660空间解析几何

空间曲线绕着坐标轴旋转得到的曲面方程

594

一般旋转曲面的求法分以下两种.

(1) 曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 旋转形成一个旋转曲面，旋转曲面方程的求法如下.

如图 17-1 所示，设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$. 在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的纬圆上任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件

$$\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{s},\ |\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|,$$

即
$$\begin{cases}m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0,\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2,\end{cases}$$

与方程 $F(x_1,y_1,z_1)=0$ 和 $G(x_1,y_1,z_1)=0$ 联立消去 x_1,y_1,z_1，便可得到旋转曲面的方程.

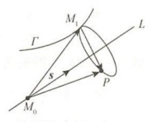

图 17-1

(2) 曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程的求法如下.

如图 17-2 所示，在曲线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过点 M_1 的纬圆上任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OM_1}|$ 和 $z=z_1$，即 $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 且 $z=z_1$，得

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2.$$

从方程组 $\begin{cases}F(x_1,y_1,z)=0,\\G(x_1,y_1,z)=0,\\x^2+y^2=x_1^2+y_1^2\end{cases}$ 中消去 x_1 和 y_1，便得到旋转曲面的方程.

如果能从方程组 $\begin{cases}F(x_1,y_1,z)=0,\\G(x_1,y_1,z)=0\end{cases}$ 中解出 $x_1=\varphi(z)$ 和 $y_1=\psi(z)$，则旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=\varphi^2(z)+\psi^2(z).$$

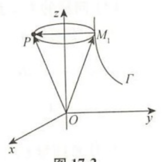

图 17-2

向量运算及其应用

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

(1) 数量积(内积、点积)及其应用.

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

591

③ $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 上的投影.

④ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(2) 向量积(外积、叉积)及其应用.

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，其中 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，用右手规则确定方向(转向角不超过 π)，θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

② $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(3) 混合积及其应用.

① $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

② $\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$ 三向量共面.

(4) 向量的方向角和方向余弦.

① 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**.

② $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**，且 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$.

③ $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**(表示方向的向量).

④ 任意向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(r\cos\alpha,r\cos\beta,r\cos\gamma)=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦，r 为 $\boldsymbol{r}$ 的模.

平面、直线及其位置关系

以下假设平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

① 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

② 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

③ 三点式：$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x-x_2&y-y_2&z-z_2\\x-x_3&y-y_3&z-z_3\end{vmatrix}=0$(平面过不共线的三点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$).

④ 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$(平面过 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 三点).

以下假设平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

① 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

② 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

③ 三点式：$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x-x_2&y-y_2&z-z_2\\x-x_3&y-y_3&z-z_3\end{vmatrix}=0$(平面过不共线的三点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$).

④ 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$(平面过 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 三点).

⑤ 平面束方程.

设 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，则给出 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,&(\text{i})\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,&(\text{ii})\end{cases}$ 表示两个不平行平面的交线 L，事实上这也是下面要说的直线的一般式方程，则方程

$$\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\qquad(\text{iii})$$

所表示的平面必过交线 L，因为(i)，(ii)成立的话，(iii)必然成立，这里 μ,λ 为任意实数，μ,λ 取不同的数，方程(iii)就有不同的表达式，但它们都过直线 L. 我们把满足某种共同规律(这里是指都过直线 L)的平面族叫作平面束.

特别地，若令 $\mu=1$，则(iii)式成为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,\qquad(\text{iv})$$

(iv)是不包含(ii)的平面束方程，因为由(iv)有

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+D_1+\lambda D_2=0,$$

若此式可以是(ii)式，即要求 $\begin{cases}A_1+\lambda A_2=A_2t,\\B_1+\lambda B_2=B_2t,(t\neq0),\\C_1+\lambda C_2=C_2t\end{cases}$ 即 $\begin{cases}A_1=(t-\lambda)A_2,\\B_1=(t-\lambda)B_2,\\C_1=(t-\lambda)C_2,\end{cases}$ 也即 $t-\lambda=\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$，这就和 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例矛盾了，故(iv)不含(ii).

同理可知，若令 $\lambda=1$，则(iii)式成为

$$\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\qquad(\text{v})$$

(v)是不含(i)的平面束方程.

593

① 一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，其中 $\boldsymbol{n}_1\not\parallel\boldsymbol{n}_2$.

