计算方法 Lab5

PB22151796-莫环欣

在求解的过程中，记录了每轮迭代的 `x` 的值（包括初值），最后再与实际根作差并输出

Newton 法

收敛阶理论值为 `2`

1. **初值=0.1，根=0**
   - 误差序列：

   ```
   0.1
   0.0006734006734006735
   2.0357740631659e-10
   ```

   - 计算收敛阶：

   $$p \approx \frac{\ln(2.0357740631659 \cdot 10^{-10}/0.0006734006734006735)}{\ln(0.0006734006734006735/0.1)} \approx 3.00201$$

   - 这里初值与根很近，收敛得很快
2. **初值=0.2，根=0**
   - 误差序列：

   ```
   0.2000000000000000
   0.0055555555555556
   0.0000001143153710
   0.0000000000000000
   ```

   - 计算收敛阶：

   $$p \approx \frac{\ln(0.0000001143153710/0.0055555555555556)}{\ln(0.0055555555555556/0.2)} \approx 3.011383$$

   - 同样的，这里初值离根也很近
   - 最后一次与根太近，误差精度太高，舍弃掉而使用前面三次来计算
3. **初值=0.9，根= -$\sqrt{3}$**
   - 误差序列：

   ```
   2.6320508075688773
   0.8258439292732287
   0.2808646772089560
   0.0496107253280781
   0.0019980368888149
   0.0000034480238943
   0.0000000000102960
   ```

   - 取中间迭代计算：

   $$p \approx \frac{\ln(0.0000000000102960/0.0000034480238943)}{\ln(0.0000034480238943/0.0019980368888149)} \approx 1.9996 \approx 2.000$$

   - 这个结果与理论值已经很接近，稍小一些可能是机器精度原因（包括加减乘除、小数除在内的多种运算都容易丢精度）
4. **初值=9.0，根=$\sqrt{3}$**
   - 误差序列：

```
7.2679491924311227
4.3429491924311227
2.4307448894841611
1.2131028161145794
0.4872428635212973
0.1244030085852142
0.0114816400105913
0.0001124277438740
0.0000000109449013
0.0000000000000001
```

- 计算收敛阶：

$$p \approx \frac{\ln(0.0000000109449013/0.0001124277438740)}{\ln(0.0001124277438740/0.0114816400105913)} \approx 1.9967 \approx 2.00$$

- 同上，这里忽略掉最后一个误差

弦切法

收敛阶理论值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$

1. **初值=(-0.1,0.1)，根=0**
   - 误差序列：

```
0.1000000000000000
0.1000000000000000
0.0000000000000000
```

   - **分析**：一步收敛，无法计算收敛阶，初始点对称直接命中根
2. **初值=(-0.2,0.2)，根=0**
   - 误差序列：

```
0.2000000000000000
0.2000000000000000
0.0000000000000000
```

   - **分析**：同上，一步收敛
3. **初值=(-2.0,0.9)，根=**$\sqrt{3}$
   - 误差序列：

```
3.7320508077536351
0.8320508077536351
196.2679491922464528
0.8320007569791431
0.8319507054930807
4.2924068572426644
0.1243965230545545
0.2441404242890409
0.0284318318971706
0.0073481269313004
0.0001835277394923
0.0000011624809991
0.0000000000000000
```

   - 取中间过程计算（只要不取最后一个，从后往前的单调序列里随便找三个算应该就行吧）：

$$p \approx \frac{\ln(0.0001835277394923/0.0073481269313004)}{\ln(0.0073481269313004/0.0284318318971706)} \approx 2.727$$

   - 这个阶段可能刚好在快速收敛
4. **初值=(0.9,9.0)，根=**$\sqrt{3}$
   - 误差序列：

```
0.8320508074535679
7.2679491925464321
0.8093721743848762
0.7866251558308087
5.9923066493285434
0.6209084779936568
0.4525430675920604
0.8955820957419220
0.2566924151749344
0.1347092462025531
0.0406730672629822
0.0050590354033113
0.0001740105523844
0.0000007651962493
0.0000000000000000
```

- 计算收敛阶：

$$p \approx \frac{\ln(0.0001740105523844/0.0050590354033113)}{\ln(0.0050590354033113/0.0406730672629822)} \approx 1.61669$$

- 这里已经很接近理论值了，误差可能源于机器精度

总结

上面的分析主要针对 Newton 法 和 弦切法 的局部收敛情况，验证了它们的收敛阶与理论值的接近程度。以下是具体总结：

- Newton 法：
  - 在初值较接近根的情况下，Newton 法表现出较快的收敛速度，且收敛阶接近理论值 2。例如初值为 0.1 和 0.2 时，收敛阶略高于理论值，可能是由于误差较小导致的计算偏差
  - 当初值较远时（例如 0.9 和 9.0，离三个根都远），收敛阶逐渐趋近理论值，说明 Newton 法在远离根的情况下仍能保持较好的收敛特性
- 弦切法：
  - 在初值对称且能直接命中根的情况下（如初值为 (-0.1, 0.1) 或 (-0.2, 0.2)），弦切法一步收敛，无法也不必计算收敛阶
  - 在初值较远的情况下（如初值为 (-2.0, 0.9) 或 (0.9, 9.0)），弦切法的收敛阶逐渐接近理论值
- 误差分析：
  - 在计算收敛阶时，最后几次迭代的误差可能由于机器精度的限制而导致偏差，因此在计算时忽略了最后一次误差，选择中间偏后较稳定的部分进行计算
  - 对于弦切法的某些初值（如 (-2.0, 0.9)），误差序列中可能出现较大的波动（如跳到三位数），这可能是由于算法在某些阶段的非线性行为导致的，但在后续迭代中也能逐渐趋于稳定
- 总之：
  - `Newton` 法在初值较接近根时表现出更快的收敛速度和更高的收敛阶，适合用于初值较好、能计算出导数的情况
  - `弦切法`的收敛阶较低，但在某些情况下（如初值对称）可以一步收敛，适合用于无法计算导数的情况