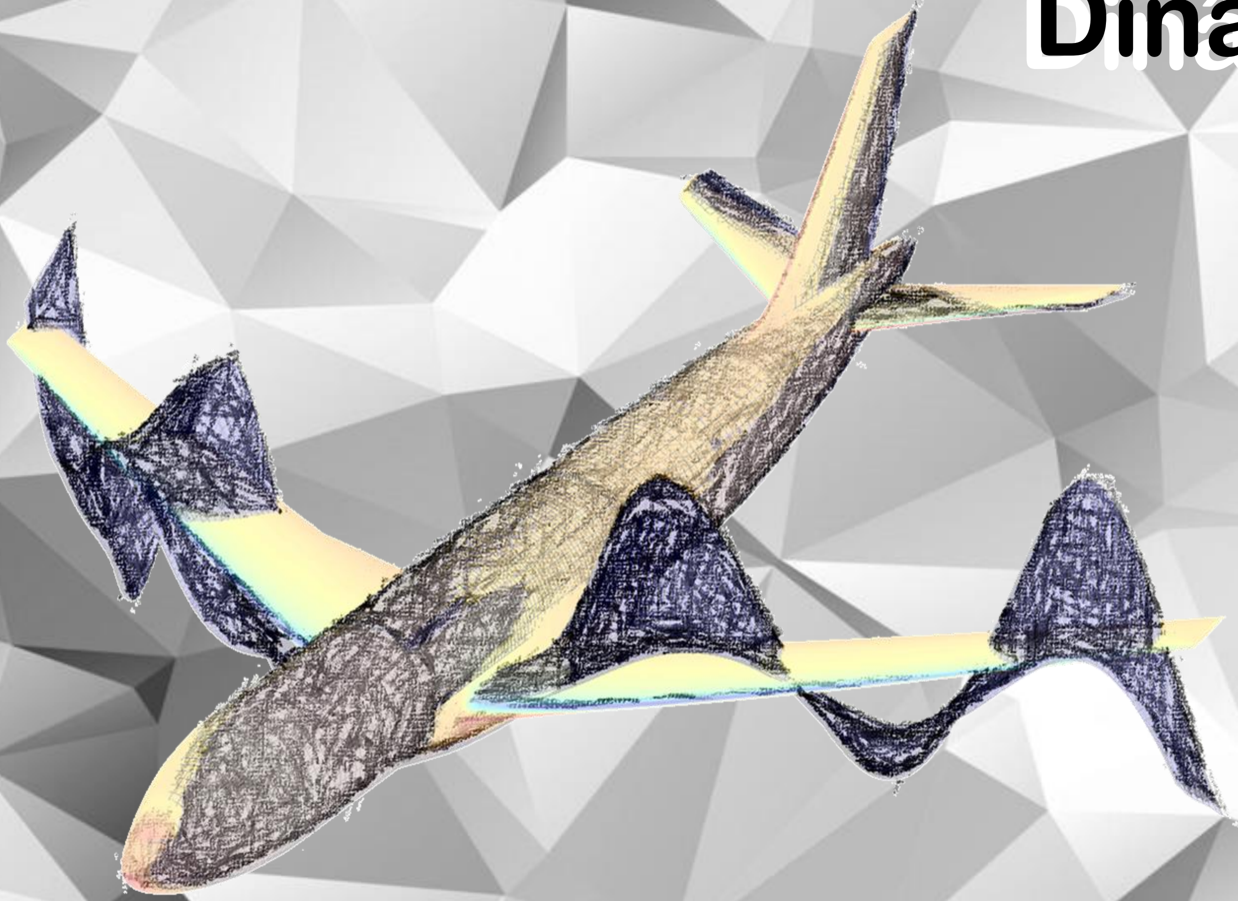
Aeroelasticidade

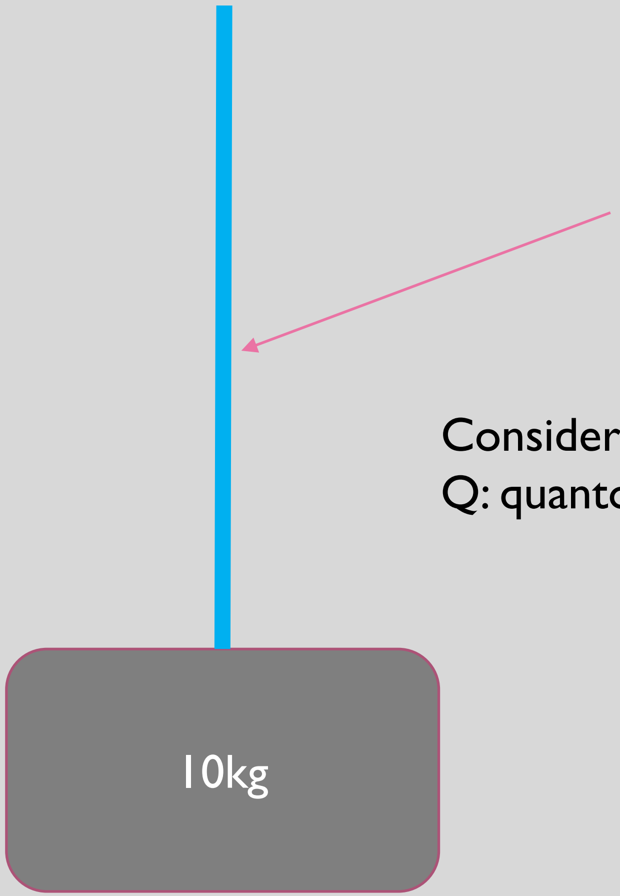
Dinâmica de Estruturas 1

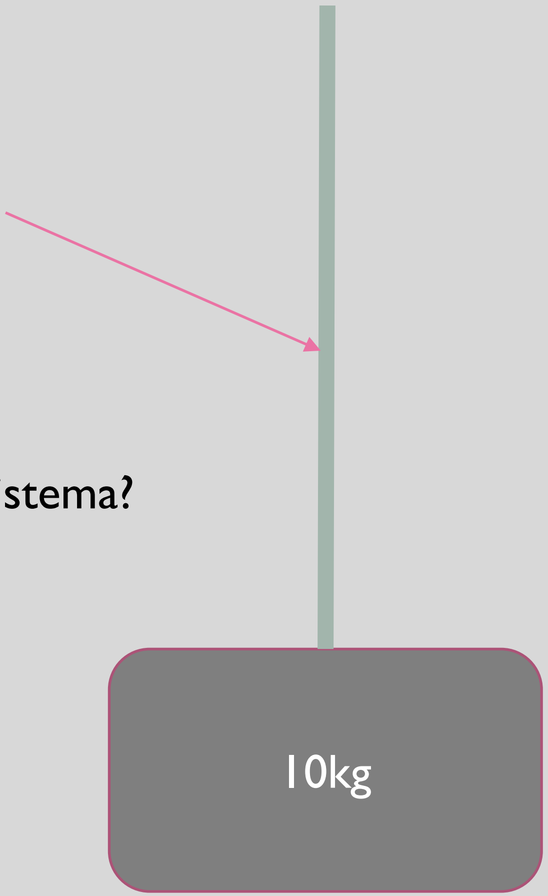


2023/2024

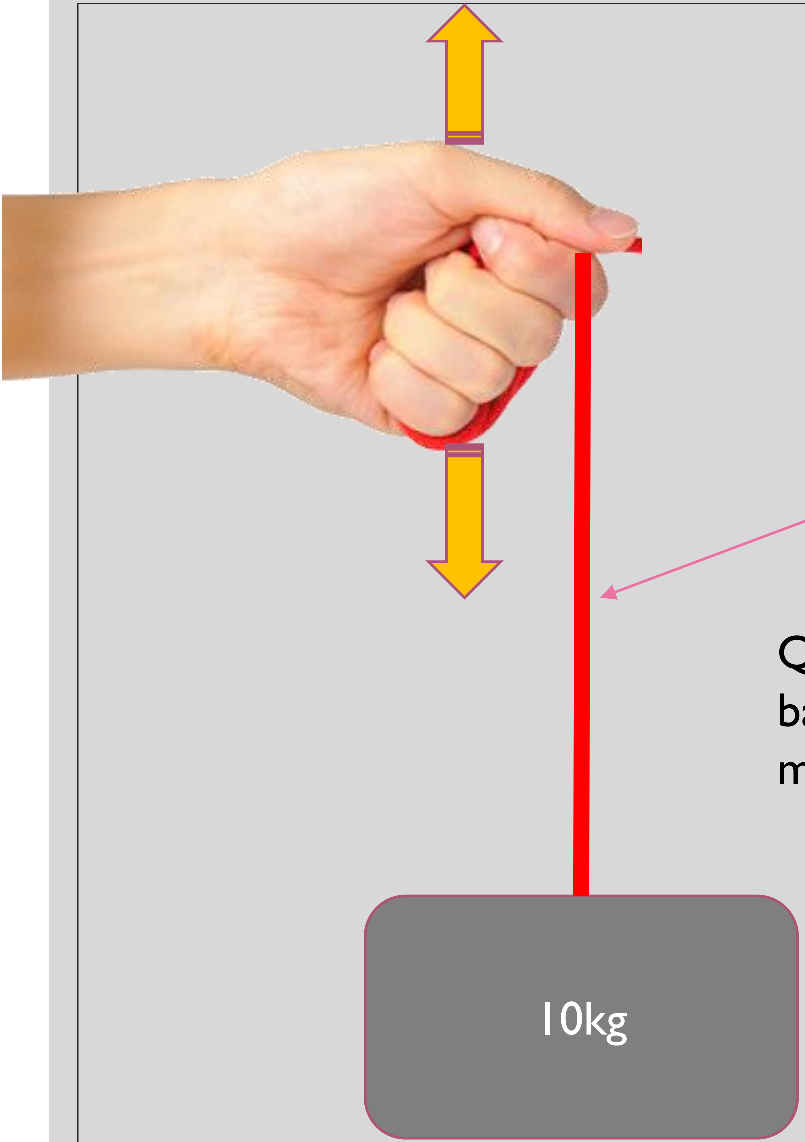
Rui Moreira


N7845Y



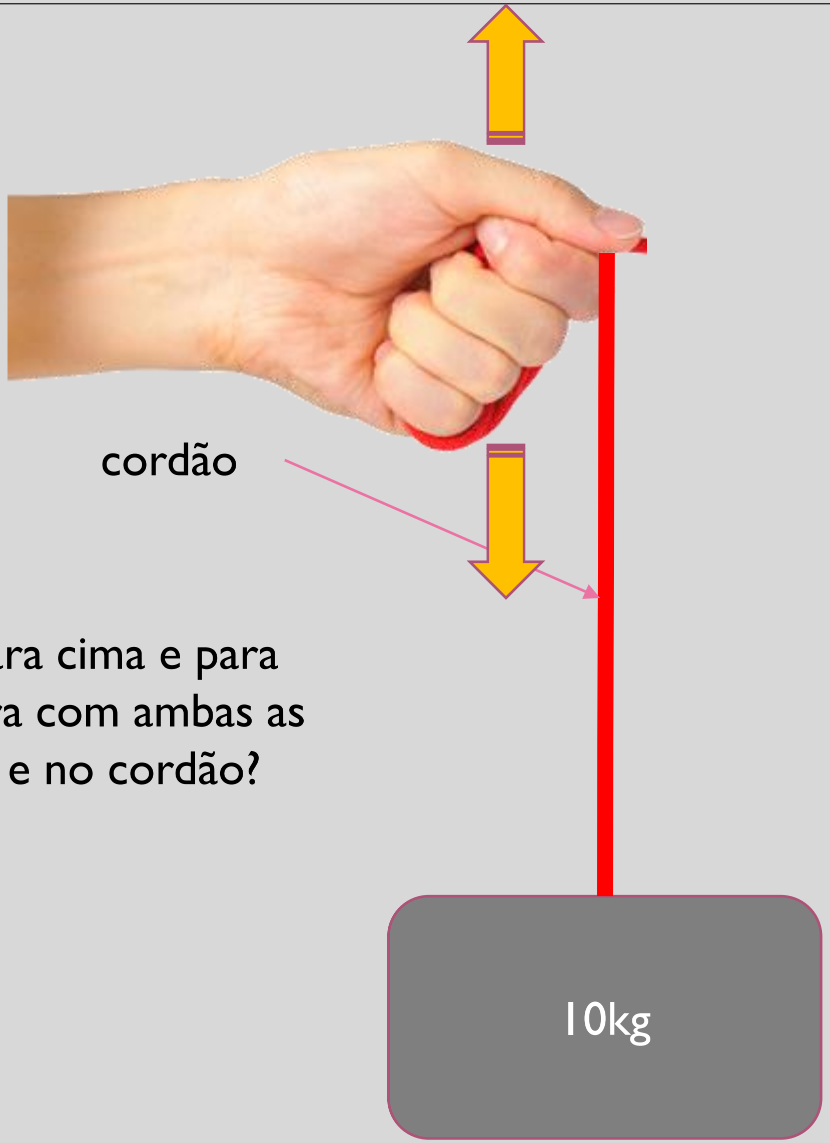


