APUNTES: FUNCIONES L DE ARTIN

ROCÍO BELÉN SEPÚLVEDA MANZO

RESUMEN. En esta charla nos enfocaremos en las funciones L de Artin, analizando ejemplos y su convergencia, aplicando lo aprendido de la charla anterior de funciones L de Dirichlet para el Seminario de representaciones de Galois.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois y algebraica. Considere p un primo racional y el ideal primo tales que $p\mathcal{O}_F \subseteq \mathfrak{p}$, sea $D_\mathfrak{p}$ el grupo de descomposición y $I_\mathfrak{p}$ el grupo de inercia. Luego, se tiene la siguiente secuencia exacta

$$1 \to I_\mathfrak{p} \to D_\mathfrak{p} \to \mathrm{Gal}((\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})/\mathbb{F}_p) \to 1.$$

El grupo $Gal((\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})/\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ es cíclico con generador $x \mapsto x^{\mathbf{N}(p)}$ donde $\mathbf{N}(p) = |N_{F/\mathbb{Q}}(p)|$. Podemos escoger un elemento $\sigma\mathfrak{p} \in D_\mathfrak{p}$ cuya imagen en $\mathrm{Gal}((\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})/\mathbb{F}_p)$ es el generador, a éste lo llamaremos Frobenius y sus propiedades fueron vistas en la charla 4 de Elementos de Frobenius (ver página del seminario).

Proposición 1. *Considere el polinomio característico* $\det(\mathrm{Id} - \mathrm{Frob}_\mathfrak{p} t; V^{I_\mathfrak{p}})$*. Luego éste sólo depende del primo racional* p *y no del ideal* $\mathfrak{p}$

Demostración. Se deduce del hecho de que el polinomio característico es independiende de la conjugación. $\square$

Definición 2. Sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión finita de Galois con $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de G sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial V y $\chi : G \to \mathrm{GL}(V)$ su caracter. Luego, se define la *función L de Artin* como

$$L(F/\mathbb{Q}, \chi, s) = \prod_p \frac{1}{\det(Id - \chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})\mathbf{N}_\mathfrak{p}^{-s}; V^{I_\mathfrak{p}})},$$

donde p recorre todos los primos en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo. Sea $F = \mathbb{Q}(i)$, donde $i = \sqrt{-1}$, y sea $\chi : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle \to \mathrm{GL}_1(V)$, el único caracter no trivial, el cual está dado por $\chi(\sigma) = -1$. Como un primo racional p impar es completamente ramificado en $\mathbb{Q}(i)$ syss -1 es un residuo cuadrático módulo p, y 2 es el único primo ramificado, entonces

$$L(F/\mathbb{Q}, \chi., s) = \prod_{p \neq 2} \frac{1}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right) p^{-s}}.$$

Fecha: 31 de octubre de 2023.

Como

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

por reciprocidad cuadrática (o criterio de Euler), éste es exactamente a la función L de Dirichlet

$$\frac{1}{1+3^{-s}}\frac{1}{1+5^{-s}}\frac{1}{1+7^{-s}}\frac{1}{1+11^{-s}}\cdots = 1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}-\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\cdots \quad (1)$$
$$= L^{Dirichlet}(\chi', s), \quad (2)$$

donde $\chi' : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{GL}_1(V)$ es el único caracter no trivial de Dirichlet, el cual está definida por $(-1 \mod 4) \mapsto -1$.

Ejemplo. Si $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ donde $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, sea $\chi : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ el único caracter no trivial tal que $\sigma \mapsto -1$. Sea Δ_d el discriminante de $F/\mathbb{Q}$, es decir,

$$\Delta_d = \begin{cases} d, & d \equiv 1 \quad \mod 4, \\ 4d, & d \equiv 2,\ 3 \quad \mod 4. \end{cases}$$

Luego, $Gal(F/\mathbb{Q}) \overset{\varphi}{\cong} \{\pm 1\}$. Como la extensión es abeliana, existe un único frobenius Frob_p y, por lo anterior, $\varphi(\mathrm{Frob}_p) = \left(\frac{d}{p}\right)$ para p primo y ocupando con la notación del *símbolo de Kronecker*. Luego, tenemos la siguiente función L de Artin:

$$L(F/\mathbb{Q}, \chi, s) = \prod_{p \nmid \Delta_d} \frac{1}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}} = \sum_{(n,\Delta_d)=1} \left(\frac{d}{p}\right) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_d}{n}\right) n^{-s} = L^{Dirichlet}(\chi', s).$$

Donde χ' es el caracter de Dirichlet $\chi : n \mapsto \left(\frac{\Delta_d}{n}\right)$ (véase Cox [1, pág. 14] lemma 1.14, donde se muestra que χ' efectivamente es un caracter de Dirichlet).

Ejemplo. Si $F = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, con $N \geq 1$. Luego $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N/\mathbb{Q})) \overset{\varphi}{\cong} (Z/N\mathbb{Z})^\times$. Considere unn caracter primitivo arbitrario $\chi' : (Z/N\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ tal que establece a $\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N/\mathbb{Q})) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ como $\chi := \chi' \circ \varphi$. Como la extensión es abeliana, existe un único frobenius Frob_p, luego $\varphi(\mathrm{Frob}_p) = p \mod N$. Así que la función L de Artin es:

$$L(F/\mathbb{Q}, \chi, s) = \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1-\chi'(p \mod Np^{-s})} = L^{Dirichlet}(\chi', s)$$

Lema 3. *Sea F un campo de números Galois y algebraica y sea $\chi : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \to GL_1(\mathbb{C})$. Luego, la función L de Artin converge a una función analítica en $\Re(s) \geq 1+\varepsilon$.*

Demostración. Basta demostrarlo para el producto

$$\prod_{p \nmid \Delta_{F/\mathbb{Q}}} (1-\chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})\mathbf{N}(\mathfrak{p})^{-s})$$

Fijemos s con $\Re(s) \geq 1+\varepsilon$. Entonces

$$c_{\mathfrak{p}} := \left|\mathbf{N}^{-\Re(s)}\right| \leq p^{-f(1+\varepsilon)}.$$

Usando el hecho de que hay a lo más $[F:\mathbb{Q}]$ primos $\mathfrak{p}$ distintos de F tales que $\mathfrak{p} \mid p$, tenemos

$$\sum_{\mathfrak{p}} c_{\mathfrak{p}} \leq [F:\mathbb{Q}] \sum_{p} p^{-(1+\varepsilon)},$$

donde la segunda suma es sobre todos los primos racionales p, ésta suma converge cuando $\varepsilon > 0$ (está acotado por $\zeta_{\mathbb{Q}}(1+\varepsilon)$), y como $|\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}| = 1$ para cada primo $\mathfrak{p}$ no ramificado en F, podemos concluir la convergencia uniforme a la función analítica por [Stein y Shakarchi [2, pág. 141] prop. 5.3.2] □

Referencias

1. Cox, D. A. *Primes of the form $x^2 + ny^2$: Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication* (AMS Chelsea Publishing, 2022).
2. Stein, E. M. y Shakarchi, R. *Complex Analysis* (Princeton University Press, 2003).

Correo electrónico: `rseplveda@uc.cl`