y)
grad_g_y = grad_g_func(y)

def stop_condition(t):
    x = prox_th(y - t * grad_g_y, t)
    g_x = g_func(x)
    return g_x <= g_y + np.sum(grad_g_y * (x - y)) + np.sum((x - y) ** 2) / (2 * t)

for i in range(max_line_search_iter):
    if stop_condition(t):
        break
    t *= aten_coeffi
return t
```

近似点梯度算法的代码在gl_ProxGD_primal.py中. 对于原目标函数 $f(x)=\frac{1}{2}\|Ax-b\|_F^2+\mu\sum_{i=1}^{n}\|x(i;1:l)\|_2$, 我们将优化问题重写为:

$$\min f(x)=g(x)+h(x) \tag{6}$$

其中$g(x)=\frac{1}{2}\|Ax-b\|_F^2$是光滑的凸函数, $h(x)=\mu\sum_{i=1}^{n}\|x(i;1:l)\|_2$是强凸函数. 容易证明 $p(x)=\|x\|_2$的近似点算子为:

$$\operatorname{prox}_{tp}(x)=\begin{cases}(1-t/\|x\|_2)\,x & \|x\|_2\geq t\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{7}$$

对于$h(x)$, 我们对x的每一行按照如上方式即可求得$h(x)$的近似点算子$porx_{th}(x)$, 其核心代码如下:

```
def prox_th(x: np.ndarray, t):
    """ Proximal operator of t * mu * h(x).
    """
    t_mu = t * mu
    row_norms = LA.norm(x, axis=1).reshape(-1, 1)
    rv = x * np.clip(row_norms - t_mu, a_min=0, a_max=None) / ((row_norms < thres) + row_norms)
    return rv
```

近似点梯度法的迭代方式为:

$$x^{(k)}=\operatorname{prox}_{t_k h}\left(x^{(k-1)}-t_k\nabla g\left(x^{(k-1)}\right)\right),\quad k\geq 1 \tag{8}$$

其中t_k通过线搜索的方式得到, 其算法框架与核心代码为:

$$\begin{aligned}
&\text{define } G_t(x)=\frac{1}{t}(x-\operatorname{prox}_{th}(x-t\nabla g(x)))\\
&t:=\hat{t}>0\\
&\text{while } g(x-tG_t(x))>g(x)-t\nabla g(x)^T G_t(x)+\frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2\\
&\qquad t:=\beta t
\end{aligned}$$

```
 g_x = g(x)

def stop_condition(x, t):
    gt_x = Gt(x, t)
    return (g(x - t * gt_x)
            <= g_x - t * np.sum(grad_g * gt_x) + 0.5 * t * np.sum(gt_x ** 2))

alpha = alpha0
for i in range(max_line_search_iter):
    if stop_condition(x, alpha):
        break
    alpha *= aten_coeffi
return alpha
```

```
g_x = g(x)

def stop_condition(x, t):
    gt_x = Gt(x, t)
    return (g(x - t * gt_x)
            <= g_x - t * np.sum(grad_g * gt_x) + 0.5 * t * np.sum(gt_x ** 2))

