Overview

Footman

这篇文章是基础范畴论的概览. 我们首先从 category 的定义讲起:

Definition 1 (Category)**.** 一个 范畴 **(category)** $\mathscr{C}$ 是指的以下几个组件:

- 对象 **objects** X, Y, Z, 把他们的全体记做 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. 在不引起混淆的情况下, 我们把 X 是 $\mathscr{C}$ 的对象, 记做 $X \in \mathscr{C}$.
- 态射 **morphisms** f, g, h, 并把他们的全体记做 $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$. 类似的, 我们也把 f 是 $\mathscr{C}$ 的态射, 记做 $f \in \mathscr{C}$.
- 映射 $\mathrm{id}\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$, $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

我们记 $f\colon X \to Y$ 若有 $f \in \mathscr{C}$, $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$, $\mathrm{id}_X := \mathrm{id}(X)$. 并称 $f\colon X \to Y$ 是一个从 X 到 Y 的态射. 并且这些态射应满足以下几条公理:

- $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 我们称这一态射为 X 的 单位态射 **identity morphism**
- 对于任意态射 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, 对应着一个 $h\colon X \to Z$, 我们把它记做 $g \circ f$, 称为 g, f 的复合 **composition**
- 对于任意态射 $f\colon X \to Y$, $h\colon W \to X$, 有 $f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_X \circ g = g$
- 并且对于任意的态射 $h\colon W \to X$, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ 有 $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$.

Example 2. 所有集合全体构成一个范畴Set, 其中对象是集合, 态射是映射, 单位态射就是单位映射. 容易验证这样的定义上述公理.

Definition 3 (Functor)**.** 对于两个范畴 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$, 我们称一组映射 $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, $F_1\colon \mathrm{Mor}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{D})$ 是从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子 **Functor**, 若它们满足

- 对任意的态射 $f\colon X \to Y$ 有 $F_1(f)\colon F_0(X) \to F_0(Y)$.
- $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$.
- $F_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F_0(X)}$.

在不引起混淆的情况下, 我们记 $F(X) := F_0(X)$, $F(f) := F_1(f)$ 并记这一组映射为 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$.

Example 4 (Category of categories)**.** 对于任意范畴 $\mathscr{C}$, 我们有函子 $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, 满足 ${\mathrm{id}_{\mathscr{C}}}_0(X) = X$, ${\mathrm{id}_{\mathscr{C}}}_1(f) = f$. 并且对于任意函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, 我们可以定义函子的复合 $G \circ F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, 其中 $(G \circ F)_0(X) := G_0(F_0(X))$, $(G \circ F)_1(f) := G_1(F_1(f))$.

可以验证所有的范畴构成一个范畴, 我们称这个范畴为 **category of categories**, 并记做 Cat.

Example 5 (Dual Category)**.** 对于任一范畴 $\mathscr{C}$, 我们称范畴 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathscr{C}$ 的**dual category**, 若 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 满足:

- 对象 $X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \iff X \in \mathscr{C}$.
- 态射 $f\colon X \to Y \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \iff f\colon Y \to X \in \mathscr{C}$.

此时 $(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ 是一函子.

Example 6 (Hom-Set/Hom-Functor)**.** 给定局部小 **(locally small)** 范畴 $\mathscr{C}$, 即, 对于每对对象 $X, Y \in \mathscr{C}$, 所有从 X 到 Y 的态射恰组成一个集合, 记为 $\mathscr{C}(X, Y)$, 并称为 $\mathscr{C}$ 中的**Hom-set.**

给定 $f\colon X \to Y$, 我们可以定义映射 $f^*\colon \mathscr{C}(W, X) \to \mathscr{C}(W, Y), (g\colon W \to X) \mapsto (f \circ g\colon W \to Y)$, 和 $f_*\colon \mathscr{C}(Y, Z) \to \mathscr{C}(X, Z), (h\colon Y \to Z) \mapsto (h \circ f\colon X \to Z)$

若定义 $\mathscr{C}(W, f) := f^*\colon \mathscr{C}(W, X) \to \mathscr{C}(W, Y)$, $\mathscr{C}(f, Z) := f_*\colon \mathscr{C}(Y, Z) \to \mathscr{C}(X, Z)$ 则容易验证对任意的对象 $X \in \mathscr{C}$ 有:

$$\mathscr{C}(X, -)\colon \mathscr{C} \to \mathrm{Set} \quad \mathscr{C}(-, X)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$

是两个函子.

