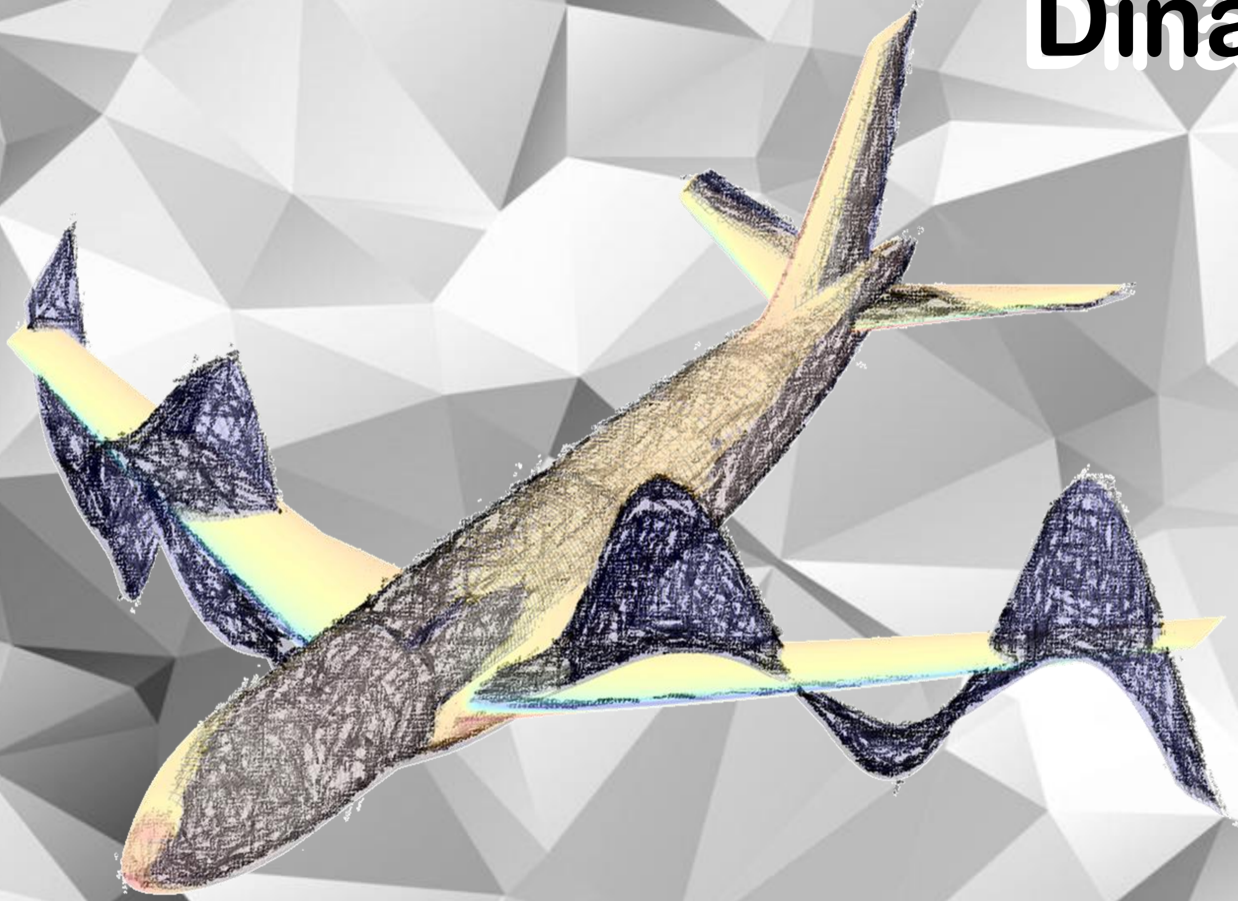
Aeroelasticidade

Dinâmica de Estruturas 2



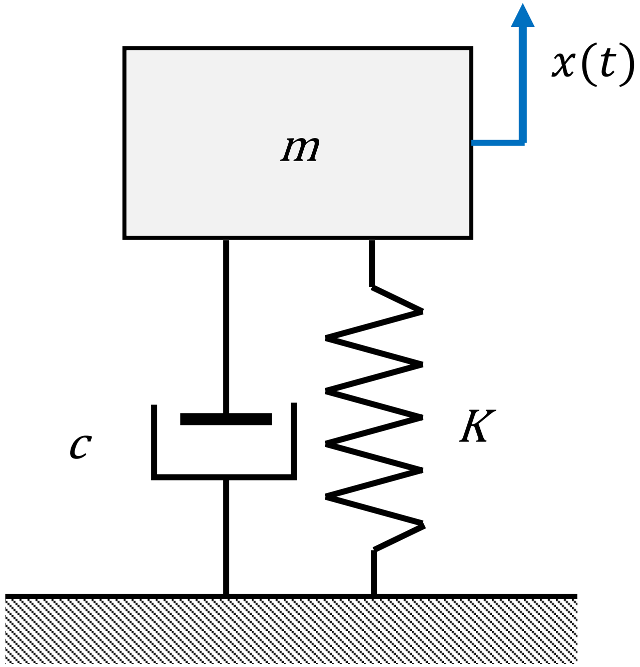
2023/2024

Rui Moreira

SISTEMA COM 1 GRAU DE LIBERDADE

REGIME FORÇADO (HARMÓNICO)

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre (sub-amortecido)



Regime livre:

$$\sum F = 0$$

Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre (sub-amortecido)

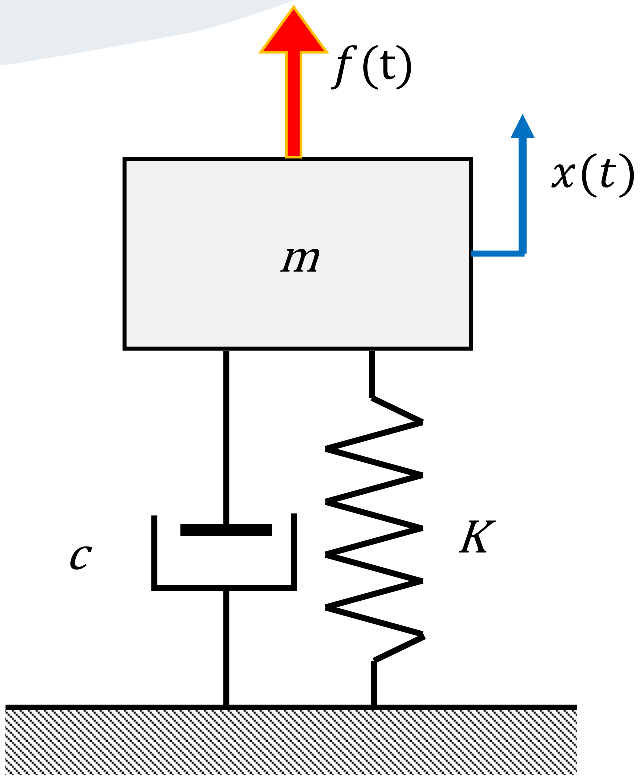
$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi\right)$$

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}$$ Amplitude

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_0 + \xi\omega_n X_0}{X_0\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$ Ângulo de fase

$$c_c = 2m\omega_n \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime forçado



Regime forçado:

$$\sum F \neq 0$$

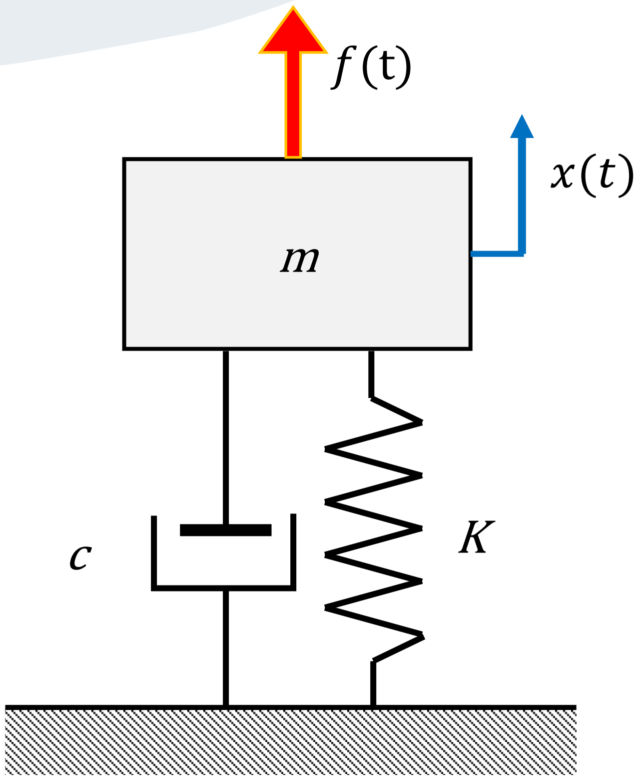
Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime forçado harmónico



Regime forçado harmónico:

$$f(t) = F cos(\omega t)$$

Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F cos(\boldsymbol{\omega} t)$$

ω: frequência angular do carregamento harmónico (excitação harmónica)

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = Fcos(\omega t)$$

Sistema sub-amortecido

A solução da equação de movimento é do tipo:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Resposta particular (ou permanente)

Resposta homogénea (ou natural)

Resposta homogénea:
(determinada pela resposta natural do sistema)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t))$$

Resposta particular:
(determinada pelo carregamento imposto)

$$x_p(t) = B_1\cos(\boldsymbol{\omega} t) + B_2\sin(\boldsymbol{\omega} t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

Resposta particular:
(determinada pelo carregamento imposto)

$$x_p(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}_p(t) = -\omega B_1 \sin(\omega t) + \omega B_2 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 B_1 \cos(\omega t) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t)$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F cos(\omega \mathrm{t})$$

Resposta do sistema em regime estacionário ($x_h = 0$)

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + Kx_p(t) = F cos(\omega \mathrm{t})$$

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2] \cos(\omega t) +$$
$$[-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2] \sin(\omega t) = F cos(\omega \mathrm{t})$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2]\cos(\omega t) +$$
$$[-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2]\sin(\omega t) = \ F cos(\omega t)$$

