660线性代数第一章思维导图

行列式计算

具体型行列式

- 主对角线行列式|A|=abc...
- 副对角线行列式(-1)^(n-n^2)/2abc...
- 消零转化为主对角线行列式，或者展开公式是常用的 276、277、278
- (3) 拉普拉斯展开式.

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

- (4) 范德蒙德行列式.

  记
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i), n \geqslant 2.$$

  279
- 递推法：建立Dn，Dn-1的关系式

抽象型行列式

- 利用矩阵的性质C=AB.|C|=|A||B| 283，344，345，
- 利用矩阵乘法C=AB拆开运算
- 利用相似的性质，行列式=特征值之积
- 利用恒等变形表示出A的抽象表达式 349

基本公式

① $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

② $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$

③ $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$

④ $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*, (-\boldsymbol{A})^* = (-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$

⑤ $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

⑥ $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$

⑦ $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$

⑧ $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

⑨ $|(\boldsymbol{A}^*)^*| = |\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$

⑩ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

348

行列式的定义

n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}], \boldsymbol{\alpha}_2 = [a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}], \cdots,$ $\boldsymbol{\alpha}_n = [a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}]$ 组成的，其(运算规则的)结果是以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的(有向)体积. 281，341

行列式的性质

性质 1 行列互换，其值不变，即 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2 行列式中某行(列)元素全为零，则行列式为零.

性质 3 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例，则行列式为零.

性质 4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

282，346

- 行列式交换两行或者两列行列式填写负号

性质 6 行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k \neq 0)$，则 k 可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】(1) 本书用 k ⓘ表示第 i 行乘 k，$k[j]$ 表示第 j 列乘 k.

(2) 称上述等式从右到左的运算为**"倍乘"**性质.

性质 7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，行列式的值不变.

行列式展开定理

余子式

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

代数余子式

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

342

(3) 行列式按某一行(列)展开的展开公式.

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, n), \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

280，343