Example 7 (Comma Category)**.** 对于任意两个函子 $F\colon \mathscr{C}\to\mathscr{D}, G\colon \mathscr{E}\to\mathscr{D}$, 我们可以定义**comma category** $F\downarrow G$. 其中的对象是 $\mathscr{D}$ 中形如 $f\colon FX\to GY$ 的态射全体, 而对于任意两个对象 $f\colon FX\to GY, f'\colon FX'\to GY'$ 它们之间的态射被定义为 $(g,h)\colon f\to f'$ 其中 $g\colon X\to X'\in\mathscr{C}, h\colon Y\to Y'$ 满足

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(Y) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(X') \arrow[r, "f'"'] & G(Y') \end{tikzcd}$$

交换.

特别的, 若 $F=\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$(resp. $G=\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$), 则记 $\mathscr{C}\downarrow G := F\downarrow G$(resp. $F\downarrow\mathscr{E} := F\downarrow G$). 并且若对于任意的 $X\in\mathscr{C}$ 存在 $d\in\mathscr{D}$ 有 $F(X)=d, F_1(X)=\mathrm{id}_d$ (resp. 对于任意的 $Y\in\mathscr{E}$, 存在 $d\in\mathscr{D}$ 有 $G(X)=d, G(f)=\mathrm{id}_d$), 则记 $d/\mathscr{D} := F\downarrow D$ (resp. 记 $\mathscr{D}/d := \mathscr{D}\downarrow G$). 其中 $d/\mathscr{D}$ 被称为 $\mathscr{D}$ 的 **slice category under** d, $\mathscr{D}/d$ 被称为 $\mathscr{D}$ 的 **slice category over d**.

Definition 8 (Natural Transformation)**.** 对于两个函子 $F,G\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, 我们称映射 $\tau\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\to\mathrm{Mor}(\mathscr{D})$ 是从 F 到 G 的自然变换 **natural transformation**, 若对于任意的态射 $f\colon X\to Y\in\mathscr{C}$, 有如下的图表交换:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

其中 $\tau_X := \tau(X)$. 并记 $\tau\colon F\to G$.

Example 9 (Functor Category)**.** 固定两范畴 $\mathscr{C},\mathscr{D}$, 若 $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, 则我们可以定义自然变换 $\mathrm{id}_F\colon F\to F$ 有, 对于任意的 $X\in\mathscr{C}$, 有 $\mathrm{id}_F(X) := \mathrm{id}_{F(X)}$. 若 $\tau\colon F\to G, \upsilon\colon G\to H$, 我们可以定义新的自然变换 $\upsilon\circ\tau$ 为 $(\upsilon\circ\tau)_X := \upsilon_X\circ\tau_X$.

可以验证从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子全体构成一个范畴, 我们称这个范畴为函子范畴 **functor category**, 并记做 $\mathrm{Fun}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ 或者 $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, 并把 F 到 G 的自然变换全体, 记做 $\mathrm{Nat}(F,G)$.

