

Vektoranalysis: Teil I



Inhaltsverzeichnis | Teil II



1 Grundbegriffe

Die Vektoranalysis wendet die Methoden der Analysis (Differential- und Integralrechnung) auf mathematische Funktionen an, in denen Vektoren auftreten, die sich in Abhängigkeit von Ort und Zeit verändern können. Die wichtigsten Anwendungsgebiete der Vektoranalysis sind physikalische Felder, insbesondere elektromagnetische Felder.

1.1 Physikalische Felder

sind Teilgebiete des Raumes \mathbb{R}^3 , in denen jedem Punkt eindeutig ein Skalar oder ein Vektor (auch ein Tensor oder Spinor) zugeordnet ist. Je nach Art der »Feldgröße« spricht man von einem Skalarfeld oder einem Vektorfeld.

Skalare Feldgrößen sind z. B. Druck, Temperatur, Beleuchtungsstärke, Potential.

Vektorielle Feldgrößen sind z. B. elektrische und magnetische Feldstärke, magnetische Induktion, Strömungsgeschwindigkeit.

Kraftfelder sind Felder, in denen z. B. eine elektrische Ladung oder eine Masse eine Kraft erfährt.

Elektrodynamische Felder sind zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder, in denen Induktionsvorgänge stattfinden.

Feldlinien sind (gedachte) Linien dergestalt, dass die Vektoren der Feldgröße ihre Tangenten sind. Bekannte Beispiele sind: Stromlinien, elektrische und magnetische Feldlinien.

2 Vektorfunktionen

Zur Schreibweise: Im Text werden – der deutschen Norm folgend – die Zeichen für Vektoren (\vec{V}) kursiv und fett geschrieben. In den mit TeX gesetzten Formeln sind die Zeichen mit einem Pfeil versehen.

Für die Beschreibung eines Vektors durch seine kartesischen Komponenten sind drei Schreibweisen üblich: Mittels der Einheitsvektoren \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} auf der X-, Y- und Z-Achse, als einzeilige Matrix und als einspaltige Matrix.

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \begin{pmatrix} V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

Ich werde diese Schreibweisen je nach Zweckmäßigkeit abwechselnd verwenden.

Eine Funktion, bei der die abhängige Variable ein Vektor ist, heißt Vektorfunktion. Im einfachsten Fall sind die (skalaren) kartesischen Komponenten V_x , V_y , V_z des Vektors Funktionen einer einzigen Variablen u (eiparametrische Vektorfunktion).

$$\vec{V}(u) = \begin{pmatrix} V_x(u) & V_y(u) & V_z(u) \end{pmatrix}.$$

2.1 Ableitung einer Vektorfunktion

Analog zur Definition der Ableitung einer skalaren Funktion ist die Ableitung einer Vektorfunktion $\vec{V}(u)$ definiert:

$$\frac{d\vec{V}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(u + \Delta u) - \vec{V}(u)}{\Delta u}.$$

Durch Zerlegung des Vektors \vec{V} in seine kartesischen Komponenten folgt daraus:

$$\frac{d\vec{V}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V_x \vec{i} + \Delta V_y \vec{j} + \Delta V_z \vec{k}}{\Delta u} \right)$$

mit

$$\Delta V_x = V_x(u + \Delta u) - V_x(u) \quad \text{usw.}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\frac{d\vec{V}}{du} = \frac{dV_x}{du} \vec{i} + \frac{dV_y}{du} \vec{j} + \frac{dV_z}{du} \vec{k}.$$

Die Ableitung des Vektors $\vec{V}(u)$ nach u ist als Summe dreier Vektoren wieder ein Vektor.

