Apuntes: Funciones L de Dirichlet

Rocío Belén Sepúlveda Manzo

Resumen. Este estudio se enfoca en las funciones L de Dirichlet, analizando su convergencia, propiedades y su relación con la teoría de caracteres previamente discutida.

Estas notas se basan fuertemente de los apuntes del ramo de Teoría de Números MPG3402 dictado por el profesor Héctor Pastén el segundo semestre del 2022.

1. Series de Dirichlet

Una *serie de Dirichlet* es una serie

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

donde s es una variable compleja. A partir de esta se infieren propiedades analíticas que nos permite definir funciones L más adelante.

Lema 1. *Sea $D(s)$ una serie de Dirichlet. Entonces existen σ_c, $\sigma_a \in [-\infty, \infty]$ converge (absolutamente) para $\Re(s) > \sigma_c$ (resp. $\Re(s) > \sigma_a$), y no converge (resp.absolutamente) para $\Re(s) < \sigma_c$ ($\Re(s) < \sigma_a$). Además, $D(s)$ es holomorfa en $\Re(s) > \sigma_c$.*

Observación. Se denota como σ_c como la abscisa de convergencia y σ_a como la convergencia absoluta y si $a_n \geq 0$, para cada n entonces $D(s)$ cumple $\sigma_a = \sigma_c$.

Lema 2. *Suponga que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n \leq x} a_n = O(x^B)$. Entonces $D(s)$ converge para $\Re(s) > B$ y en esta región se puede expresar como*

$$D(s) = s \int_1^{\infty} S(t)(t^s + 1)^{-1} dt, \Re(s) > B.$$

Donde $S(t) = \sum_{n \leq x} a_n$.

Demostración. Usando suma por partes tenemos

$$\sum_{n \leq x} a_n \cdot n^{-1} = \frac{S(x)}{x^s} + s \int_1^{\infty} S(t) \frac{dt}{t^{s+1}}$$

Como $S(x) = O(x^B)$, $D(s)$ converge para $\Re(s) > B$. Además, cuando $\Re(s) > B$ tomamos el límite $x \to \infty$ para obtener la fórmula deseada. $\square$

Lema 3. *Suponga que existen $\rho \in \mathbb{C}^{\times}$ y $b < 1$ tales que $\sum_{n \leq x} a_n = \rho x + O(x^b)$. Entonces $\sigma_c = 1$ y tenemos la expresión*

$$D(s) = s \int_1^{\infty} S(t)(t^s + 1)^{-1} dt, \Re(s) > 1.$$

Fecha: 19 de octubre de 2023.

Además, $D(s)$ admite una continuación analítica a la región $\Re(s) > b$ salvo el punto $s = 1$ donde tiene un polo simple de residuo ρ.

Demostración. Note que $S(x) = \rho x + O(x^b) = O(x)$, por tanto, con lema anterior (2) y $B = 1$, se tiene que $\sigma_c = 1$. Luego, usando el hecho que $S(x) = \rho x + O(x^b)$ con $b < 1$ se obtiene

$$D(s) = \rho s \int_1^\infty \frac{dt}{t^s} + s \int_1^\infty (S(t) - \rho t) \frac{dt}{t^{s+1}}.$$

La segunda integral converge a una función holomorfa en la región $\Re(s) > b$ pues $S(t) - \rho t$ es continua por tramos y es igual a $O(x^b)$. Por otro lado, la primera integral converge a una función holomorfa para $s < 1$ y cumple

$$\rho s \int_1^\infty \frac{dt}{t^s} = \frac{\rho s}{s-1}, \quad \Re(s) > 1.$$

Así que hay un polo en $s = 1$ simple de residuo ρ. $\square$

Ejemplo. Considere sucesión cuyo enésimo término es $a_n = 1$, esto nos da la función dseta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Aquí se tiene $S(x) = x + O(1)$, y aplicando el lema anterior (3) con $\rho = 1$ y $b = 0$, tenemos que $\zeta(s)$ converge para $\Re(s) > 1$ y admite una continuación analítica en la región $\Re(s) > b$ salvo el punto $s = 1$ donde tiene un polo simple de residuo $\rho = 1$ en $s_0 = 1$.

