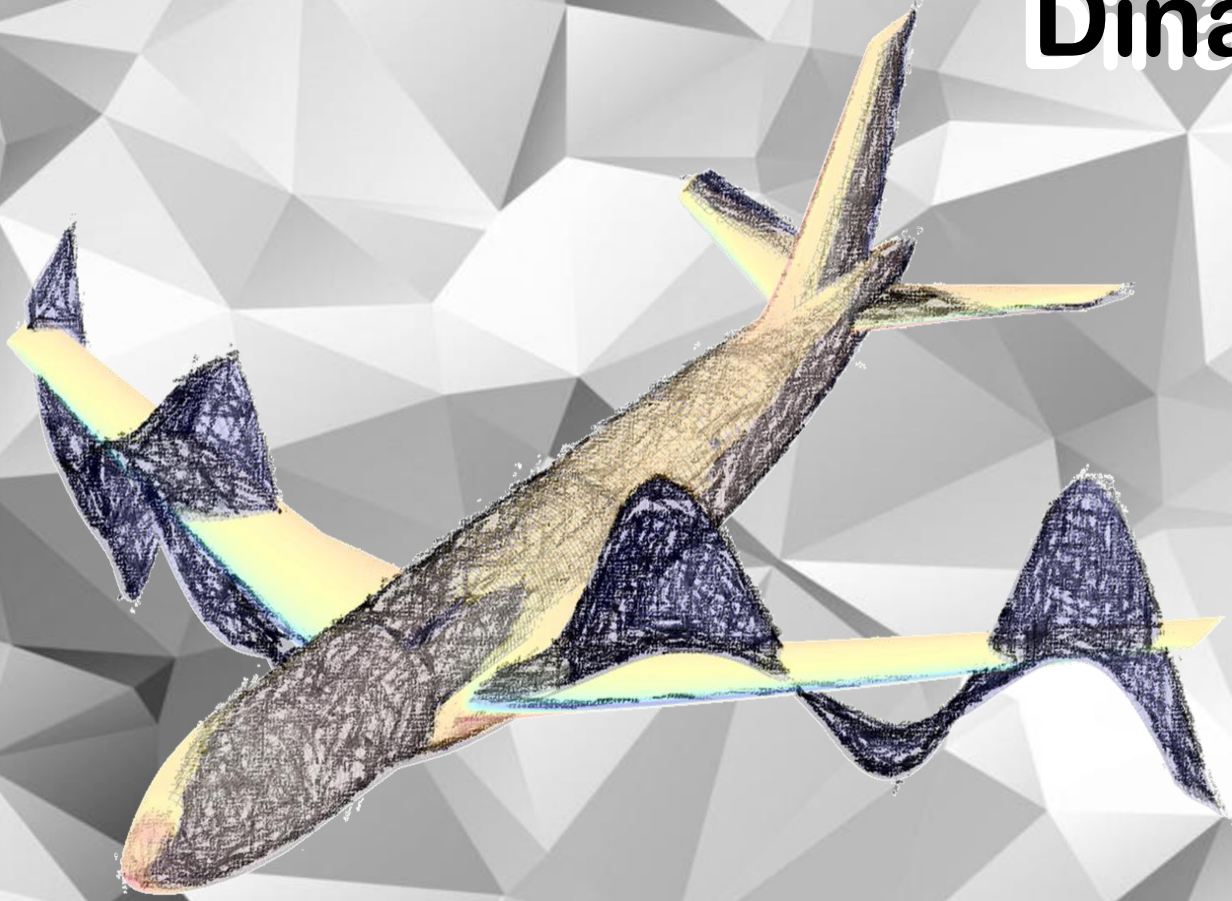
Aeroelasticidade

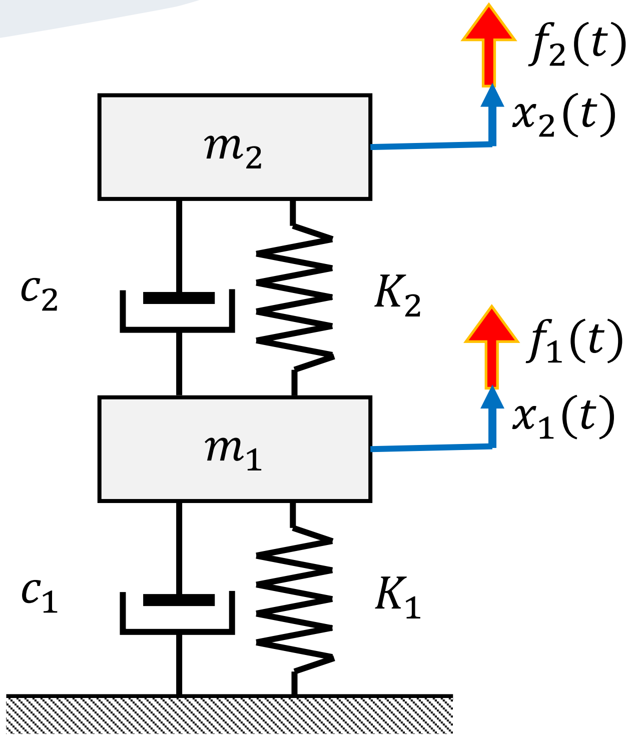
Dinâmica de Estruturas 3



2023/2024
Rui Moreira

SISTEMA COM N GRAUS DE LIBERDADE

Sistema com 2 graus de liberdade



Equação de movimento

$$m_1\ddot{x}_1(t) + c_1\dot{x}_1(t) + c_2\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) + K_1x_1(t) + K_2x_1(t) - K_2x_2(t) = f_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + c_2\dot{x}_2(t) - c_2\dot{x}_1(t) + K_2x_2(t) - K_2x_1(t) = f_2(t)$$

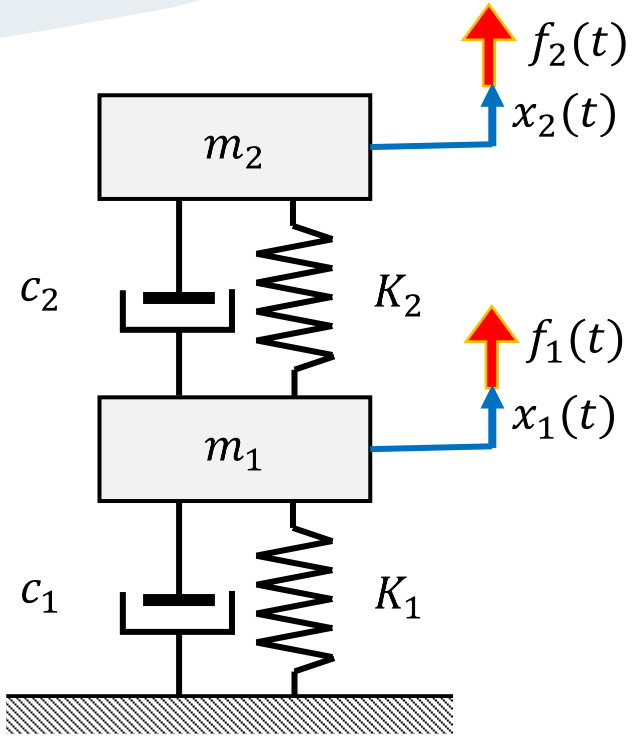
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\}$$

As matrizes $[M]$, $[C]$e $[K]$ designam-se por matriz de massa, amortecimento viscoso e rigidez, e são matrizes simétricas.