Ist insbesondere der Vektor \vec{V} der vom Ursprung O des Koordinatensystems ausgehende »Ortsvektor« $\vec{r} = \vec{OP}$ eines Punktes $P(x, y, z)$, so gilt

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Bewegt sich der Punkt P irgendwie im Raum und sind seine Koordinaten differenzierbare Funktionen der Zeit t , so ist

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

und

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Nun sind aber dx/dt , dy/dt und dz/dt die Geschwindigkeiten der Projektionen des Punktes P auf die Achsen:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

und daher

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

Dieser Vektor aber ist nichts anderes als der Geschwindigkeitsvektor von P , also ist

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_P.$$

Analog ergibt sich der Vektor \vec{a} der Beschleunigung des Punktes P :

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

2.2 Differentiationsregeln

Analog beweist man folgende Regeln:

1. Die Ableitung des Produkts einer skalaren Funktion $f(u)$ und eines konstanten Vektors \vec{V}

$$\frac{d}{du} [f(u) \vec{V}] = \frac{df}{du} \vec{V}.$$

2. Die Ableitung eines konstanten Vektors ist null.

3. Die Ableitung der Summe und Differenz zweier Vektoren:

$$\frac{d}{du} [\vec{V}(u) \pm \vec{W}(u)] = \frac{d\vec{V}}{du} \pm \frac{d\vec{W}}{du}.$$

4. Weitere Differentiationsregeln:

$$\frac{d}{du} [f(u) \vec{V}(u)] = \frac{df}{du} \vec{V} + f \frac{d\vec{V}}{du} \quad f(u): \text{skalare Funktion,}$$

$$\frac{d}{du} (\vec{V} \vec{W}) = \frac{d\vec{V}}{du} \vec{W} + \vec{V} \frac{d\vec{W}}{du},$$

$$\frac{d}{du} (\vec{V} \times \vec{W}) = \frac{d\vec{V}}{du} \times \vec{W} + \vec{V} \times \frac{d\vec{W}}{du},$$

$$\frac{d}{du} \vec{V} [f(u)] = \frac{d\vec{V}}{df} \frac{df}{du}.$$

2.3 Beispiel

Der Ortsvektor \vec{r} eines Punktes P sei

$$\vec{r}(\varphi) = (a \cos \varphi) \vec{i} + (a \sin \varphi) \vec{j} + \frac{h}{2\pi} \varphi \vec{k}.$$

Wenn φ alle reellen Zahlenwerte annimmt, durchläuft der Punkt P eine Schraubenlinie mit dem Radius a und der Ganghöhe h . Die Ableitung dieser Vektorfunktion ist der Vektor

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -(a \sin \varphi) \vec{i} + (a \cos \varphi) \vec{j} + \frac{h}{2\pi} \vec{k}.$$

Setzen wir

$$\varphi = \omega t \quad \omega = \text{konst.}$$

wobei t die Zeit sein soll, so hat P die konstante Winkelgeschwindigkeit ω und den Geschwindigkeitsvektor

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \omega = (-a\omega \sin \omega t) \vec{i} + (a\omega \cos \omega t) \vec{j} + \frac{h\omega}{2\pi} \vec{k}.$$

3 Anwendungen auf die Differentialgeometrie der Raumkurven

3.1 Tangente, Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor einer Raumkurve

Analog zu den ebenen Kurven wird definiert:

Die Tangente an eine Raumkurve mit dem Ortsvektor $\vec{r}(u)$ in einem ihrer Punkte P ist die Gerade durch P mit derselben Richtung wie der Vektor $(d\vec{r}/du)P$ (das bedeutet: die Vektorfunktion $d\vec{r}/du$ gebildet an der Stelle P).

Dabei ist u irgendeine Variable, durch die \vec{r} beschrieben wird.

Diese Definition wird sofort plausibel, wenn wir die Variable u durch die Zeit t ersetzen. Dann ist (siehe oben):

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} gibt aber die momentane Bewegungsrichtung des Punktes P an, und das ist die Richtung der Kurventangente.