Considere os dois sistemas ilustrados.
Q: quantos graus de liberdade possui cada sistema?



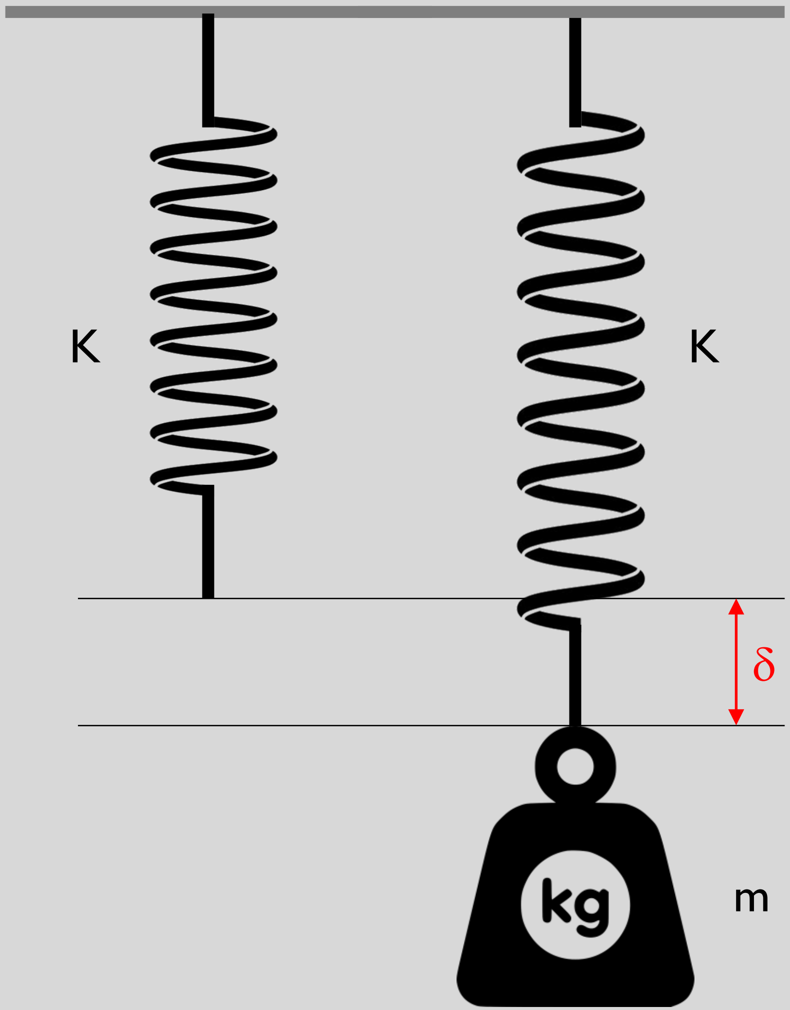
elástico

cordão



Q: Se mover ambas as mãos para cima e para baixo, que se espera que ocorra com ambas as massas penduradas no elástico e no cordão?