Definition-Example 10 (Diagram/Diagonal Functor/Cone)**.** 我们称函子 $F\colon\mathscr{J}\to\mathscr{D}$ 的像, 是 $\mathscr{D}$ 中形如 $\mathscr{J}$ 的图表 **diagram**. 对于任意的小范畴 **small category** $\mathscr{J}$ (即 $\mathrm{Ob}(\mathscr{J})\in\mathrm{Set}$), 我们能定义如下函子:

$$\Delta_{\mathscr{J}}\colon\mathscr{D}\to\mathscr{D}^{\mathscr{J}},$$

$$D\mapsto(\Delta_{\mathscr{J}}(D)\colon\mathscr{J}\to\mathscr{D}, J\in\mathscr{J}\mapsto D, f\in\mathscr{J}\mapsto\mathrm{id}_D),$$

并且记 $\mathrm{Cone}(d,F) := \mathrm{Nat}(\Delta_{\mathscr{J}}(d),F)$.

Definition 11 (Adjoint Functor/Adjunction)**.** 若 $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}, G\colon\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ 满足: 存在一族双射

$$\tau_{X,Y}\colon\mathscr{D}(FX,Y)\simeq\mathscr{C}(X,GY)$$

对于给定的 X,Y, $\tau_{X,-}, \tau_{-,Y}$, 是自然变换, 则称 F 是 G 的 **left adjoint**, G 是 F 的 **right adjoint**, 并记作 $F\dashv G$.

定义 $\eta\colon\mathrm{Ob}(\mathscr{C})\to\mathrm{Mor}(\mathscr{C}), X\mapsto\tau_{X,FX}(\mathrm{id}_{FX})$, $\varepsilon\colon\mathrm{Ob}(\mathscr{D})\to\mathrm{Mor}(\mathscr{D}), Y\mapsto\tau^{-1}_{GY,Y}(\mathrm{id}_{GY})$. 容易验证 $\eta\colon\mathrm{id}_{\mathscr{C}}\to GF$, $\varepsilon\colon FG\to\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ 是自然变换. 我们称 η 是**unit**, ε 是**counit**. 之后我们会看到 η(resp. ε) 恰给出了一个 algebraic theory 的 unit(resp. counit).

Definition 12 (limit)**.** 我们称对象 D 是图表 $F\colon\mathscr{J}\to\mathscr{D}$ 的极限 **limit**, 若对任意的 $D'\in\mathscr{D}$ 有双射:

$$\mathrm{Cone}(D',F)\simeq\mathscr{D}(D',D)$$

我们称 D 是图表 $F\colon\mathscr{J}\to\mathscr{D}$ 的余极限 **colimit**, 若 D 是图表 $\mathscr{F}^{\mathrm{op}}$ 的极限.

接下来我们介绍一些基础范畴论相关的定理:

Theorem 13 (RAPL)**.** 右伴随保持极限 right adjoint preserve limit, 即对于 $F\dashv G\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, G 保持极限: 若 D 是图表 $H\colon\mathscr{J}\to\mathscr{D}$ 的极限, 则 GD 是图表 $GH\colon\mathscr{J}\to\mathscr{C}$ 的极限.

Theorem 14 (Freyd's Adjoint Functor Theorem)**.** 对于给定的 small category $\mathscr{D}$, functor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 存在 left adjoint 当且仅当

- G 保持极限.
- (Solution Set Condition) 对于每个 $x \in \mathscr{D}$, 存在 $\{f_i\colon x \to Gy_i\}, I \in \mathrm{Set}$ 使得对任一形如 $h\colon x \to Gy$ 的态射都存在 $i \in I, t\colon y_i \to y$ 满足 $h = Gt \circ f_i$.

Theorem 15 (Completeness Criterion)**.** 对任意范畴 $\mathscr{C}$, 以下几个条件等价

- $\mathscr{C}$ 对任意 (resp. 有限) 图表有极限存在,
- $\mathscr{C}$ 存在任意 (resp. 有限)fibre product, 以及 terminal object.
- $\mathscr{C}$ 存在任意 (resp. 有限)product, 以及 equalizer.

Theorem 16 (Interchange Limits)**.** 若 P 是有限的, 并且 J 是滤过的, 则 the cannonical morphism:

$$\kappa\colon \varinjlim_j \varprojlim_p F(p,j) \to \varprojlim_p \varinjlim_j F(p,j)$$

是 isomorphism.