【注】其几何背景很直观，是两个平面的交线，且该直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

② 点向式(标准式、对称式)：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

③ 参数式：$\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt,\end{cases}$ $M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点，t 为参数.

592

④ 两点式：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$(直线过不同的两点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2$).

3. 位置关系

(1) 点到平面的距离.

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(2) 直线与直线.

设 $\boldsymbol{\tau}_1=(l_1,m_1,n_1)$，$\boldsymbol{\tau}_2=(l_2,m_2,n_2)$ 分别为 L_1,L_2 的方向向量.

① $L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

② $L_1\parallel L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1\parallel\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

③ 直线 L_1,L_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|}$，其中 $\theta=\min\{(\widehat{\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2}),\pi-(\widehat{\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2})\}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(3) 平面与平面.

设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

① $\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

② $\pi_1\parallel\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

③ 平面 π_1,π_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\theta=\min\{(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2}),\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

方向导数

$$\begin{cases}x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha,\\y-y_0=\Delta y=t\cos\beta,\\z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma.\end{cases}$$

以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离，如图 17-3 所示，若极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**，记作 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$.

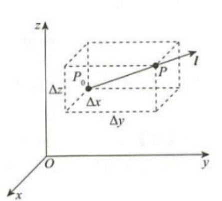

图 17-3

定理(方向导数的计算公式)　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分，则 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to0^+}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{u'_x(P_0)\Delta x+u'_y(P_0)\Delta y+u'_z(P_0)\Delta z+o(t)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

空间曲线的切线和法平面

(1) 用参数方程给出曲线： $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),t\in I.\\z=z(t),\end{cases}$

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2) 用方程组给出曲线： $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

当 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}x=x,\\y=y(x),\\z=z(x).\end{cases}$

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$，其中

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$.

法平面方程：$1\cdot(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$.

空间曲面的切平面和法线

(1) 用参数方程给出曲线： $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),t\in I.\\z=z(t),\end{cases}$

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

(2) 用方程组给出曲线： $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

当 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq0$ 时 $\Rightarrow\begin{cases}x=x,\\y=y(x),\\z=z(x).\end{cases}$

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x_0),z'(x_0))$，其中

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$.

法平面方程：$1\cdot(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$.

595

(1) 用隐式方程给出曲面： $F(x,y,z)=0$.

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(F'_x\big|_{P_0},F'_y\big|_{P_0},F'_z\big|_{P_0}\right)$.

切平面方程：$F'_x\big|_{P_0}\cdot(x-x_0)+F'_y\big|_{P_0}\cdot(y-y_0)+F'_z\big|_{P_0}\cdot(z-z_0)=$

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F'_x\big|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{F'_y\big|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{F'_z\big|_{P_0}}$.

(2) 用显式函数给出曲面： $z=f(x,y)\Rightarrow f(x,y)-z=0$.

其在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$.

此法向量方向向下.

切平面方程：$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$.

空间曲线在坐标面的投影

以求空间曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为例. 将 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去，得到 $\varphi(x,y)=0$，则曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线包含于曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

梯度

在一个数量场中，函数在给定点处沿不同的方向，其方向导数一般是不相同的，现在我们所关心的是沿哪一个方向其方向导数最大？最大值是多少？函数在点 P 沿哪一方向增加的速度最快？为此引进一个很重要的概念——梯度.

定义

定义 2　设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数，则定义

$$\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的**梯度**.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=\left|\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0}\right||\boldsymbol{l}^{\circ}|\cos\theta=\left|\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0}\right|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\mathbf{grad}\,u\big|_{P_0}$ 与 $\boldsymbol{l}^{\circ}$ 的夹角，当 $\cos\theta=1$ 时，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$ 有最大值.

【注】函数在某点的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

散度

4. 散度

定义 3　设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

叫**散度**.

【注】(1) 考小题时，直接套公式即可.
(2) 稍作解释：$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ 表示场在 (x,y,z) 处源头的强弱程度，若 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ 在场内处处成立，称 $\boldsymbol{A}$ 为**无源场**.

旋度

5. 旋度

定义 4　设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$$

叫**旋度**.

【注】(1) 考小题时，直接套公式即可.
(2) 稍作解释：$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ 表示场在 (x,y,z) 处最大旋转趋势的度量，若 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 在场内处处成立，称 $\boldsymbol{A}$ 为**无旋场**.