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2]\cos(\omega t) = \ F cos(\omega t) \quad \text{e} \quad [-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2]\sin(\omega t) = 0$$

$$B_1 = F\,\frac{K - m\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad \text{e} \quad B_2 = F\,\frac{c\omega}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Assim, a resposta particular $x_p(t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$ é definida por:

$$x_p(t) = X_S\,\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_n}$ Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

$$x_p(t) = X_S \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_n}$ - Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ - Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ - Ângulo de fase

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

: fator de amplificação dinâmica

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

$$x_p(t) = X_S \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ - Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ - Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ - Ângulo de fase

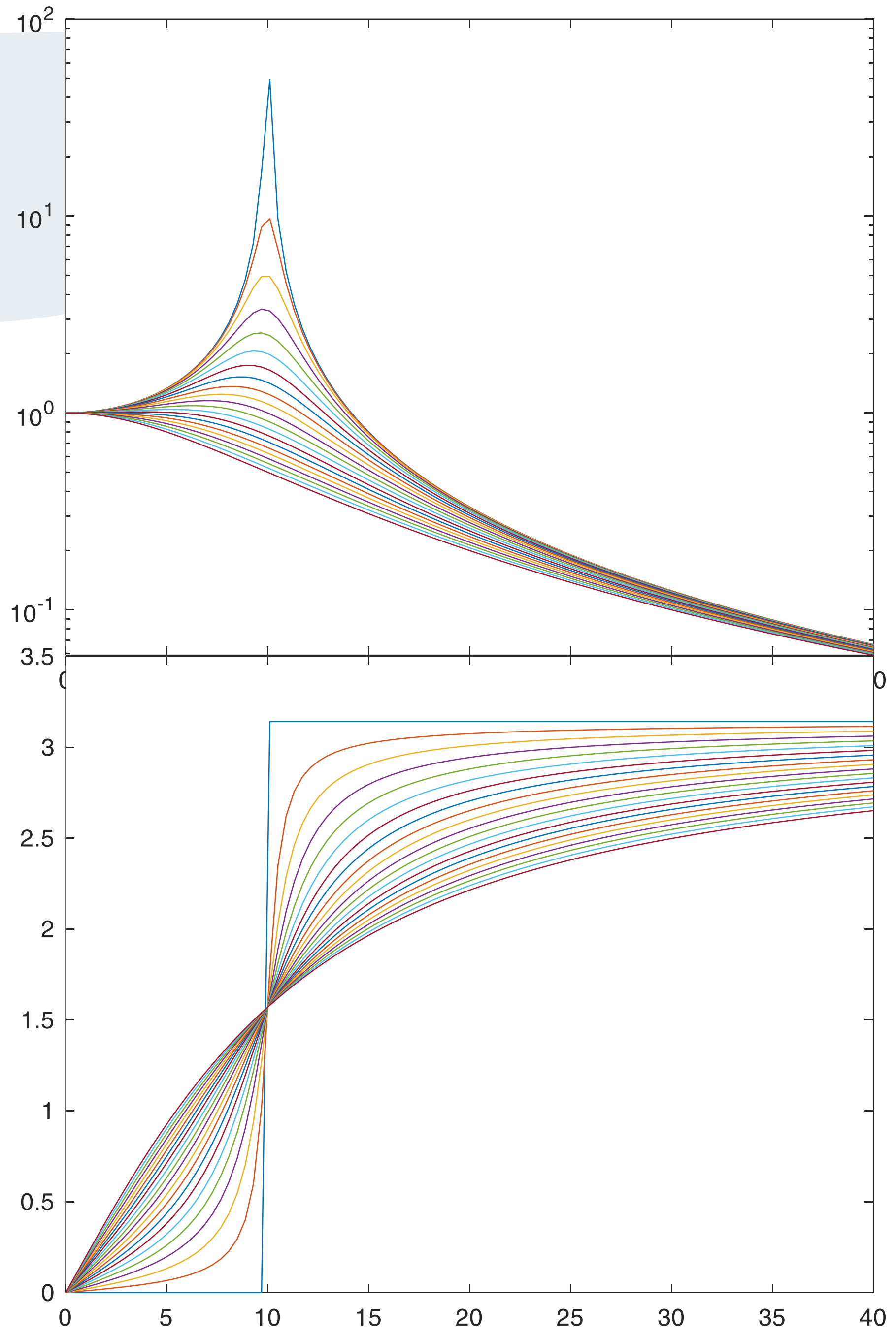
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

: fator de amplificação dinâmica

$\mu_{MAX} \Rightarrow \min[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]$ ➡ $\dfrac{\partial[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{\partial\beta} = 0$ ➡ $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$

$\mu = 1 \Rightarrow (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = 1$ ➡ $1 + \beta^4 - 2\beta^2 + 4\xi^2\beta^2 = 1$ ➡ $\beta = 0$

$\mu = 0 \longleftarrow \beta = \infty$




```
function [x,t] = sdof_harm_1(m,k,c,x0,v0)

%% fator de amplificacao dinamica

wn=sqrt(k/m);
cc=2*sqrt(k*m);
qsi=c/cc;
fn=wn/(2*pi);
wd=wn*sqrt(1-qsi^2);
fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;

w=linspace(0,10000)*wn/2500;
b=w/wn;
miu=1./sqrt((1-b.^2).^2+(2*qsi.*b).^2);
phi=atan2(2*qsi.*b,(1-b.^2));

figure(1);semilogy(w,miu);hold on

figure(2);plot(w,phi);hold on
```

```
>> for c=0:20
sdof_harm_1(1,100,c,0,0)
end
```


Air Track Resonance
with Dieter Hecker
Department of Physics
British Columbia Institute of
Technology

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

: fator de amplificação dinâmica

para $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$ (μ_{MAX})

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-1-2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1-2\xi^2}\right)^2}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = 0 \Rightarrow \mu = \infty$$

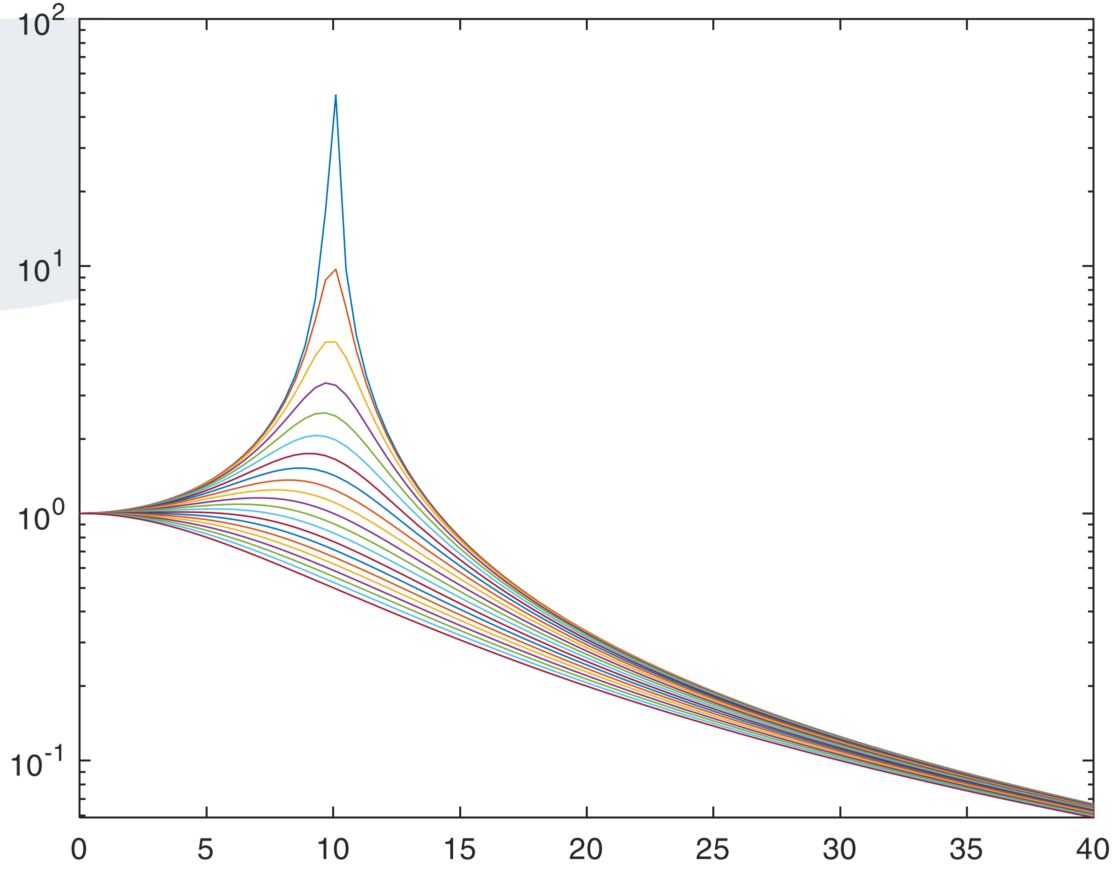
$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