Os vetores $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$, $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são, respetivamente, o vetor de aceleração, o vetor de velocidade, o vetor de deslocamento e o vetor de carregamento (ou excitação)

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\}=\{\cancel{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})}\}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\}=\{\boldsymbol{0}\}$$

Assume-se uma resposta do tipo harmónico:

$$\{x(t)\}=\{u\}\,cos(\omega t-\phi)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} cos(\omega t-\phi)$$

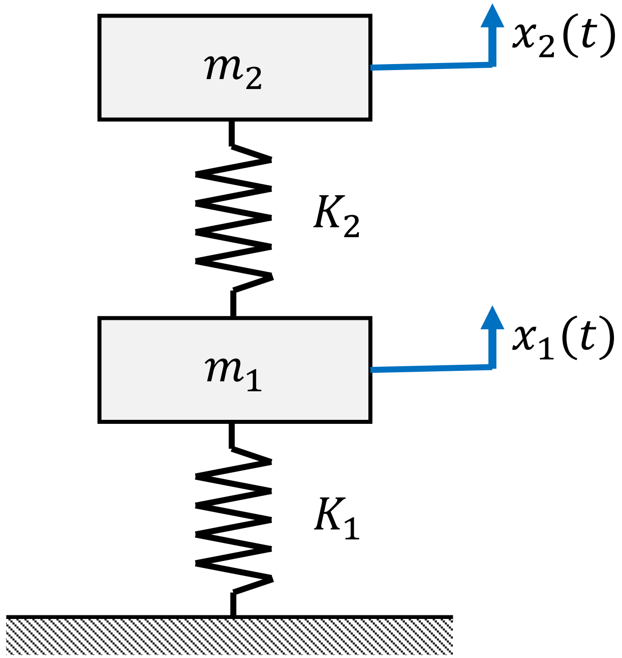
As duas massas efetuam um movimento harmónico síncrono com uma frequência ω

Substituindo na equação de movimento (sistema não amortecido):

$$[-\omega^2[M]+[K]]\{u\}\cos(\omega t-\phi)=\{0\}$$

$$[-\omega^2[M]+[K]]\{u\}=\{0\}$$

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$[-\omega^2[M] + [K]]\{u\} = \{0\}$ Sistema homogéneo

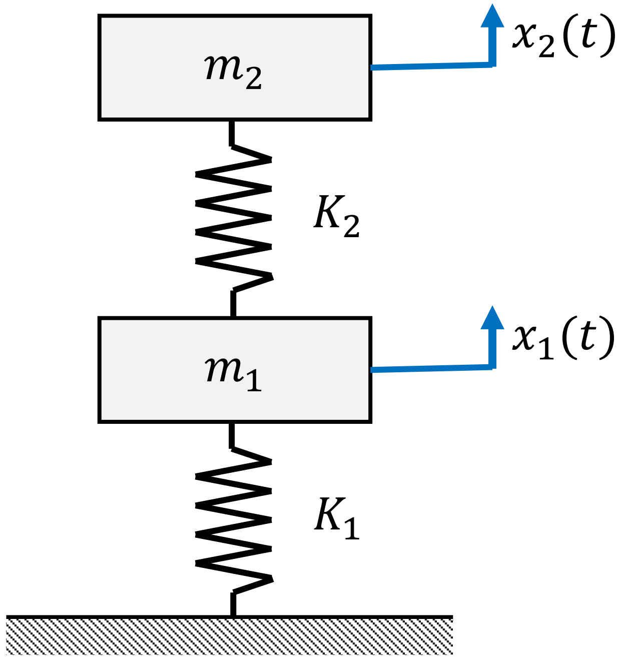
Problema caraterístico

A solução não trivial implica que o determinante da matriz do sistema homogéneo deve ser nulo.

