660第三章向量组

向量组的秩

391，393，394

定义：向量组中所有无关的向量个数称为该向量组的秩，其中这些向量组成的为该向量组的极大无关组

线性表示

306，307，308，309，315，386，387，388，389，390

(1)建方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$.

(2)化阶梯形 $[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\quad\vdots\quad]$.

(3)讨论.

①$r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])\Leftrightarrow$无解$\Leftrightarrow$不能表示.

②$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])=n\Leftrightarrow$唯一解$\Leftrightarrow$唯一表示法.

③$r(\boldsymbol{A})=r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])<n\Leftrightarrow$无穷多解$\Leftrightarrow$无穷多种表示法.

证明线性无关相关

376　定义法假设k1a1+k2a2+...+knan=0

证明Ax=0是否有非零解

301，302，303，310，375，377，378，383　判断秩和n的关系

379　方阵下判断行列式是否为零

304，305，314，384，385　利用B=AP，转化为矩阵乘法，可逆矩阵不改变矩阵的秩性质来计算

极大无关组的求解

311，312，313，392

给出向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

(1)初等行变换不改变列向量组的线性相关性.

(2)求此极大线性无关组.

①构造 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$.

②$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$(阶梯形).

③算出台阶数 r，按列找出一个秩为 r 的子矩阵即可.

向量组等价

给出向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$.

在 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 与 $\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\cdots,t)$ 同维的条件下，若 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\beta}_j$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则称(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

其等价的充要条件是 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})$.

向量空间（数学一）

1. 概念

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n,$$

其中线性无关的 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 叫基，$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$(或 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$)叫坐标，$n$ 叫维数.

2. 过渡矩阵

设 $\mathbf{R}^n$ 的两个基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$；$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，有

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{C},$$

$\boldsymbol{C}$ 叫由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵(注意 $\boldsymbol{C}$ 的位置).

3. 坐标变换

$$\boldsymbol{\alpha}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]\boldsymbol{y}\overset{\text{由“2”}}{=\!=}[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 叫坐标变换公式.

向量组的定义

①n 维向量　n 个数构成的一个有

$a_n]^{\mathrm{T}}$，并称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 称为 n 维行向量，其中 a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$(或 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$)的第 i 个分量.

线性相关

④**线性相关**　对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

含有零向量或有成比例的向量的向量组必线性相关.

线性无关

⑤**线性无关**　若不存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 成立，就称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，亦即只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

单个非零向量，两个不成比例的向量均线性无关.

一个确定的向量组或线性相关或线性无关，二者必居其一且仅居其一.

判别线性相关无关的定理

定理 1　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.　380

定理 2　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法唯一.

定理 3　如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关.(以少表多，多的相关)

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^{\mathrm{T}}.$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有非零解，其中

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}.$$

定理 5　向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$\Leftrightarrow$非齐次线性方程组 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 有解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

(不能线性表出$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r([\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}])$)

定理 6　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量组线性相关，则整个向量组也线性相关.　382

定理 7　如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，那么把这些向量对应相同位置各任意添加 m 个分量所得到的新向量($n+m$ 维)组 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^*$ 也是线性无关的；如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么它们各去掉相同位置的若干个分量所得到的新向量组也是线性相关的.　381