660线代第二章矩阵

分块矩阵的性质

① 加法：同型，且分法一致，则 $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$.

② 数乘：$k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$.

③ 乘法：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$，要可乘、可加.

④ 若 A,B 分别为 m,n 阶方阵，则分块对角矩阵的幂为
$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} A^k & O \\ O & B^k \end{bmatrix}.$$

⑤ 已知 $A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中 B 是 r 阶可逆矩阵，C 是 s 阶可逆矩阵，则 A 可逆，且
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

287，358

⑥ 主对角线分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$，若 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆，则 A 可逆，且
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

副对角线分块矩阵
$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix},$$
若 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆，则 A 可逆，且
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

A^{-1}的运算及其性质

(1) 定义.

对于方阵 A,B，若 $AB=E$，则 A,B 互为逆矩阵，且 $A^{-1}=B,B^{-1}=A,AB=BA$.

291

(2) 性质.

① $(A^{-1})^{-1}=A$.

② $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$（穿脱原则）.

③ $k\neq 0,(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

④ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

⑤ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

计算

公式法 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

(ⅱ) $[A\mid E]\xrightarrow{初等行变换}[E\mid A^{-1}]$.

② 抽象型.

(ⅰ) 由题设式子恒等变形，创造 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$.

(ⅱ) 由题设式子恒等变形，创造 $A=BC$，若 B,C 均可逆，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$.

292

初等矩阵

(1) 定义 $(E_{ij},E_{ij}(k),E_i(k))$.

① 初等变换.

(ⅰ) 一个非零常数乘矩阵的某一行(列).

(ⅱ) 互换矩阵中某两行(列)的位置.

(ⅲ) 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列).

以上三种变换称为**矩阵的初等行(列)变换**，且分别称为倍乘、互换、倍加初等行(列)变换.

362

(2) 性质.

① $|E_{ij}|=-1,|E_{ij}(k)|=1,|E_i(k)|=k$.

② $E_{ij}^T=E_{ij},E_{ij}^T(k)=E_{ji}(k),E_i^T(k)=E_i(k)$.

③ $E_{ij}^{-1}=E_{ij},E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k),E_i^{-1}(k)=E_i\left(\frac{1}{k}\right)$.

④ $E_{ij}^*=|E_{ij}|E_{ij}^{-1}=-E_{ij}$,

$E_{ij}^*(k)=|E_{ij}(k)|E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$,

$E_i^*(k)=|E_i(k)|E_i^{-1}(k)=kE_i\left(\frac{1}{k}\right)$.

293

(3) 左行右列定理.

矩阵 A 左乘初等矩阵 P，得 PA，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等行变换；矩阵 A 右乘初等矩阵 P，得 AP，相当于对 A 作了一次与 P 完全相同的初等列变换.

284，294，363，364，365，366

矩阵乘法满足交换律的

AA*=A*A=|A|E,AA^-1=E.

矩阵等价

矩阵等价的定义是A经过初等变换化为矩阵B，那么我们称这两个矩阵等价

矩阵等价的充要条件：两个同型矩阵的秩等

299，300

定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为 A 或 $(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$. 当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵.

高次矩阵的运算

1. A 为方阵且 $r(A)=1$

若 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]\xlongequal{记}\alpha\beta^T$，则 $r(A)=1$，

$A^n=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T$

$=\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^{n-1}A=[\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A.$

对于 $m(m>3)$ 阶方阵，若 $r(A)=1$，同样有 $A^n=[\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A$.

285，286

2. 试算 A^2(或 A^3)，找规律

(1) 若 $A^2=kA$，则 $A^n=k^{n-1}A$.（本讲中"一"的"1"是这里的特殊情形）.

(2) 若 $A^2=kE$，则 $\begin{cases} A^{2n}=k^nE（若 k=-1，则 A^4=E）, \\ A^{2n+1}=k^nA. \end{cases}$

亦有可能试算 A^3，如 $A^3=kA$，这些次数不会太高.

