Tema d'esame modulo CUDA
Pricing di derivati finanziari su GPU
Anno accademico 2021/2022
Dipartimento di Fisica

Autore: Marco Airoldi

marcoairoldi@yahoo.it

Doc. version 1.00

24 giugno 2022

Indice

Capitolo 1

Tema esame
Modulo Cuda/Monte Carlo

1.1 Esercizio serie a.16

1.1.1 Introduzione

Il presente capitolo è dedicato all'esposizione e discussione di una esercitazione relativa all'implementazione del metodo Monte Carlo in un'architettura GPU.
Nel primo paragrafo verrà presentato il contratto di una opzione di cui si richiede il calcolo del prezzo, tramite una simulazione Monte Carlo. Nel par. 1.1.3 vengono elencati i dati di mercato ed i dati anagrafici da considerare nello sviluppo del tema d'esame. Infine nel par. 1.1.4 vengono esposti i punti su cui focalizzare l'esercitazione.
L'obiettivo del presente tema d'esame non è solo quello di svolgere un semplice esercizio di programmazione, implementando una simulazione Monte Carlo in Cuda, ma di mostrare piuttosto come l'integrazione dell'approccio numerico con considerazioni qualitative ed analitiche, sia in grado di portare ad una piena comprensione del problema.
L'implementazione della libreria di calcolo dovrà essere effettuata su architettura GPU utilizzando il linguaggio CUDA. Parte delle domande del tema d'esame riguarderanno l'utilizzo di questa architettura parallela.

1.1.2 Definizione del problema

Si considerino le seguenti definizioni di carattere generale:

- Indichiamo con T la data di maturità dell'opzione e con $t = 0$ la data attuale.
- Il sottostante dell'opzione sia un'azione, il cui prezzo al tempo t venga indicato con $S(t)$;

- Supponiamo che il prezzo $S(t)$ dell'azione segua un processo lognormale, con tasso *risk free* r piatto e volatilità σ costante (ovvero l'usuale modello browniano utilizzato in finanza):

$$\frac{dS}{S} = r\,dt + \sigma\,\sqrt{dt}\,w \tag{1.1}$$

- Le opzioni che considereremo in seguito sono di tipo europeo, ovvero il diritto di esercizio può essere fatto valere unicamente alla data di scadenza dell'opzione.

Si considerino i seguenti contratti:

- contratto *forward*:

$$\text{Pay-off}_{\text{forward contract}} = S(T)\,. \tag{1.2}$$

- opzione *call*:

$$\text{Pay-off}_{\text{call}} = \begin{cases} S(T) - E & \text{se } S(T) > E \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} \tag{1.3}$$

la costante E rappresenta lo *strike price* dell'opzione.

- opzione *Put performance corridor*: sitiv

$$\text{Pay-off}_{\text{Put performance corridor}} = N\left[K - \left(\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=0}^{m-1} P_i\right)\right]^+ \,, \tag{1.4}$$

dove:

$$P_i = \begin{cases} 1 & \text{se } |\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\cdot ln\frac{S_{i+1}}{S_i}| < B\cdot\sigma \\ 0 & \text{diversamente} \end{cases} \tag{1.5}$$

B è una costante adimensionale;
N è una costante che rappresenta il nozionale in valuta (ad es. EUR) su cui applicare il valore percentuale calcolato all'interno delle parentesi quadre.
K è una costante adimensionale.
Il parametro m rappresenta il numero di intervalli equispaziati tra $t = 0$ e $t = T$ di ampiezza $\Delta t = T/m$.
Infine il simbolo + in cima alla parentesi quadra rappresenta la parte positiva dell'espressione contenuta nelle parentesi a cui è applicata.
Poiché il pay off dipende dai valori assunti dal sottostante lungo il percorso e non solo dal prezzo a scadenza, il contratto è *path-dependent*.
Il rapporto $P = 1/m\cdot\sum_{i=0}^{m-1} P_i$ che figura nella formula del pay-off rappresenta la percentuale di volte in cui l'azione ha avuto lungo il

cammino un ritorno logaritmico [1] compreso tra una barriera inferiore $-B \cdot \sigma$ ed una barriera superiore $B \cdot \sigma$ (in altri termini la *performance* logaritmica è rimasta confinata all'interno di un certo corridoio simmetrico). I ritorni logaritmici sono calcolati relativamente ai vari intervalli $(t_i; t_{i+1})$, dove i t_i rappresentano le varie date di fixing del contratto. Per semplicità supponiamo che $t_{i+1} - t_i = cost. = \Delta t$.
La costante K può essere interpretata come una sorta di strike price in riferimento a P: in sostanza se la percentuale P calcolata lungo il cammino è minore di K viene pagato un premio pari alla differenza tra K e P, diversamente non viene pagato nulla. È naturale perciò considerare valori di K compresi nell'intervallo $[0, 1]$, interpretando e rappresentando questa grandezza come una percentuale.