: ângulo de fase

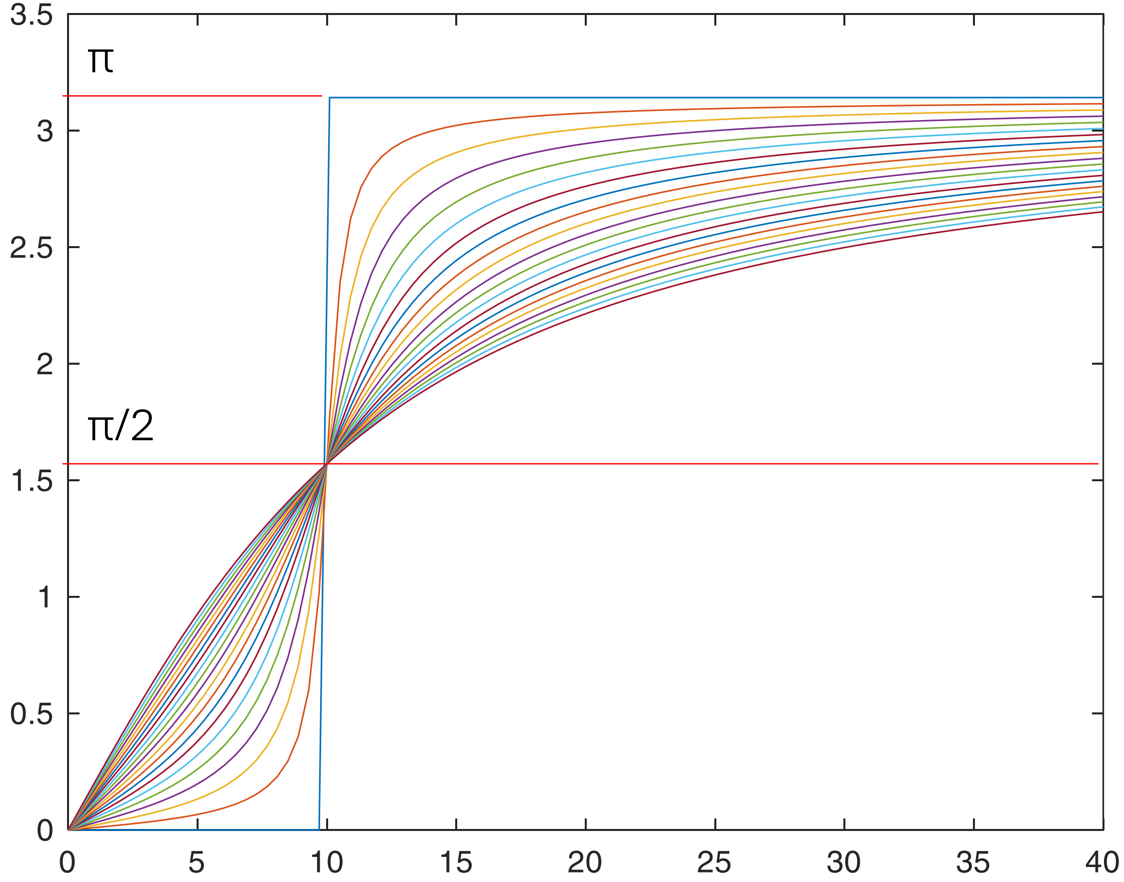
$\beta < 1 \Rightarrow \omega < \omega_n$ $\quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \{\xi = 0 \Rightarrow \phi = 0\}$

$\beta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_n$ $\quad \phi = \frac{\pi}{2}$

$\beta > 1 \Rightarrow \omega > \omega_n$ $\quad \phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\quad \{\xi = 0 \Rightarrow \phi = \pi\}$



10^2
10^1
10^0
10^-1
0
5
10
15
20
25
30
35
40



3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
π
π/2
0
5
10
15
20
25
30
35
40


Driven Mechanical
Oscillator
MIT Physics Lecture
Demonstration Group

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

Resposta do sistema SDOF

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}[A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t] + X_s\mu\cos(\omega t - \phi)$$

Resposta homogénea (ou natural)

Resposta particular (ou permanente)

$X_s = \dfrac{F}{K}$: deslocamento estático

$\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$: fator de amplificação dinâmica

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

Resposta do sistema SDOF para $\beta = 1$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t] + X_s \mu \cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2\xi}$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t] + \frac{X_s}{2\xi}\cos(\omega t - \phi)$$

Considerando condições iniciais nulas ($X_0 = 0$ e $V_0 = 0$)

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = -\frac{X_s}{2\xi}\frac{\omega}{\omega_d} = -\frac{X_s}{2\xi}\frac{\omega}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{X_s}{2\xi}\frac{\beta}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{X_s}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[-X_s \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_d t\right] + \frac{X_s}{2\xi} sin(\omega t)$$

$\beta = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema não amortecido

Resposta do sistema SDOF para $\xi = 0$

$$x(t) = [A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t] + X_s \mu \cos(\omega t - \phi)$$

$$\xi = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

Considerando condições iniciais nulas ($X_0 = 0$ e $V_0 = 0$)

$$x(t) = \left[-\frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos\phi . \cos\omega_n t\right] + \frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos(\omega t - \phi)$$

$\beta < 1 \Rightarrow \phi = 0$

$\beta < 1 \Rightarrow \omega < \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) > \cos(\omega_n)$

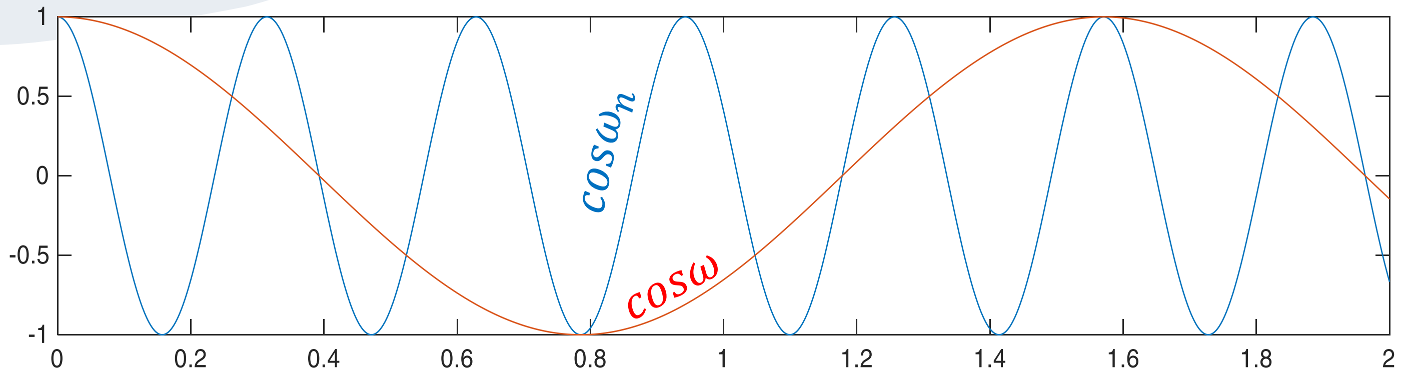
$$x(t) = -\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$

$\beta > 1 \Rightarrow \phi = \pi$

$\beta > 1 \Rightarrow \omega > \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) < \cos(\omega_n)$

$$x(t) = +\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$

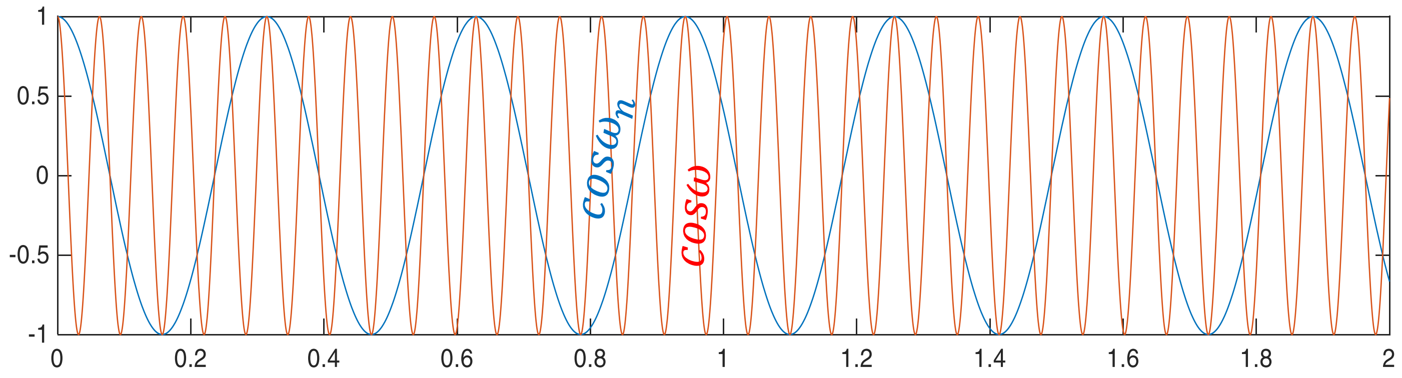
Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico



$\beta < 1 \Rightarrow \phi = 0$

$\beta < 1 \Rightarrow \omega < \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) > \cos(\omega_n)$

$$x(t) = -\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$



$\beta > 1 \Rightarrow \phi = \pi$

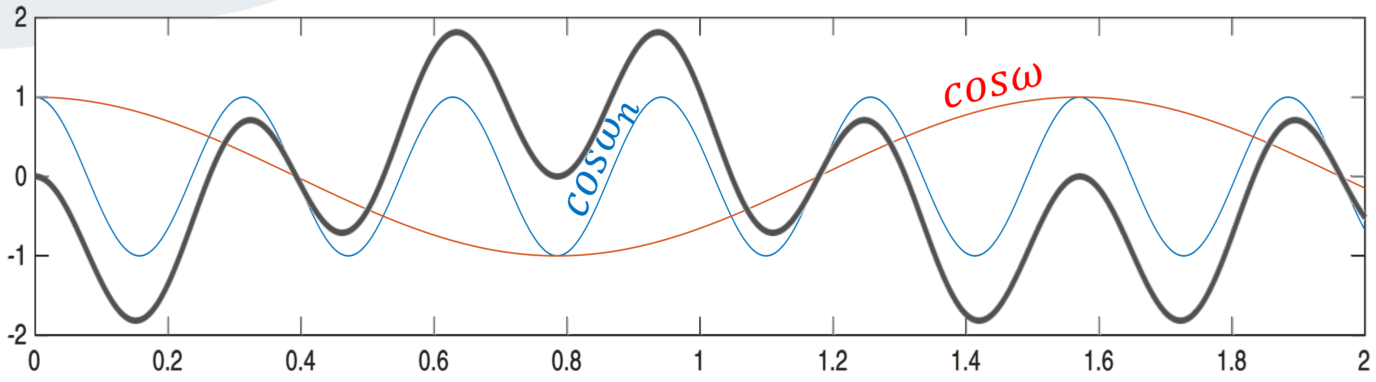
$\beta > 1 \Rightarrow \omega > \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) < \cos(\omega_n)$