Sistema com 1 grau de liberdade – Equação de movimento



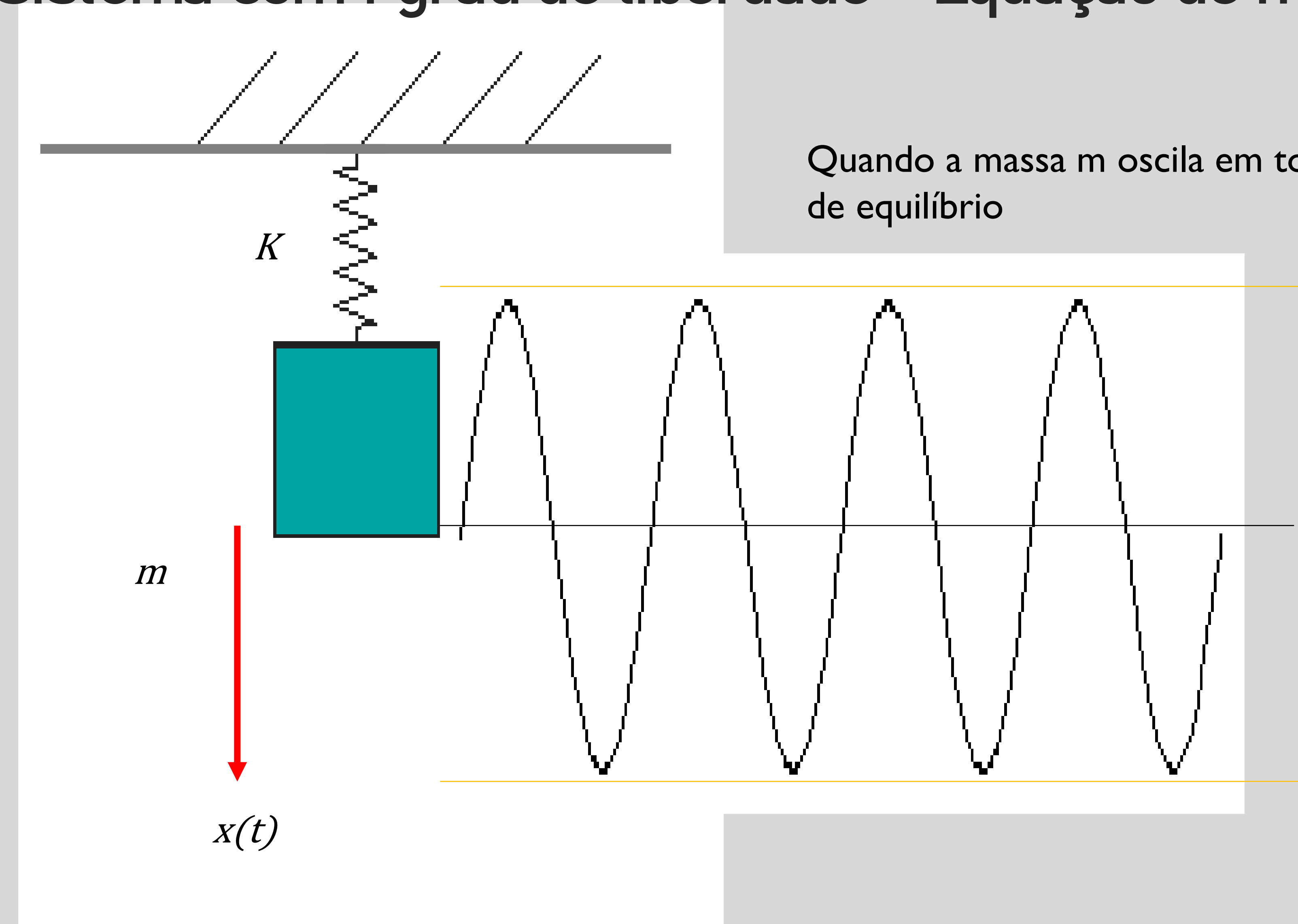
2ª Lei de Newton

$$\sum F = m\ddot{x}$$

Posição de equilíbrio estático

$$K\delta = mg \Leftrightarrow \delta = \frac{mg}{K}$$

Sistema com 1 grau de liberdade - Equação de movimento



Quando a massa m oscila em torno da posição de equilíbrio

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$mg - K(\delta + x) = m\ddot{x}$$

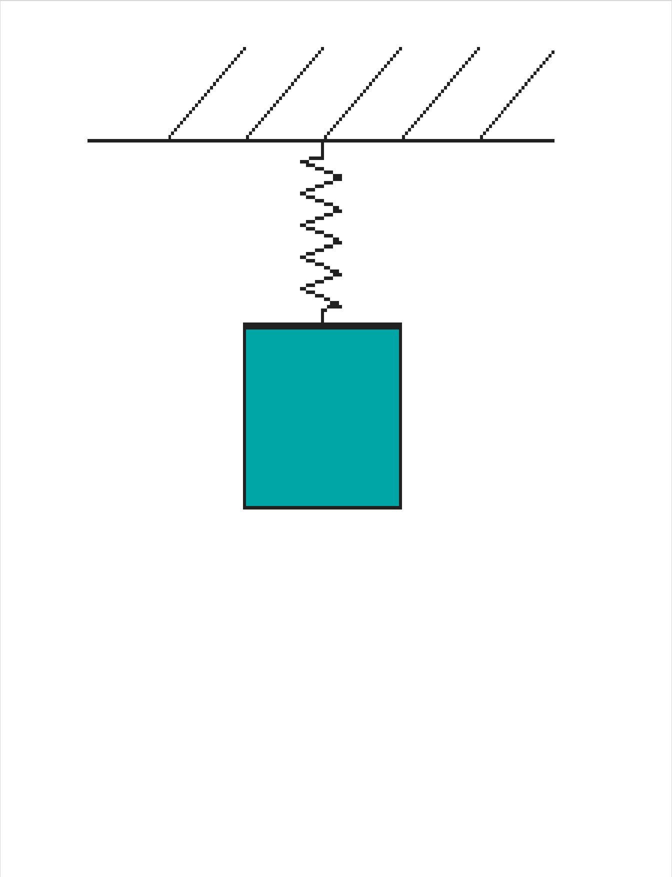
$$mg - K\delta - Kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0}$$

Equação de movimento

Sistema com 1 grau de liberdade - Equação de movimento

Lei da conservação de energia



Energia cinética do sistema: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

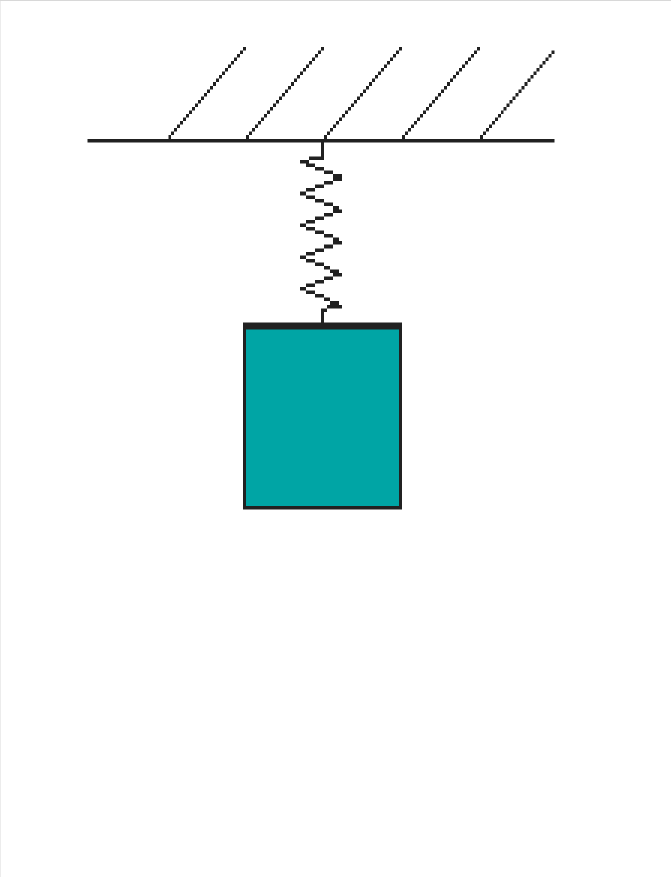
Energia potencial elástica: $U_e = \int_{\delta}^{\delta+x} Kx\,dx$

$$U_e = K \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{\delta}^{\delta+x} = \frac{K(\delta+x)^2}{2} - \frac{K\delta^2}{2} = x^2\frac{K}{2} + mgx$$

