Teoría de números – MAT2225 | Segundo semestre del 2024
Profesor: Héctor Pastén | Ayudante: Rocío Sepúlveda Manzo

Ayudantía 2

1. Técnicas de suma

A menudo los valores asintóticos de una suma parcial puede ser obtenida comparándose con integrales. Una fórmula de Euler entrega una expresión exacta para el error de la aproximación. En esta fórmula $[t]$ denota el entero más grande tal que $\leq t$.

Teorema 1.1 (Fórmula de sumatoria de Euler): *Si f tiene una derivada continua f' para algún $x > 1$. Entonces*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_1^x f(t)\,dt + \int_1^x (t-[t])f'(t)\,dt + f(x)([x]-x) - f(y)([y]-y).$$

Ejercicio 1: (a) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s})$, si $s > 0$, y $s \neq 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n\leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha)$ si $\alpha \geq 0$.

Ejercicio 2: Para cada $x \geq 1$ se tiene

$$\sum_{n\leq x} \sigma(n) = \frac{1}{2}\zeta(2)x^2 + O(x\log x).$$

2. Distribución de primos

Se define la siguiente función aritmética $\vartheta(x) := \displaystyle\sum_{p\leq x} \log p$, a ésta se le conoce como ***primera función de Chebyshev***.

Ejercicio 3: Para todo $n \geq 2$ se cumple que

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n,$$

y, por tanto, $\vartheta(x) \leq 2x \log 2$.

Ejercicio 4 (Teorema de Fermat sobre la ecuación de Pell): Si d es un entero libre de cuadrados, entonces la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ tiene una cantidad infinita de soluciones.

3. Problemas relacionados

Conjetura 1: Para todo $n \geq 1$ existe un primo entre n^2 y $(n+1)^2$.

Un número n se dice ***perfecto*** si es la suma de sus divisores impropios. Por ejemplo, el 6 es perfecto pues $6 = 1 + 2 + 3$. Podemos ver que n es perfecto si y solo si $\sigma(n) = 2n$.

Conjetura 2: No existen números perfectos impares.

Además,

Conjetura 3: Existen infinitos números pares perfectos.

Referencias

1. Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory* (Springer-Verlag, 1976).
2. Granville, A. *Number Theory Revealed: A Masterclass* (American Mathematical Society, 2019).
3. Hua, L. K. y Shiu, P. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).

Correo electrónico: `rseplveda@uc.cl`