Teorema de Brauer para caracteres inducidos

Patricio Pérez
Apuntes de Rocío Belén Sepúlveda Manzo

Resumen. El objetivo de esta exposición es comprender el Teorema de Brauer sobre caracteres inducidos. Para lograrlo, iniciaremos por recordar el concepto de representación inducida. Posteriormente, abordaremos el Teorema de Artin, un resultado inicial en la ruta hacia el Teorema de Brauer. Finalmente, concluiremos examinando el teorema central de la sesión, que describe el anillo de caracteres virtuales en relación con los caracteres inducidos por subgrupos "elementales".

1. Introducción

Dado un grupo G y un subgrupo H, podemos asociar a cada representación de G una representación de H dada por la restricción; más impresionante aún, a cada representación de H podemos asociar una representación de G llamada *representación inducida*. Esto nos dará una importante conexión entre las representaciones de grupos finitos y representaciones de sus subgrupos. Esta base nos permitirá obtener resultados aritméticos relacionados a las funciones L de Artin y las funciones L de Dedekind más adelante.

Una función a valores complejos $f : G \to \mathbb{C}$ se dice *función de clase* si cumple $f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\tau)$, denotaremos al conjunto de funciones de clase como $\mathrm{Conj}(G;\mathbb{C})$ y éste es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial junto a un producto interno

$$(\psi, \varphi)_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g)\overline{\varphi(g)}.$$

2. Representación inducida

Sea G un grupo, H un subgrupo y $\varphi \in \mathrm{Conj}(G;\mathbb{C})$, entonces la restricción $\varphi|_H$ es constante bajo clases de conjugación de H, y no es difícil chequear que el mapa de restricción define una transformación lineal

$$|_H : \mathrm{Conj}(G;\mathbb{C}) \to \mathrm{Conj}(H;\mathbb{C}).$$

Luego existe una única transformación adjunta

$$^* : \mathrm{Conj}(H;\mathbb{C}) \to \mathrm{Conj}(G;\mathbb{C})$$

tal que, si $\theta \in \mathrm{Conj}(H;\mathbb{C})$, entonces $\theta \mapsto \theta^*$ satisface lo siguiente para cada $\varphi \in \mathrm{Conj}(G;\mathbb{C})$:

$$(\theta, \varphi|_H)_H = (\theta^*, \varphi)_G.$$

Esta última condición se le denomina *reciprocidad de Frobenius.*

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, una representación lineal de G, sea W la subrepresentación estable por $\rho|_H$, y sea $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ la representación de H sobre W. Dado $g \in G$ se define el

Fecha: 14 de febrero de 2024.

espacio vectorial $W_\sigma := \rho(g) \cdot W$ el cual sólo depende de la clase lateral izquierda $gH = [\sigma]$. Así la subrepresentación $V' := \sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ es estable por G.

Diremos que la representación ρ de G en V está *inducida* por la representación θ de H en W si V es igual a $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ y si ésta suma es directa (esto es $V = \oplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$).

Ejemplo. Considere la representación regular V de G. El espacio vectorial V tiene como base $(e_t)_{t \in G}$ tal que $s \cdot e_t = e_{st}$ para $s, t \in G$. Sea W el subespacio de V cuya base es $(e_t)_{t \in H}$. La representación θ de H sobre W es la *representación regular* de H y es claro que ρ está inducida por θ. En particular, las representaciones regulares están inducidas por la representación trivial del subgrupo trivial.

Proposición 1. *Sea (V, ρ) el inducido de (W, θ). Luego*

$$\operatorname{Hom}_H(W; \operatorname{Res}_H^G V) = \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G; V).$$

Teorema 2. *Sea $(W; \theta)$ una representación de H. Entonces existe la representación inducida, ésta es única y se denota como $\operatorname{Ind}_H^G \theta$.*

2.1. Caracteres inducidos

Proposición 3. *Sea $(W; \theta)$ una representación de H. Luego, para cada $s \in G$, tenemos*

$$\chi_{\operatorname{Ind}_H^G(\theta)}(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1} st}} \chi_\theta(t^{-1} st).$$

Definición 4. Se define el siguiente mapa

$$\operatorname{Ind}_H^G : \operatorname{Conj}(H; \mathbb{C}) \to \operatorname{Conj}(G; \mathbb{C}), \qquad f \mapsto \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1} st \in H}} f(t^{-1} st).$$

Luego $\operatorname{Ind}_H^G(f)$ es el *inducido* de f. Se puede denotar como $\operatorname{Ind}(f)$.