[1] Per ritorno logaritmico di un'azione su un intervallo $(t_i; t_{i+1})$ si intende la grandezza $ln\frac{S_{i+1}}{S_i}$

1.1.3 Dati di mercato e dati anagrafici dell'opzione

I dati di mercato ed i dati anagrafici da utilizzare nella risoluzione del problema (vedi domande del paragrafo successivo) sono i seguenti:

```
DATI RELATIVI ALLA SIMULAZIONE MONTE CARLO

Numero di simulazioni Monte Carlo per singolo thread
N = 1K, 5K, 10K, 15K, ..... 50K

Numero di thread per blocco:
tb = 512

Numero di blocchi:
b = 1 -> 128


DATI DI MERCATO

Valore dell'azione all'istante iniziale
S_0 = 100

Valore del tasso risk free
r = 0.15 %

Valore della volatilita', su base annua, del sottostante
sigma = 0%, 1%, 15%, 30%, 60%


DATI ANAGRAFICI DELL'OPZIONE

Valore di B
B = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 4

Valore di K
K = 0, 10%, 20%, .....100%

Valore del nozionale N
N = 1 EUR

Durata dell'opzione T pari a:
T =  1 year, 5 year, 10 year
```

```
Numero di date di rilevazione (fixing)
m = 1, 10, 100, 200

Numero di date di simulazione all'interno dello stesso
intervallo delta t (da utilizzare con lo schema di Eulero)
l = 1 (opzionalmente si possono considerare valori maggiori di 1)
```

In generale i valori riportati sopra sono solo indicativi. È lasciata allo studente la scelta di quali valori assumere per ogni grandezza riportata sopra. In particolare va prestata attenzione a certe combinazioni particolarmente onerose dal punto di vista computazionale (ad es. $N = 50.000$ in congiunzione con $b = 128$ e $m = 100$). Tali casi vanno esclusi dall'esercitazione. Più in generale si raccomanda di valutare con attenzione se l'hardware disponibile è in grado di supportare i calcoli richiesti in tempi ragionevoli.

1.1.4 Obiettivi dell'esercitazione

Alla fine di ogni punto viene riportato quanto segue:

- **Propedeuticità.**
- **Grado di difficoltà: (basso, medio, alto, molto alto)**
- **Tempo di sviluppo atteso: (breve, medio, lungo)**
- **Richiesta ai fini dell'esame: (obbligatorio, facoltativo)**

Si richiede di sviluppare i seguenti punti:

(A) *Scrittura libreria e aspetti implementativi*

(A-1) Sviluppare un programma in Cuda C (o opzionalmente in Cuda C++, vedi punto F-1) che implementi una simulazione Monte Carlo per il pricing dei seguenti contratti finanziari:

(i) un contratto forward sull'azione S da utilizzare come benchmark, vedi equazione (1.2);
(ii) una classica opzione call plain vanilla da utilizzare come benchmark, vedi equazione (1.3);
(iii) l'opzione esotica descritta nell'equazione (1.4).

In particolare si implementi il metodo Monte Carlo utilizzando:

- il metodo approssimato di Eulero;
- la formula integrale esatta.

Nel caso si utilizzi la formula approssimata di Eulero si utilizzino eventualmente come punti di simulazione gli intervalli di ampiezza Δt ulteriormente frazionati in l sotto intervalli (si faccia riferimento ai valori di l riportati nella sezione (1.1.3).

Caratteristiche del punto:

- **Propedeuticità: nessuna**
- **Grado di difficoltà: medio**
- **Tempo di sviluppo atteso: medio/alto**
- **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(A-2) Implementare esattamente lo stesso algoritmo anche su CPU (ovvero emulando su CPU lo stesso calcolo svolto in Cuda).

Caratteristiche del punto:

- **Propedeuticità: (A-1)**
- **Grado di difficoltà: basso/medio**
- **Tempo di sviluppo atteso: basso/medio**
- **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B) *Risultati numerici relativi al pricing Monte Carlo*

(B-1) A fini di check e controllo del codice verificare che:

(i) l'algoritmo eseguito sulle due architetture GPU e CPU, produca gli stessi risultati;

(ii) i prezzi Monte Carlo ottenuti per l'opzione plain vanilla (1.3) e per il contratto forward (1.2) siano coerenti con i risultati analitici esatti.

