PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TALLER DE INICIACIÓN CIENTÍFICA

VALORES DE LA FUNCIÓN DSETA DE RIEMANN

Rocío Sepúlveda-Manzo

La función dseta de Riemann es uno de los objetos más misteriosos y llamativos de la teoría de números. Inspirado en problemas surgidos a finales del siglo XVII, Euler comenzó a investigar ésta función y dio con una expansión como producto infinito que conecta directamente con los números primos. A finales del siglo XIX, Bernhard Riemann aplicó su teoría de variable compleja a ésta función que fue clave en teoremas de la distribución de números primos. Ello nos conlleva a preguntarnos acerca de los valores que toma esta función: Euler mismo dió con una fórmula para los números pares positivos en los que aparece la constante π, ¿pero y para los impares? En esta monografía veremos una demostración de que $\zeta(3)$ es irracional, y discutiremos lo que se sabe y lo que se conjetura del resto de valores de $\zeta(k)$ con $k > 1$ impar.

1. INTRODUCCIÓN

En 1650, Pietro Mengoli planteó el conocido *problema de Basilea*, el cual consistía en calcular la suma de inversas de los cuadrados perfectos. Este había sido un desafío para Johann Bernoulli quien, en conjunto a Pietro Mengoli, demostraron la convergencia de esta suma; no obstante, pese a los repetidos intentos de Leibniz, Johann Bernoulli y su hermano Jacob Bernoulli el problema se resistía a ser resuelto. No fue hasta mucho más tarde, en 1734, que un joven matemático de origen austríaco, cuyo nombre saltaría a la posteridad mediante una interminable cadena de resultados con su apellido, Leonhard Euler, logró establecer la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

para ello, Euler comenzó a calcular valores numéricos hasta obtener certeza sobre los primeros veinte decimales. Las técnicas que empleó se convirtieron en un método folclórico para la teoría analítica de números llamado las *sumas de Euler-MacLaurin*. Euler definió lo que hoy se conoce como la *función dseta*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(originalmente pensada para valores reales $s > 1$), y no contento con encontrar una fórmula para $\zeta(2)$, su método otorgaba una fórmula para los valores de $\zeta(2n)$. Su trabajo, expuesto ante la Academia en 1735 no fue publicado hasta 1740. Para entonces, había disparado su nombre a la fama, y toda la comunidad matemática internacional sabía de los impresionantes descubrimientos de Euler.

En 1859, Bertrand Riemann estudió la función dseta mediante técnicas del análisis complejo y demostró que ésta admitía una prolongación analítica a todo el plano complejo, exceptuando un polo en $s=1$; a ésta función es la que se le denomina *función dseta de Riemann* en su honor. En el mismo artículo, Riemann postula la famosa hipótesis que lleva su apellido y que 41 años más tarde sería incluído en la lista de los veintitres problemas de David Hilbert.

En principio, la *hipótesis de Riemann* trata únicamente sobre la ubicación de ceros no triviales de la función dseta de Riemann, pero en realidad, gracias a los trabajos de Riemann, Hadamard y de la Vallée Poussin realmente es un enunciado concreto acerca la distribución de números primos. Un estudio minucioso de la función dseta nos confirma el *teorema de los números primos*, conjeturado originalmente por Legendre 1798, pero la hipótesis de Riemann nos otorgaría potentes refinamientos a ésta aproximación, que es uno de los resultados centrales en la teoría de números.

Posteriormente, se comenzó a investigar la naturaleza de los valores de $\zeta(s)$ para $\Re(s)>1$. En el caso de $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ tenemos que es trascendente gracias al trabajo de von Lindemann quien en 1882 demostró que π era un número trascendente. Dado que la fórmula de Euler expresa $\zeta(2n)$ con $n\geq 1$ de manera algebraica en función de π, se concluye la trascendencia para éstos valores, pero nos niega *independencia* algebraica entre ellos.

Para el caso de $\zeta(3)$, en 1977 Apéry logró probar que resulta en un valor irracional. Para otros valores aún sigue siendo un problema abierto verificar su irracionalidad o trasendencia.

En la presente monografía demostraremos los resultados mencionados, tales como el problema de Basilea y el caso general $\zeta(2n)$ para $n\geq 1$; además, veremos la irracionalidad de $\zeta(3)$ y presentaremos los avances y problemas abiertos que aún persisten acerca de los valores de $\zeta(s)$.

2. Convergencia y analiticidad de $\zeta(s)$

En esta sección veremos preliminares de la función dseta de Riemann tales como su convergencia y analiticidad. La última propiedad fue originalmente demostrada por Riemann [**6**]; pero recomendamos ver la demostración contenida en Apostol [**2**].