$$x(t) = +\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$

Sistema não amortecido

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

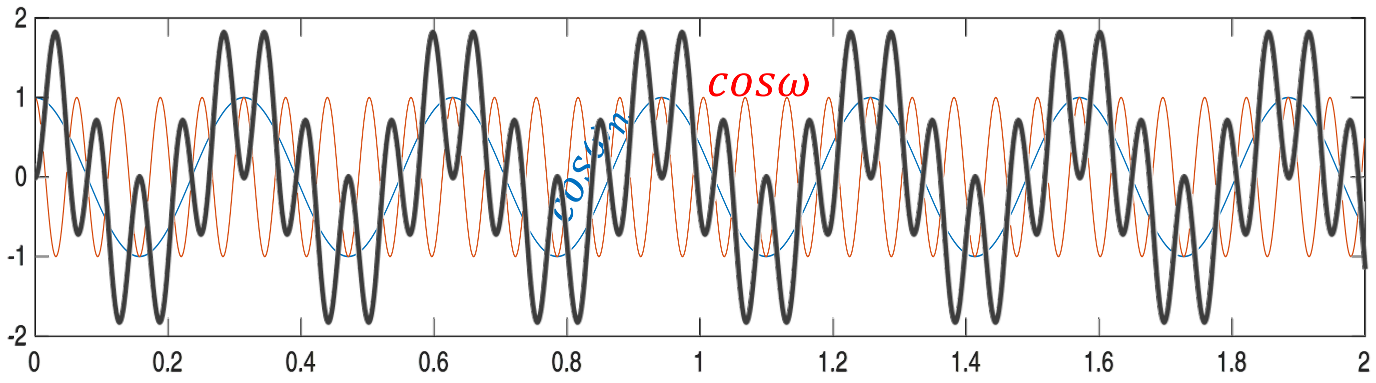
Sistema não amortecido



$\beta < 1 \Rightarrow \phi = 0$

$\beta < 1 \Rightarrow \omega < \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) > \cos(\omega_n)$

$$x(t) = -\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$



$\beta > 1 \Rightarrow \phi = \pi$

$\beta > 1 \Rightarrow \omega > \omega_n \Rightarrow \cos(\omega) < \cos(\omega_n)$

$$x(t) = +\frac{X_s}{|1-\beta^2|}[cos\omega_n t - cos\omega t]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema não amortecido

Resposta do sistema SDOF para $\beta = 1$ e $\xi = 0$

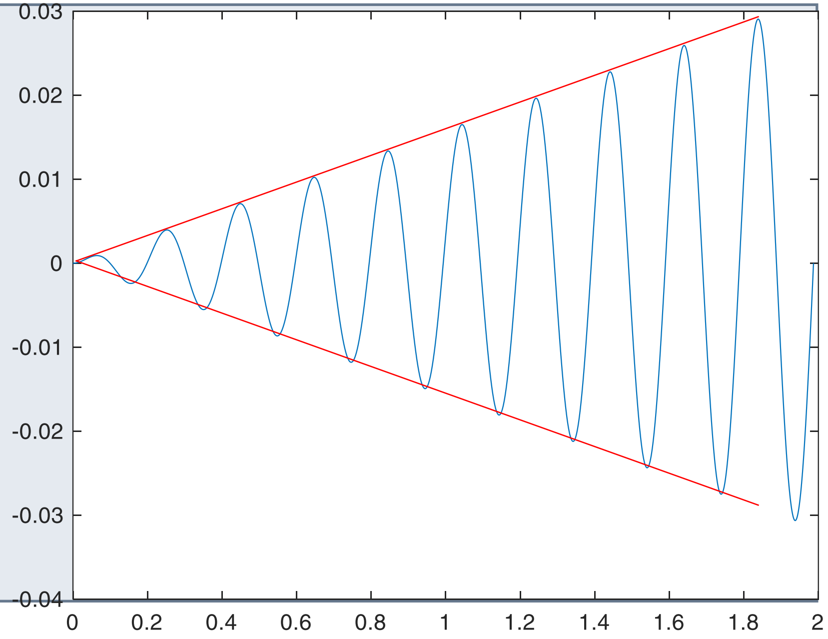
$$x(t) = \left[-\frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos\phi.\cos\omega_n t\right] + \frac{X_s}{|1-\beta^2|}\cos(\omega t - \phi)$$

$$x(t) = \frac{X_s\omega_n^2}{|\omega_n^2 - \omega^2|}[-\cos\phi.\cos\omega_n t + \cos(\omega t - \phi)]$$

Consideremos o limite $\beta \to 1 \Rightarrow \omega \to \omega_n$

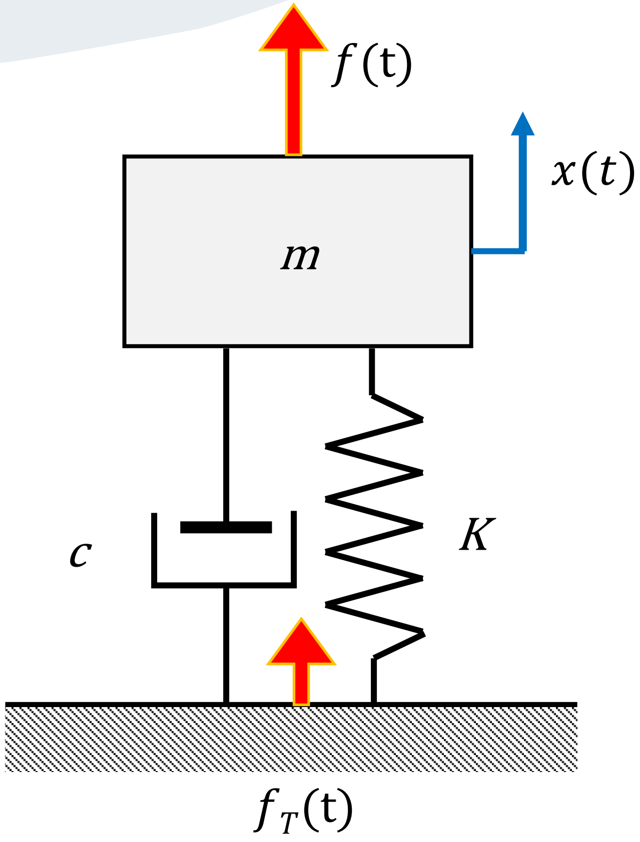
$$x(t) = \frac{g(x)}{f(x)} \qquad \lim_{\omega\to\omega_n}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{\omega\to\omega_n}\frac{dg(x)/d\omega}{df(x)/d\omega} = \frac{1}{2}X_s\omega_n t\sin(\omega_n t)$$

Regra de L'Hopitále



Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Transmissibilidade de força



Força transmitida à base

$$f_T(t) = K\,x(t) + c\dot{x}(t)$$

A resposta homogénea do sistema é dada por:

$$x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

onde

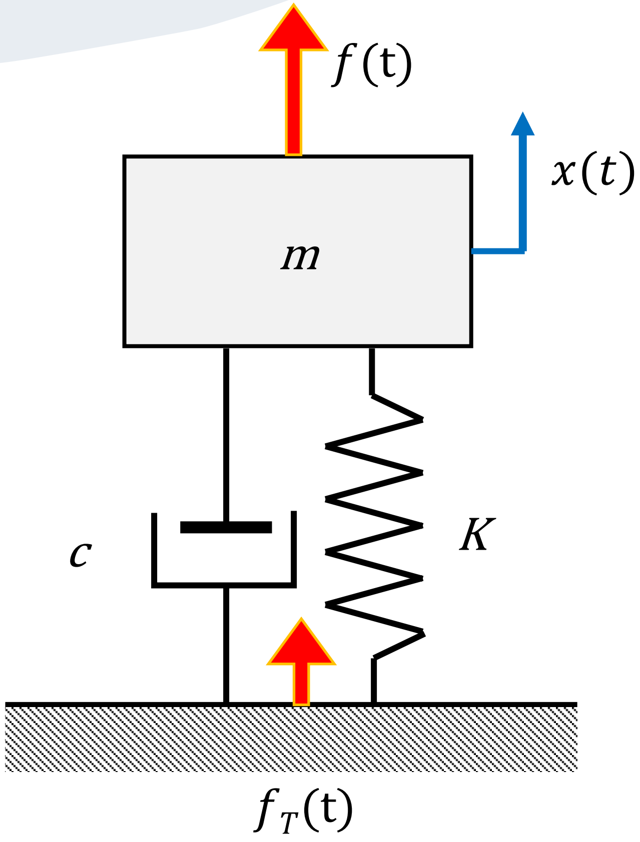
$$X(\omega) = X_s\mu$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$X_s = \frac{F}{K}$$

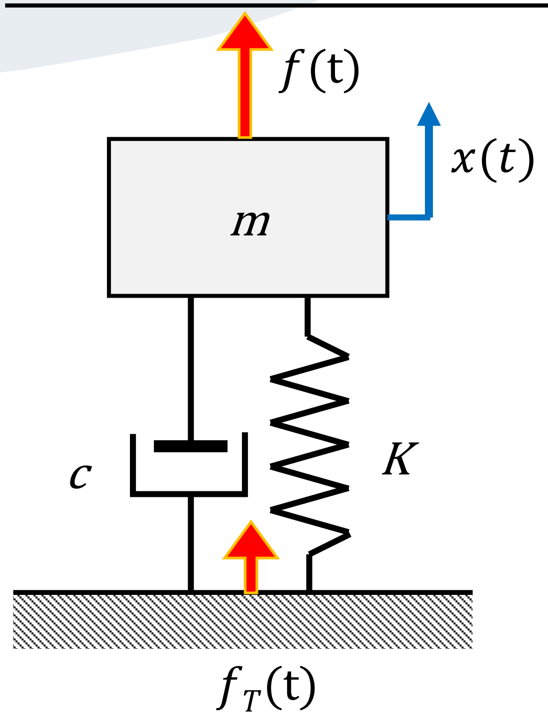
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Transmissibilidade de força



Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Transmissibilidade de força



$$f_T(t) = F.\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}}}_{T_F}\cos(\omega t - \varphi)$$

Força transmitida à base

$$f_T(t) = \mathrm{K}\,x(t) + c\dot{x}(t)$$

A resposta permanente do sistema é dada por:

