660线代第四章方程组

基础解系的求解

对系数矩阵进行初等行变换化为最简型，然后确定主元和自由变量的位置，然后赋值1，0 ，0，1即可，

317，318，319，395，399，400，

抽象型方程组

根据系数矩阵和n的关系确定基础解系的个数

根据题目配凑得到非齐次的特解

方程组的公共解和同解问题

(1) 求两个方程组的公共解.

① 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 和 $B_{m\times n}x=0$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$ 的解，即联立求解. 同理，可求 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 的公共解. 这里对读者的计算能力提出较高要求，但理论上没有什么难点.

② 求出 $A_{m\times n}x=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，代入 $B_{m\times n}x=0$，求出 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系，代回 $A_{m\times n}x=0$ 的通解，即得公共解.

③ 若给出 $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 与 $B_{m\times n}x=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$，则公共解

$$\gamma=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t,$$

即

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s-l_1\eta_1-l_2\eta_2-\cdots-l_t\eta_t=0,$$

解此式，求出 k_i 或 l_j，$i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t$，即可写出 γ.

(2) 同解方程组.

若两个方程组 $A_{m\times n}x=0$ 和 $B_{s\times n}x=0$ 有完全相同的解，则称为同解方程组.

于是，　$Ax=0,Bx=0$ 是同解方程组

$\Leftrightarrow Ax=0$ 的解满足 $Bx=0$，且 $Bx=0$ 的解满足 $Ax=0$（互相把解代入求出结果即可）

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，且 $Ax=0$ 的解满足 $Bx=0$（或 $Bx=0$ 的解满足 $Ax=0$）

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\left(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\right)$（三秩相同较方便）.

解的结构和性质

(1) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则通解为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

(2) 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有特解 η，对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 有基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

若a1,a2,a3,....an 是AX=b解，那么满足k1a1+k2a2+...knan当系数和为0时那么他是对应Ax=0的解，如果k1+..+kn=1是对应非齐次的解

396，397

已知解反求系数矩阵

那么Aa=0，两边转至得到aTAT=0,此时只需要求aTx=0的解即可

402

齐次线性方程组

(1) 齐次线性方程组.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$$

记

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

则齐次线性方程组 ① 可写成矩阵方程

$$Ax=0.$$

解向量有如下性质：

(ⅰ) 若 ξ_1,ξ_2 是 ② 的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是 ② 的解；

(ⅱ) 若 $x=\xi$ 是 ② 的解，$k\in R$，则 $x=k\xi$ 也是 ② 的解.

② 基础解系.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 ① 的一组解向量，如果

(ⅰ) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关；

(ⅱ) 方程组 ① 的任一解向量均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示，即 $s=n-r(A)$.

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 ① 的一个基础解系.

316，398，401，404，405

③ 齐次线性方程组有非零解的充要条件及通解.

齐次线性方程组 ① 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$，此时它的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $r=r(A)$，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 ① 的一个基础解系.

非齐次线性方程组

则非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

可写成矩阵方程

$$Ax=b$$

及

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

以下 4 种说法是等价的.

(ⅰ) 方程组 ④ 有解；

(ⅱ) 向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示；

(ⅲ) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价；

(ⅳ) 方程组 ④ 的系数矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 与其增广矩阵 $[A\,\vdots\,b]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n\,\vdots\,b]$ 的秩相等.

③ 非齐次线性方程组有解的充要条件.

非齐次线性方程组 ④ 有解的充要条件是 $r(A)=r([A,b])$. 确切地说，当 $r(A)=r([A,b])=n$ 时，方程组 ④ 有唯一解；当 $r(A)=r([A,b])<n$ 时，方程组 ④ 有无穷多解；当 $r(A)\neq r([A,b])$ 时，方程组 ④ 无解.

相应地，当 $r(A)=r([A,b])=n$ 时，向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，且表达式是唯一的；当 $r(A)=r([A,b])<n$ 时，向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，但表达式不唯一；当 $r(A)\neq r([A,b])$ 时，向量 b 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

320，321

(ⅲ) 非齐次线性方程组解的结构定理.

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程 ⑤ 相应的齐次线性方程组 ② 的基础解系，η^* 为方程 ⑤ 的某一个特解，则方程 ⑤ 的通解为

$$x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $r=r(A)$，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

克拉默法则

① 克拉默法则.

若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$，则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_j=\frac{D_j}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$