Teorema 1 (Convergencia absoluta). Sean σ_c y σ_a las abscisas de convergencia y convergencia absoluta respectivamente para la serie $\zeta(s)=\sum_n 1/n^s$. Se tiene que $\sigma_a=\sigma_c=1$. Además, la serie diverge en $s=1$.

Demostración. Primero notemos que $\sigma_c=\sigma_a$ pues los términos de la serie son positivos cuando s es real. Por otro lado, tenemos que $\sigma_c\geq 1$ pues la serie diverge en $s=1$ (es la serie armónica) y tenemos que $\sigma_a\leq 1$ pues $|n^s|=n^{\Re(s)}$ y $\sum_p \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $p\leq 1$. □

Teorema 2 (Analiticidad). La función $\zeta(s)$ admite una continuación analítica a todo $\mathbb{C}$ excepto para un polo simple en $s=1$ con residuo $\rho=1$.

Demostración. Apostol [**2,** Teo. 12.5(a), pág. 255]. □

Teorema 3 (Producto de Euler). Para $\Re(s)>1$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Demostración. Notemos que la serie sobre primos $\sum_p p^{-s}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots$ satisface que $\sum_p|p^{-s}|<\sum_n n^{-\Re(s)}$ para $\Re(s)>1$ y esta última serie converge. Así que, $\sum_p p^{-s}$ converge absolutamente, por lo que se puede reordenar. De esta manera, tenemos que cada término de la función dseta de Riemann se puede descomponer por la factorización única en $\mathbb{Z}$ obteniendo así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

donde el subíndice p recorre los números primos. □

Corolario 4 (Infinitud de primos)**.** Existen infinitos primos.

Demostración. Empleando el producto de Euler vemos que cuando $s \to 1^+$ tenemos que $\zeta(s)$ diverge, por divergencia de la serie harmónica, por lo que debe haber infinitos primos para que el producto también diverja cuando $s \to 1^+$. □

3. Valores pares para la función dseta de Riemann $\zeta(2n)$

Podemos considerar a la expresión $\exp(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ como una serie formal dada por la expansión de Taylor

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Luego vemos que $\exp(t) - 1 \in t \cdot \mathbb{Q}[[t]]$ de modo que $t^{-1}(\exp(t) - 1) \in \mathbb{Q}[[t]]$ es una serie formal cuyo coeficiente libre es 1 y, por lo tanto, posee inversa; digamos

$$\frac{t}{\exp(t)-1} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ par}}} \frac{(-1)^{k/2}}{k!} B_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]. \tag{1}$$

A los términos B_n les decimos *números de Bernoulli*. Podemos calcular a mano algunos los primeros:

n	2	4	6	8	10	$\cdots$
B_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\cdots$

Ahora bien, la siguiente fórmula es conocida de cualquier libro estándar de variable compleja (por ejemplo, Lang [**5,** pág. 379]):

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right).$$

Esto se puede deducir del producto infinito para la función de variable compleja $\sin(z)$ junto con una aplicación de la derivada logarítmica o bien directamente de la teoría de productos de Weierstrass (como lo hace Lang).

Podemos dividir a ambos lados por π y sustituir $z \mapsto \pi z$:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z/\pi)}{\pi((z/\pi)^2 - n^2)} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

Multiplicando por z:

$$z \cot z = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2\pi^2}. \tag{2}$$

Teorema 5 (Euler). Si $k \geq 2$ es par, entonces

$$\zeta(k) = \frac{(2\pi)^k}{2(k!)} B_k.$$

Demostración. En la ecuación (1) sustituimos $t = 2iz$:

$$\frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = 1 - iz - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ par}}} \frac{2^k z^k}{k!} B_k,$$

reordenando

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ par}}} \frac{2^k z^k}{k!} B_k &= \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} + iz = iz \cdot \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \\ &= z \cot z = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

donde empleamos la fórmula (2). El último término de la sumatoria podemos identificarlo como el resultado de una serie geométrica de término $z^2/n^2\pi^2$ siempre que elijamos z con $|\Re(z)| < \pi$, así que bajo esas condiciones podemos asegurar convergencia absoluta y luego nos permitimos intercambiar sumatorias:

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^{2\ell}}{n^{2\ell} \pi^{2\ell}} = 1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2z^{2\ell}}{\pi^{2\ell}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\ell}} \right) = 1 - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ par}}} \frac{2z^k}{\pi^k} \zeta(k).$$

Así pues, obtenemos dos expresiones de series de potencias para $z \cot z$ centrado en $z = 0$:

$$z \cot z = 1 - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{ par}}} \frac{2^k z^k}{k!} B_k = 1 - \sum_{\substack{k \geq 2 \\ n \text{ par}}} \frac{2z^k}{\pi^k} \zeta(k),$$

finalmente igualando coeficientes se obtiene la igualdad deseada. □

Corolario 6 (Problema de Basilea)**.**

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Gracias a que se conoce una fórmula explícita para $\zeta(2)$ podemos deducir que es un valor irracional. Más aún, como π es trascendente por un teorema de von Lindemann, se concluye que $\zeta(n)$, con $n \geq 2$ par, también es trascendente.