A tal fine si faccia uso all'interno della libreria di appositi *unit test*.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1), (A-2).**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B-2) A fini di check e controllo del codice, verificare che l'algoritmo scelto per la generazione dei numeri pseudo-casuali multi-stream produca delle sequenze inter-stream tra loro indipendenti. (Si suggerisce a tal riguardo di calcolare il valore atteso $\langle w_i w_{i+1} \rangle$, dei numeri casuali inter-stream [2].)
Alcuni suggerimenti:

* anche questo test può essere implementato come uno *unit test*[3];
* si suggerisce di rendere il test randomico (ovvero generando una sequenza sempre diversa);
* per semplicità/brevità si consiglia di implementare il test solo su CPU.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1), (A-2).**
* **Grado di difficoltà: medio/basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: breve**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

[2] Ovvero considerando i numeri casuali appartenenti a stream/thread distinti ma contigui. In altri termini $w_i(j)$ rappresenta il numero casuale generato sullo stream i-esimo al passo j, mentre $w_{i+1}(j)$ è il numero prodotto sul thread i+1-esimo sempre al passo j. Quindi: $\langle w_i w_{i+1} \rangle = \frac{1}{N_{thread}} \sum_{j=0}^{N_{thread}-1} w_i(j) \cdot w_{i+1}(j)$.

[3] Uno *unit test* è un eseguibile costituito da un main che lancia una funzione di test di una componente del programma, controllandone il risultato (e.g. restituendo 0 se il test è superato oppure 1 in caso di fallimento). Si veda ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Unit_testing

(B-3-a) Produrre un insieme di grafici che mostrino l'andamento per differenti valori di m, fissato N [4], delle seguenti grandezze:

(i) prezzo dell'opzione calcolato con lo schema esatto su GPU;
(ii) prezzo dell'opzione calcolato con lo schema di Eulero su GPU.

Riportare sul medesimo grafico le curve relative a differenti valori di l, per quanto riguarda i dati ottenuti sotto l'approssimazione di Eulero (sottopunto opzionale, applicabile solo nel caso si considerino valori di $l > 1$).

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B-3-b) Produrre un grafico che mostri l'andamento del prezzo dell'opzione (calcolato ad es. con lo schema esatto) al variare del parametro B.
Si dia una interpretazione euristica dell'andamento ottenuto.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: basso**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B-4-a) Produrre un insieme analogo di grafici (come nel punto B-3) che mostrino l'andamento dell'errore nella stima del prezzo dell'opzione per differenti valori di m, fissato N [5], relativamente ai seguenti schemi:

(i) schema esatto implementato su architettura GPU;
(ii) schema di Eulero implementato su architettura GPU.

N.B. Relativamente al punto (B-4-a), l'errore va calcolato percentualmente ed in forma relativa, ovvero: errore MC assoluto / prezzo opzione, espresso in forma percentuale.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

[4] In particolare si faccia riferimento ai valori specificati nel paragrafo 1.1.3
[5] In particolare si faccia riferimento ai valori specificati nel paragrafo 1.1.3

(B-4-b) Fissato m, produrre un grafico con l'andamento dell'errore Monte Carlo (in forma assoluta [6]) al variare di N, verificando che l'errore scali secondo la legge:

$$\epsilon_{MC} = \frac{H(B)}{\sqrt{N}} \tag{1.6}$$

$H(B)$ è una costante dipendente dai dati di mercato, dal tipo di pay-off (e quindi anche dai dati contrattuali) e dal tipo di metodologia Monte Carlo utilizzata (ad es. eventuali tecniche di riduzione della varianza diminuiscono il valore di H). Nella formula è stata indicata esplicitamente la dipendenza dal parametro di tipo anagrafico, B.
Suggerimento: si consideri un grafico in coordinate log-log.
Si costruisca infine un grafico che mostri l'andamento di $H(B)$ al variare di B e se ne dia un'interpretazione.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (B-4-a).**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(B-5-a) Indicato con t_{GPU} il tempo di calcolo su GPU, si produca un insieme di grafici che mostrino l'andamento di t_{GPU}, al variare del numero complessivo di thread istanziati (o equivalentemente al variare del numero di blocchi) per differenti valori di m.
Si utilizzi nella generazione dei cammini lo schema esatto. In particolare si verifichi la presenza nel grafico di scalini/terrazze e se ne dia la corretta interpretazione.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1) e (A-2).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B-5-b) Indicato con g il fattore di guadagno, definito come il rapporto tra il tempo di calcolo su CPU e quello su GPU:

$$g = \frac{t_{\text{CPU}}}{t_{\text{GPU}}} , \tag{1.7}$$

si produca un insieme di grafici (analogamente a quanto fatto nel punto B-3) che mostrino l'andamento del fattore di guadagno, g,

