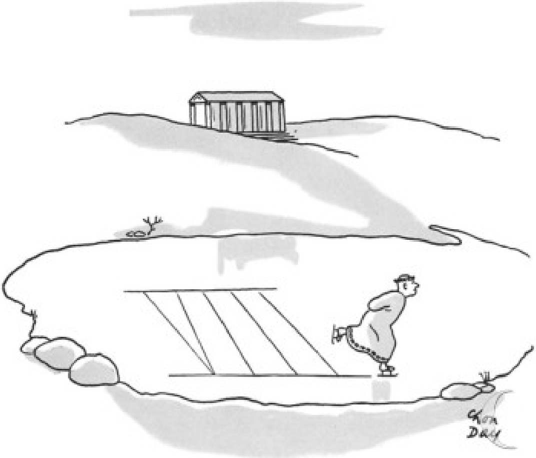
5 - Systèmes de numération

Héctor Satizábal
IICT- HEIG-VD
2018 - 2019

Adapté à partir du matériel du cours créé par **Prof. Andres Perez-Uribe**

Système de numération romain



Représentation des nombres naturels

- Le système de numération romain a été heureusement remplacé par un système de numération de position dans une base choisie (normalement la base 10)
- Exemple:

$$
\begin{array}{lllllllll}
1953 & = & \text{MCMLIII} & & & & & & \\
1953 & = & 1x10^3 & + & 9x10^2 & + & 5x10^1 & + & 3x10^0 \\
1953 & = & 1x1000 & + & 9x100 & + & 5x10 & + & 3x1 \\
1953 & = & 1000 & + & 900 & + & 50 & + & 3
\end{array}
$$

- Dans ce mode de représentation, en base n on utilise n symboles (chiffres) différents. Mais la valeur du chiffre change selon sa position

- Si un naturel X s'écrit en base β sur N chiffres

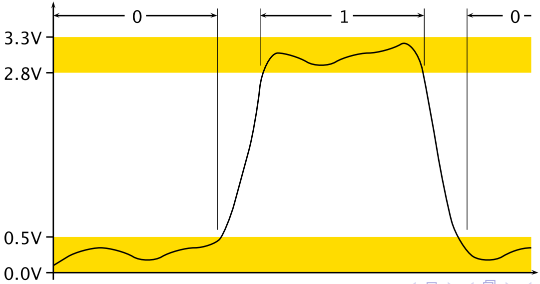
$$x_{N-1}x_{N-2}\ldots x_1x_0$$

  la correspondance entre la valeur de X et celles des chiffres est donnée par l'équation:

$$X = \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_i$$

- En informatique, on appelle x_0 le chiffre de poids faible (ou moins significatif), et x_{N-1} le chiffre de poids fort (ou plus significatif)

- Si, dans la vie courante, nous utilisons la base 10, les ordinateurs utilisent la base 2
- Les problèmes de la base 10 sont:
  - difficulté de stockage
  - difficulté de transmission des 10 niveaux de signal nécessaires
  - difficulté d'implémentation des fonctions logiques et arithmétiques
- Par contre, la base 2 est facile à stocker, à l'aide d'éléments électroniques bistables, et sa transmission est fiable, même sur des environnements bruyants et imprécis



Le système binaire

- En binaire (base 2) on utilise 2 symboles différents: 0 et 1. Mais la valeur du chiffre change selon sa position
- Si un naturel X s'écrit en base 2 sur N chiffres

  $b_{N-1} b_{N-2} ... b_1 b_0$

  la correspondance entre la valeur de X et celles des chiffres est donnée par l'équation:

  $$b_{N-1} \cdot 2^{N-1} + b_{N-2} \cdot 2^{N-2} + ... + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$

- En informatique, on appelle b_0 le bit de poids faible (ou moins significatif), et b_{N-1} le bit de poids fort (ou plus significatif)