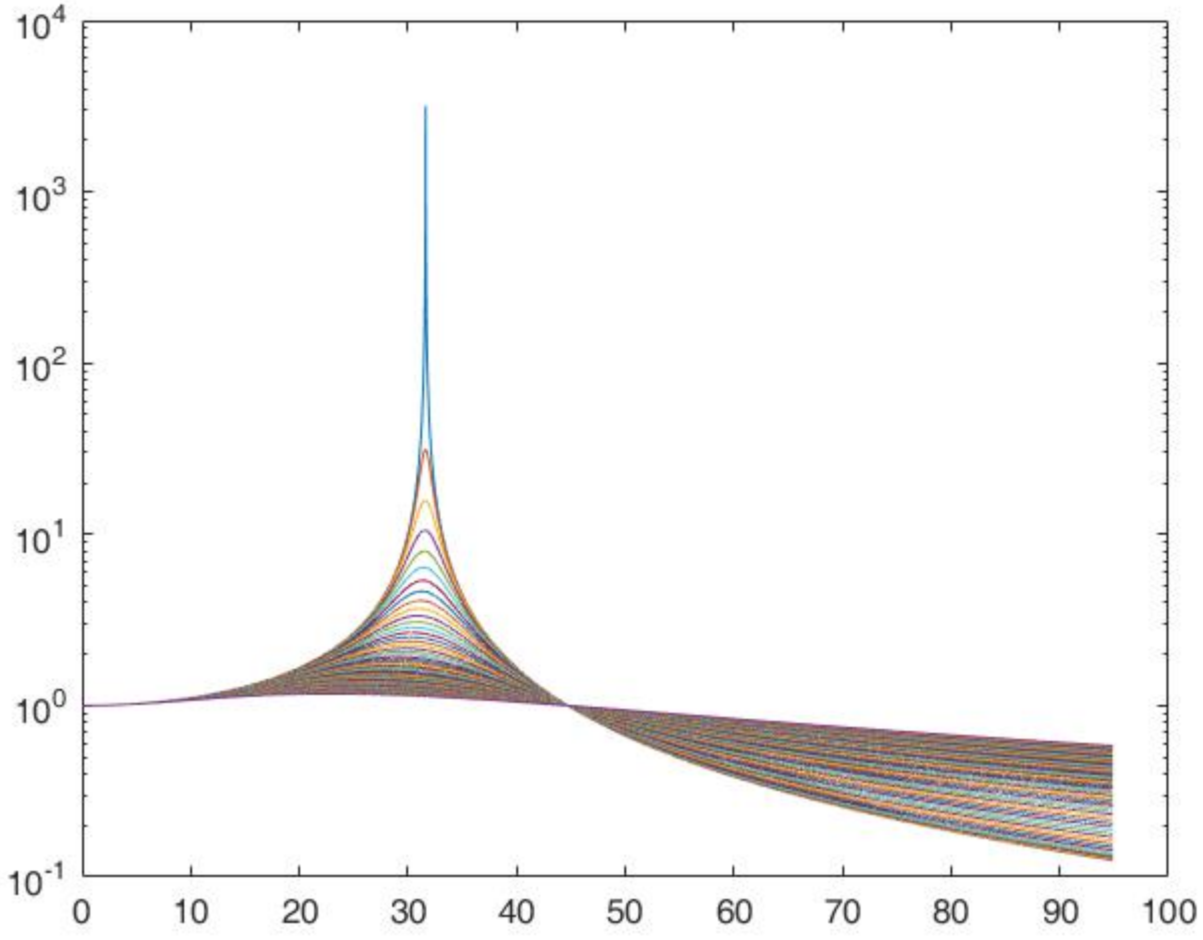
$$x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \mathrm{K}\,x(t) + c\dot{x}(t) \\ &= \mathrm{K}.X(\omega)\cos(\omega t - \phi) - c.X(\omega)\omega\sin(\omega t - \phi) \\ &= \sqrt{K^2 + (\omega c)^2}.X(\omega)\cos(\omega t - \phi - \gamma) \end{aligned}$$

$$\gamma = \mathrm{t}g^{-1}\left(\frac{\omega c}{K}\right) = \mathrm{t}g^{-1}(2\xi\beta)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{K}{K}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{K}\right)^2}.\frac{F}{\cancel{K}}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