[6] Ovvero senza dividere l'errore per il prezzo dell'opzione

al variare di m.
Si utilizzi nella generazione dei cammini lo schema esatto.
Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1) e (A-2).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio**

(B-6) Si risponda alle seguenti domande:

(i) Nel caso si utilizzi l'approssimazione di Eulero per generare i cammini, può accadere che il prezzo simulato dell'azione sia negativo?

(ii) Quali strategie correttive si possono adottare per evitare che ciò avvenga?

(iii) Indicato con $\Delta t = T/m$ la lunghezza temporale del singolo step Monte Carlo, è più probabile che tale problema insorga con Δt piccolo oppure con Δt grande? Per quale motivo?

(iv) In quale limite i risultati ottenuti con l'approssimazione di Eulero convergono a quelli ottenuti con la formula integrale esatta?

(v) Si mostri l'andamento della discrepanza tra il prezzo Monte Carlo ottenuto con lo schema esatto e quello ottenuto con lo schema di Eulero, al variare del parametro l per diversi valori di m. (Sottopunto opzionale, applicabile solo nel caso si considerino valori di $l > 1$).

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: (A-1).**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: basso**
* **Ai fini dell'esame: obbligatorio (a parte il sottopunto (v))**

(B-7) Si calcoli tramite il Monte Carlo, qual è la probabilità che la performance logaritmica dell'azione ($\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \cdot ln\frac{S_{i+1}}{S_i}$) cada sempre all'interno del corridoio $(-B \cdot \sigma, +B \cdot \sigma)$ in tutti gli intervalli considerati[7].
Si calcoli anche l'errore Monte Carlo di tale stima.
Rappresentare in un grafico l'andamento di queste due grandezze (probabilità per la performance logaritmica di rimanere sempre all'interno del corridoio ed il relativo errore Monte Carlo) al variare di B e se ne dia una interpretazione euristica.
Caratteristiche del punto:

[7] Ovvero: $-B \cdot \sigma < \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \cdot ln\frac{S_{i+1}}{S_i} < B \cdot \sigma \qquad \forall i$

- ∗ **Propedeuticità: (A-1).**
- ∗ **Grado di difficoltà: medio**
- ∗ **Tempo di sviluppo atteso: basso**
- ∗ **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(C) *Formule di valutazione esatte*

(C-0) Si calcoli il prezzo esatto del derivato nei seguenti casi limite: i) $B = 0$; ii) $K = 0$ e iii) $K = 1$.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: punto (A) per quanto riguarda il confronto con i dati Monte Carlo. Nessuna per quanto riguarda la derivazione della formula analitica.**
* **Grado di difficoltà: basso**
* **Tempo di sviluppo atteso: Breve**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(C-1) Si sviluppino i due seguenti sotto-punti: i) ricavare una formula analitica esatta per $m = 1$; ii) confrontare i risultati ottenuti dalla formula esatta con le stime Monte Carlo.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: punto (A) per quanto riguarda il confronto con i dati Monte Carlo. Nessuna per quanto riguarda la derivazione della formula analitica.**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: Breve**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(C-2) Si sviluppino i due seguenti sotto-punti: i) ricavare una formula analitica asintotica valida per $m \to \infty$; ii) confrontare i risultati ottenuti dalla formula asintotica con le stime Monte Carlo ottenute per m sufficientemente grande.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: punto (A) per quanto riguarda il confronto con i dati Monte Carlo. Nessuna per quanto riguarda la derivazione della formula analitica.**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: breve**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(C-3) Si sviluppino i due seguenti sotto-punti: i) ricavare una formula analitica o semi-analitica[8] valida per m generico; ii) confrontare i risultati ottenuti dalla formula di cui al punto precedente con le stime Monte Carlo.