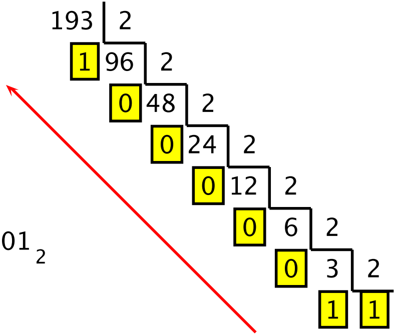
Exemples de conversion

- Passage de binaire à décimal:

$$
\begin{aligned}
01101011 &= 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\
01101011 &= 0 + 64 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1\\
01101011 &= 107
\end{aligned}
$$

- Passage de décimal à binaire:

$193 = ?$



$193 = 11000001_2$

Format de la représentation

- En base β, sur N chiffres, on peut représenter tous les naturels au sens large entre 0 et $\beta^N - 1$
- Les ordinateurs ont un format pour représenter les nombres, c'est-à-dire un nombre de chiffres pré-établi. Pour cette raison, il est parfois utile d'écrire également les zéros à gauche
- Exemple: en base 2, sur 4 chiffres, on peut représenter les naturels entre 0 et 15

0	0000	1	0001	2	0010	3	0011
4	0100	5	0101	6	0110	7	0111
8	1000	9	1001	10	1010	11	1011
12	1100	13	1101	14	1110	15	1111

Le système hexadécimal

- Le système hexadécimal (base 16) est aussi très utilisé en informatique, parce qu'il permet de simplifier la visualisation des longues séquences des zéros et des uns
- En hexadécimal on utilise 16 symboles différents:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

- Passage de binaire à hexadécimal:

$$\underbrace{1011}_{B}\quad\underbrace{1010}_{A}\quad\underbrace{0010}_{2}\quad\underbrace{1110}_{E}$$

Exemples de conversion

- Passage d'hexadécimal à décimal:

$$\begin{array}{lcccccccc}
A8CE & = & 10 \cdot 16^3 & + & 8 \cdot 16^2 & + & 12 \cdot 16^1 & + & 14 \cdot 16^0 \\
A8CE & = & 40960 & + & 2048 & + & 192 & + & 14 \\
A8CE & = & 43214 & & & & & &
\end{array}$$

- Passage de décimal à hexadécimal:

$923 = ?$

$$\begin{array}{r|l}
923 & 16 \\ \hline
\boxed{11} & 57 \;|\; 16 \\
 & \boxed{9} \quad \boxed{3}
\end{array}$$

$923 = 39B_{16} = 0x39B$

Nombres négatifs

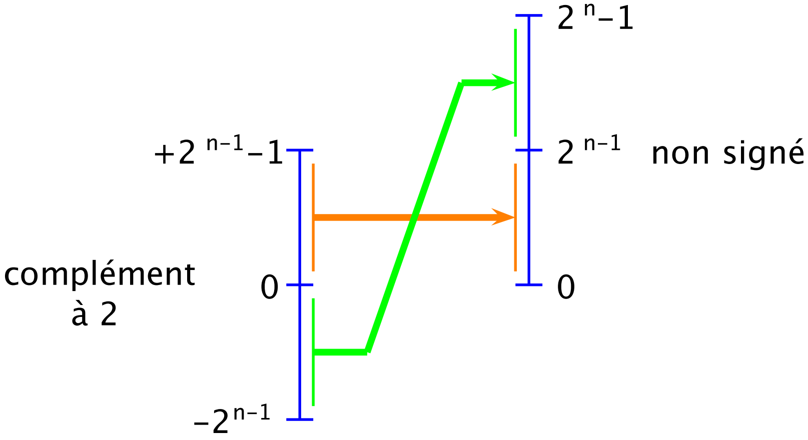
- Représentation complément à deux:

  Le complément à deux d'un nombre est égal à l'inverse du nombre plus 1

  Par exemple, le complément à deux de 0101 est (1010+1)=1011
- Dans ce système, un nombre négatif est le complément à deux du même nombre positif. Le bit de poids fort d'un nombre négatif est égal à 1
- Un nombre positif s'exprime sans faire de conversion, mais en ajoutant un 0 comme bit de poids fort.