Energia potencial gravítica: $U_g = -mgx$

Sistema com 1 grau de liberdade – Equação de movimento

Lei da conservação de energia



Variação total de energia potencial

$$U_T = U_e + U_g = \frac{1}{2}Kx^2$$

Princípio de conservação de energia:

$$\frac{d}{dt}(T + U_T) = 0$$

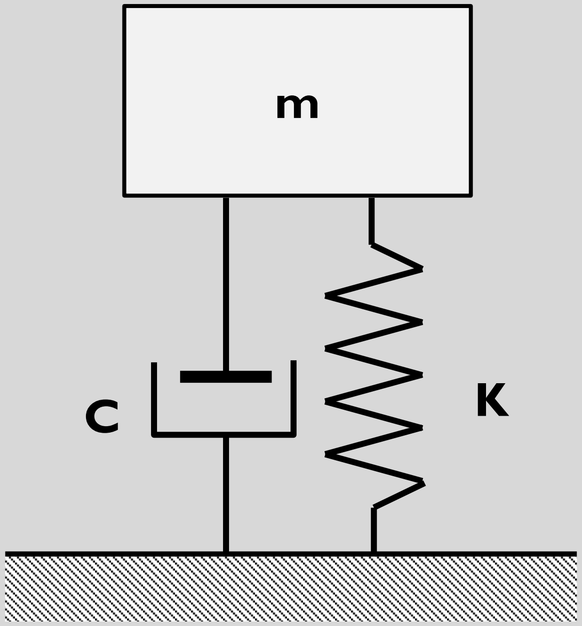
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{1}{2}K(2x\dot{x})\right] = 0$$

Equação de movimento

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



Regime livre:

$$\sum F = 0$$

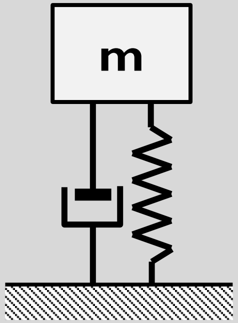
Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



Equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Equação diferencial que admite uma solução não nula da forma:

$$x(t) = Ce^{st}$$

cujas derivadas em ordem ao tempo são escritas como:

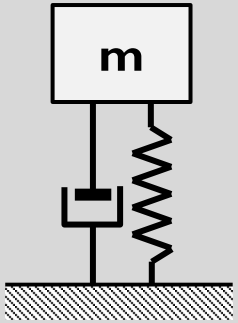
$$\dot{x}(t) = sCe^{st}$$

$$\ddot{x}(t) = s^2Ce^{st}$$

Introduzindo as expressões na eq. de movimento:

$$(s^2m + s\mathrm{c} + K)Ce^{st} = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



$$(s^2m + sc + K)Ce^{st} = 0$$

$$x(t) = Ce^{st}$$

A solução não trivial: $C \neq 0$

resultando na equação característica:

$$s^2m + sc + K \ = 0$$

cuja solução é dada por:

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

2 soluções

$$s_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Soluções da equação característica

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Soluções da equação de movimento

$$x_1(t) = \boxed{C_1} e^{s_1 t}$$

$$x_2(t) = \boxed{C_2} e^{s_2 t}$$

C_1 e C_2
constantes a
determinar pelas
condições iniciais

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Amortecimento crítico (C_c)

$$s = \frac{-c \pm \boxed{\sqrt{c^2 - 4mK}}}{2m} \qquad c^2 - 4mK = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_c &= 2\sqrt{mK} \\ C_c &= 2m\omega_n \end{aligned}}$$

Frequência natural não amortecida (ω_n)

$$m\ddot{x} + \cancel{c\dot{x}} + Kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\Downarrow \quad \boxed{(x = \mathrm{Csin}(\omega t))}$$

$$(-m\omega^2 + K)\mathrm{Csin}(\omega t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-m\omega^2 + K) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Razão de amortecimento (ξ)

$$\boxed{\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Amortecimento crítico (c_c)

$$c_c = 2m\omega_n$$

Frequência natural não amortecida (ω_n)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

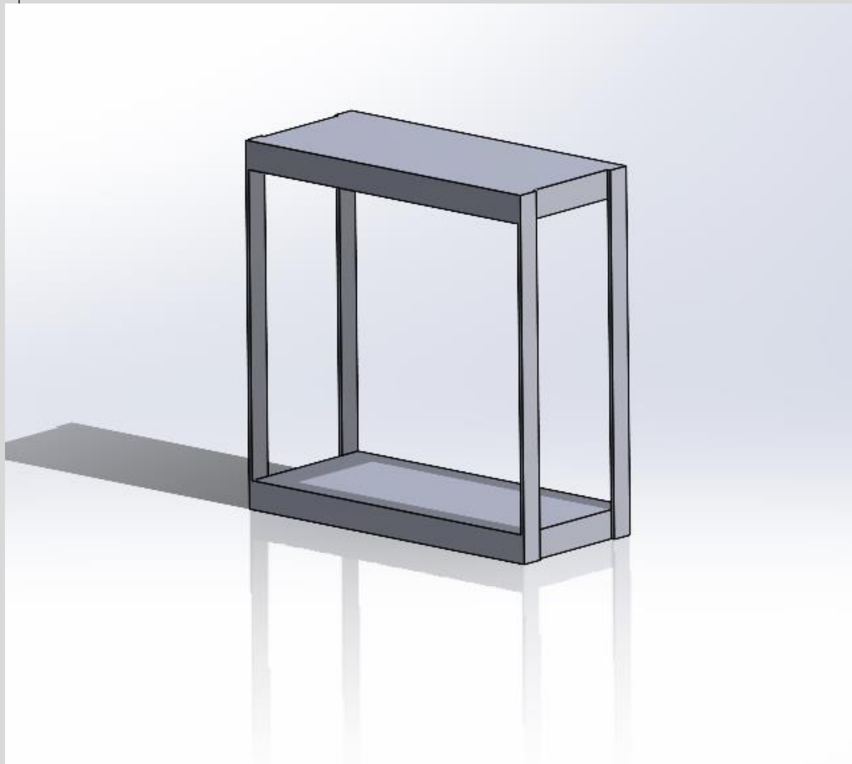
Razão de amortecimento (ξ)

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

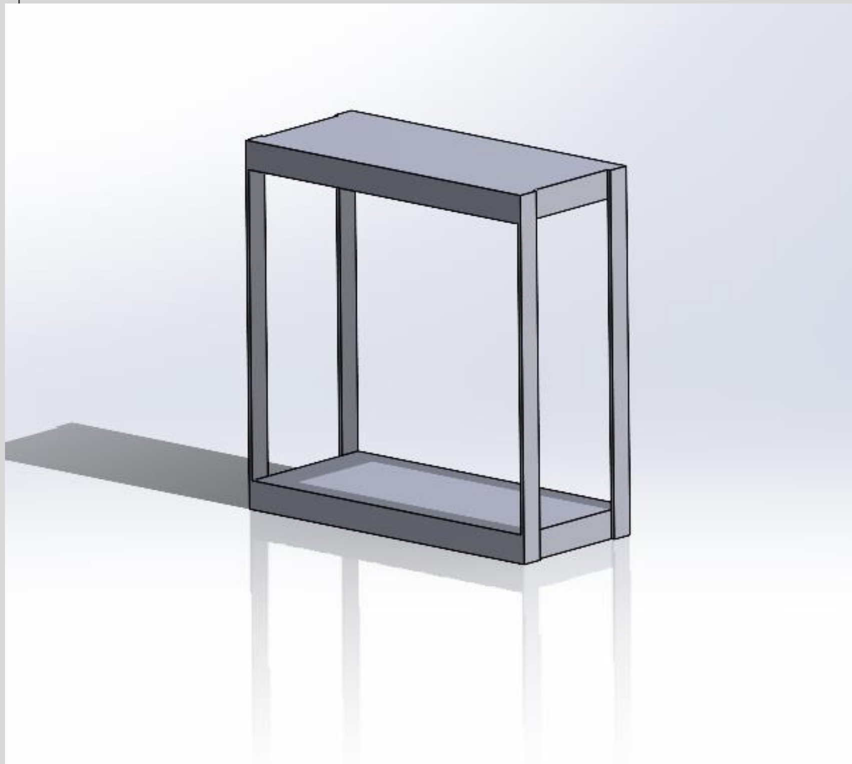


m1: massa de aço (80x180x15 [mm])
m2: massa de aço
K: rigidez equivalente do sistema

Secção das vigas: 10mm x 2mm
Material das vigas: alumínio (E=70GPa, n=0.3, r=2700kg/m3)

Comprimento livre das vigas: 150mm

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m1: massa de aço (80x180x15 [mm])
m2: massa de aço
K: rigidez equivalente do sistema

