平时不熟的公式及结论

高数

极限

无穷小比阶时

当 $x \to \infty$ 时，$a^x \gg x^\beta \gg \ln^a x$

中值定理

1. 涉及函数的中值定理

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则

定理 1(有界与最值定理)　$m \leqslant f(x) \leqslant M$，其中，$m$，$M$ 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

定理 2(介值定理)　当 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 时，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 3(平均值定理)　当 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 时，在$[x_1,x_n]$内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

定理 4(零点定理)　当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

费马
(1601—1665)

2. 涉及导数(微分)的中值定理

定理 5(费马定理)　设 $f(x)$满足在点 x_0处 $\begin{cases} ①\text{可导}, \\ ②\text{取极值}, \end{cases}$ 则 $f'(x_0)=0$.

定理 6(罗尔定理)

设 $f(x)$满足 $\begin{cases} ①\text{在}[a,b]\text{上连续}, \\ ②\text{在}(a,b)\text{内可导}, \\ ③f(a)=f(b), \end{cases}$ 则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔
(1652—1719)

定理 7(拉格朗日中值定理)

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}①在[a,b]上连续,\\ ②在(a,b)内可导,\end{cases}$ 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日
(1736—1813)

定理 8(柯西中值定理)

设 $f(x),g(x)$ 满足 $\begin{cases}①在[a,b]上连续,\\ ②在(a,b)内可导,\\ ③g'(x)\neq 0,\end{cases}$ 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

柯西
(1789—1857)

定理 9(泰勒公式)

(1)带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在,则对该邻域内的任意点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间.

(2)带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导,则存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域内的任意点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

(**定理 10　积分中值定理**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

微分学

判断连续

$$\begin{cases} f(x)\text{连续} \nRightarrow |f(x)|\text{连续} \\ |f(x)|\text{连续} \nRightarrow f(x)\text{连续} \end{cases}$$

反例:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$$

判断极值点，拐点

1. 判别极值第三充分条件

设 $f(x)$在 x_0处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

①当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$在 x_0处取得**极大值**；

②当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$在 x_0处取得**极小值**.

2. 判别拐点第三充分条件

设 $f(x)$在 x_0处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$为拐点.

几何应用

曲率公式:

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

判断有界性

$$1.\quad f(x)在[a,b]上连续\Rightarrow f(x)在[a,b]上有界$$

$$2.\quad f(x)在(a,b)上连续，且\lim_{x\to a^+}f(x)和\lim_{x\to b^-}f(x)均存在\Rightarrow f(x)在(a,b)上有界$$

$$3.\quad f'(x)在有限区间(a,b)有界，则f(x)在(a,b)上有界$$

证明

证: $f(x)-f(\frac{a+b}{2})=f'(\xi)(x-\frac{a+b}{2})$

$$|f(x)|=|f(\frac{a+b}{2})+f'(\xi)(x-\frac{a+b}{2})|$$

$$|f(x)|\leq \underset{常数.}{\underline{|f(\tfrac{a+b}{2})|}}+\underset{\leq M'}{\underline{|f'(\xi)|}}\cdot\underset{\leq\frac{a+b}{2}}{\underline{|x-\tfrac{a+b}{2}|}}.\quad\leq M.$$

下列命题中正确的是

多元函数积分学

方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=u_x^{'}(P_0)\cos\alpha+u_y^{'}(P_0)\cos\beta+u_z^{'}(P_0)\cos\gamma$$

积分

不定积分

不定积分公式

分部积分法😊（记住中间要加正负号！！！）

u的各阶导数	u $\oplus$	u' $\ominus$	u'' $\oplus$	u''' $\ominus$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$ $(-1)^{n+1}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$v^{(n-2)}$	$\cdots$	v

原函数存在定理🐟（不能忽视基础！！！）

1. 连续函数f(x)必有原函数F(x);
2. 含有第一类间断点和无穷间断点的函数f(x)在包含该间断点的区间内必没有原函数F(x);
3. 含有振荡间断点可能有原函数。

【注 2】 含有振荡间断点的函数是否有原函数呢？举例说来，对于

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在$(-\infty,+\infty)$上不连续，它有一个振荡间断点$x=0$，但是它在$(-\infty,+\infty)$上存在原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即对于$(-\infty,+\infty)$上任一点都有$F'(x)=f(x)$成立.

