思维导图对应660讲解在b站：考研数学峰哥　　有数学问题咨询峰哥微信：qinghuafengge

660+880题第三章思维导图

变限积分求导

$F(x)=\int_{h(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$

$F'(x)=f[(\varphi(x))]\varphi'(x)-f[(h(x))]h'(x)$

- 换元求导型
- 拆分求导型
- （63）、（58数学三）（192）（193）（208数学三）（209数学三），580
- 1.6、2.3,z1,7,z2.2,z2.7,z3.28

基本积分公式

① $\int x^k dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}+C,k\neq -1$; $\begin{cases}\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C,\\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C.\end{cases}$

② $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$

③ $\int e^x dx=e^x+C$; $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,a>0$ 且 $a\neq 1.$

④ $\int \sin x dx=-\cos x+C$; $\int \cos x dx=\sin x+C$;

$\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C$; $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+C$;

$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$;

$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$;

$\int \sec^2 x dx=\tan x+C$; $\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$;

$\int \sec x\tan x dx=\sec x+C$; $\int \csc x\cot x dx=-\csc x+C.$

⑤ $\begin{cases}\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C,\\ \int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a>0).\end{cases}$

⑥ $\begin{cases}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0).\end{cases}$

⑦ $\begin{cases}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C(\text{常见 } a=1),\\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C(|x|>|a|).\end{cases}$

积分的计算

凑微分法（54）、（57），

凑微分法主要是观察可以凑到d后面的一些表现形式比方说如下的几个形式

$dx=\frac{1}{a}d(ax+b),a\neq 0$; $x^k dx=\frac{1}{k+1}d(x^{k+1}),k\neq -1.$

常见：$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$; $\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}d(x^{\frac{3}{2}})$;

$\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})$; $\frac{dx}{x^2}=d\left(-\frac{1}{x}\right)$; $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$;

$e^x dx=d(e^x)$; $a^x dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x),a>0,a\neq 1$;

$\sin x dx=d(-\cos x)$; $\cos x dx=d(\sin x)$;

$\frac{dx}{\cos^2 x}=\sec^2 x dx=d(\tan x)$; $\frac{dx}{\sin^2 x}=\csc^2 x dx=d(-\cot x)$;

$\frac{1}{1+x^2}dx=d(\arctan x)$; $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x).$

换元法（52）、（53）、（60）、（62）472

换元法主要针对的是一些带根号的类型，或者无理函数的类型，常见的换元包括：三角代换，根式代换，倒代换，复杂函数的直接代换几个类型

分部积分法（59），473，475

$\int udv=uv-\int vdu$，这个方法主要适用于求 $\int udv$ 比较困难，而 $\int vdu$ 比较容易的情形.

分部积分的使用原则：两类不同函数相乘，且遵循反对幂三指的原则，越靠前的放到积分中，靠后的凑到d中即可

有理函数积分法，

形如 $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx(n<m)$ 的积分称为有理函数的积分，其中 $P_n(x),Q_m(x)$ 分别是 x 的 n 次多项式和 m 次多项式.

①$Q_m(x)$ 的一次单因式 $(ax+b)$ 产生一项 $\frac{A}{ax+b}$.

②$Q_m(x)$ 的 k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项，分别为 $\frac{A_1}{ax+b},\frac{A_2}{(ax+b)^2},\cdots,\frac{A_k}{(ax+b)^k}$.

③$Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r 产生一项 $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$.

④$Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项，分别为 $\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r},\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2},\cdots,\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$.

（71，72数学三），467

定积分的性质

- 定积分存在是一个数（58）,z3.16
- 奇偶性：对称区间奇函数积分为零，偶函数为一半区间的二倍（73，74数学三），468，469
- 保号性：如果b>a,且满足f(x)>g(x),那么a-b的积分f(x)>g(x)　182，571
- 周期平移性质：如果f(x)以T为周期，那么他在任意一个周期T的积分值都是相等的　（61）、（75，数学三），470，476，589，590，z1.6

定积分比较大小

- 如果区间相同我们可以构造辅助函数证明积分函数的性质，从而证明积分的大小关系　591，592，593，
- 利用积分的几何意义比较　183、184、185　1.8,z1.3,

含绝对值积分的处理

搞清楚积分变量和变量的关系，对积分区间拆分去掉绝对值　477，581

定积分的运算

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$

$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx.$

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]dx.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$

$\int_0^{\pi} \sin^n x dx=\begin{cases}2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$

$\int_0^{\pi} \cos^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$

$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$

$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx=\int_0^{2\pi} \sin^n x dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x,\sin x)dx.$

$\int_a^b f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sin t\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cos t dt.$

$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 (b-a)f[a+(b-a)t]dt.$

$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx(a>0).$

64）（65）、（67）（186）（187）（198）

原函数

原函数的定义：若在定义区间存在F'(x)=f(x),那么我们称F（x）是f(x)在给定区间的一个原函数，一般来说计算F（x）都是通过对f(x)积分得到的。

- 55、176、191、199，479，480
- 1.1、1.3、2.1,z2.1,

原函数存在的条件：若f(x)连续那么必然存在原函数，或者f(x)有第二类震荡间断点也是可能有原函数的

可积的条件

可积的条件：若f(x)在区间[a,b]连续，或者存在有限个第一类间断点，或者有限个有界的间断点那么他是可积的，

- 如果函数可积那么必然是连续的
- 如果函数有跳跃间断点和第二类无穷间断点，必然是不可导的
- 177、179、180、181、194
- 1.4

f(x),f'(x), $\int_a^x f(t)dt$ 奇偶性的关系

①$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶函数.

