Teoría de números – MAT2225 Segundo semestre del 2024
Profesor: Héctor Pastén Ayudante: Rocío Sepúlveda Manzo

Ayudantía 1

1. Divisibilidad

En $\mathbb{N}$, si a, b son elementos de $\mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, entonces b se dice *que divide a* a si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Se denotará como $b \mid a$.

Ejercicio 1: Sea n un entero positivo par y sea a, b enteros coprimos positivos. Encuentre a y b si $a + b \mid a^n + b^n$. (2002 Romanian Mathematical Olympiad)

Ejercicio 2: Pruebe que $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ no es un entero para $n > 1$.

Ejercicio 3: Un primo de Fermat es un primo de la forma $2^{2^n} + 1$. Muestre que, si $2^n + 1$ es un primo, entonces es de Fermat.

Ejercicio 4 (Propuesto): Sean a, b naturales tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un entero. Muestre que el máximo común divisor de a y b no es más grande que $\sqrt{a+b}$.

2. Funciones multiplicativas

Recuerde que una *función multiplicativa* f es una función aritmética no nula tal que $f(mn) = f(m)f(n)$ cuando $(m, n) = 1$. Se dirá que es *completamente multiplicativa* si $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo m, n.

Ejercicio 5: Muestre que μ, τ, σ son multiplicativas, sin embargo, ω no.

Ahora, definamos

$$\Omega(n) := \sum_{\substack{p \text{ primo},\ k \geq 1 \\ p^k \mid n}} = \#\{\text{distintas potencias de primos que dividen a } n\}$$

Por ejemplo, $\Omega(12) = \#\{2^1, 2^2, 3^1\} = 3$, o bien, $\Omega(27) = \{3^1, 3^2, 3^3\} = 3$.

Éste último nos sirve para definir una interesante función multiplicativa: la *función de Lioville* definido como $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ así que, por ejemplo, $\lambda(12) = (-1)^3 = -1$, véase GRANVILLE [3, §4.7].

Ejercicio 6: (a) Muestre que la función λ es completamente multiplicativa

(b) Pruebe que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un cuadrado,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, $\lambda^{-1}(n) = |\mu(n)|$ para todo n.

3. PROBLEMAS MENCIONADOS

El *problema de Frobenius* es el siguiente: Dado enteros positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ con $\gcd(x_1, \dots, x_n) = 1$, denotemos por $g(x_1, \dots, x_n)$ al número más grande que no se puede escribir como $g = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, donde cada $r_i \geq 0$. Un caso particular es el conocido *Chicken McNuggets Problem*.

Además, con las definiciones vistas anteriormente, se puede enunciar la siguiente conjetura:

Conjetura 1 (Chowla (1965)): $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \lambda(n+a_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(n+a_k) = 0$ para cada $k \geq 1$ y $0 \leq a_1 < \ldots < a_k$.

REFERENCIAS

1. ANDREESCU, T. y ANDRICA, D. *Number Theory: Structures, examples, and problems* (Birkhäuser Boston, Springer Science+Business Media, 2009).
2. APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory* (Springer-Verlag, 1976).
3. GRANVILLE, A. *Number Theory Revealed: A Masterclass* (American Mathematical Society, 2019).

Correo electrónico: `rseplveda@uc.cl`