当然，对于

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在$(-\infty,+\infty)$上也有一个振荡间断点$x=0$，且其在$(-\infty,+\infty)$上没有原函数.

定积分存在定理🚗

按照《考试大纲》,定积分存在定理包括下面两个方面.

(1)定积分存在的充分条件.

①若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

②若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

③若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,且只有有限个间断点,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

(2)定积分存在的必要条件.

可积函数必有界,即若定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

$$\begin{cases} f(x)\text{可积} \Rightarrow F(x)\text{连续} \\ f(x)\text{连续} \Rightarrow F(x)\text{可导} \end{cases}$$

如果$x=x_0$是f(x)的可去间断点，则F(x)在$x=x_0$处可导，但$F'(x_0)\neq f(x_0)$

不定积分判断敛散性

1. 无穷区间

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

若上述极限存在,则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,否则称为**发散**.

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

若上述极限存在,则称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,否则称为**发散**.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

若右边两个反常积分都收敛,则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,否则称为**发散**.

【注】 在反常积分中,一般把“∞”和使得函数极限为无穷的点(瑕点)统称为奇点.

2. 无界函数

(1)若 b 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

(2)若 a 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

(3)若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的唯一瑕点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若上述右边两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称为**发散**.

关于敛散性的判别，具体参看“基础例题精解”的“六、反常积分的计算与敛散性判别”部分.

针对此类问题，我们需要掌握**两个重要结论**，并能够熟练地进行无穷小、无穷大比阶.

(1)无穷区间的反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$：在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant1$ 时发散.

(2)无界函数的反常积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(p>0$，奇点 $x=0)$：在 $0<p<1$ 时收敛，在 $p\geqslant1$ 时发散.

3. 一些结论

- 反常积分收敛时才能用奇偶性
- 对于 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$，应该先算定积分，再取极限，不同于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

判断可积

$$\begin{cases} f(x)\text{可积} \nRightarrow |f(x)|\text{可积} \\ |f(x)|\text{可积} \nRightarrow f(x)\text{可积} \end{cases}$$

反例

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$$

原因：此时有无数个间断点

几何应用

形心

(1)“平面上的曲边梯形”的形心坐标公式.

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant f(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如图 15-4 所示. 现推导 D 的形心坐标 $\overline{x},\overline{y}$ 的计算公式.

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}x\,\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x};$$

$$\overline{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}y\,\mathrm{d}y}{\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

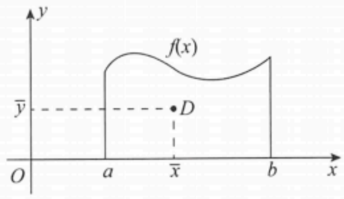


图 15-4

弧长

(2)平面曲线的弧长.

①若平面光滑曲线由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则 $s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$

②若平面光滑曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$

③若平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$

物理应用

变力沿直线做功

(1)变力沿直线做功.

设方向沿 x 轴正向的力函数为 $F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则物体沿 x 轴从点 a 移动到点 b 时(见图 15-1)，变力 $F(x)$ 所做的功为

$$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

功的微元 $\mathrm{d}W=F(x)\,\mathrm{d}x$.

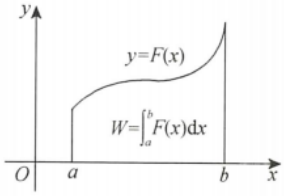


图 15-1

抽水做功

(2)抽水做功.