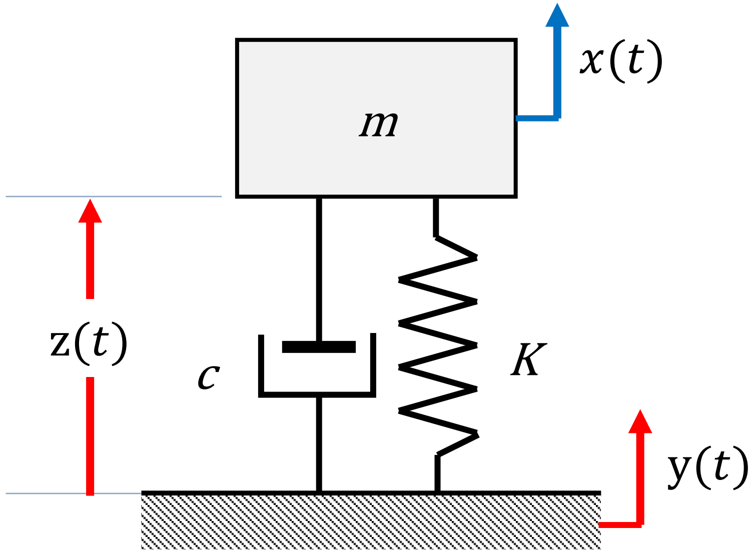
$$\varphi = \phi + \gamma$$




```
function [x,t] = sdof_harmFT(m,k,c)

wn=sqrt(k/m);
cc=2*sqrt(k*m);
qsi=c/cc;
fn=wn/(2*pi);

disp(['wn:',num2str(wn),' rad/s']);
disp(['Cc:',num2str(cc),' N/m.s']);
disp(['Qsi:',num2str(qsi)]);

w=linspace(0,3*wn, 10000);

b=w/wn;
disp(['beta:',num2str(b)]);

TF=sqrt((1+(2*qsi.*b).^2))./sqrt(((1-
b.^2).^2+(2*qsi.*b).^2));

figure(1);
semilogy(w,TF);hold on
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\big(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\big) + K(x(t) - y(t)) = 0$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = c\dot{y}(t) + Ky(t)$$

Considerando o movimento harmónico da base:

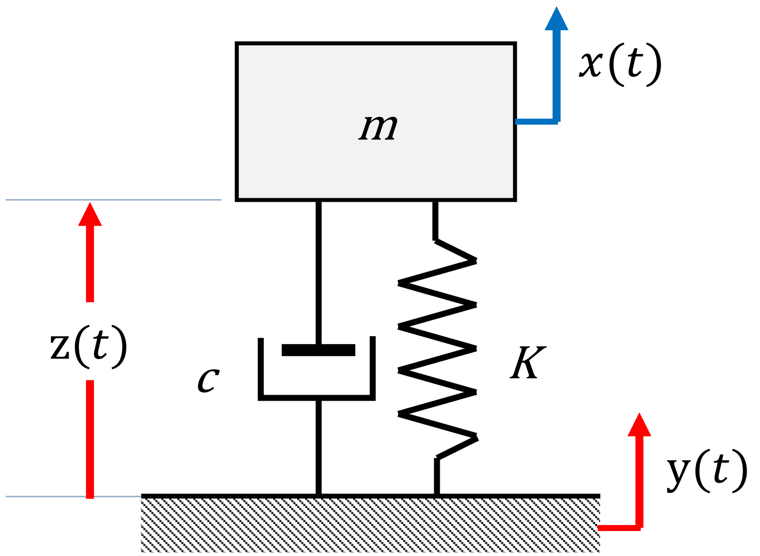
$$y(t) = Ycos(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = -\omega Ysin(\omega t)$$

Equação de movimento pode ser escrita como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f'(t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

Equação de movimento pode ser escrita como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f'(t)$$

$$f'(t) = \sqrt{K^2 + (c\omega)^2}\, Y cos(\omega t - \gamma)$$

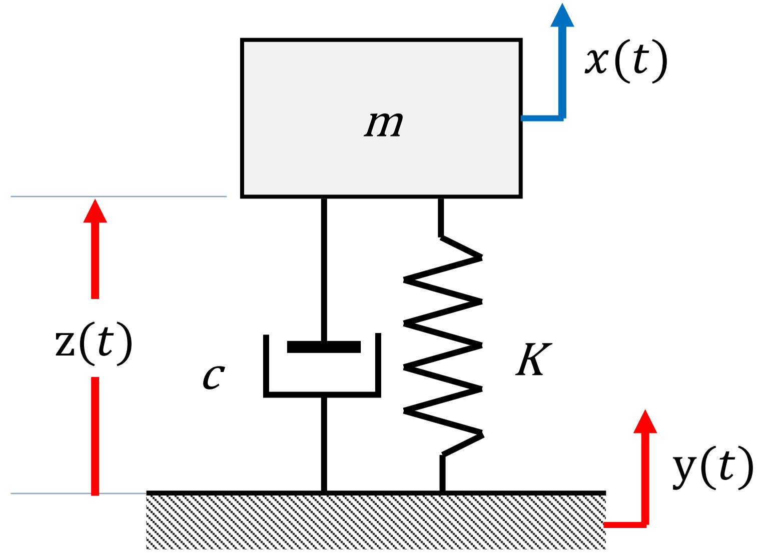
$$\gamma = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{K}\right) = \mathrm{tg}^{-1}(2\xi\beta)$$

Sabendo que a resposta permanente do sistema é dado por:

$$x_p(t) = \frac{F'}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

Sabendo que a resposta permanente do sistema é dado por:

$$x_p(t) = \frac{F'}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

onde:

$$f'(t) = \boxed{\sqrt{K^2 + (c\omega)^2}\, Y} cos(\omega t - \gamma)$$

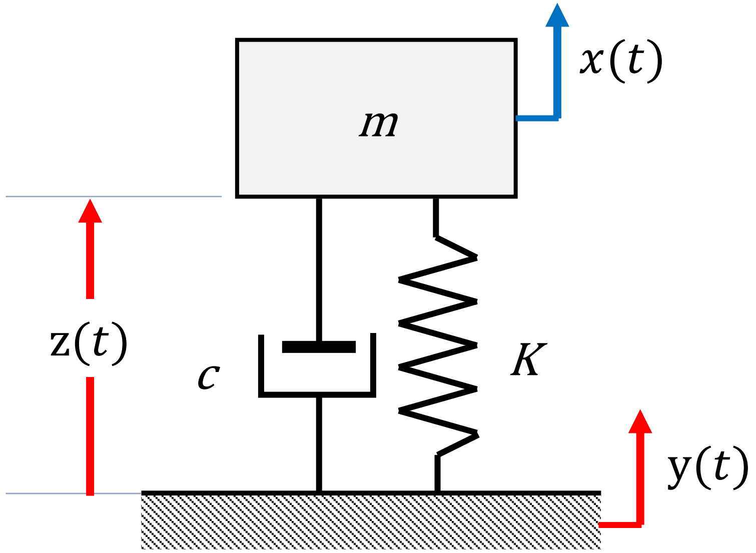
$$\frac{F'}{K} = \frac{\sqrt{K^2 + (c\omega)^2}}{K} .Y = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}.Y$$

Resultando:

$$x_p(t) = Y \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \gamma - \phi)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



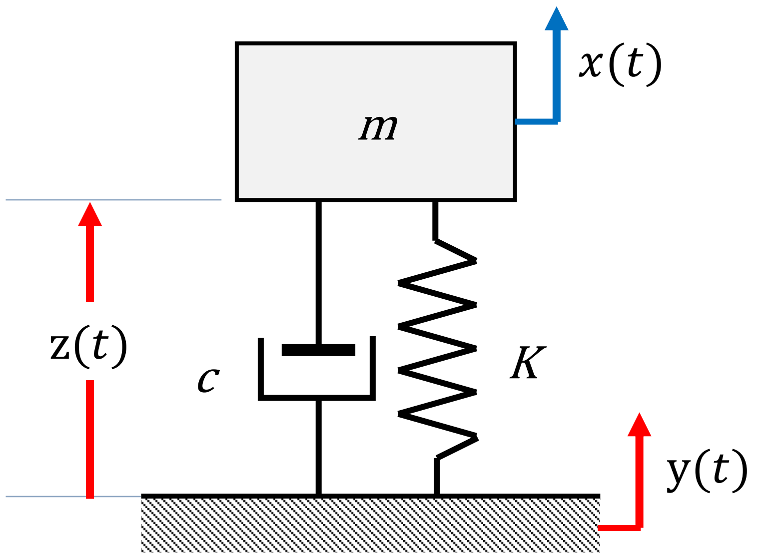
Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

$$x(t) = \boxed{Y \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}} \cos(\omega t - \boxed{\gamma - \phi})$$

$$x_p(t) = X_T(\omega)\ \cos(\omega t - \varphi) \qquad \varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\xi\beta^3}{(1-\beta^2) + (2\xi\beta)^2}\right]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

$$x(t) = Y \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

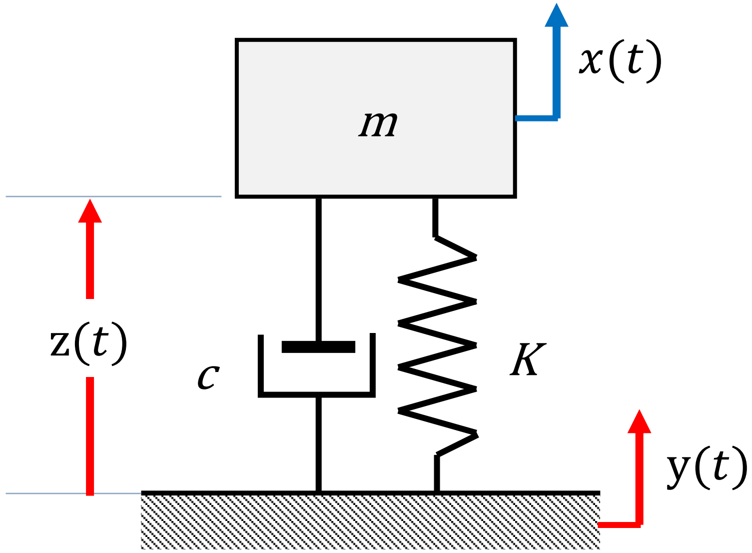
Transmissibilidade de deslocamento ABSOLUTO

