

Homework #1

姓名: *magicwenli* – 学号: *21xxxxx*

课程: 优化方法 – 教授: *Mr. WenLi* – 日期: 2020/4/13

问题 1

证明: 范数 $\|\cdot\|$ 的对偶范数满足范数的定义

$$\|z\|_* = \sup\{z^T x : \|x\| \leq 1\} = \sup\{z^T x : \|x\| = 1\}$$

解:

$$\|z\|_* = \max_{\|x\| \leq 1} \sum z_i x_i$$

1. 正定性: 如果 $z = 0$, 显然 $\|0\|_* = 0$.
2. 非负性: 如果 $z \neq 0$, 则 $\|x\| \neq 0$. 由于 $x = \frac{z}{\|z\|}$, 有 $\|z\|_* \leq \frac{\|z\|_2^2}{\|z\|} > 0$.
特别的, 如果 $\|z\|_* = 0$, 则必有 $z = 0$.

3. 齐次性:

由范数定义, 有:

$$\|tz\|_* = \max_{\|x\| \leq 1} |z^T tx| = \max_{\|x\| \leq 1} |t| |z^T x| = |t| \max_{\|x\| \leq 1} |z^T x| = |t| \|z\|_*$$

4. 满足三角不等式:

unknown.