如图 15-2 所示，将容器中的水全部抽出所做的功为

$$W = \rho g \int_a^b x A(x) \mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

功的微元 $\mathrm{d}W = \rho g x A(x) \mathrm{d}x$ 为位于 x 处厚度为 $\mathrm{d}x$，水平截面面积为 $A(x)$ 的一层水被抽出(路程为 x)所做的功.

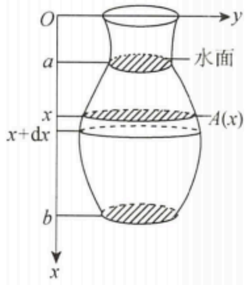


图 15-2

水压力

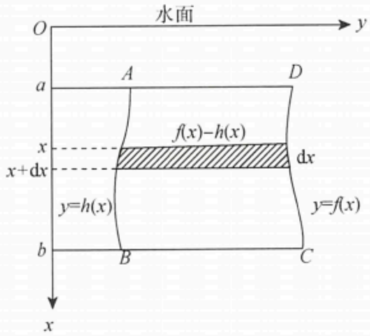
(3)水压力.

垂直浸没在水中的平板 $ABCD$(见图 15-3)的一侧受到的水压力为

$$P = \rho g \int_a^b x [f(x) - h(x)] \mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

压力微元 $\mathrm{d}P = \rho g x [f(x) - h(x)] \mathrm{d}x$，即图中矩形条所受到的压力. x 表示水深，$f(x) - h(x)$ 是矩形条的宽度，$\mathrm{d}x$ 是矩形条的高度.



微分方程

一阶线性微分方程: 形如 $y' + p(x)y = q(x)$

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C]$$

伯努利方程: 形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n \ (n \neq 0, 1)$

$step:$

(1)先变形为 $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$

(2)令$z = y^{1-n}$,得$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,则$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$

(3)代入一阶线性微分方程 $y = e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C]$

二阶可降阶

> $1.y^{''}=f(x,y^{'})$型

令$y^{'}=p(x),y^{''}=p^{'}$, 则原方程变为$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

> $2.y^{''}=f(y,y^{'})$型

令$y^{'}=p,y^{''}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$,原方程变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)\Rightarrow p=\phi(y,C_1)\Rightarrow$ 分离变量法

> **二阶常系数齐次线性方程**

对于 $y''+py'+qy=0$,其对应的特征方程为 $r^2+pr+q=0$,求其特征根,有以下三种情况请大家牢记(其中 C_1,C_2 为任意常数).

(1)若 $p^2-4q>0$,设 r_1,r_2是特征方程的两个不等实根,即 $r_1\neq r_2$,可得其通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2)若 $p^2-4q=0$,设 r_1,r_2是特征方程的两个相等的实根,即二重根,令 $r_1=r_2=r$,可得其通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}.$$

(3)若 $p^2-4q<0$,设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根,可得其通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

> **二阶常系数非齐次线性微分方程的特解**: 形如$y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$

设$P_n(x)$, $P_m(x)$分别为x的n次和m次多项式

(1) 当自由项为$f(x)=P_n(x)e^{ax}$时，特解为 $y^*=e^{ax}Q_n(x)x^k$,

$$\begin{cases} e^{ax}\text{照抄} \\ Q_n(x)\text{为}x\text{的}n\text{次多项式} \\ k=\begin{cases} 0 & \alpha\text{不是特征根}, \\ 1 & \alpha\text{是单特征根}, \\ 2 & \alpha\text{是二重根}. \end{cases} \end{cases}$$

(2) 当自由项$f(x)=e^{ax}[P_m(x)\cos\beta x+P_n]$时，特解要设为

$$y^*=e^{ax}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k\ ,$$

其中

$$\begin{cases} e^{ax}\text{照抄} \\ l=\max\{m,n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x)\text{分别为}x\text{的两个不同的}l\text{次多项式} \\ k=\begin{cases} 0 & \alpha\pm\beta i\text{不是特征根,} \\ 1 & \alpha\pm\beta i\text{是特征根。} \end{cases} \end{cases}$$

---

n阶常系数齐次线性微分方程的解

5. n 阶常系数齐次线性微分方程的解

方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 称为 **n 阶常系数齐次线性微分方程**，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数，其对应的特征方程为 $r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$，求出其特征根. 有如下情况需要大家牢记（其中大写的英文字母均为任意常数）.