$$\mathrm{T_{RA}} = \frac{X_T(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

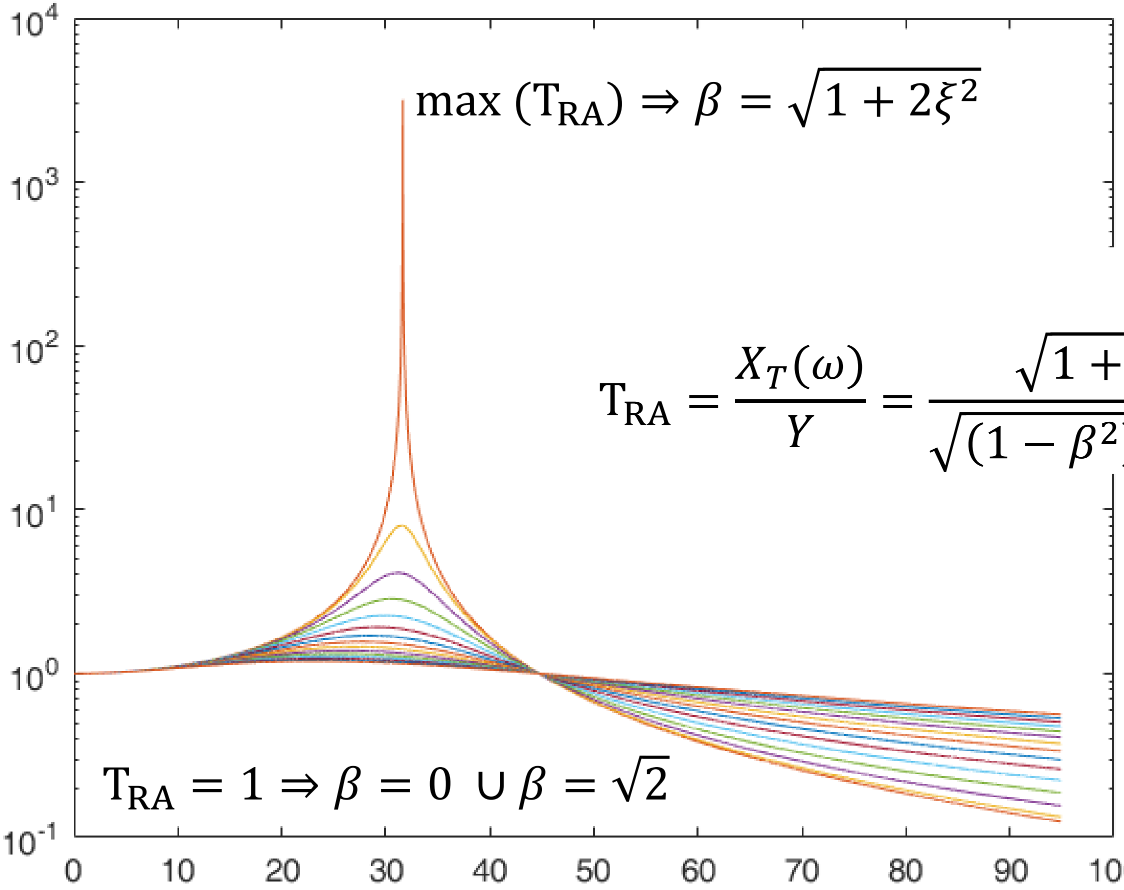
Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base

Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$



Transmissibilidade de deslocamento ABSOLUTO



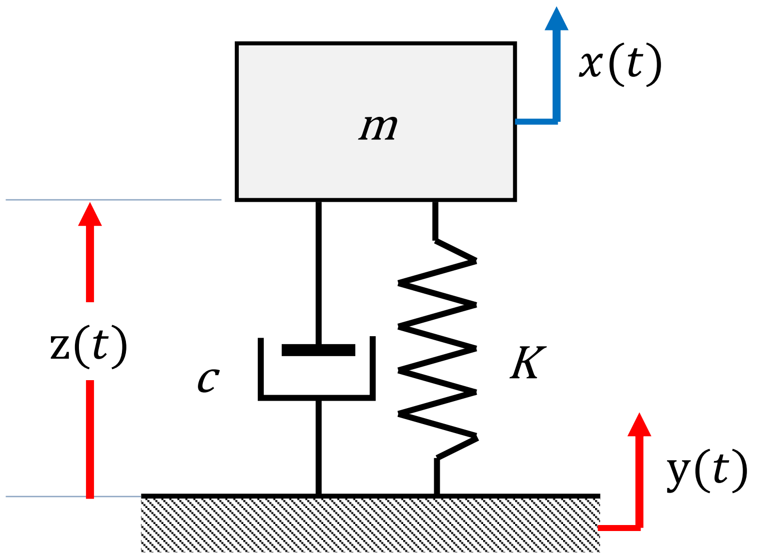
$$\max\left(\mathrm{T_{RA}}\right) \Rightarrow \beta = \sqrt{1 + 2\xi^2}$$

$$\mathrm{T_{RA}} = \frac{X_T(\omega)}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\mathrm{T_{RA}} = 1 \Rightarrow \beta = 0 \cup \beta = \sqrt{2}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



$$\mathrm{T_{RR}} = \frac{Z_T(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Deslocamento da massa (absoluto)	$x(t)$
Deslocamento da base (absoluto)	$y(t)$
Deslocamento relativo da massa	$z(t) = x(t) - y(t)$

Transmissibilidade de deslocamento RELATIVO

$$x(t) = z(t) + y(t)$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = 0$$

$$m\ddot{z}(t) + m\ddot{y}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = 0$$

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = -m\ddot{y}(t)$$

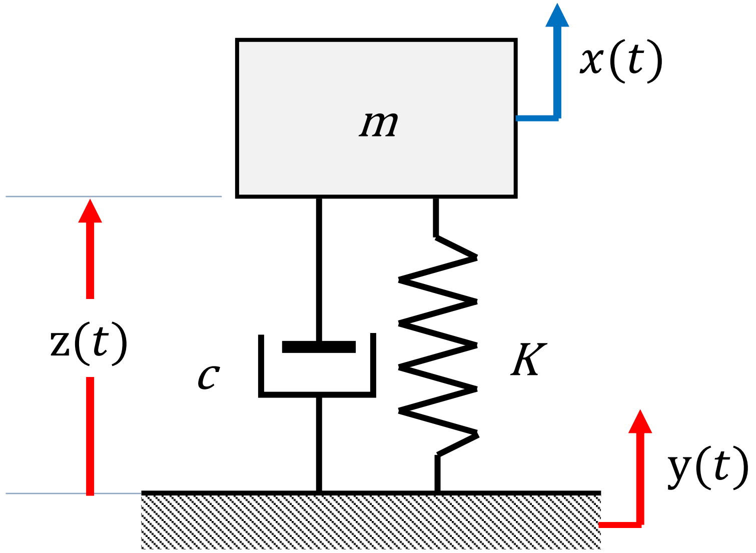
$$y(t) = Y\cos(\omega t)$$
$$\dot{y}(t) = -\omega Y\sin(\omega t)$$
$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = m\omega^2 Y\cos(\omega t)$$

$$z(t) = \frac{Y}{K}\omega^2 m \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

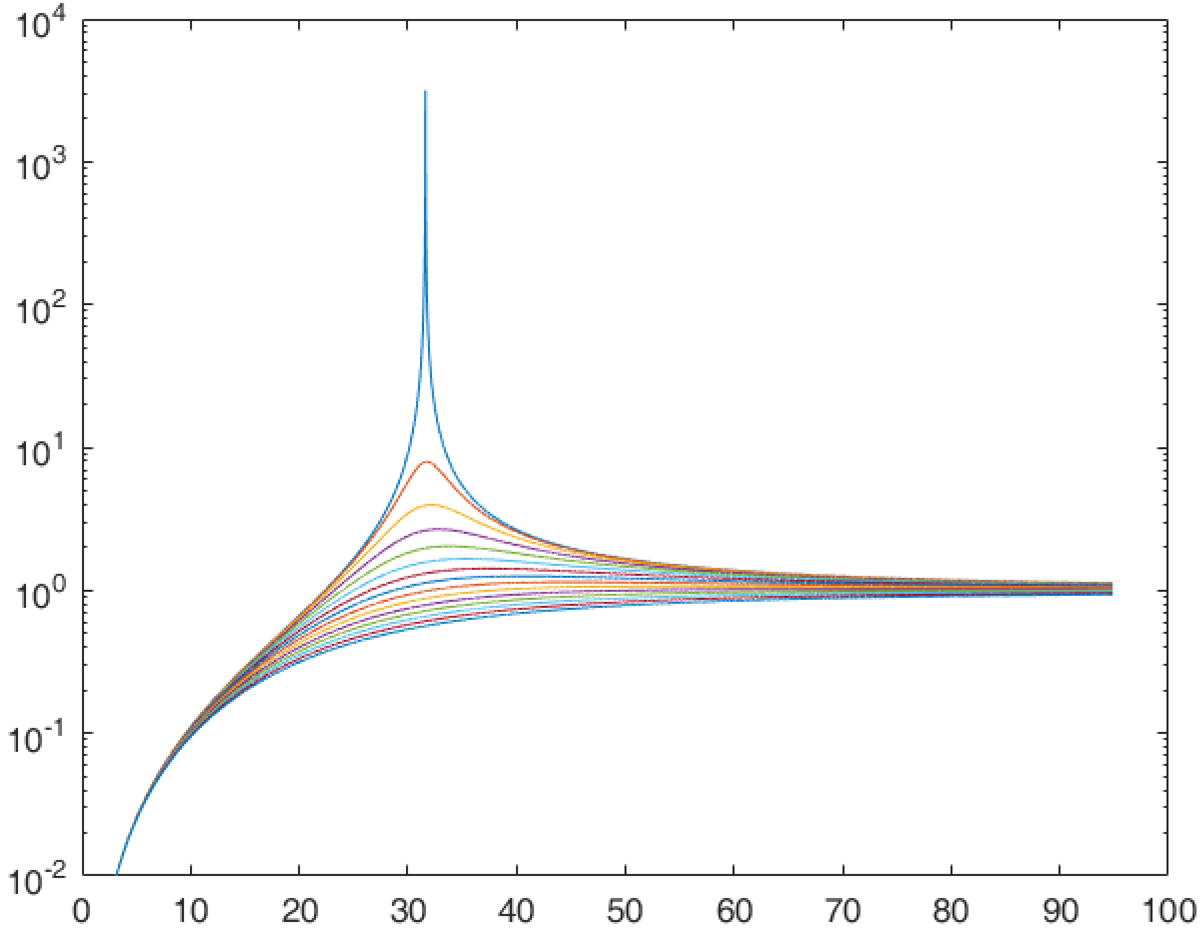
Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónico da base



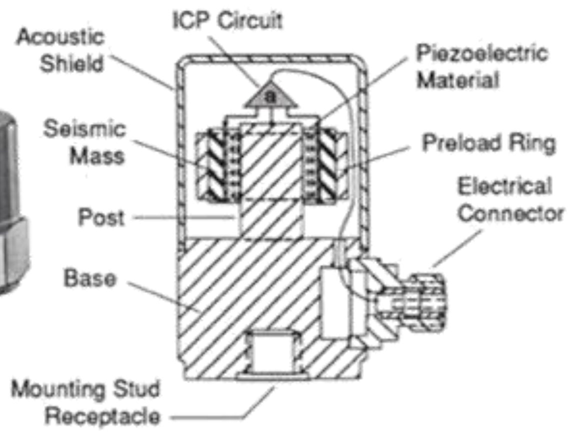
Transmissibilidade de deslocamento RELATIVO

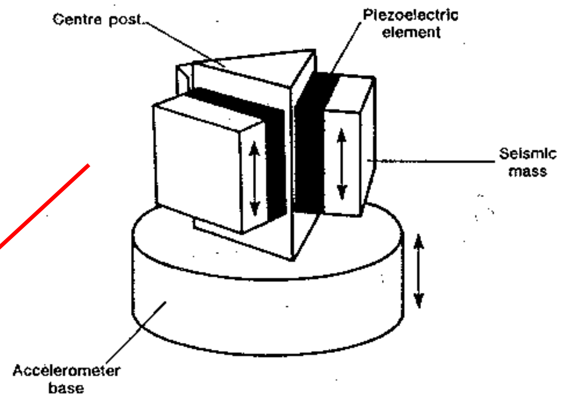
$$\mathrm{T_{RR}} = \frac{Z_T(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

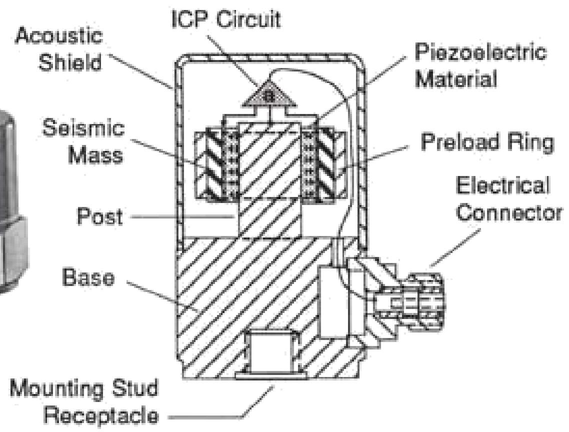
Acelerómetro piezoelétrico

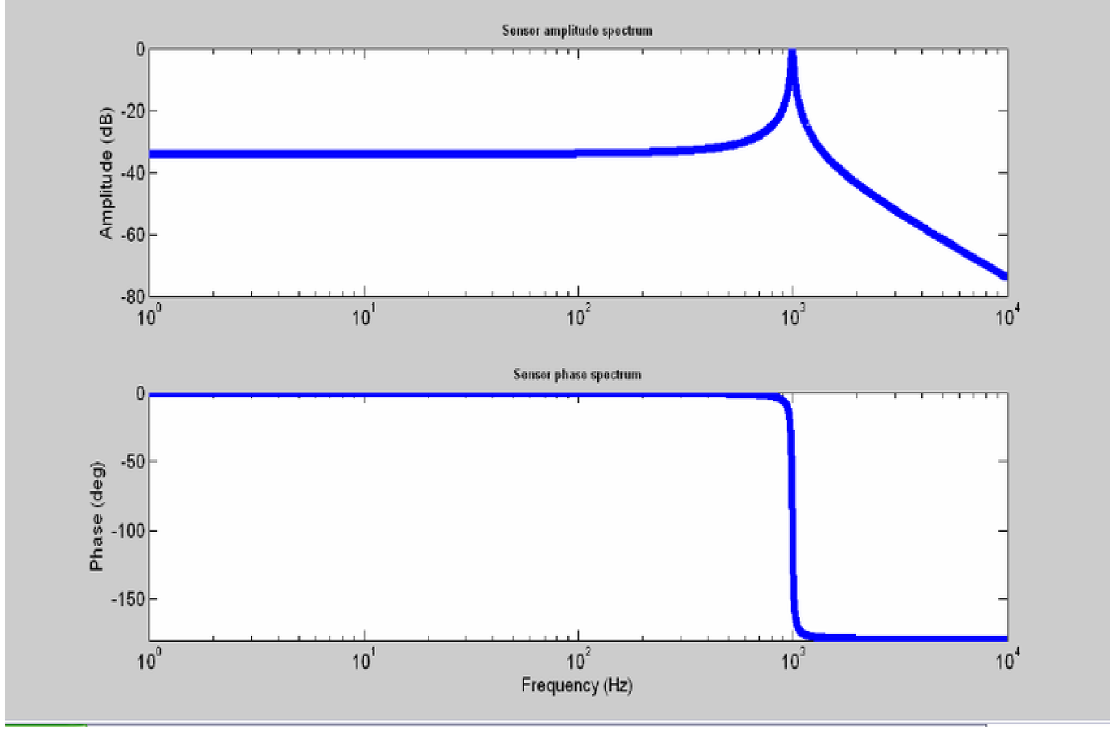


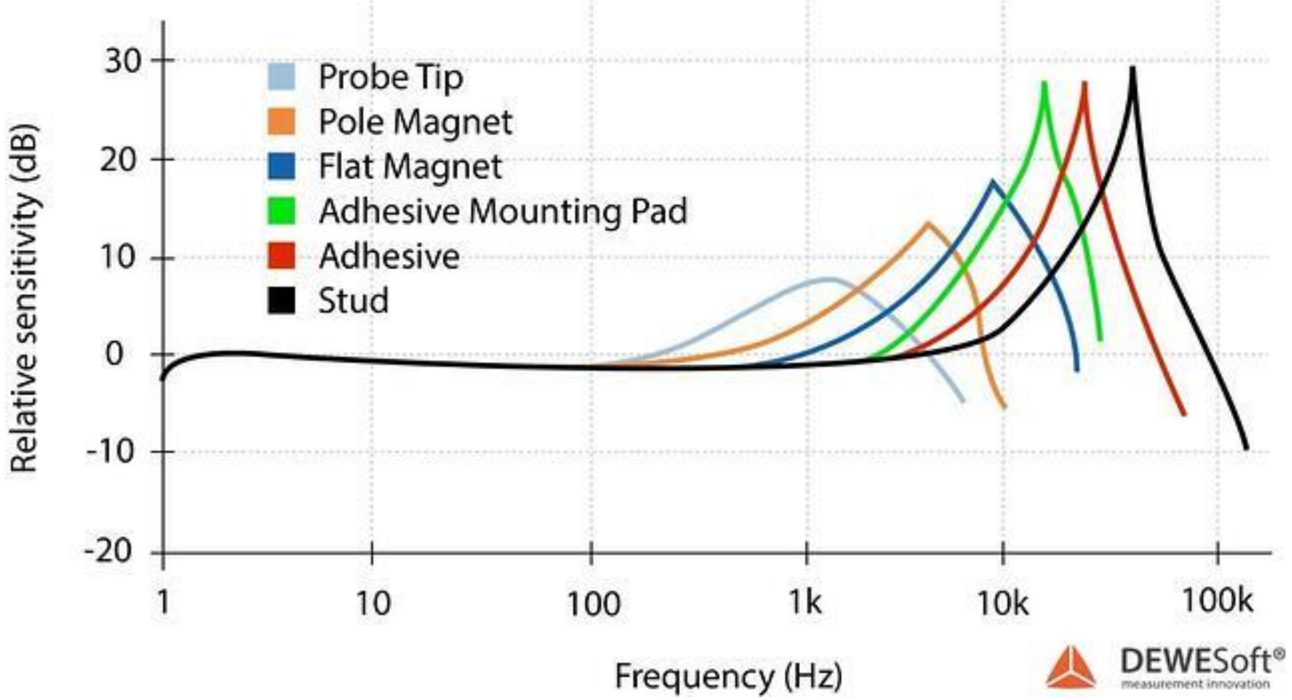


Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Acelerómetro piezoelétrico

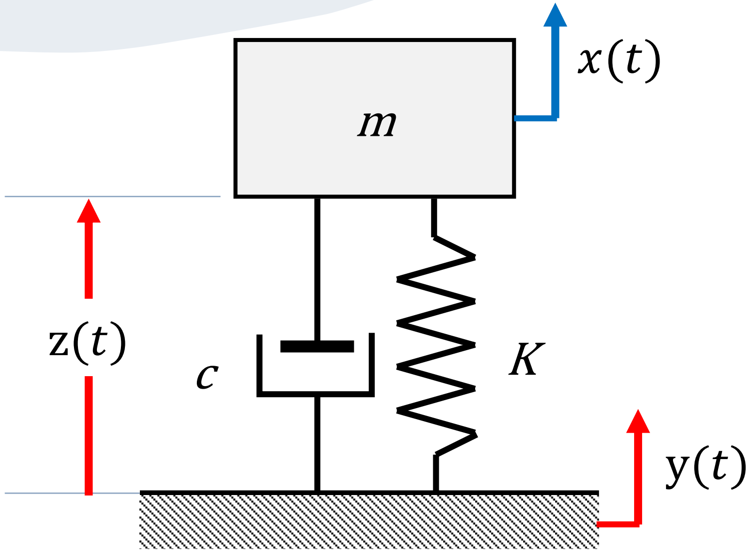


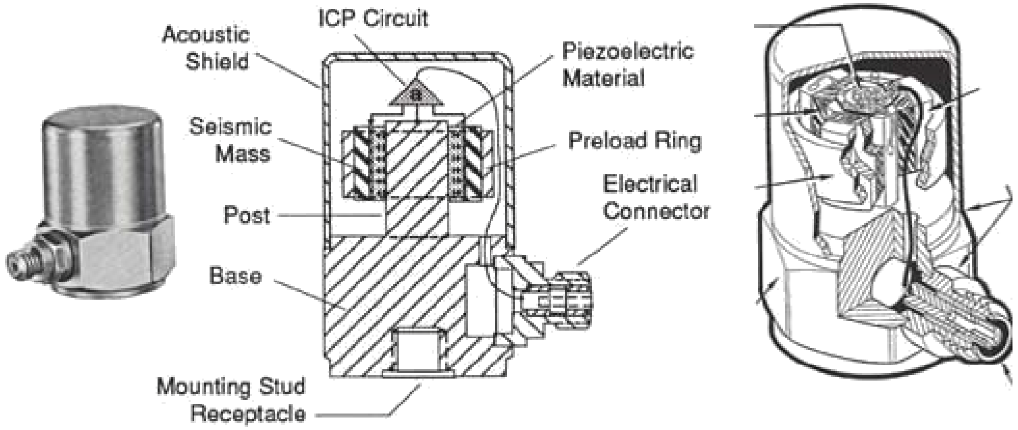




Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Movimento harmónica da base





Acelerómetro piezoelétrico

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = 0$$

$$m\ddot{z}(t) + m\ddot{y}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = 0$$

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = -m\ddot{y}(t) \qquad \ddot{y}(t) = A_y cos(\omega t)$$

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + Kz(t) = -A_y . m. cos(\omega t)$$