$|-\omega^2[M] + [K]|=0$ Determinante caraterístico

Resolvendo o determinante característico obtém-se duas soluções: ω_1 e ω_2 que correspondem às frequências naturais do sistema (em [rad/s])

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$$|-\omega^2[M]+[K]|=0$$

Determinante caraterístico

ω_1 ω_2

Sistema homogéneo

$$[-\omega^2[M]+[K]]\{u\}=\{0\}$$

$$[-\omega_1^2[M]+[K]]\{u_1\}=\{0\}$$

$$[-\omega_2^2[M]+[K]]\{u_2\}=\{0\}$$

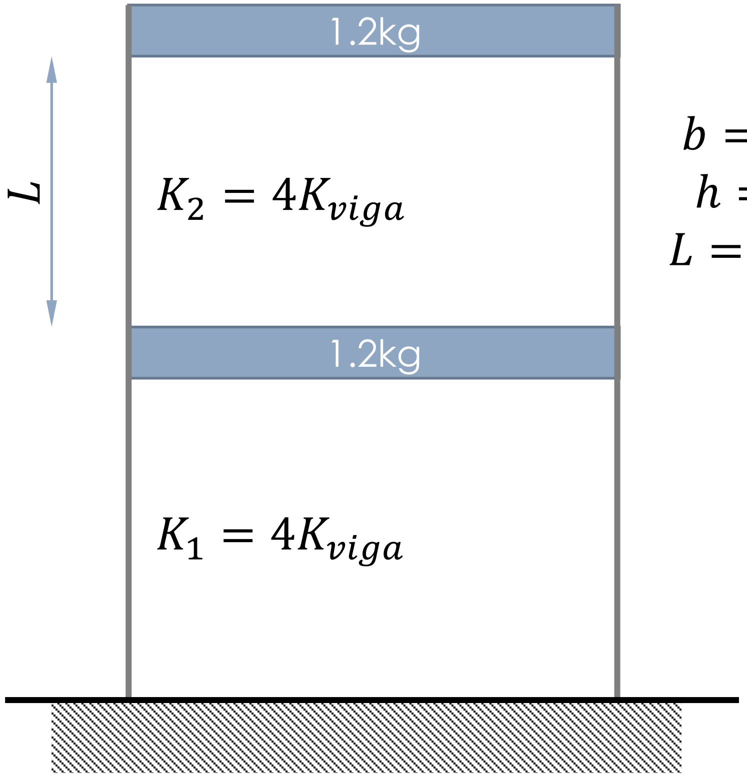
$$\{u_1\}=\begin{Bmatrix}u_{11}\\u_{21}\end{Bmatrix}$$

$$\{u_2\}=\begin{Bmatrix}u_{12}\\u_{22}\end{Bmatrix}$$

Forma modal de vibração associada a ω_1

Forma modal de vibração associada a ω_2

Sistema com 2 graus de liberdade



$$b = 10mm$$
$$h = 2mm$$
$$L = 150mm$$

$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9\ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

```
%%%% exercício Pórtico 2DOF %%%%
%%
%          _________
%         |___m2____|     m1=m2=1.2kg
%         |         |     K1=K2=4xKviga
%         | K2      |     Kviga=12EI/L^3
%         |_________|     E=70GPa
%         |___m1____|     I=b*h^3/12
%         |         |     b=10mm
%         | K1      |     h=2mm
%      ___|_________|___
%      ///////////////
%%
m1=1.2; m2=m1;
b=10e-3;h=2e-3;L=0.150;
E=70e9;
I=b*h^2/12
Kviga=12*E*I/L^3
K1=4*Kviga
K2=K1;

M=[m1 0;0 m2];
K=[K1+K2 -K2; -K2 K2];

[a,b]=eig(K,M)
```

