Teoría de números – MAT2225 Segundo semestre del 2024
Profesor: Héctor Pastén Ayudante: Rocío Sepúlveda Manzo

Ayudantía 3

1. Fracciones continuas

El algoritmo de fracción continua realiza una correspondencia uno a uno entre los irracionales y los conjuntos de enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ con $a_1, a_2, \ldots$ positivos. También hace una correspondencia uno a uno entre los racionales θ y conjuntos finitos de enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ con $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ positivos con $a_n \geq 2$.

Para cualquier θ racional, con el algoritmo descrito en Baker [1], podemos reescribir θ de la siguiente forma

$$\theta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots \, \frac{1}{a_n}}}}.$$

La representación de θ como fracción continua suele denotarse como $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. en el caso de que θ sea irracional, entonces el algoritmo no terminaría y la notación que recibiría es $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Si θ fuese irracional y para algún m se tiene que $a_{m+n} = a_n$ para todo n suficientemente grande, entonces diremos que el irracional es ***periódico*** y lo denotaremos como

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{m+n-1}}].$$

Lema 1.1: *θ es un irracional cuadrático si y solo si es periódico.*

Ejercicio 1: Escriba $\sqrt{2}$ como fracción continua y reescriba $[\bar{1}]$ de la forma $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Ejercicio 2: Sea $n > 0$ entero tal que -1 es residuo cuadrático módulo n (i.e. $-1 \equiv a^2 \mod n$ para algún a). Entonces n es suma de cuadrados.

2. Aproximación Diofantina

Ejercicio 3: Muestre que la suma $a^{-b} + a^{-b^2} + a^{-b^3} + \dots$ es trascedental para cualquier $a \geq 2$, y $b \geq 3$.

Ejercicio 4: Pruebe que π es irracional.

Referencias

1. Baker, A. *A Concise Introduction to the Theory of Numbers* (Cambridge University Press, 1984).
2. Hua, L. K. y Shiu, P. *Introduction to Number Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982).
3. OEIS Collaboration, T. *The on-line encyclopedia of integer sequences* https://www.oeis.org. 2024.

Correo electrónico: rseplveda@uc.cl