4. Sobre valores negativos en la función dseta

Como vimos en la sección 2, sabemos que existe una extensión analítica de $\zeta(s)$ definida para todo s excepto para $s = 1$, donde se encuentra un polo simple. Esta extensión está definida a través de una ecuación funcional (ver Apostol [**2,** Teo. 12.7, pág. 259]). Existen varias versiones para esta ecuación, pero presentaremos dos de ellas:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s), \qquad \text{para } \Re(s) > 0$$
$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s), \qquad \text{para } \Re(s) < 1.$$

donde
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Explicitamos la fórmula pues, a través de esta expresión podemos evaluar valores negativos a la función, por ejemplo, para k par $\zeta(-k) = 0$. Para el caso $\zeta(-1)$:
$$\zeta(-1) = 2(2\pi)^{-2}\Gamma(2)\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\zeta(2) = -2(2\pi)^{-2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Notemos que este resultado no implica que $1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$, pues la función dseta definida como la serie está planteada para $\Re(s) > 1$ y nosotros ahora estamos trabajando en la extensión analítica de la función.

Otros valores que se pueden obtener gracias a la extensión son

n	0	-1	-3	-5	-7	-9	-11	$\cdots$
$\zeta(n)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{252}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{132}$	$\frac{691}{32760}$	$\cdots$

Esto se puede resumir en la siguiente fórmula:

Teorema 7. Para $n > 0$:
$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_n}{n+1}.$$

Demostración. Ver Apostol [**2,** Teo. 12.7, pág. 259]. □

Corolario 8. Para $n \geq 0$, $\zeta(-n)$ es racional.

5. Irracionalidad de $\zeta(3)$

En junio de 1978, Apéry presentó una demostración para la irracionalidad de $\zeta(3) = 1^{-3} + 2^{-3} + 3^{-3} + \cdots$ Esta prueba, aunque elemental, empleaba una complicada red de expansiones en fracción continua para ser efectiva; el público quedó impactado, la demostración funcionaba pero parecía casi un milagro, la audiencia parecía dividirse entre creyentes y no creyentes. Unos meses más tarde, Beukers [**4**] propone una nueva demostración más elegante de la irracionalidad de $\zeta(3)$, que detallaremos paso a paso en esta sección.

Primero, denotamos el mínimo común múltiplo de $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ como d_n y este se encuentra acotado por el producto sobre primos
$$d_n = \prod_{p\leq n} p^{\lfloor \log n/\log p\rfloor} < \prod_{p\leq n} p^{\log n/\log p} = n^{\pi(n)}$$

el cual a su vez se encuentra acotado por 3^n para n suficientemente grande.

Lema 9. Sea r entero no negativo. Luego
$$\int_0^1\int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy}(xy)^r\,dx\,dy = 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\right).$$

Demostración. Sea σ no negativo. Consideramos la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(xy)^{r+\sigma}}{1-xy}\,dx\,dy. \tag{3}$$

Como $x, y \in (0,1)$, se tiene $(1-xy)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k$. De esta manera podemos calcular la integral (3)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{(xy)^{r+\sigma}}{1-xy} dxd &= \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{r+\sigma} \left(\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\right) dx\,dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 y^{r+\sigma+k} \left(\frac{1}{r+\sigma+k+1}\right) dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\sigma+k+1)^2}.
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a σ, obtenemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(xy)^{r+\sigma}\log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(\sigma+r+k+1)^3}.$$

Considerando $\sigma = 0$ se tiene

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(xy)^{r}\log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(r+k+1)^3}.$$

Entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(xy)^{r}\log(xy)}{1-xy}\,dx\,dy = 2\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^3}\right).$$

□

Teorema 10. $\zeta(3)$ es irracional

Demostración. Por contradicción, asumiremos que $\zeta(3)$ es racional.

Consideremos la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\,dx\,dy \tag{4}$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre dado por $n!P_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n$.

Notemos que $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. A partir del lema 9 se tiene

$$\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\,dx\,dy = (A_n + B_n\zeta(3))d_n^{-3}$$

para algunos $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$. Entonces, como el mínimo común múltiplo d_n tiende a infinito cuando n crece, eventualmente $A_n + B_n\zeta(3)$ sería entero.