Führen wir nun wieder die beliebige Variable u ein, dann wird

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{du} = \vec{v} \frac{dt}{du}$$

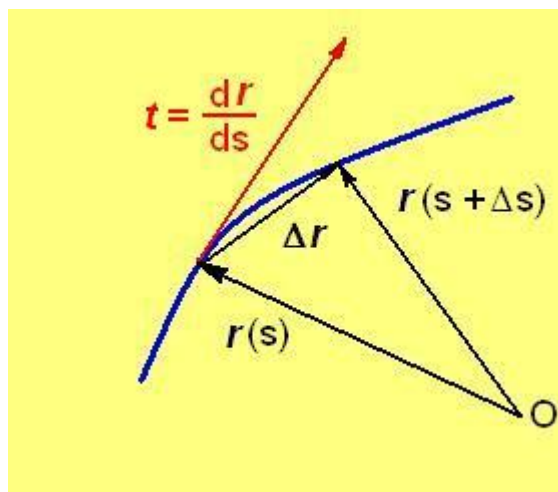
wobei dt/du lediglich ein skalarer Faktor ist, der an der Richtung des Vektors \vec{v} nichts ändert. Also hat auch der Vektor $\frac{d\vec{r}}{du}$ die Richtung von \vec{v} und damit die Richtung der Tangente.

Für das Folgende brauchen wir den auf der Kurventangente gelegenen Einheitsvektor. Er wird mit \vec{t} bezeichnet. Man findet ihn, indem man den Geschwindigkeitsvektor durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{v},$$

wobei v die Bahngeschwindigkeit des Punktes P ist. Ist \vec{r} als Funktion der Bogenlänge s der Kurve gegeben, wobei s von einem beliebigen Punkt der Kurve aus gemessen wird, dann kann man v durch ds/dt ersetzen:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$



3.2 Schmiegungeebene und Krümmung einer Raumkurve

Es ist nützlich, sich zunächst die analogen Überlegungen und Begriffe bei einer ebenen Kurve zu vergegenwärtigen. Dort liegen selbstverständlich auch alle Kurventangenten in derselben Ebene, der Ebene der Kurve. Ändert sich die Richtung der Tangente (ihr Winkel) auf der Weglänge (Bogenlänge) Δs um den Wert $\Delta \tau$ so ist die »mittlere Krümmung« k_m auf der Strecke Δs

$$k_m = \frac{\Delta \tau}{\Delta s}$$

und die Krümmung der Kurve im betrachteten Punkt P

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s}.$$

Unter dem Krümmungskreis der Kurve im Punkt P versteht man den Kreis durch P , der dieselbe Steigung und dieselbe Krümmung wie die Kurve in P hat. Der Radius ρ dieses Kreises heißt Krümmungsradius der Kurve in P . Es gilt

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Die Tangenten einer Raumkurve liegen nicht in derselben Ebene und es gibt – im Gegensatz zu Flächen – im Punkt P auch nicht nur eine Tangentialebene, sondern unendlich viele. Unter ihnen greifen wir die Ebene heraus, in der der Tangenteneinheitsvektor \vec{t} und der Vektor $d\vec{t}/ds$ liegen. Der letztgenannte Vektor gibt nämlich die Richtung an, in welcher sich der Vektor \vec{t} in P dreht. Diese Ebene heißt die Schmiegungeebene der Kurve in P .

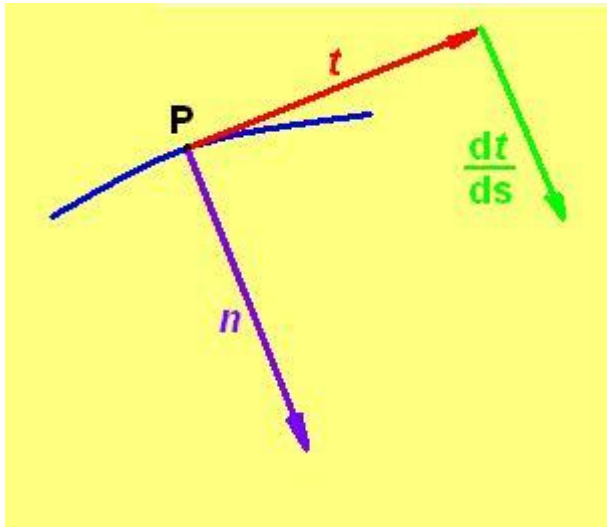
Der in der Schmiegungeebene liegende Einheitsvektor, der auf \vec{t} senkrecht steht und dieselbe Richtung wie der Vektor $d\vec{t}/ds$ hat, heißt Hauptnormaleneinheitsvektor \vec{n} der Kurve in P .