  $+5 = 101 \rightarrow 0101$

  $-5 = -(+5) \rightarrow -(0101) \rightarrow 1010 + 1 = 1011$



Avec n bits on peut représenter des entiers entre:

$$-(2^{n-1}) \text{ et } +(2^{n-1}-1)$$

Représentation des nombres

- Dans les ordinateurs actuels, on utilise typiquement 32 bits pour coder les nombres entiers
- Avec 32 bits on code les nombres naturels (entiers non signés) de 0 à +4,294,967,295, ou les nombres entiers signés de -2,147,483,648 à +2,147,483,647
- On a également accès à d'autres représentations (types de données) qui nous permettent de coder encore plus de valeurs:
- Avec 64 bits on code les nombres naturels de 0 à 18,446,744,073,709,551,615

Représentation des nombres réels

- Un nombre réel est représenté en décimal sous la forme:

$$d_m d_{m-1} ... d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} ... d_{-n}$$

où la valeur du nombre est:

$$d = \sum_{i=-n}^{m} 10^i \times d_i$$

- Par exemple, 12.34_{10} représente le nombre:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot 10^1 & + & 2 \cdot 10^0 & + & 3 \cdot 10^{-1} & + & 4 \cdot 10^{-2} \\ 10 & + & 2 & + & 0.3 & + & 0.04 \\ & & & 12.34 & & & \end{array}$$

- En binaire, nous avons:

$$b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-n}$$

où la valeur du nombre est:

$$b = \sum_{i=-n}^{m} 2^i \times b_i$$

- Par exemple, 101.11_2 représente le nombre:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \cdot 2^2 & + & 0 \cdot 2^1 & + & 1 \cdot 2^0 & + & 1 \cdot 2^{-1} & + & 1 \cdot 2^{-2} \\ 4 & + & 0 & + & 1 & + & 0.5 & + & 0.25 \\ & & & & 5.75 & & & & \end{array}$$

- Par exemple, 10101.0101_2 représente le nombre:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 \cdot 2^4 & + & 0 \cdot 2^3 & + & 1 \cdot 2^2 & + & 0 \cdot 2^1 & + & 1 \cdot 2^0 & + & 0 \cdot 2^{-1} & + & 1 \cdot 2^{-2} & + & 0 \cdot 2^{-3} & + & 1 \cdot 2^{-4} \\ 16 & + & 0 & + & 4 & + & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0.25 & + & 0 & + & 0.0625 \\ & & & & & & & & 21.3125 & & & & & & & & \end{array}$$

- Passage à binaire d'un nombre réel en base 10:

$$0.375 = ?$$

$$0.375 \times 2 = \boxed{0}.75$$

$$0.75 \times 2 = \boxed{1}.5$$

$$0.5 \times 2 = \boxed{1}.0$$

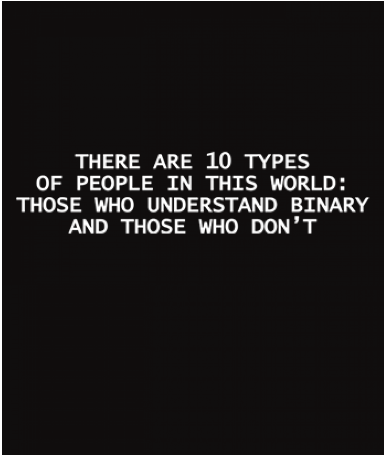
$$0.375 = 0.011$$

$0.3 = ?$

$$0.3 \times 2 = \boxed{0}.6$$
$$0.6 \times 2 = \boxed{1}.2$$
$$0.2 \times 2 = \boxed{0}.4$$
$$0.4 \times 2 = \boxed{0}.8$$
$$0.8 \times 2 = \boxed{1}.6$$
$$0.6 \times 2 = \boxed{1}.2$$

...

$$0.3 = 0.01001[1001] = 0.0[1001]$$



Il existe **10** types de personnes dans le monde:
celles qui comprennent le binaire et les autres