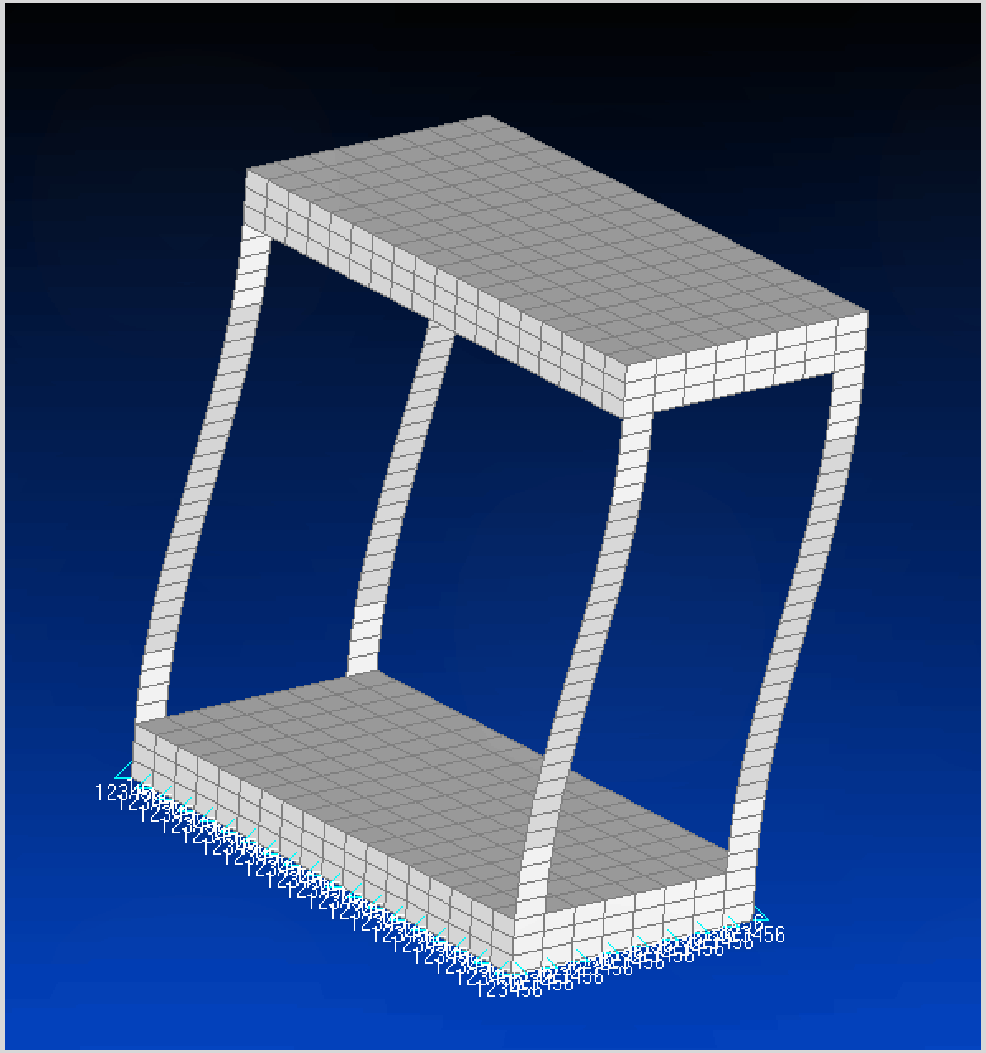
Secção das vigas: 10mm x 2mm
Material das vigas: alumínio (E=70GPa, ν=0.3, ρ=2700kg/m^3)

Comprimento livre das vigas: 150mm

Q1: Considere sistema SDOF não amortecido.
Discuta as simplificações efetuadas (por considerar 1dof)
Determine a frequência natural do sistema.

Q2: Sabendo que o sistema tem n graus de liberdade, o que espera que seja na verdade a resposta dinâmica do sistema (número de frequências naturais e sua posição no espetro)

Q3: Consideramos o sistema não amortecido. Será mesmo não amortecido? Quais as implicações dessa hipótese?



f1≈ 10Hz

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

A equação de movimento reescrita em função de ω_n e ξ

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Assim, as soluções da equação característica podem ser escritas como:

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_1 = -\xi + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = -\xi - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\sqrt{\xi^2 - 1}$	$\xi = 0$	Sistema não amortecido
	$0 < \xi < 1$	Sistema subamortecido
	$\xi = 1$	Sistema criticamente amortecido
	$\xi > 1$	Sistema sobreamortecido

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 0$ Sistema não amortecido

$$s_1 = s_2 = \pm\, \omega_n\sqrt{-1} = \pm j\omega_n$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = C_1 e^{-j\omega_n t} + C_2 e^{+j\omega_n t}$$

$$e^{\pm j\omega_n t} = \cos(\omega_n t) \pm j sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = \underline{(C_1 + C_2)}\cos(\omega_n t) + \underline{(C_2 - C_1)j}.\sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = A_1\cos(\omega_n t) + A_2\sin(\omega_n t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)$$

Condições iniciais:

$$x(t = 0) = X_0$$
$$\dot{x}(t = 0) = V_0$$

$$x(t = 0) = A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) = X_0$$
$$\dot{x}(t = 0) = -A_1 \omega_n \sin(0) + A_2 \omega_n \cos(0) = V_0$$

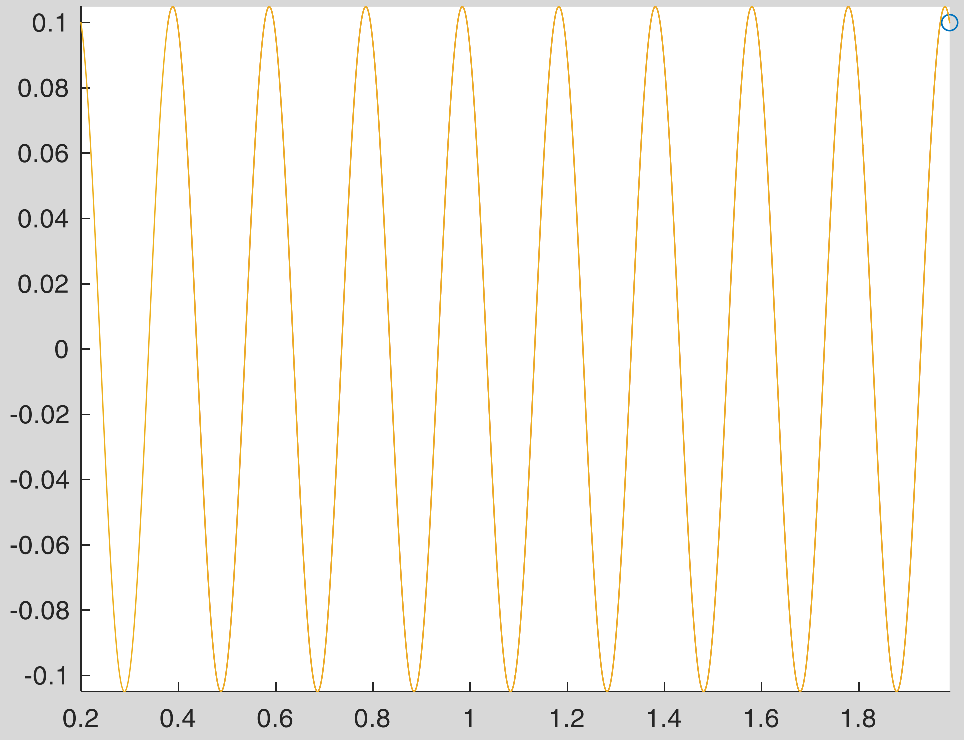
$$A_1 = X_0 \qquad A_2 = \frac{V_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = X \cos(\omega_n t - \phi)$$

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$ Amplitude

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_0}{X_0 \omega_n}\right)$$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% --------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
T=1/fn;

t=linspace(0,5*T,10000);
X=sqrt(x0^2+(v0/wn)^2);
phi=atan2(v0/wn,x0);
x=X*cos(wn*t-phi);

figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

2 raízes distintas e conjugadas

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = X\underbrace{e^{-\xi\omega_n t}}_{\text{Envelope da amplitude}}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi\right)$$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ Frequência natural AMORTECIDA