Hat ein Vektor $\vec{v}(u)$ eine konstante Länge v , so ist wegen $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ auch $v^2 = \text{konst.}$ Differenziert man die letzte Gleichung nach u und benutzt dabei die Regel für die Differentiation eines Skalarprodukts $\vec{v} \cdot \vec{w}$ mit $\vec{w} = \vec{v}$, so findet man

$$\frac{d}{du} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{du} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{du} = 0.$$

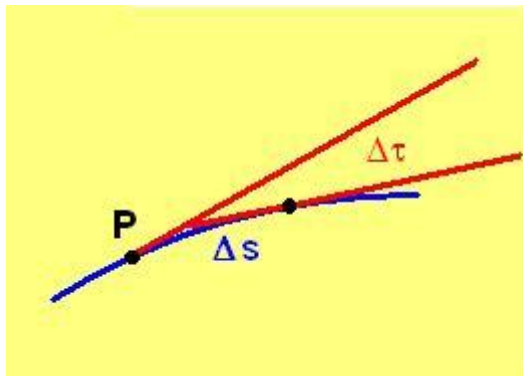
Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{v} und $d\vec{v}/du$ null ist und keiner der beiden Vektoren selbst null ist (Nullvektor bzw. konstanter Vektor), dann müssen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Dies leuchtet auch unmittelbar ein: Wenn der Vektor $d\vec{v}/du$ eine Komponente in Richtung \vec{v} hätte, dann würde sich die Länge von \vec{v} zugleich mit u verändern.

Dieses Ergebnis wenden wir auf den Tangenteneinheitsvektor \vec{t} einer Raumkurve an. Da die Länge von \vec{t} konstant ist, muss seine Ableitung $d\vec{t}/ds$ auf \vec{t} senkrecht stehen.



In der Abbildung liegen der Tangenten- und der Normalenvektor in der Zeichenebene, die folglich mit der Schmiegungsebene zusammenfällt. Die Kurve selbst dagegen verläuft im Allgemeinen links und rechts von P außerhalb dieser Ebene.

Unter der mittleren Krümmung einer Kurve im Bereich Δs versteht man den auf Δs bezogenen Drehwinkel $\Delta\tau$ der Tangente. Ihr Grenzwert für Δs gegen 0 heißt Krümmung k der Kurve im Punkt P .



$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

Ein in der Schmiegungsebene gelegener Kreis durch P mit derselben Steigung und derselben Krümmung wie die Raumkurve, heißt Krümmungskreis der Kurve. Sein Radius heißt Krümmungsradius ρ der Kurve in P . Da für den Kreisbogen Δs (unabhängig von seiner Größe) stets gilt

$$\Delta s = \rho \Delta\tau$$

gilt für seine Krümmung

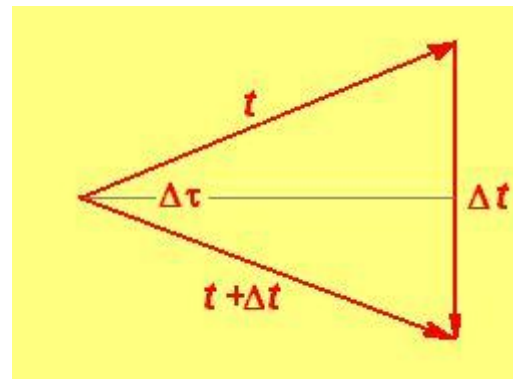
$$k = \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

Zur Berechnung der Krümmung einer Kurve aus ihrem Ortsvektor $\vec{r}(s)$ gehen wir wie folgt vor:

1. Berechnung von $d\vec{t}/ds$:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\tau} \frac{1}{\rho} = \frac{d\vec{t}}{d\tau} k$$

2. Berechnung von $d\vec{t}/d\tau$:



Es ist:

$$\frac{\Delta t}{2} \approx \sin \frac{\Delta\tau}{2} = \frac{\Delta\tau}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^3 + - \dots$$

und

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} \approx \frac{2}{\Delta\tau} \sin \frac{\Delta\tau}{2} = 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 + - \dots \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta\tau} =$$

3. Damit ergibt sich:

$$\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = k = \frac{1}{\rho}.$$

Da der Vektor $d\vec{t}/ds$ die Richtung des Normaleneinheitsvektors \vec{n} hat, ist

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k \vec{n} = \frac{1}{\rho} \vec{n}$$

Hieraus folgt durch Quadrieren und Wurzelziehen:

$$k = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}.$$

4 Integralrechnung mit Vektoren

In Integralen können Vektoren sowohl als Integrand (= die zu integrierende Funktion) als auch als Differential bei dem Integranden auftreten.

