Quiz 4-4 参考答案

1. (1) The area of the triangle on the plane $\mathbf{R}^2$ with the vertices $(2,1),(3,4),(0,5)$ is ________.
   (2) Let $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ be $n\times n$ matrices, and $|\boldsymbol{A}|=-2$, $|\boldsymbol{B}|=-3$, and $\boldsymbol{A}^*$ is the adjoint matrix (伴随矩阵) of $\boldsymbol{A}$, then $|2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^*|=$________.
   (3) A matrix $\boldsymbol{A}$ is diagonalizable if and only if it is a normal matrix. (   )
   (4) A matrix $\boldsymbol{A}$ is invertible if and only if it has no zero eigenvalue. (   )
   (5) If $\boldsymbol{A}$ is a 3×3 matrix, and none of $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I},5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$ is invertible, then $\boldsymbol{A}$ is diagonalizable. (   )

(1) 由三个顶点可以得到向量：$(1,3)^\top,(-2,4)^\top$，则有面积为$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5$。

(2) $|2B^{-1}A^*|=2^n|B^{-1}||A^*|=2^n\frac{1}{|B|}|A|^{n-1}=2^n\frac{1}{-3}(-2)^{n-1}=\frac{(-1)^n2^{2n-1}}{3}$。

(3) F

反例：$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。$A$有两个不同特征值$0,1$，因而$A$可对角化。

而$AA^\top=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$A^\top A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$。

(4) T

A可逆当且仅当A的行列式不等于0。由于A的行列式等于特征值的乘积，则A可逆当且仅当A的特征值全不等于0。

(5) T

设A的特征值为λ，则$A-I,A+2I,5A-3I$的特征值为$\lambda-1,\lambda+2,5\lambda-3$。由于$A-I,A+2I,5A-3I$均不可逆，因而$\lambda-1=0,\lambda+2=0,5\lambda-3=0$，则有$A$的特征值为$\lambda=1,-2,3/5$。因而$A$有三个不同的特征值，因而$A$可逆。

2. Suppose that a 3×3 real symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ has the eigenvalues $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$. The eigenvectors corresponding to λ_1,λ_2 are $\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$. Find the matrix $\boldsymbol{A}$.

解：设$\lambda_3=0$的特征向量为p_3。由于A是对称矩阵，因而有

$$\begin{cases} p_1^\top p_3 = 0, \\ p_2^\top p_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} p_3 = 0 \Rightarrow p_3 = (2,-2,1)^\top.$$

则有

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于$P^{-1}AP=\Lambda$，则有

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Find an orthogonal diagonalizing matrix for the following matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

解：

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

则有特征值为1, 1, 10.

当$\lambda=1$时：

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当$\lambda=10$时：

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

对ξ_1,ξ_2做正交化如下：

$$\tilde{\xi_2}=\xi_2-\frac{\xi_2^\top\xi_1}{\xi_1^\top\xi_1}\xi_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}.$$

再对$\xi_1,\tilde{\xi_2},\xi_3$做单位化

$$q_1=\frac{\xi_1}{\xi_1^\top\xi_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{\tilde{\xi_2}}{\tilde{\xi_2}^\top\tilde{\xi_2}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix},\quad q_3=\frac{\xi_3}{\xi_3^\top\xi_3}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}.$$

则对矩阵A做对角化的正交矩阵Q为：

$$Q=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -2/3\\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3\end{bmatrix}.$$

4. Find a unitary diagonalizing matrix for the following matrix:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -2i & 1\end{bmatrix}.$$

解：解：

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2i\\ -2i & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-4.$$

则特征值为$(1-\sqrt{17})/2$, $(1+\sqrt{17})/2$

当$\lambda=(1-\sqrt{17})/2$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}-(1-\sqrt{17})/2 & 2i\\ -2i & (1+\sqrt{17})/2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1-\sqrt{17} & -4i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}4i\\ 1-\sqrt{17}\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=(1+\sqrt{17})/2$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}-(1+\sqrt{17})/2 & 2i\\ -2i & (1-\sqrt{17})/2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1+\sqrt{17} & -4i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}4i\\ 1+\sqrt{17}\end{bmatrix}.$$

再对ξ_1,ξ_2做单位化

$$q_1=\frac{\xi_1}{\xi_1^H\xi_1}=\frac{1}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\begin{bmatrix}4i\\ 1-\sqrt{17}\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{\xi_2}{\xi_2^H\xi_2}=\frac{1}{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\begin{bmatrix}4i\\ 1+\sqrt{17}\end{bmatrix}.$$

则对矩阵A做对角化的酉矩阵Q为：

$$Q=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\begin{bmatrix} \frac{4i}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} & \frac{4i}{\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} & \frac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \end{bmatrix}.$$

5. Suppose the determinant $\begin{vmatrix} a & -5 & 8 \\ 0 & a+1 & 8 \\ 0 & 3a+3 & 25 \end{vmatrix}=0$. The 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ has three eigenvalues $1,-1,0$, with the corresponding eigenvectors $\boldsymbol{p}_1=(1,2a,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2=(a,a+3,a+2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_3=(a-2,-1,a+1)^{\mathrm{T}}$. Try to determine the parameter a, and find the matrix $\boldsymbol{A}$.

解：(1)

$$\begin{vmatrix} a & -5 & 8 \\ 0 & a+1 & 8 \\ 0 & 3a+3 & 25 \end{vmatrix}=a(a+1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1.$$

由于p_1,p_2,p_3对应的特征值不同，因而p_1,p_2,p_3线性无关。当$a=-1$时，

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

此时p_1,p_2,p_3线性相关，因而$a\neq -1$，则有$a=0$。此时有：

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

令

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

有

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -6 & 8 \end{bmatrix}.$$