Theorem 17 (Density)**.** Every presheaf is a colimit of representable presheaf. 事实上, 对每个 $P\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 有

$$P = \mathrm{Colim}\left(\gamma \downarrow P \xrightarrow{Q} \mathscr{C} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}\right)$$

Theorem 18 (Beck's Monadicity Theorem)**.** 令 $\langle F \dashv G, \eta, \varepsilon\rangle\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, 并且 $\langle T, \eta, \mu\rangle$ 是 $\mathscr{C}$ 上 monad, $\mathscr{C}^T$ 是 category of T-algebras 且

$$\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T\rangle\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^T$$

是 T 诱导出的 adjunction, 以下几个条件等价:

- The camparison functor $K\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}^T$ is an isomorphism. (i.e. G is monadic)
- $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ creates coequalizers for those parallel pairs f, g in $\mathscr{D}$ for which Gf, Gg has an absolute coequalizer in $\mathscr{C}$.
- $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ creates coequalizers for those parallel pairs f, g in $\mathscr{D}$ for which Gf, Gg has an split coequalizer in $\mathscr{C}$.

这一定理在未来能有效的帮助我们证明任意 topos 都是 cocomplete 的.

Definition 19 (Kan Extension)**.** 令 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}, K\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, 我们称 $\mathrm{Lan}_K F$ 是 F 沿 K 的 **left Kan extension** (resp. $\mathrm{Ran}_K F$ 是 F 沿 K 的 **right Kan extension**) 若对任意的 $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ 有如下的同构存在:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Lan}_K F, G) \cong \mathrm{Nat}(F, GK) \quad \mathrm{Nat}(G, \mathrm{Ran}_K F) \cong \mathrm{Nat}(GK, F)$$

Theorem 20 (Formal criteria for the existence of an adjoint)**.** 函子 $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 有 left adjoint 当且仅当 the right Kan extension $\mathrm{Ran}_G 1_{\mathscr{D}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 存在并且有 $G\mathrm{Ran}_G 1_{\mathscr{D}} \simeq \mathrm{Ran}_G G$.

Theorem 21 (The Formula)**.** 若 F 的 codomain is cocomplete(complete), 我们有:

$$\mathrm{Lan}_K F(d) \cong \int^{c \in \mathscr{C}} \mathscr{D}(Kc, d) \cdot Fc \quad \mathrm{Ran}_K F(d) \cong \int_{c \in \mathscr{C}} Fc^{\mathscr{D}(d, Kc)} \tag{22}$$

式中 $\mathscr{D}(Kc, d) \cdot Fc$ 是 $\mathscr{E}$ 中 copower, 且 $Fc^{\mathscr{D}(d,Kc)}$ 是 $\mathscr{E}$ 中 power.

Example 23 (Geometric Realization)**.** 令 Δ 是 simplex category, $n \mapsto |\Delta^n|$ gives a functor from the simplex category to the category of topoligical spaces Top.

由于 Top 是 cocomplete 的, 于是我们可以定义 $|-|\colon \mathrm{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Top}$, 这一 functor 被称为 simplicial set 的 **Geometric realization functor**.

事实上，我们还可以有更广义的 geometric realization. 若 M 是 simplicial enriched, tensored, and cocomplete category, 则对 M 上的 simplicial obejct $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to M$, 我们有 X 的 **geometric realization** 为:

$$|X_\bullet| := \int^{n\in\Delta} \Delta^n \otimes X_n.$$

这给出了 functor $|-|\colon M^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to M$.

Definition 24 (Cartesian Closed Category). A category $\mathscr{V}$ is **cartesian closed** iff

- $\mathscr{V}$ has finite product and obviously have terminal object $1 \in \mathscr{V}$,
- for all $A \in \mathscr{V}$, the functor $A \times -\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ has a right adjoint $(-)^A\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$.