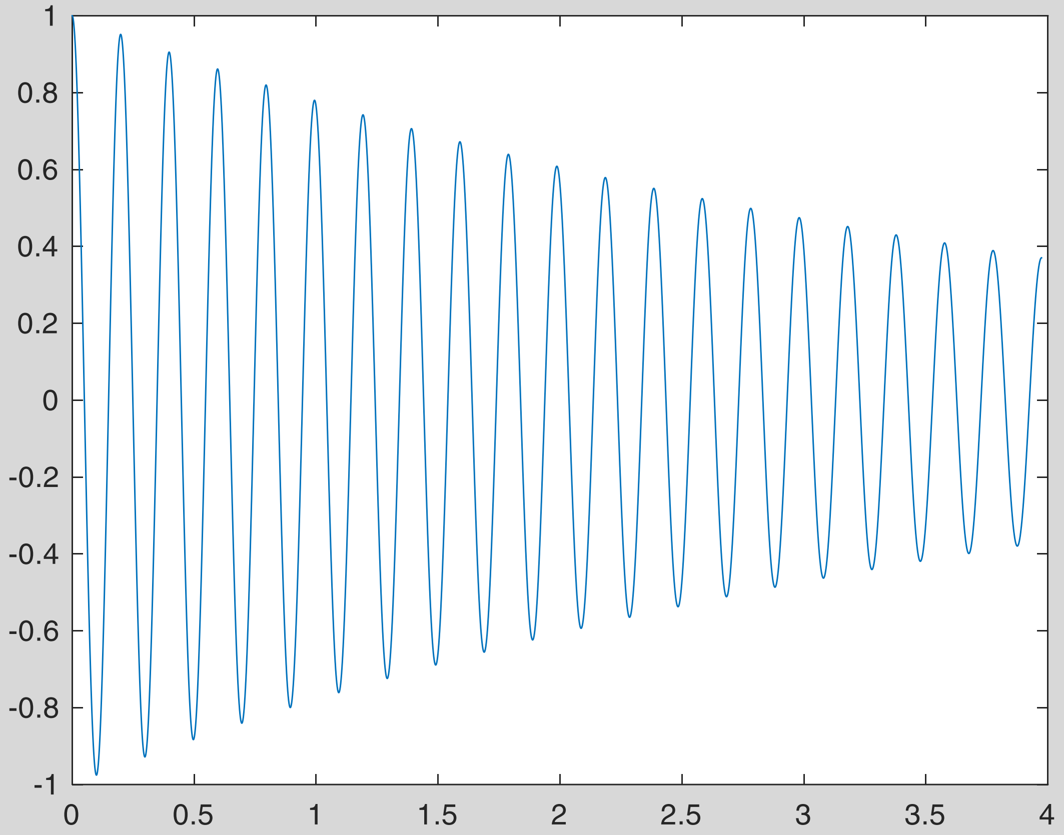
Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi\right)$$

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \xi\omega_n X_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}$$ Amplitude

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_0 + \xi\omega_n X_0}{X_0\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000
c=0.5→62

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
c=2;     % amortecimento viscoso [N/(m/s)]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]

wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
cc=2*sqrt(K*m);
qsi=c/cc;

wd=wn*sqrt(1-qsi^2);
fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;
t=linspace(0,5*T,10000);
X=sqrt(x0^2+((v0+qsi*wn*x0)/wd)^2);
phi=atan2((v0+qsi*wn*x0),(x0*wd));
x=X*exp(-qsi*wn*t).*cos(wd*t-phi);
figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 1$ Sistema criticamente amortecido

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Frequência natural amortecida

quando $\xi \to 1 \Rightarrow \omega_d \to 0 \Rightarrow$ $\cos(\omega_d t) \to 1$, $\sin(\omega_d t) \to \omega_d t$

$$x(t) = e^{-\omega_n t}[A_1 + A_2\omega_d t]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 1$ Sistema criticamente amortecido

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 + A_2\omega_d t]$$

Condições iniciais:

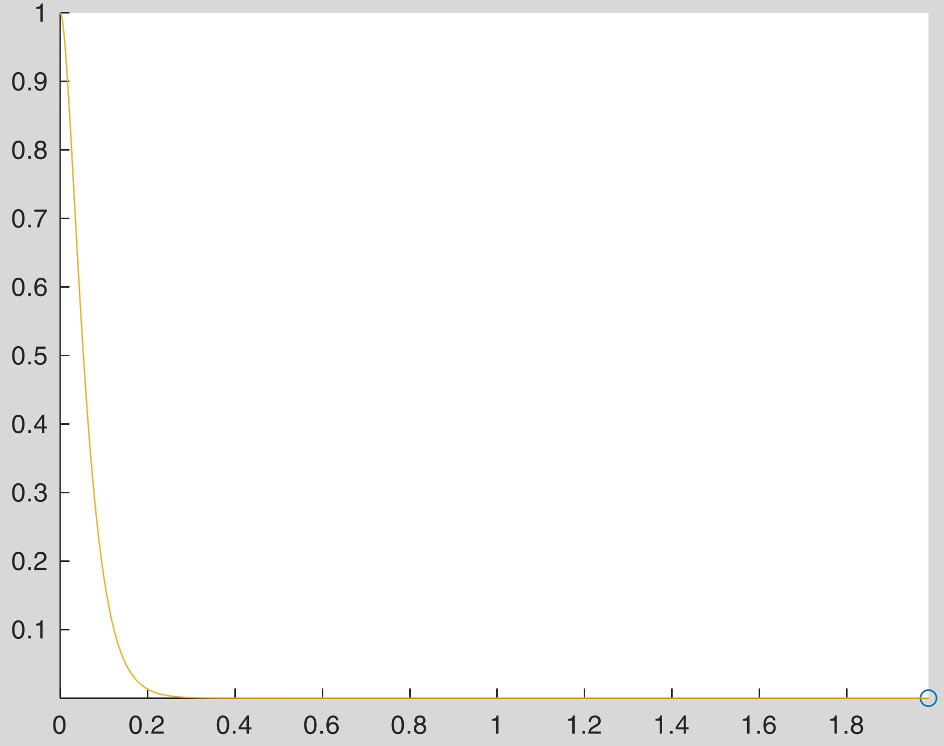
$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

$$A_1 = X_0$$

$$A_2 = \frac{V_0 + \omega_n X_0}{\omega_d}$$

$$x(t) = e^{-\omega_n t}[X_0 + (V_0 + X_0\omega_n)t]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000
c=Cc (≈63)

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% ---------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
T=1/fn;
cc=2*sqrt(K*m);
qsi=1;

t=linspace(0,5*T,10000);

x=exp(-wn*t).*(x0+(v0+x0*wn)*t);

figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

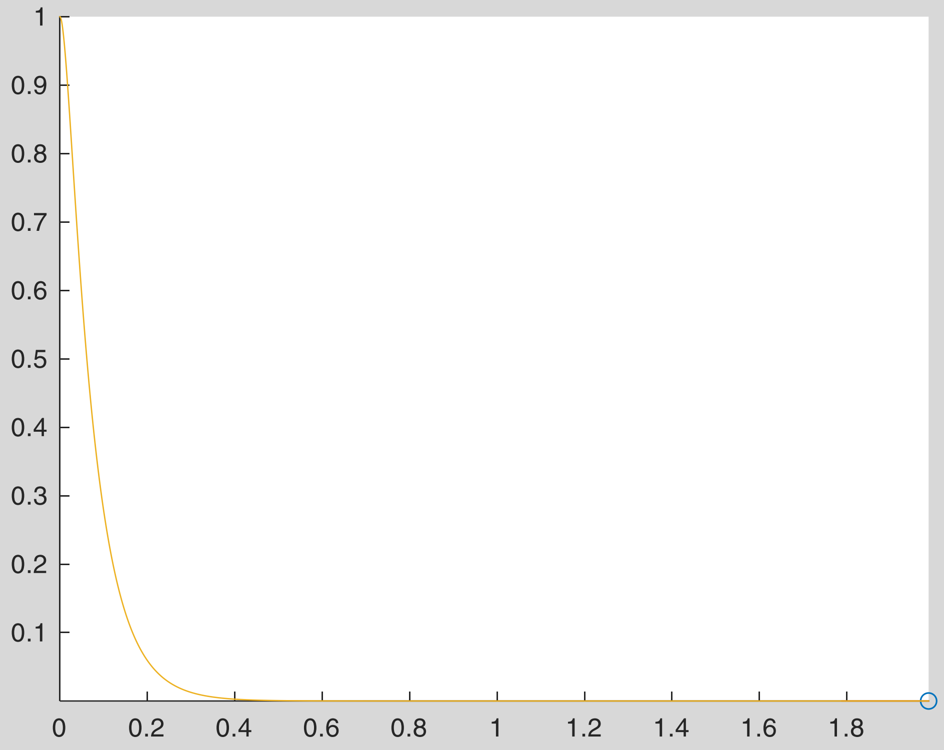
$\xi > 1$ Sistema sobreamortecido

$$s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

2 raízes reais e negativas

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[X_0 \cosh\left[\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right] + \frac{\xi\omega_n X_0 + V_0}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh\left[\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right]\right]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



