

思维导图对应660讲解在b站：考研数学峰哥

有数学问题咨询峰哥微信：qinghuafengge



660+880多元函数思维导图

概念

极限： $\lim f(x,y)=A$ (洛必达，单调有界不能用，通常是夹逼准则计算) (226) (228) 2.1, 2.2, 2.3

选择特殊路径证明极限不存在一般是 $y=kx$ (227) (231)

连续： $\lim f(x,y)=f(x_0,y_0)$

极限的保号性：如果 $\lim f(x,y)>0$ ，那么存在 $\delta>0$ ，使得 $f(x,y)>0$ (247) (254)

偏导数： (230) (232) (239) (241) (242) z1.4

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义。若极限
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作
$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)$$
。于是 $f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ ， $f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ 。

二阶偏导数：特指 $f_{xy}, f_{yx}, f_{xx}, f_{yy}$ (94) (243) 2.9, 2.10,

可微：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

判断可微一般从如下结论 (237) (238) z3.14,

偏导数连续的证明： (234) (237)

连续，可偏导、可微之间的关系： (240) z1.3 T2

偏导数连续 \Rightarrow 可微 \Rightarrow 连续 \Rightarrow 极限存在(全方向)
 \Rightarrow 方向导数存在(某方向单侧)(仅数学一)

偏导数连续是可微的充分条件

定义法： (229)

- ① 写出全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ ；
- ② 写出线性增量 $A\Delta x + B\Delta y$ ，其中 $A = f'_x(x_0, y_0)$ ， $B = f'_y(x_0, y_0)$ ；
- ③ 作极限 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ ，若该极限等于0，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，否则，就不可微。

对于 $z=f(x,y)$ ，讨论其在某特定点 (x_0, y_0) （比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为：

- ① 用定义法求 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ ；
- ② 用公式法求 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ ；
- ③ 计算 $\lim_{\rho \rightarrow 0} [f'_x(x,y), \lim_{\rho \rightarrow 0} f'_y(x,y)]$ 。

看 $\lim_{\rho \rightarrow 0} f'_x(x,y) = f'_x(x_0, y_0), \lim_{\rho \rightarrow 0} f'_y(x,y) = f'_y(x_0, y_0)$ 是否成立。若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数是连续的。

链式求导法则：第一步确定函数关系（一般是通过树状图），第二步确定自变量因变量个数，因变量的个数以及对应的字母，第三步求导即可。

(85)、(87)、(90)、(91)、(92)、(93)、(103) (244) (245)

1.6, 2.5, 3.1, 3.7, 3.8, z3.1, z3.2, z3.3,

复合函数求导法

全微分的形式不变性 (101), (102) (246)、2.4, 2.6, 2.11

有全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{\partial y}\right) \left(\frac{dx}{dy}\right)$
 $= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dy}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$ ，此即为全微分形式不变性。

可以对等式两边直接求导，把 z 看作 x,y 的函数直接求导即可，注意此时 x,y 是独立变量，各自互不影响

一个方程的类型

公式法求导：

$$\text{确定 } z = z(x,y), \text{ 且有 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

多个方程约束的类型

看作隐函数求导，对不同方程求导后联立解出来所求的导数 (100) 2.14, z3.16,

雅可比变换法：

且有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

2.7, 2.8, 3.2,

设 $F(x,y,z)=0$ ，若满足 $F(P)=0$ ，且对于 $F'_z(P) \neq 0$ ，那么我们可以确定 $z=z(x,y)$ 的函数关系 1.3

隐函数存在定理

如果二元函数取到极值，那么对应的一元函数也是取极值的

如果二元函数取到唯一极值，那么该点未必是最值

二元函数极值最值和一元函数的关系 (248) (250)

计算具体点的偏导数

求出对应的偏导数带值，先带后求，比方说对 x 求偏导数，可以先把 y 的函数值带入化简为一元函数求导 (86), (88), (89), (89)

偏导数定义

无条件极值 (104)、(105) (250) (253), z1.2, z3.6, z3.7, z3.8, z3.10, z3.11,

多元函数的极、最值

条件极值（拉格朗日函数法） (251) (252) (255) 3.5, 3.6, z3.5, z3.9, z3.17,

偏微分等式

已知偏导数或偏增量的表达式，求解 $f(x,y)$ (95)、(96) z2.1, z2.2, z3.12,

给出变换，化已知偏微分方程为常微分方程

极限脱帽法 (97)、(98数学二三,) (235) (236)

凑微分的定义

已知极限求解偏导数

全微分的性质如果某个函数 $f(x,y)$ 存在全微分形式，那么对应的 $f_{xy}=f_{yx}$ (99)

方向导数(数学一) (98数学一)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}$$
$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u'_x(P_0)\Delta x + u'_y(P_0)\Delta y + u'_z(P_0)\Delta z + o(t)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}$$
$$= u'_x(P_0)\cos \alpha + u'_y(P_0)\cos \beta + u'_z(P_0)\cos \gamma,$$

1.先算一阶偏导数为零的点2.计算二阶偏导数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} ，3验证 $AC-B^2>0(<0)$ 大于零的话就存在极值，小于零该点不是极值，并且 $A>0$ 是对应极小值， $A<0$ 是极大值

函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件。若设 (x_0, y_0) 为极值点，则
$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \frac{dy}{dx} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0,$$
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$
从而有 $f'_x(x_0, y_0) - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} f'_y(x_0, y_0) = 0$ ，故所求 x_0, y_0, λ_0 需满足
$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 f'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$
其中 $-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \lambda_0$ ，这恰好相当于 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$ 在 (x_0, y_0, λ_0) 处取极值的必要条件。

也可以考虑对所给条件带入化简，简化为一元函数然后根据单调性确定函数的最值