Definition 25 (Enriched Category). A $\mathscr{V}$**-enriched category** C consists of:

- a class of objects $\mathrm{Ob}(C)$
- for each pair of objects $x, y \in C$ there is an **object of arrows** $C(x,y) \in \mathscr{V}$
- for each $x \in C$, there is an **identity map** $\mathrm{id}_x\colon 1 \to C(x,x) \in \mathscr{V}$, and for each $x,y,z \in C$, there is an **composition map** $\circ\colon C(y,z) \times C(x,y) \to C(x,z) \in \mathscr{V}$ satisfying the associativity and unit conditions below:

$$\begin{tikzcd} C(y,z)\times C(x,y)\times C(w,x) \arrow[r, "\circ\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\circ"'] & C(x,z)\times C(w,x) \arrow[d, "\circ"] \\ C(y,z)\times C(x,y) \arrow[r, "\circ", "\text{(Associativity)}"'] & C(w,z) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C(x,y) \arrow[r, "\circ\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\circ"'] \arrow[dr, equal] & C(x,y)\times C(y,y) \arrow[d, "\circ"] \\ C(x,x)\times C(x,y) \arrow[r, "\circ", "\text{(Identity)}"'] & C(x,y) \end{tikzcd}.$$

Definition 26 (Enriched Functor). 若 C, D 是 V-enriched category, 则 V**-enriched functor** F 是指的以下几个组件

- 一个映射把对象 $x \in C$ 映成 $Fx \in D$
- 对每个 x, y, 有 V 中态射 $F_{x,y}\colon C(x,y) \to D(Fx, Fy)$ 满足
  i) $F_{x,z} \cdot \circ = \circ \cdot F_{y,z} \times F_{x,y}$
  ii) $F_x, x \cdot \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_{Fx}$

Definition-Example 27 (2-category/(strictly) n-category). 我们称 C 是一个**2-category**, 若 C 是 Cat-enriched category. 记所有的 2-category 全体为 2-Cat. 则,

我们称 C 是一个**(strictly) n-category**, 若 C 是 $(n-1)$-Cat-enriched category.

Definition 28 (Enriched Natural Transformation). A $\mathscr{V}$**-enriched natural transformation** $\tau\colon F \to G$ between $\mathscr{V}$-enriched functor $F, G\colon C \to D$ is given by:

- an arrow $\tau_x\colon 1 \to D(Fx, Gx)$ for each $x \in C$
- for each pair of objects $x, y \in C$, the follow square commutes in $\mathscr{V}$

$$\begin{tikzcd} C(x,y) \arrow[r, "\tau\times F"] \arrow[d, "G\times\tau"'] & D(Fy,Gy)\times D(Fx,Fy) \arrow[d, "\circ"] \\ D(Gx,Gy)\times D(Fx,Gx) \arrow[r, "\circ"'] & D(Fx,Gy) \end{tikzcd}$$

Definition 29 (Obeject of natural transformation). The object in $\mathscr{V}$

$$\mathscr{V}^C(F,G) := \mathrm{coeq}\left(\prod_{z\in C} D(Fz,Gz) \rightrightarrows \prod_{x,y\in C} D(Fx,Gy)^{C(x,y)} \right)$$

is called $\mathscr{V}$**-obejct of natural transformation between functor** F and G.

最后是我比较喜欢的一个定理

Theorem 30 (Enriched Yoneda Lemma)**.** For any small $\mathscr{V}$-category A, $a \in A$, and $\mathscr{V}$-functor $F\colon \to \mathscr{V}$, the cannonical map defines an isomorphism in $\mathscr{V}$:

$$Fa \xrightarrow{\cong} \mathscr{V}^A(A(a,-), F),$$

that is $\mathscr{V}$-natural in both a and F.

以上便是基础范畴论的主要内容, 仅抛砖引玉.