②$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为奇函数.

③$f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

④$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow\begin{cases}\int_0^x f(t)dt\text{ 为偶函数},\\ \int_a^x f(t)dt\text{ 为偶函数}(a\neq 0).\end{cases}$

⑤$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow\begin{cases}\int_0^x f(t)dt\text{ 为奇函数},\\ \int_a^x f(t)dt\text{ 不确定}(a\neq 0).\end{cases}$

- 195、196、197，582
- 1.2，z1.1,z2.6,

定积分定义计算数列极限

可以凑基本型：

可以凑出来 $\frac{i}{n},\frac{1}{n}$ 的形式比如

①$n+i=n\left(1+\frac{i}{n}\right)$

②$n^2+i^2=n^2\left(1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$

③$n^2+ni=n^2\left(1+\frac{i}{n}\right)$

于是可以写出定积分定义：$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)=\int_0^1 f(x)dx$

放缩形：此时一般需要通过夹逼定理放缩，扔掉其中的次量级，从而对剩下的形式用定积分定义　（56）（200）　z3.14,z3.15,

积分中值定理（178）,z3.41

$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

反常积分的定义与判定

①$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 叫无穷区间上的反常积分.

②$\int_a^b f(x)dx$，其中 $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$，$a$ 叫瑕点，此积分叫无界函数的反常积分.

- 无界函反常积分的判定：$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1\text{ 时，收敛},\\ p\geq 1\text{ 时，发散},\end{cases}$
- 无穷区间反常积分的判定：$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1\text{ 时，收敛},\\ p\leq 1\text{ 时，发散}.\end{cases}$
- 202、203、204，483，596，598，
- 1.7,z.15,z1.10

反常积分的计算，本质上还是定积分的计算

- 67）、（68）、（69）（188）（189）（190），474，481，482，484，485，486，487，599，600，
- 2.10

积分中的升阶，降阶问题

如果积分中包含f'(x)，f''(x)和变上限积分的的形式我们通常的做法都是凑微分使用分部积分的做法

- 51，478
- z2.8，z2.9,z2.10

一元积分学的几何应用

面积

① 直角坐标系下的面积公式(如图 10-1)：$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$

② 极坐标系下的面积公式(如图 10-2)：$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}|r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)|d\theta.$

（66）（205），488，597，601，

2.8，3.16，3.18，z2.3,z2.4,z3.30,T1,

旋转体体积

① 绕 x 轴(如图 10-15)：$V_x=\int_a^b \pi y^2(x)dx.$

② 绕 y 轴：$V_y=\int_a^b 2\pi x|y(x)|dx$(柱壳法).

古尔丁定理：$V=2\pi\iint_D r(x,y)dxdy$

（70数学一二），（70数学三）（206），490，602，603，

2.5、2.9，3.17，z3.32,z3.33,z3.34,z3.38,z3.39,T2,T3

侧面积公式（71）、（72），489

① 曲线 $y=y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积 $S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.$

弧长公式

① 若平面光滑曲线由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leq x\leq b)$ 给出，则 $s=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx.$

② 若平面光滑曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leq t\leq\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$

③ 若平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leq\theta\leq\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta.$

（71）（207数学一，二）

2.6、2.7,z3.31

形心坐标公式

设 $D=\{(x,y)|0\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如图 10-17 所示. D 的形心坐标 $\bar{x},\bar{y}$ 的计算公式：

$\bar{x}=\frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{f(x)} xdy}{\int_a^b dx\int_0^{f(x)} dy}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$;

$\bar{y}=\frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{f(x)} ydy}{\int_a^b dx\int_0^{f(x)} dy}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$

（73）（207数学一二）（208数学一二）604，

平均值

$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$　2.4

一元积分学的物理应用

- 静压力P=pghs(210数学一二),z3.36
- 重力做功(74,数学一二)z3.35　提取物体做功——$W=\rho g\int_a^b xA(x)dx$
- 引力（75 数学一二）　$F=G\frac{Mm}{R^2}$

积分等式

- 换元构造微分方程　z3.8,z3.9,z3.11，588
- 分部积分证明积分恒等式　z3.18,z3.19，586
- 区间在线公式证明　z3.27　471

积分不等式证明

- 构造辅助函数单调性证明，这种做法通常是令b=x或令a=x　3.11，3.15，
- 利用凹凸性证明不等式
- 利用拉格朗日中值定理　z3.24
- 利用泰勒公式证明　3.10,z1.2,z3.21,z3.22
- 利用分部积分证明　z1.4
- 利用递推法证明　z3.17,
- 利用基本不等式放缩　z3.20

积分型极限问题

- 洛必达法则　575
- 夹逼定理　z3.13，572，574
- 分部积分

考研数学咨询微信：qinghuafengge