Caratteristiche del punto:

---

[8] Per formula semi-analitica si intende una formula per la cui valutazione si ricorra a metodi numerici

* **Propedeuticità: punto (A) per quanto riguarda il confronto con i dati Monte Carlo. Nessuna per quanto riguarda la derivazione della formula analitica.**
* **Grado di difficoltà: medio/alto**
* **Tempo di sviluppo atteso: breve**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(D) *Tecniche di riduzione dell'errore*

(D-1) Allo scopo di ridurre gli errori statistici, si tenti di utilizzare: la tecnica della variabile antitetica [9]. In particolare si richiede di:
i) valutare il prezzo dell'opzione ed il relativo errore utilizzando la tecnica della variabile antitetica;
ii) calcolare e discutere la riduzione degli errori statistici (ovvero le deviazioni standard sui pay-off) ottenuta tramite l'uso della variabile antitetica. In particolare, per questo tipo di pay-off, il metodo della variabile antitetica risulta efficace? Si dia una interpretazione euristica dei risultati ottenuti.

Caratteristiche del punto:

- **Propedeuticità: (A-1), (B-3) e (B-4).**
- **Grado di difficoltà: basso**
- **Tempo di sviluppo atteso: medio**
- **Ai fini dell'esame: facoltativo**

[9] Si faccia riferimento alle note del corso

(E) *Processi stocastici*

(E-1) Sviluppare una funzione (o una classe, nel caso si utilizzi il C++) per gestire un processo alternativo a quello lognormale standard, in particolare tale processo è definito sostituendo nella formula (1.1), al posto della variabile gaussiana w a media nulla e varianza unitaria, una variabile stocastica alternativa z (sempre a media nulla e varianza unitaria), definita come segue:

$$z = \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } 1/2 \\ -1 & \text{con probabilità } 1/2 \end{cases} \tag{1.8}$$

Il prezzo dell'azione evolve secondo la legge:

$$S(t_0 + \Delta_t) = S(t_0)\, e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta_t + \sigma\sqrt{\Delta_t}\, z} \,. \tag{1.9}$$

Il processo in questione è quindi caratterizzato da una variabile stocastica bimodale e consente unicamente un movimento al ribasso o al rialzo dell'azione, su un dato intervallo di tempo Δt.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: punto (A-1).**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(E-2) Si consideri il pricing di un'opzione call plain vanilla, spezzando l'intervallo $(0, T)$ (T essendo la data di maturità dell'opzione) in l intervalli di ampiezza $\Delta t = T/l$. Effettuare la valutazione del prezzo di tale opzione con il metodo Monte Carlo, utilizzando rispettivamente il processo lognormale standard e quello binario. Confrontare e discutere i risultati ottenuti al variare di l, fornendo una adeguata interpretazione.

Caratteristiche del punto:

* **Propedeuticità: punti (A-1) e (E-1).**
* **Grado di difficoltà: medio**
* **Tempo di sviluppo atteso: medio**
* **Ai fini dell'esame: facoltativo**

(F) *Programmazione in Cuda di tipo avanzato*

(F-1) Si utilizzi (anche solo parzialmente) nella scrittura del codice in cuda una struttura a classi in C++. Nella relazione si mettano in evidenza i vantaggi di questo approccio. Se in congiunzione a questo punto viene svolto anche il punto E-1, si verifichi che la libreria sia strutturata in maniera tale da consentire l'utilizzo del nuovo processo senza apportare modifiche alla libreria (a parte naturalmente l'aggiunta e la definizione di una nuova classe per la descrizione del processo binario). Si discuta quali siano i vantaggi di un tale approccio e se questi siano o meno ottenibili nell'ambito di una programmazione procedurale.

Caratteristiche del punto:

- **Propedeuticità: punti (A-1).**
- **Grado di difficoltà: medio/alto**
- **Tempo di sviluppo atteso: alto**
- **Ai fini dell'esame: facoltativo**

1.1.5 Relazione

I risulti ottenuti devono essere presentati sotto forma di breve discussione scritta, con l'ausilio eventuale di grafici e tabelle.
La relazione deve contenere in appendice il listato integrale del codice.
La relazione (in formato pdf) e l'intera libreria (file sorgenti e un sintetico diagramma della libreria) vanno prodotti in formato elettronico (file .zip).
Nel testo d'esame sono presenti diversi punti facoltativi per permettere al gruppo di lavoro di approfondire i temi di proprio interesse. NON è richiesto lo sviluppo di tutti o di buona parte dei punti facoltativi per ottenere il massimo punteggio; gli studenti sono invece invitati a scegliere quali punti approfondire tra quelli indicati come facoltativi.