Seminario de Representaciones de Galois
PUC Chile, 2^{do} semestre de 2023

PROPIEDADES ANALÍTICAS DE FUNCIONES L DE ARTIN

HÉCTOR PASTÉN

1. Teoría de grupos

Corolario del teorema de Artin:

Teorema 1.1 (Artin). *Sea G grupo finito y χ un caracter de G. Existen subgrupos H_j de G, caracteres χ_j de cada H_j con dimensión 1 (i.e. $\chi_j(e) = 1$), y números racionales q_j tales que*

$$\chi = \sum_j q_j \cdot \operatorname{Ind}_{H_j}^G(\chi_j).$$

Proof. Por Artin podemos tomar los H_j cíclicos pero a priori no sabemos si los χ_j son de dimensión 1. Como Ind es lineal y los caracteres irreducibles de grupos abelianos son de dimensión 1 obtenemos lo deseado. □

Con una idea similar pero con más trabajo, el teorema de Brauer da

Teorema 1.2 (Brauer). *Sea G grupo finito y χ un caracter de G. Existen subgrupos H_j de G, caracteres χ_j de cada H_j con dimensión 1 (i.e. $\chi_j(e) = 1$), y números enteros n_j tales que*

$$\chi = \sum_j n_j \cdot \operatorname{Ind}_{H_j}^G(\chi_j).$$

2. Funciones L de Hecke

Hecke definió una noción de caracter ψ distinta, y asociados a ellos una función L que escribimos $L_h(s, \psi)$. Él demostró que estas funciones L coinciden con las de ciertas formas modulares (funciones theta) y de esto se sigue:

Teorema 2.1 (Hecke). *Sea ψ un caracter de Hecke. Entonces la función $L_h(s, \psi)$ tiene extensión analítica a todo $\mathbb{C}$ salvo un polo en $s = 1$ cuando ψ es trivial. Además, $L_h(1, \psi) \neq 0$.*

Esto generaliza las propiedades básicas de funciones L de Dirichlet.
Artin demostro un resultado muy importante:

Teorema 2.2 (Ley de reciprocidad de Artin). *Si χ es el caracter de una representación de Galois $\rho : \operatorname{Gal}(L/K) \to \mathbb{C}^\times$ de dimensión 1, entonces existe un caracter de Hecke ψ tal que*

$$L(s, \chi, L/K) = L_h(s, \psi).$$

En particular, $L(s, \chi, L/K)$ tiene extensión analítica salvo un polo en $s = 1$ cuando ρ es trivial, y $L(1, \chi, L/K) \neq 0$.

Date: November 24, 2023.

3. Función L de caracteres virtuales

Un caracter virtual de un grupo G es una combinación lineal entera de caracteres de G. Si $\chi = \sum_j n_j \chi_j$ es un caracter virtual de $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ con χ_j caracteres irreducibles distintos, entonces los n_j son únicos y se define

$$L(s,\chi,L/K) = \prod_j L(s,\chi_j,L/K)^{n_j}.$$

Propiedad básica que se sigue del formalismo de Artin: Si los $n_j \geq 0$ (o sea, χ es un caracter) entonces la definición anterior coincide con la función L de Artin clásica $L(s,\chi,L/K)$.

4. Aplicaciones a las funciones L de Artin

Recordemos que las funciones L de Artin solo convergen en un semiplano de $\mathbb{C}$. Artin conjeturó lo siguiente

Conjetura 4.1. *Sea $L(s,\chi,L/K)$ una función L de Artin. Entonces ella admite continuación analítica a todo $\mathbb{C}$, salvo quizás un polo en $s=1$.*

Usando la teoría anterior, Brauer demostró:

Teorema 4.2 (Artin–Brauer)**.** *Sea $L(s,\chi,L/K)$ una función L de Artin. Entonces ella admite continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$.*

5. El orden del polo en $s=1$

Recordamos la reciprocidad de Frobenius:

$$\langle \chi, \mathrm{Ind}\,_H^G \psi\rangle_G = \langle \mathrm{Res}\,_H^G \chi, \psi\rangle_H, \quad H \leq G.$$

Usando la teoría anterior se obtiene un resultado muy útil en una serie de problemas aritméticos como por ejemplo la conjetura de Tate:

Teorema 5.1. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de Artin donde $G = \mathrm{Gal}\,(L/K)$. Entonces*

$$\dim V^G = -\mathrm{ord}_{s=1} L(s,\rho,L/K).$$

Departamento de Matemáticas, PUC Chile
Email address, H. Pasten: `hector.pasten@mat.uc.cl`