Lema 4 (Producto de Euler)**.** *Suponga que la función aritmética $n \mapsto a_n$ es completamente multiplicativa no idénticamente nula. Para $\Re(s) > \sigma_a$, la serie $D(s)$ admite la expresión en producto sobre números primos*

$$D(s) = \prod_p \frac{1}{a - a_p p^{-s}}, \quad \Re(s) > \sigma_a.$$

2. Funciones L de Dirichlet

Sea $N \in \mathbb{N}$ un *caracter de Dirichlet* módulo N es un caracter

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Éste es llamado *primitivo* si no surge como la composición

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\chi'} S^1$$

de un caracter de Dirichlet $\chi' \mod N'$ para cualquier divisor propio $N' \mid N$. En el caso general el gcd de todos los divisores se le denomina *conductor* $\mathfrak{f}$ de χ. Así que siempre χ se induce desde un caracter primitivo $\chi' \mod \mathfrak{f}$.

Dado χ definimos la función completamente multiplicativa $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ por

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n \mod N) & (n, N) = 1, \\ 0 & (n, N) \neq 1. \end{cases}$$

A ésta función se le denomina también caracter de Dirichlet. El *caracter principal* es χ_0 mód n y $\chi(n) = 1$ si $(n, N) = 1$ Y $\chi(n) = 0$ si $(n, N) \neq 1$.

Ejemplo. Considere $N = 5$. Luego hay $\varphi(5) = 4$ caracteres de Dirichlet, como los caracteres son completamente multiplicativas, se tiene que $\chi(n)^{\varphi(n)} = 1$, por tanto, los valores posibles son ± 1 y $\pm i$ cuando $(n, 5) = 1$. También, $\chi(2)\chi(3) = \chi(6) = \chi(1) = 1$ así que $\chi(2)$ y $\chi(3)$ son recíprocas; y como $\chi(4) = \chi(2)^2$, tenemos toda la información para obtener la tabla de $N = 5$.

n	1	2	3	4	5
χ_0	1	1	1	1	0
χ_1	1	-1	-1	1	0
χ_2	1	i	$-i$	-1	0
χ_3	1	$-i$	i	-1	0

Lema 5. *Si $\chi \neq \chi_0$ entonces para cada x se tiene* $\left|\sum_{n \le x} \chi(n)\right| < \varphi(N) = O_N(1)$.

Demostración. Por el primer teorema de ortogonalidad, para cualquier a se tiene:

$$\sum_{n=a+1}^{a+m} \chi(n)\overline{\chi_0(n)} = 0$$

Así que $\sum_{n \le x} \chi(n) = \sum_{N\lfloor x/N \rfloor < n \le x} \chi(n)$ y se concluye por desigualdad triangular. □

Definición 6. Dado un caracter de Dirichlet $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1$, se define

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^2,$$

donde s es una variable compleja con $\Re(s) > 1$. En particular, para el caracter principal χ_0, obtenemos la función dseta de Riemann.

Teorema 7. *Sea χ un caracter de Dirichlet módulo N. La serie $L(\chi, s)$ tiene $\sigma_a = 1$, y para $\Re(s) > 1$ admite el producto de euler:*

$$L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}, \quad \Re(s) > 1.$$

Además,

(i) *Si $\chi = \chi_0$, entonces σ_c y $L(\chi, s)$ admite continuación analítica en $\Re(s) > 0$ salvo en $s = 1$ donde tiene un polo simple de residuo $\phi(N)/N$. Además,*

$$L(\chi_0, s) = \zeta(s) \prod_{p|N} (1 - p^{-s}), \quad \Re(s) > 1.$$

(ii) *Si $\chi \neq \chi_0$ entonces $\sigma_c = 0$. Así, $L(\chi, s)$ converge a una función analítica en $\Re(s) > 0$.*

Demostración. Para la primera parte de (i), tenemos que $\sum_{n \le x} \chi_0(n) = (\varphi(N)/N)x + O(1)$, por tanto, por el lema (3), tenemos lo pedido. Para la segunda parte de (i), notemos que $\chi_0(n) \ge 0$ para cada n, así que, $\sigma_a = 1$. Como χ es completamente multiplicativa, para $\Re(s) > \sigma_a$, se tiene

$$L(\chi_0, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi_0(p)p^{-s}} = \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s) \prod_{p|N} (1 - p^{-s}).$$

Para la parte (ii), si $\chi \neq \chi_0$ por el lema (5) y lema (2), con $B = 0$, se tiene $\sigma_c \leq 0$. Además, $L(\chi, s)$ es analítica para $\Re(s) > \sigma_c$. Finalmente, $\sigma_c \geq 0$ porque $|\chi(n)/n^0| = \chi_0(n)$ no converge a 0.

$\square$

Correo electrónico: `rseplveda@uc.cl`