3. $A\xlongequal{分解}B+C$

若 $A=B+C,BC=CB$，则

$$A^n=(B+C)^n=B^n+nB^{n-1}C+\frac{n(n-1)}{2!}B^{n-2}C^2+\cdots+C^n.$$

(1) 若 $B=E$，则 $A^n=E+nC+\frac{n(n-1)}{2!}C^2+\cdots+C^n$.

(2) 若 $BC=CB=O$，则 $A^n=B^n+C^n$.

相似的理论

若 $A\sim B$，即 $P^{-1}AP=B$，则 $A=PBP^{-1},A^n=PB^nP^{-1}$.

288

A^* 的性质及其运算

(1) 定义.

$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，A^* 叫作 A 的伴随矩阵

356，357

(2) 公式.

设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，则

① $AA^*=A^*A=|A|E$.

② $|A^*|=|A|^{n-1}$.

③ $(A^T)^*=(A^*)^T$.

④ $(kA)^*=k^{n-1}A^*,(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$.

⑤ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

⑥ $A^*=|A|A^{-1}$.

⑦ $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$.

⑧ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

⑨ $|(A^*)^*|=|A|^{(n-1)^2}$.

⑩ $(AB)^*=B^*A^*$.

289，290

矩阵方程

含有未知矩阵的等式叫做矩阵方程

解矩阵方程，应先根据题设条件和矩阵的运算规则，将方程进行恒等变形，使方程化成 $AX=B$，$XA=B$ 或 $AXB=C$ 的形式，其化简手段如下.

(1) 消公因式，即若 $CA=CB$，且 C 可逆，则 $A=B$.

(2) 提取公因式，即 $CA+CB=C(A+B)$.

(3) 移项，即将已知表达式与未知表达式分别移至方程的两边.

(4) 利用公式.

① $AA^*=|A|E$，A 可逆时，$A^*=|A|A^{-1}$，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 2)$.

② $A^2-E=(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$，$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$.

③ $A^TB^T=(BA)^T$，A,B 可逆时，$A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$，$A^*B^*=(BA)^*$.

3. 求解

(1) 若 A 或 B，或 A 且 B 可逆，则分别可得解为 $X=A^{-1}B,X=BA^{-1},X=A^{-1}CB^{-1}$.

(2) 若 A 不可逆，如 $AX=B$，则将 X 和 B 按列分块，得

$A[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，即 $A\xi_i=\beta_i,i=1,2,\cdots,n$.

求解上述线性方程组，得解 ξ_i，从而得 $X=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$.

295，296，297，298，359

对称矩阵：满足A^T=A的矩阵我们称为对称矩阵

360

矩阵秩的相关结论

秩的定义 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，A 中最大的不为零的子式的阶数称为矩阵 A 的秩，记为 $r(A)$. 也可以这样定义：若存在 k 阶子式不为零，而任意 $k+1$ 阶子式全为零（如果有的话），则 $r(A)=k$，且

368

① $0\leq r(A_{m\times n})\leq\min\{m,n\}$

② $r(kA)=r(A)(k\neq 0)$

③ $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

④ $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

⑤ $r(A+B)\leq r([A,B])\leq r(A)+r(B)$

⑥ $r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right)=r(A)+r(B)$

⑦ $r(A)+r(B)\leq r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}\right)\leq r(A)+r(B)+r(C)$

⑧ $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$

⑨ $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$

370，371，373，374

⑩ $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

⑪ 若 $A^2=A$，则 $r(A)+r(A-E)=n$

⑫ 若 $A^2=E$，则 $r(A+E)+r(A-E)=n$

⑬ $Ax=0$ 的基础解系所含向量的个数 $s=n-r(A)$

⑭ 若 $A\sim\Lambda$，则 $n_i=n-r(\lambda_iE-A)$，其中 λ_i 是 n_i 重特征根

⑮ 若 $A\sim\Lambda$，则 $r(A)$ 等于非零特征值的个数，重根按重数算