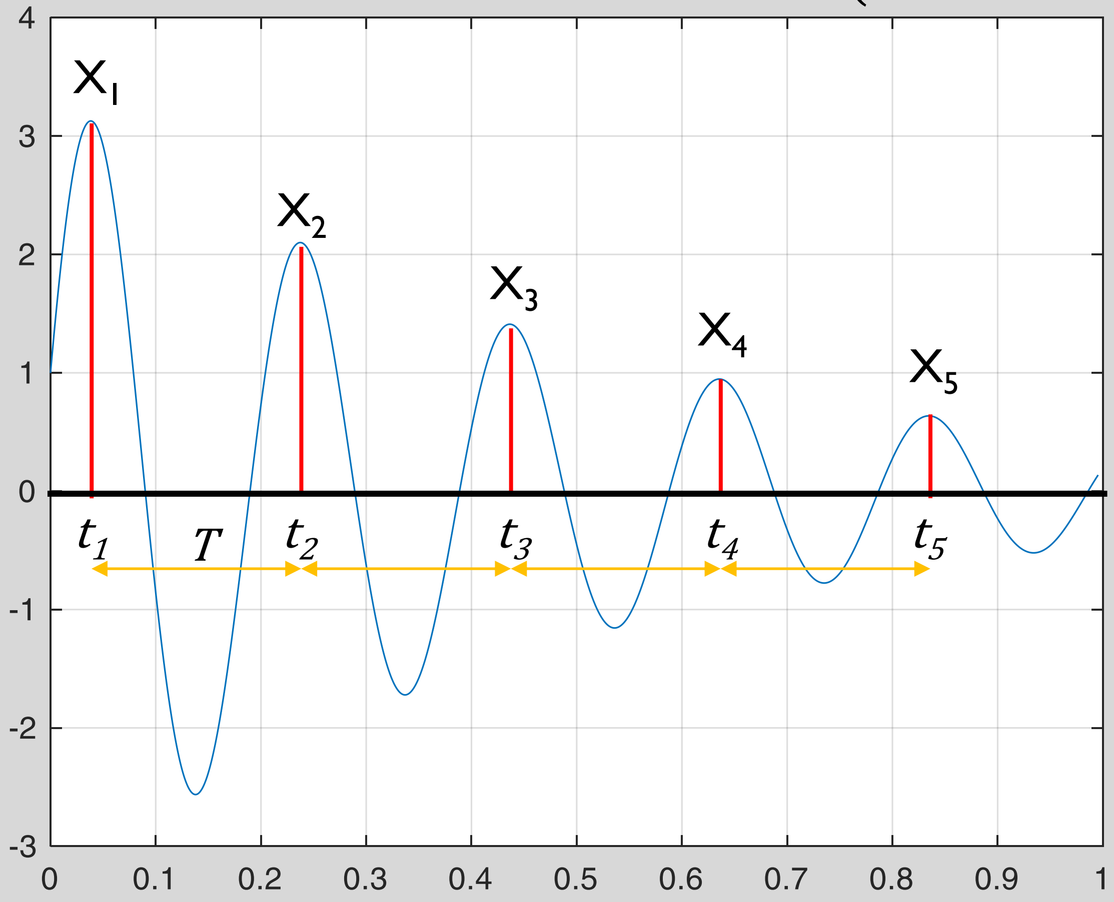
m=1
K=1000
c>Cc (Cc=63.3)

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
c=65; cc=63.2456
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% ----------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);

cc=2*sqrt(K*m);
qsi=c/cc;

wd=wn*sqrt(qsi^2-1); fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;

t=linspace(0,3*T,10000);
x=exp(-qsi*wn*t).*(x0*cosh(wd*t)
+(qsi*wn*x0+v0)/wd*sinh(wd*t));
figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi\right) \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$ Período da onda

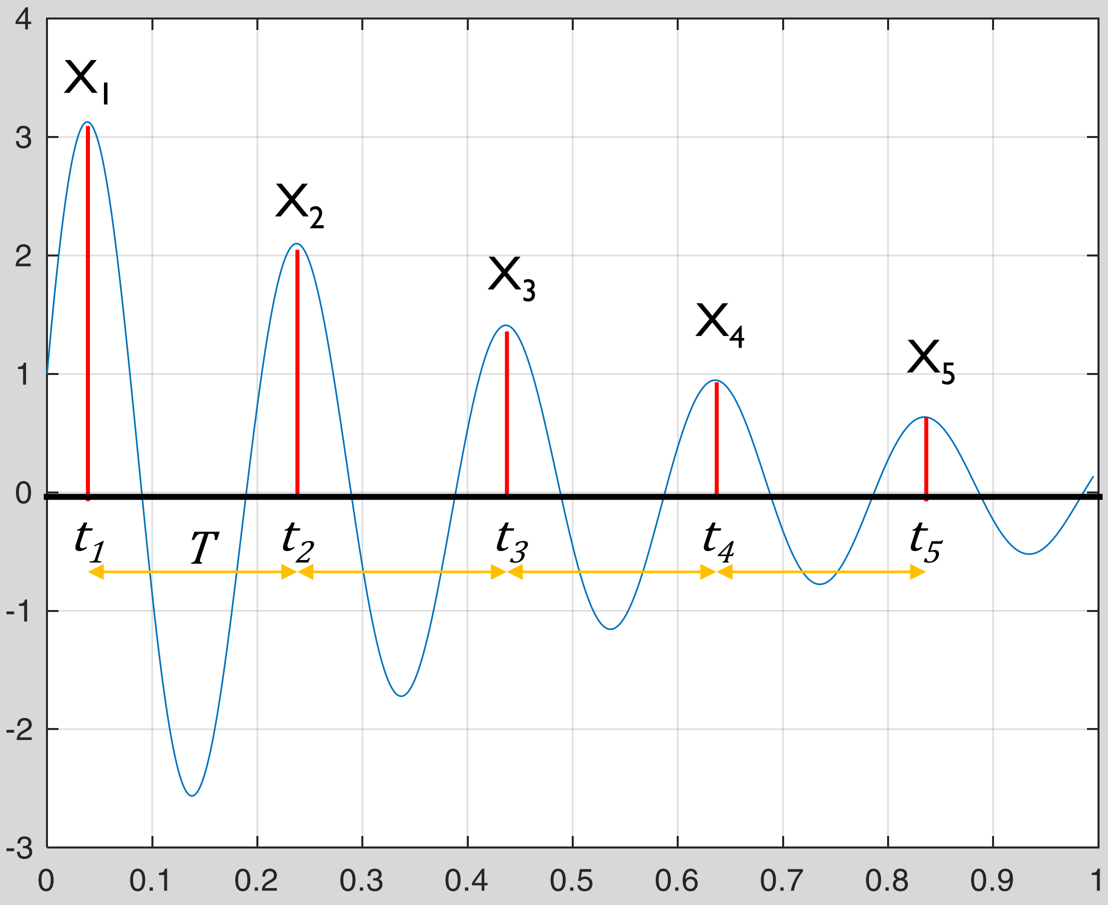
$$x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1+T) - \phi)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$



$$x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1 + T) - \phi)$$

$$\frac{x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1 + T) - \phi)}$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{-\xi\omega_n(t_1 - t_1 - T)} = e^{\xi\omega_n T}$$

