Quiz 4-2 参考答案

1. (1) Let $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$, and $\boldsymbol{A}^{*}$ is the adjoint matrix (伴随矩阵) of $\boldsymbol{A}$, then $(2\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=$________.

   (2) The area of the triangle on the plane $\mathbf{R}^2$ with the vertices $(-1,-1),(4,3),(0,2)$ is ________.

   (3) Let $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ be two column vectors in $\mathbf{R}^4$, and $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=k$. List all the four eigenvalues of the matrix $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$:__________________.

   (4) A matrix $\boldsymbol{A}$ is diagonalizable if and only if it has no zero eigenvalue. (   )

   (5) A matrix $\boldsymbol{A}$ is diagonalizable if and only if $\boldsymbol{A}^2$ is diagonalizable. (   )

(1) $(2A^*)^{-1}=(2|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{2|A|}A$。又有$A=(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$，

则有$(2A^*)^{-1}=\frac{1}{2|A|}A=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$。

(2)由三个顶点可以得到向量：$(5,4)^\top,(1,3)^\top$，则有面积为$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5&1\\4&3\end{vmatrix}=11/2$。

(3) $0,0,0,k$。

$$|\lambda I_4-A|=|\lambda I_4-\alpha\beta^\top|=\lambda^3|\lambda I_1-\beta^\top\alpha|=\lambda^3(\lambda-k),$$

则有特征值为$0,0,0,k$。

(4) F

反例：$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$。$A$有两个非零特征值$1,1$，但$A$不可对角化。

(5) F

反例：$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$不可对角化，但$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$是对角矩阵。

2. Suppose $\boldsymbol{A}$ is similar to $\boldsymbol{B}$, and

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

(1) Find x and y. (2) Find an invertible matrix $\boldsymbol{P}$, such that $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ is diagonal.

解：

(1)

$$\det(A)=-2,\ \det(B)=-2y,\ \text{trace}(A)=x+2,\ \text{trace}(B)=y+1.$$

则有

$$\begin{cases}\det(A)=\det(B),\\ \text{trace}(A)=\text{trace}(B).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2=-2y,\\ x+2=y+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=1.\end{cases}$$

(2)

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

有特征值为$2,1,-1$。

当$\lambda=2$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=1$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=-1$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

$$P=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

3. Find an orthogonal diagonalizing matrix for the following matrix:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & -2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

解：

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\1 & 3-\lambda & -2\\1 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-5).$$

则有特征值为0, 3, 5.

当$\lambda=0$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & -2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=3$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=5$时：

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\1 & -2 & -2\\1 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

ξ_1,ξ_2,ξ_3相互正交，因为只需要对ξ_1,ξ_2,ξ_3做单位化

$$q_1=\frac{\xi_1}{\xi_1^\top\xi_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{\xi_2}{\xi_2^\top\xi_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\quad q_3=\frac{\xi_3}{\xi_3^\top\xi_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

则对矩阵A做对角化的正交矩阵Q为：

$$Q=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

4. Find a unitary diagonalizing matrix for the following matrix:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2-i\\ 2+i & -3\end{bmatrix}.$$

解：

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2-i\\ 2+i & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2).$$

则特征值为-4, 2。

当$\lambda=-4$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}5 & 2-i\\ 2+i & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2+i & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \xi_1=\begin{bmatrix}-1\\ 2+i\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=2$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}-1 & 2-i\\ 2+i & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2+i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \xi_2=\begin{bmatrix}2-i\\ 1\end{bmatrix}.$$

再对ξ_1,ξ_2做单位化

$$q_1=\frac{\xi_1}{\xi_1^H\xi_1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ 2+i\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{\xi_2}{\xi_2^H\xi_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2-i\\ 1\end{bmatrix}.$$

则对矩阵A做对角化的酉矩阵Q为：

$$Q=\begin{bmatrix}q_1 & q_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 2-i\\ 2+i & 1\end{bmatrix}.$$

5. Let $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Compute $\boldsymbol{A}^k$, where k is a positive integer.

(Hint: Let $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$, and find the power of the matrix $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ respectively)

解：(1) 令$B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$, 有

$$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+5).$$

当$\lambda=5$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \xi_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}.$$

当$\lambda=-5$时：

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \xi_2=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}.$$

令

$$S=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}.$$

则有

$$B=S\Lambda S^{-1},$$

$$B^k=S\Lambda^k S^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^k & 0\\ 0 & (-5)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5 & 1/5\\ -1/5 & 2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4*5^{k-1}-(-5)^{k-1} & 2*5^{k-1}+2*(-5)^{k-1}\\ 2*5^{k-1}+2*(-5)^{k-1} & 5^{k-1}-4*(-5)^{k-1}\end{bmatrix}$$

令$C=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2D$，其中$D=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。则有

$$C^k=2^kD^k=2^k\begin{bmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^k & k2^{k+1}\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}.$$

综上有

$$A^k=\begin{bmatrix}B^k & 0\\ 0 & C^k\end{bmatrix}2^kD^k=\begin{bmatrix}4*5^{k-1}-(-5)^{k-1} & 2*5^{k-1}+2*(-5)^{k-1} & 0 & 0\\ 2*5^{k-1}+2*(-5)^{k-1} & 5^{k-1}-4*(-5)^{k-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k & k2^{k+1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^k\end{bmatrix}.$$