$$z(t) = -\frac{A_y . m}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\boxed{\frac{A_y(\omega)}{Y} = \frac{-1}{\omega_n^2 . \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}}$$

Frequency range : 0.3 – 6000 Hz

Temperature: -54 – 121 C

Weight: 4.8 gram

Sensitivity: 10 mV/ms^-2

Residual Noise Level in Spec Freq Range (rms) ±: 350 µg

Maximum Operational Level (peak): 70 g

Electrical conector: 10-32 UNF

Mounting: Integral Stud

Accessory Included: OptionalAO 1419

Clip/Stud/Screw included: Clip

Output: CCLD

Unigain: No

Triaxial: No

TEDS: No

Unit: mV

Resonance frequency: 18 kHz

Maximum Shock Level (± peak): 5000 g

PE 4507

PIEZOELECTRIC CCLD ACCELEROMETER, 1MV/G, SIDE CONNECTOR, 1 SLOT, EXCL. CABLE

Designed for modal analysis measurements.

Specifications – CCLD Accelerometer Type 4507 Family (side connector)

Type Number		4507-B	4507-B-003	4507-B-004	4507-B-001	4507-B-002	4507-B-005	4507-B-006
General								
Weight	gram	4.8	4.9	4.6	4.8	4.8	4.6	4.6
	oz	0.17	0.17	0.16	0.17	0.17	0.16	0.16
Voltage Sensitivity (at 159.2 Hz, 4 mA supply current)	mV/ms^{-2}	10 ± 5%			1 ± 5%	100 ± 10%		50 ± 5%
	mV/*g*	98 ± 5%			9.8 ± 5%	980 ± 10%		490 ± 5%
Frequency Range – Amplitude (±10%)	Hz	0.3 to 6000			0.1 to 6000	0.4 to 6000		0.2 to 6000
Frequency Range – Phase (±5°)	Hz	2 to 5000			0.5 to 5000	2 to 5000		1 to 5000
Mounted Resonance Frequency	kHz	18			18	18		18
Max. Transverse Sensitivity (at 30 Hz, 100 ms–2)	%	<5			<5	<5		<5
Transverse Resonance Frequency	kHz	>18			>18	>18		>18
Max Operational Continuous Sinusoidal Acceleration (± peak)	kms^{-2}	0.7			7	0.07		0.14
	g	70			700	7		14
TEDS		Yes			Yes	Yes		Yes
Electrical								
Bias Voltage (at full temp. and curr. range)	V	13 ±1			13 ±1	13 ± 2		13 ±2
Power Supply – Constant current	mA	2 to 20			2 to 20	2 to 20		2 to 20
Power Supply – Unloaded supply voltage	V	24 to 30*			24 to 30*	24 to 30*		24 to 30*
Output Impedance	Ω	30			30	30		30
Start-up time (to final bias ±10%)	s	<5			<50	<5		<5
Residual Noise (inherent rms broadband noise in the specified frequency range)	μV	<35			<8	<150		<80
	μ*g*	<350			<800	<150		<160
Noise (spectral) – 10 Hz	$mms^{-2}/\sqrt{Hz}$ (μg/√Hz)	0.15 (15)			0.25 (25)	0.08 (8)		0.08 (8)
Noise (spectral) – 100 Hz		0.035 (3.5)			0.06 (6)	0.02 (2)		0.02 (2)
Noise (spectral) – 1000 Hz		0.02 (2)			0.035 (3.5)	0.01 (1)		0.01 (1)
Environmental								
Operating Temperature Range	°C	–54 to +121			–54 to +121	–54 to +100		–54 to +100
	°F	–65 to +250			–65 to +250	–65 to +212		–65 to +212
Temperature Coefficient of Sensitivity	%/°C	0.09			0.09	0.18		0.18
Temperature Transient Sensitivity	$ms^{-2}/°C$	0.2			0.2	0.2		0.2