Dado que los caracteres están en correspondencia con las respresentaciones, asociado a un caracter siempre tenemos un inducido; éste, sin embargo, puede hacerse más explícito:

La adjunción descrita al principio ahora se escribe como:

Teorema 5 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Sea (V, ρ) el inducido de (W, θ). Luego*

$$(\psi, \operatorname{Res}_H^G \varphi)_H = (\operatorname{Ind}_H^G \psi, \varphi)_G$$

2.2. Caracteres virtuales

Un *caracter virtual* $\varphi := \sum n_i \varphi_i$ de V es una combinación lineal sobre $\mathbb{Z}$ de caracteres irreducibles φ_i de V. Se denotará $R(G)$ como el conjunto de caracteres virtuales, no es difícil mostrar que éste es un anillo con el producto $\chi_\rho \cdot \chi_\theta := \chi_{\rho \otimes \theta}$.

Observación. Recuérdese que los caracteres irreducibles formaban una $\mathbb{C}$-base de las funciones de clase (cfr. [**1**, pág. 274]), por tanto,

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(G) = \operatorname{Conj}(G; \mathbb{C}).$$

Si H es un subgrupo de G, la operación *restricción* define un homomorfismo de anillos $R(G) \to R(H)$, denotado como Res_H^G ó Res. Similarmente, la operación de inducción define un homomorfismo de grupos abelianos $R(H) \to R(G)$ (¿por qué no de anillos?), denotado por Ind_H^G ó Ind. Los homomorfismos Ind y Res son adjuntos entre sí con respecto a las formas bilineales (ver Teorema 5).

Teorema 6 (Artin). *Sea $\mathscr{X}$ una familia de subgrupos cíclicos de un grupo finito G. Sea $\mathrm{Ind} : \bigoplus_{H \in X} R(H) \to R(G)$ el homomorfismo definido por la familia de Ind_H^G, con $H \in \mathscr{X}$. Entonces $\sum_{H \in \mathscr{X}} \mathrm{Ind}_H^G(R(H))$ tiene índice finito en $R(G)$. En particular, dado $\chi \in R(G)$, existe $d \geq 1$ tal que $d\chi \in \sum_{H \in \mathscr{X}} \mathrm{Ind}_H^G(R(H))$.*

Demostración. Cfr. [**2**, pág. 70]. □

Ahora, definamos unas herramientas que nos permiten enunciar un teorema más específico que el anterior.

Sea p primo. Decimos que un grupo H es p-elemental si $H \cong C \oplus P$ donde C es algún grupo cíclico de orden coprimo con p y P es un p-grupo (donde todo elemento tiene orden p^α).

Teorema 7. *Sea $\mathscr{Y}(p)$ la familia de subgrupos p-elementales de un grupo finito G. Sea $V_p := \sum_{H \in \mathscr{Y}(p)} \mathrm{Ind}_H^G(R(H))$. Entonces V_p tiene índice finito en $R(G)$ y coprimo con p. De hecho, si $|G| = p^n l$, con $(p, l) = 1$. Entonces $l \in V_p$.*

Diremos que un subgrupo de G es *elemental* si es p-elemental para algún p primo.

Teorema 8 (Brauer). *Cada caracter de G es una combinación lineal con coeficientes enteros de caracteres inducidos desde caracteres de subgrupos elementales.*

Referencias

1. Jacobson, N. *Basic Algebra* (W. H Freeman and Company, 1980).
2. Serre, J.-P. *Linear Representations of Finite Groups* trad. por Scott, L. L. (Springer-Verlag, 1977).

Correo electrónico: `rseplveda@uc.cl`