Ayudantía 4

1. Fracciones continuas y ecuación de Pell

Ejercicio 1: Considere la ***ecuación de Markoff***

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \tag{1.1}$$

donde la solución trivial es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Demuestre lo siguiente

(a) Sea (a, b, c) una solución para (1.1). Entonces $(a, b, 3ab - c)$ también es solución.

(b) Cada solución positiva no trivial de (1,1) puede ser generado, empleando el inciso anterior, por $(1, 1, 1)$ como solución inicial.

Ejercicio 2: La fracción continua para el número e está dado por

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

Muestre que

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2 \log q}.$$

para todos los racionales p/q, $(q > 0)$, donde c es una constante positiva.

Ejercicio 3: La fracción continua para $\sqrt{6}$ es $[2, \overline{2, 4}]$, a partir de éste dato, encuentre una solución para la ecuación de Pell $x^2 - 6y^2 = 1$.

Ejercicio 4: Considere $u = a + b\sqrt{d}$ donde $a^2 - db^2 = 1$ con a y b enteros positivos. Para cada n entero no nulo, toda solución entera de $x^2 - dy^2 = n$ es $(x' + y'\sqrt{d})u^k$ donde $x'^2 - dy'^2 = n$, k entero, y

$$|x'| \leq \frac{\sqrt{|n|}\,(\sqrt{u} + 1/\sqrt{u})}{2} \qquad \text{y} \qquad |y'| \leq \frac{\sqrt{|n|}\,(\sqrt{u} + 1/\sqrt{u})}{2\sqrt{d}}. \tag{1.2}$$

Si $n > 0$ entonces consideramos $|y'| \leq \sqrt{n}(\sqrt{u} - 1/\sqrt{u})/(2\sqrt{d}) < \sqrt{nu}/(2\sqrt{d})$.

Ejercicio 5: Para una ecuación de Pell generalizada $x^2 - dy^2 = n$ con $n \neq 0$ existe un conjunto finito de soluciones tales que cada solución de Pell es múltiplo de alguna de éstas soluciones.

Ejercicio 6: Encuentre las soluciones enteras de $x^2 - 6y^2 = 3$.

Referencias

1. Baker, A. *A Concise Introduction to the Theory of Numbers* (Cambridge University Press, 1984).
2. Conrad, K. *Pell's equation II* https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/. [Online].
3. Hua, L. K. y Shiu, P. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).

Correo electrónico: rseplveda@uc.cl