1. Typ: Nur der Integrand ist ein Vektor

Ein typisches Beispiel ist das Zeitintegral der Kraft, das in der Dynamik auftritt. (Dort ist es ein bestimmtes Integral; es genügt hier jedoch, nur unbestimmte Integrale zu untersuchen.)

$$\int \vec{F} dt = \int \left(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \right) dt = \vec{i} \int F_x dt + \vec{j} \int F_y dt + \vec{k} \int F_z dt,$$

$$\int \vec{F} dt = \left(\int F_x dt \quad \int F_y dt \quad \int F_z dt \right).$$

Das Ergebnis ist also, wie zu erwarten war, ein Vektor.

Anmerkung: Dass oben die Einheitsvektoren \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} wie konstante Faktoren vor die Integrale gezogen werden dürfen, lässt sich wie folgt beweisen: Das Integralzeichen ist das Symbol für den Grenzwert einer Summe. Konstante Faktoren bei den Summanden können ausgeklammert werden, auch wenn sie (konstante) Vektoren sind.

2. Typ: Integrand und Differential sind Vektoren

Ein Beispiel dafür ist das Wegintegral der Kraft, mit dem die Arbeit berechnet wird.

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \int \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

Da $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ ein Skalarprodukt ist, ergibt sich für das Ergebnis des Integrals erwartungsgemäß auch ein Skalar.

Ein spezielles wichtiges Beispiel hierfür ist:

$$\int_C \vec{v} d\vec{v} = \int v_x dv_x + \int v_y dv_y + \int v_z dv_z = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + C = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + C$$

Die Integration folgt hier formal derselben Regel wie bei $\int x dx$.

Ein anderes interessantes Beispiel (unter Verwendung des erst später erklärten Operators grad, dessen Bedeutung hier erkennbar ist):

$$\int \text{grad } U d\vec{r} = \int \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix}$$

$$\int \text{grad } U d\vec{r} = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int dU = U + C.$$

Erläuterung: Der Integrand im vorletzten Integral ist das vollständige Differential dU der Funktion $U = U(x, y, z)$.

3. Typ: Nur das Differential ist ein Vektor

$$\int U d\vec{v} = \int U (dv_x \quad dv_y \quad dv_z) = \vec{i} \int U dv_x + \vec{j} \int U dv_y + \vec{k} \int U dv_z.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor.



5 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

5.1 Text

- **Vektoranalysis: Teil I** *Quelle:* https://de.wikibooks.org/wiki/Vektoranalysis%3A_Teil_I?oldid=806532 *Autoren:* Siegfried Petry, Progran, JohannWalter~dewikibooks, ThePacker, Heuler06, Evotopid, Abitrus und Anonyme: 16

5.2 Bilder

- **Datei: VA-05.1.JPG** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a6/VA-05.1.JPG> *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei: VA-05.4.JPG** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/a/a2/VA-05.4.JPG> *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei: VA-05.5.JPG** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/3/30/VA-05.5.JPG> *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei: VA-05.8.JPG** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/1/18/VA-05.8.JPG> *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?
- **Datei: Wikibook.svg** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Wikibook.svg> *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Transferred from de.wikibooks *Ursprünglicher Schöpfer:* Original by Oliver Merkel, vectorized by Muffin at de.wikibooks
- **Datei: Wikibooks-nav-vor.png** *Quelle:* <https://upload.wikimedia.org/wikibooks/de/e/ec/Wikibooks-nav-vor.png> *Lizenz:* ? *Autoren:* ? *Ursprünglicher Schöpfer:* ?

5.3 Inhaltslizenz

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0