Por otro lado, notemos que

$$-\frac{\log(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}dz.$$

Entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} P_n(x)P_n(y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dx\, dy\, dz.$$

Integraremos parcialmente por partes respecto a la variable x, escogiendo $du = P_n(x)$, $v = \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}$ obtenemos

$$\left[\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n(1-x^n))\frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}\right]_0^1 - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x^n))\frac{P_n(y)(-yz)}{(1-(1-xy)z)^2}\, dx\, dy\, dz.$$

El primer término se anula pues se deriva una cantidad menor al grado de x y $(1-x)$, tomando el valor cero cuando $x = 0$ y $x = 1$ respectivamente. De manera inductiva integramos parcialmente respecto a x una cantidad de $n-1$ veces más, obteniendo

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dx\, dy\, dz.$$

Ahora, consideremos $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ y las siguientes igualdades

$$(1-w)^n = \frac{(xyz)^n}{(1-(1-xy)z)^n}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{(1-(1-xy)z)} = \frac{(1-(1-xy)z}{xy}, \tag{6}$$

$$dz = \frac{-1}{1-(1-xy)w}(1-(1-xy)z)\, dw. \tag{7}$$

A través de la sustitución de la variable z con la nueva variable w, y las igualdades (5), (6) y (7) tenemos que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-w)^n(1-x)^n \frac{P_n(y)}{(1-(1-xy)w)}\, dx\, dy\, dw. \tag{8}$$

E integramos parcialmente respecto a y una cantidad de n veces

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\, dx\, dy\, dw.$$

A través de un cálculo podemos determinar el máximo de la función

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-(xy)w)},$$

para todo $0 \leq x, y, w \leq 1$. El valor es $(\sqrt{2}-1)^4$ y este se alcanza en $(w, x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$. Así que la integral (4) está acotada por

$$(\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}\, dx\, dy\, dw = (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy}\, dx\, dy = 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n},$$

donde la última igualdad está dada por el lema anterior. Finalmente, notemos que la integral (8) no toma el valor cero, así que

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| d_n^{-3} < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n},$$

y para n suficientemente grande tenemos que

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}d_n^3 < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}27^n.$$

Notemos que el producto $27(\sqrt{2}-1)^4 \approx 0.7948 < 0.8 = 4/5$, entonces

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| < \left(\frac{4}{5}\right)^n 2\zeta(3) \to 0,$$

lo cual es absurdo pues no hay enteros entre 0 y 1. □

6. Más allá

En la monografía hemos visto el comportamiento de los valores de la función dseta sobre los números pares y los negativos, sobre los que tenemos control absoluto, y el caso de $\zeta(3)$ del cuál sólo conocemos irracionalidad. ¿Y qué más? La verdad es que no mucho: por ejemplo, se desconoce si algún otro valor concreto de $\zeta(k)$ con $k > 3$ impar es irracional. La conjetura del período de Grothendieck (cf. [**1,** pág. 7]) daría como consecuencia el hecho de que los valores $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ son $\mathbb{Q}$-algebraicamente independientes [**1,** §5.7, pág. 10]; pero de momento se desconoce si siquiera alguno de ellos, exceptuando π, es trascendente.

Por otro lado, los trabajos de Rivoal [**7**] en los 2000's prueban que hay infinitos $\zeta(k)$ irracionales, con $k \geq 3$ impar. En el mismo artículo, Rivoal prueba que alguno de los números entre $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ es irracional; un par de meses más tarde, en el artículo de Zudilin [**10**], ésto fue refinado a que entre $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ y $\zeta(11)$ al menos uno de ellos es irracional. Probar que algún otro valor concreto de $\zeta(k)$ sea irracional, con $k > 3$ impar, sigue siendo un problema abierto.

Referencias

1. André, Y. *Galois theory, motives and transcendental numbers* 2008. doi:`10.48550/arXiv.0805.2569`.
2. Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory* (Springer-Verlag, 1976).
3. Baker, A. *A Concise Introduction to the Theory of Numbers* (Cambridge University Press, 1984).
4. Beukers, F. A Note on the Irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bulletin of the London Mathematical Society* **11,** 268-272. doi:`10.1112/blms/11.3.268` (1979).
5. Lang, S. *Complex Analysis* (Springer-Verlag, 1999).
6. Riemann, B. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. Trad. por Wilkins, D. R. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß* **2,** 2. `http://www.claymath.org/sites/default/files/ezeta.pdf` (1859).
7. Rivoal, T. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics* **331,** 267-270. doi:`10.1016/s0764-4442(00)01624-4` (2000).
8. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw Hill, 1976).
9. Weil, A. *Number theory. An approach through history, from Hammurapi to Legendre* (Birkhäuser Boston, 1906).
10. Zudilin, W. One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational. *Russian Mathematical Surveys* **56,** 774. doi:`10.1070/RM2001v056n04ABEH000427` (ago. de 2001).