a = $[\Phi]$

```
-0.4799   -0.7765
-0.7765    0.4799
```

b = $\{\omega_n^2\}$

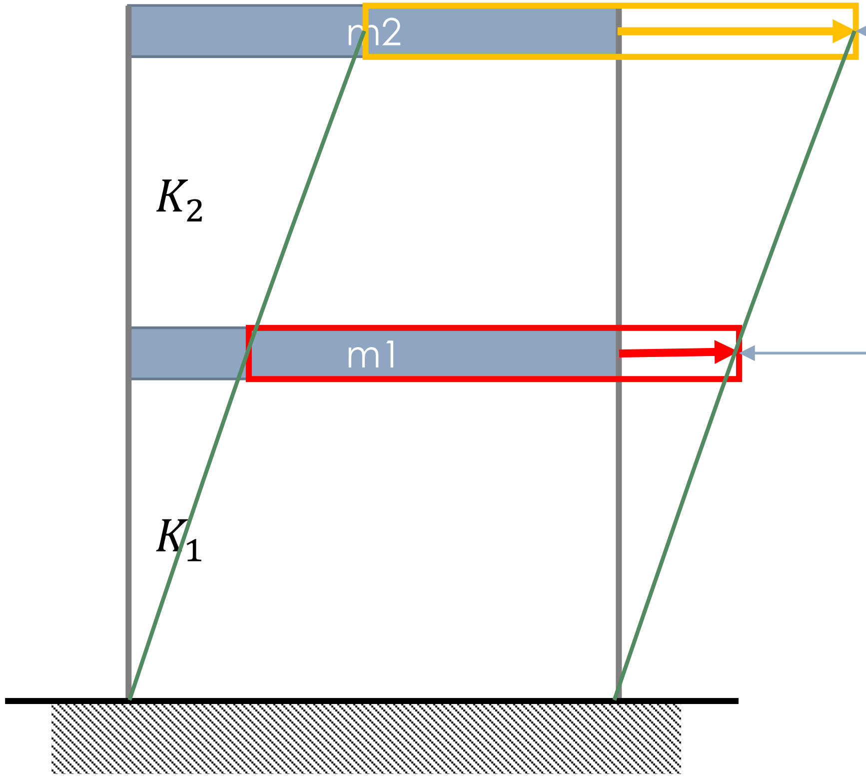
```
1.0e+06 *
 1.0563        0
      0   7.2400
```

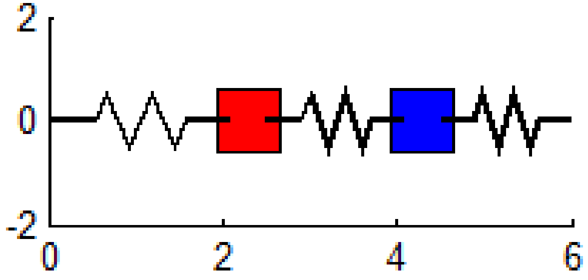
```
Phi=a
Wn=sqrt(diag(b))
Fn=Wn/2/pi
```