(1)特征根为单实根 r 时，微分方程通解中对应一项 Ce^{rx}；

(2)特征根为 k 重实根 r 时，微分方程通解中对应 k 项 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$；

(3)特征根为单复根 $\alpha\pm\beta i(\beta>0)$ 时，微分方程通解中对应两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

(4)特征根为 k 重复根 $\alpha\pm\beta i(\beta>0)$ 时，微分方程通解中对应 $2k$ 项

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x].$$

欧拉方程

形如 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$ 的方程称为欧拉方程，其中 p 与 q 为常数，$f(x)$ 为已知连续函数. 它有固定的解法.

(1)当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t),$$

即可求解（别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数）.

(2)当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$，同理可得.

线性代数

矩阵

秩越乘越小，越拼越大

$r(AB) \le \min(r(A), r(B)) \le r(A|B) \le r(A) + r(B)$

A转置相关

$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

矩阵A的幂 (r(A)=1)

$A^n = [tr(A)]^{n-1} \cdot A$, 需满足$r(A) = 1$

施密特正交化

① 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 \text{ ,}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 .$$

② 标准化

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||} \text{ ,}$$

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{||\beta_2||} .$$

A^*的行列式() ~~这能忘是真的fw😅~~

$|A^*| = |A|^{n-1}$

特征值与特征向量

特征值性质

① $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A)$;

② $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |A|$;

③ 三角矩阵主对角线元素即为特征值.

A相关特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
对应特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

秩为1的矩阵的性质 ~~牢记重要结论⚠~~

1. n阶矩阵A的秩为1⇔ $\exists n$维非零列向量α,β，使$A=\alpha\beta^T$.
2. $tr(\alpha\beta^T)=\beta^T\alpha$ (α,β为n维列向量).
3. 对于$A=\alpha\beta^T$ (α,β为n维列向量),有$A^n=l^{n-1}A$, 其中$l=\beta^T\alpha=tr(A)$.
4. 若n阶方阵$A=\alpha\beta^T$的秩为1，则A的特征值为$\lambda_1=tr(A),\lambda_2=...=\lambda_n=0$.
5. 若n阶方阵$A=\alpha\beta^T$的秩为1，则当$tr(A)\neq 0$时，A可对角化；当$tr(A)=0$时，A不可对角化.

线性代数

随机事件与概率

重要公式求概率

(1)逆事件概率公式:对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2)加法公式:对于任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

【注】 (1)设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3)减法公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$.

(4)条件概率公式:设 A,B 为任意两个事件,若 $P(A)>0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为**条件概率**,记为 $P(B|A)$,且

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

【注】 (1)条件概率 $P(\cdot|A)$是概率,概率的一切性质和重要结论对条件概率都适用.

例如:
$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A),$$
$$P[(B-C)|A]=P(B|A)-P(BC|A),$$
等等.

(2)条件概率就是在一定的附加条件之下所计算的概率.当说到“条件概率”时,总是指另外附加的条件,其形式可归结为“已知某事件发生了”.

(5)乘法公式:如果 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

一般地,对于 $n>2$,如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(6)全概率公式:如果 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,$P(A_i)>0$,则对任一事件 B,有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,\quad P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

(7)贝叶斯公式(又称逆概率公式):如果 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n),P(A_i)>0$,则对任一事件 B,只要 $P(B)>0$,就有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}(j=1,2,\cdots,n).$$