alpha = alpha0
for i in range(max_line_search_iter):
    if stop_condition(x, alpha):
        break
    alpha *= aten_coeffi
return alpha
```

(e) 在原问题上使用Nesterov梯度算法见gl_FProxGD_primal.py.基本与问题(c)类似, 我们仅仅需要重新定义优化问题:

$$\min f(x) = g(x) + h(x) \tag{9}$$

其中$g(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_F^2$是光滑的凸函数, $h(x) = \mu \sum_{i=1}^{n} \|x(i; 1:l)\|_2$是强凸函数, 其与问题(c)主要不同的代码如下:

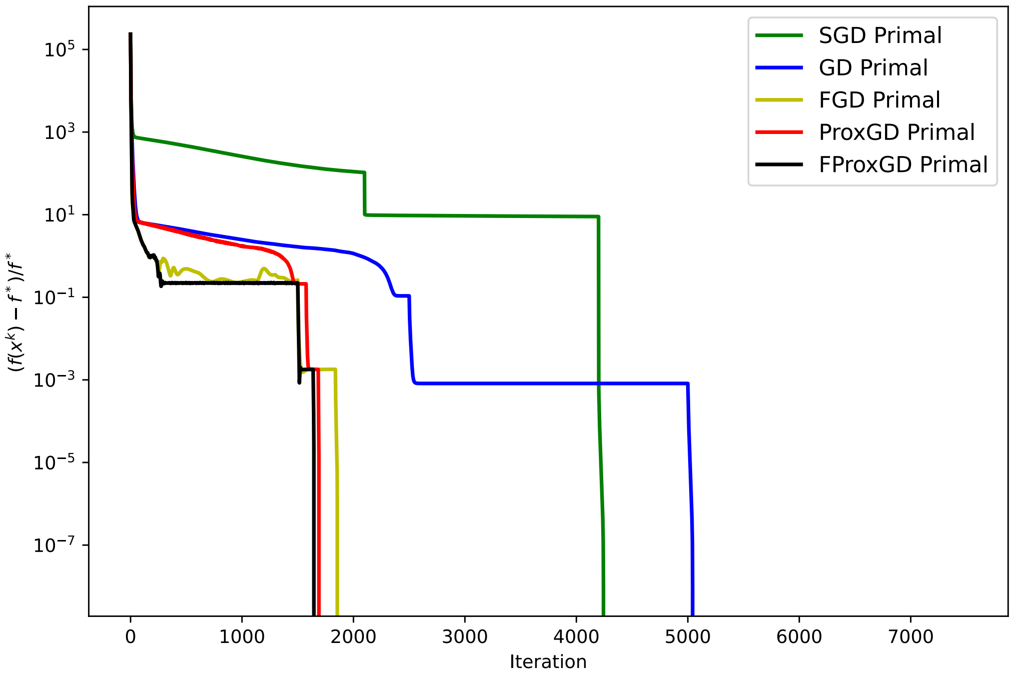
```
def g_func(x: np.ndarray):
    return 0.5 * np.sum((A @ x - b) ** 2)

def grad_g_func(x: np.ndarray):
    return A.T @ (A @ x - b)

......

def prox_th(x: np.ndarray, t):
    """ Proximal operator of t * mu * h(x).
    """
    t_mu = t * mu
    row_norms = LA.norm(x, axis=1).reshape(-1, 1)
    rv = x * np.clip(row_norms - t_mu, a_min=0, a_max=None) / ((row_norms < thres) + row_norms)
    return rv
```

以下列出了问题(a)-(e)得到的图表和统计数据. 在默认随机种子下, 相比于CVX mosek/gurobi, 其运行时间, 稀疏程度, 恢复效果, 迭代次数等如下. 我们可以看到在原问题上使用近似点梯度算法和Nesterov梯度算法具有较小的迭代数和较小的运行时间, 从统计数据上看基本达到和次梯度法相近的解, 但运行时间要小得多.



solver	cpu	iter	optval	sparsity	err-to-exact	err-to-cvx-mosek	err-to-cvx-gurobi
CVX-Mosek	0.32	-1	6.10377E-01	0.1201	4.02E-05	0.00E+00	3.33E-07
CVX-Gurobi	0.73	-1	6.10377E-01	0.1211	4.03E-05	3.33E-07	0.00E+00
SGD Primal	2.02	6300	6.10378E-01	0.0996	3.79E-05	4.30E-06	4.43E-06
GD Primal	2.41	7500	6.10378E-01	0.0996	3.79E-05	4.31E-06	4.44E-06
FGD Primal	1.24	2037	6.10378E-01	0.1221	4.21E-05	2.39E-06	2.27E-06
ProxGD Primal	1.53	1768	6.10377E-01	0.0996	3.79E-05	4.38E-06	4.52E-06
FProxGD Primal	1.09	1721	6.10377E-01	0.0996	3.79E-05	4.38E-06	4.52E-06