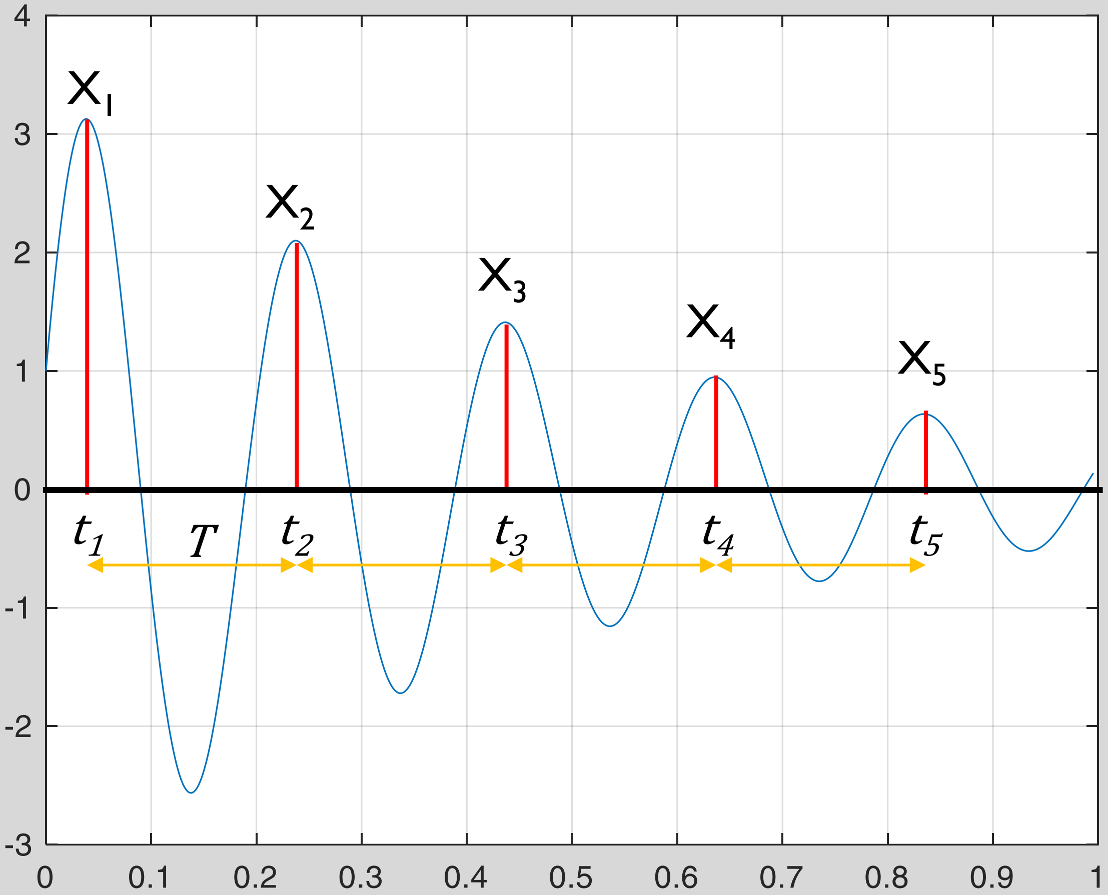
$$\log\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \xi\omega_n T = \delta$$

Decremento logarítmico

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$



$$\log\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \xi\omega_n T = \delta$$ Decremento logarítmico

$$\delta = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

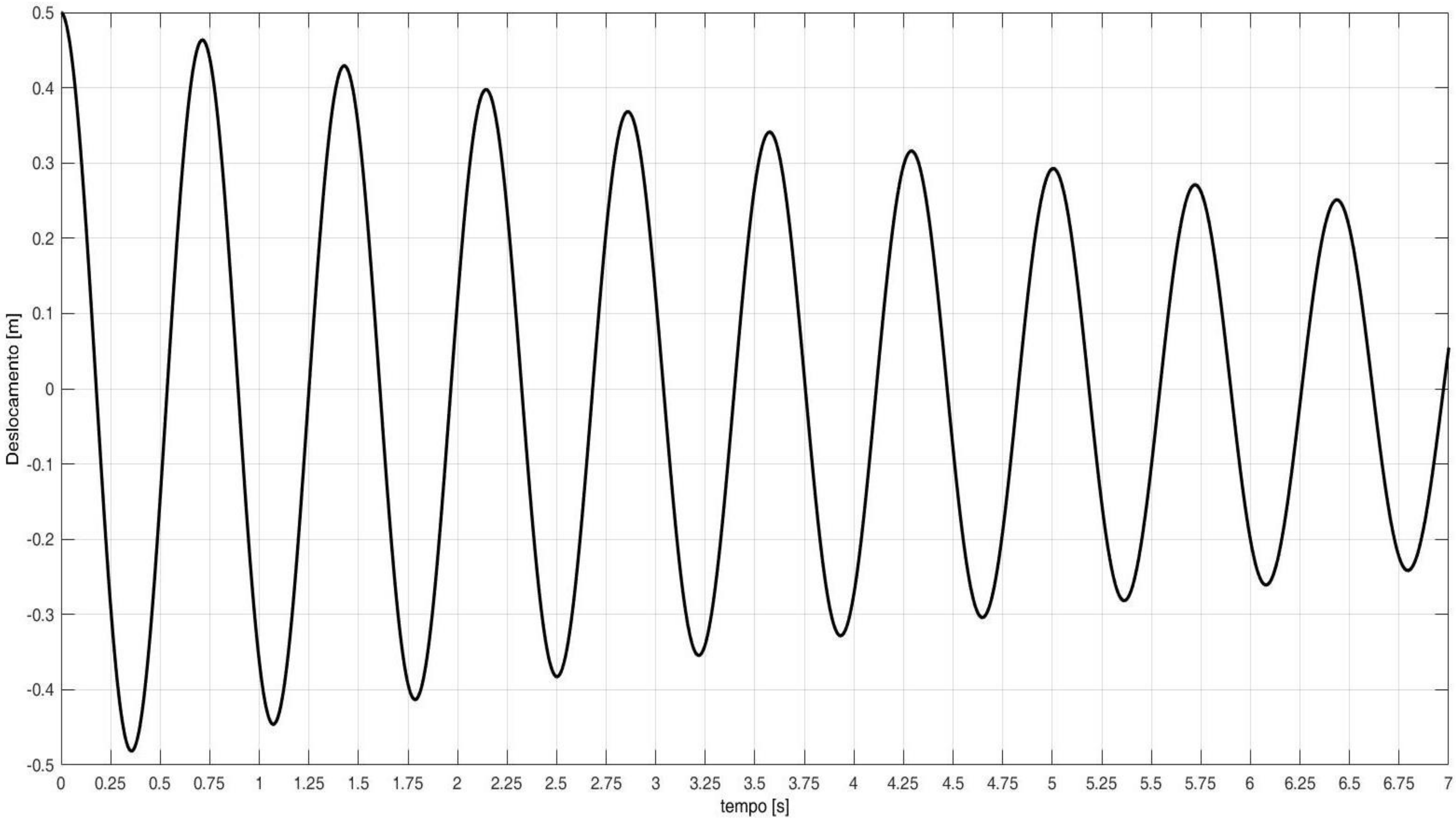
$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi}$$ para $\xi < 5\%$

1. O Serafim, sentado numa tábua encastrada na margem do lago, estava a pescar. A meio da pescaria, o anzol ficou preso no fundo do lago. Numa tentativa de soltar o anzol, o Serafim puxou lentamente a linha, mas com força, e reparou que a tábua onde estava sentado começou a deformar-se até tocar na água. No momento em que a tábua tocou na água, a linha partiu-se, e o Serafim, que pesa 70kgs (e nem mais uma grama porque ainda não tinha pescado nada) começou a descrever um movimento oscilatório em cima da tábua (conforme representado na figura).

   Sabendo que a tábua tem secção retangular com uma largura b de 30cm e 2 metros de comprimento L, determine:

a) a distância da tábua à superfície da água
b) a espessura h da tábua (considere que a rigidez de flexão da tábua encastrada é $3EI/L^3$, $I=(bh^3)/12$ e $E=9GPa$)
c) Esboce um gráfico, sobreposto ao fornecido no enunciado, do movimento oscilatório que obteria o Serafim se estivesse sentado numa viga de aço (E=210GPa), com metade da espessura, mesma largura e mesmo comprimento. (Lembre-se que, ao contrário da madeira, o aço tem um amortecimento material muito reduzido).
d) Determine o valor da constante de amortecimento viscoso equivalente do material da tábua.



Deslocamento [m]
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
0.25
0.5
0.75
1
1.25
1.5
1.75
2
2.25
2.5
2.75
3
3.25
3.5
3.75
4
4.25
4.5
4.75
5
5.25
5.5
5.75
6
6.25
6.5
6.75
7
tempo [s]