Sistema com 2 graus de liberdade

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\}]$$

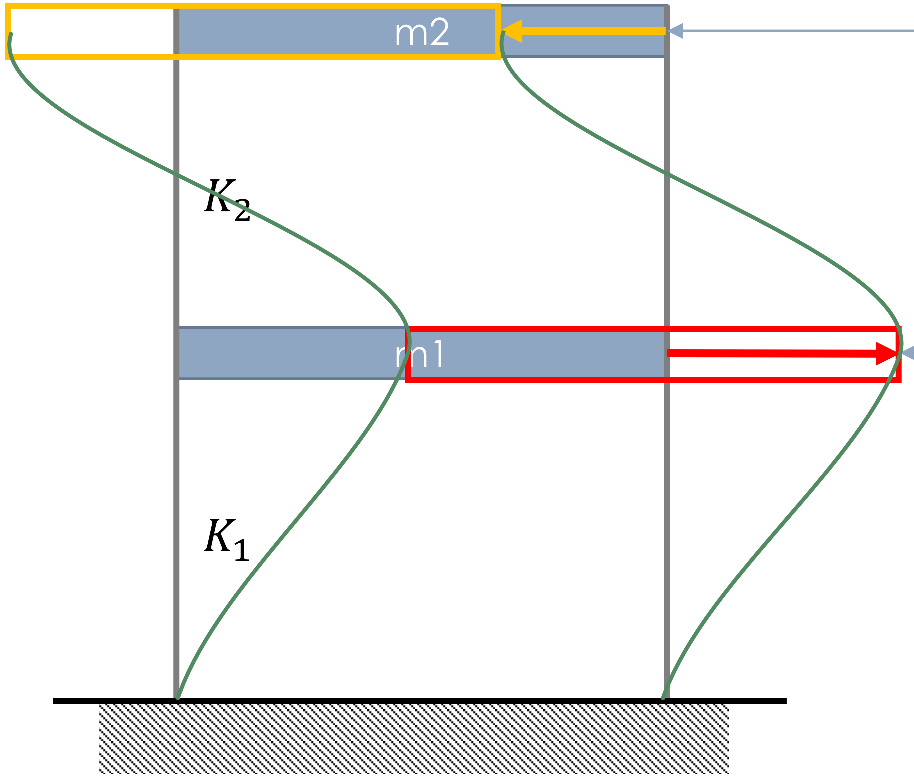
$\boxed{\omega_1}$ ω_2






```
Phi =

  -0.4799  -0.7765
  -0.7765   0.4799

Wn =

   1.0e+03 *

    1.0278
    2.6907

>> Fn=Wn/(2*pi)

Fn =

  163.5739
  428.2420
```

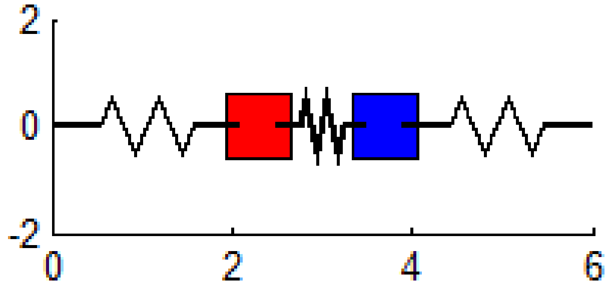
Sistema com 2 graus de liberdade



$$\Phi = \begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{21}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix} = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\}]$$

ω_1 $\boxed{\omega_2}$

```
Phi =

  -0.4799  -0.7765
  -0.7765   0.4799

Wn =

   1.0e+03 *

    1.0278
    2.6907

>> Fn=Wn/(2*pi)

Fn =

  163.5739
  428.2420
```



Modo natural de vibração

Um modo natural é formado pela FREQUÊNCIA NATURAL ω_n
e respetivo VETOR MODAL (ou forma modal, ou forma natural de vibração) $\{\phi\}_n$

Um sistema discreto com n graus de liberdade possui n modos naturais

Um sistema contínuo possui ______ modos naturais

O primeiro modo natural, que possui a mais baixa frequência, é designado por:
MODO NATURAL FUNDAMENTAL

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre (Resposta natural)

Sistema 1DOF: $x(t) = C.\cos(\omega t - \phi)$

Sistema 2DOF:
$$\{x(t)\}_1 = \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$
$$\{x(t)\}_2 = \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

A resposta do sistema é dada pela combinação:

$$\{x(t)\} = C_1.\{x(t)\}_1 + C_2.\{x(t)\}_2$$

(Nota: os modos naturais são linearmente independentes)

A resposta do sistema é obtida pela sobreposição dos dois modos de vibração multiplicados por uma constante (constante de participação)

SOBREPOSIÇÃO MODAL

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1.\cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ C_2.\cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{Bmatrix}$$

onde C_1 , C_2, ϕ_1 e ϕ_2 são determinados pelas condições iniciais

$$\{x(t)\} = [U].g(t)$$

Normalização dos vetores modais

Os vetores modais são definidos a menos de uma constante (ou seja, apenas representam a amplitude relativa da resposta de cada grau de liberdade)

Assim, é possível normalizar esses vetores modais

Normalização de massa modal unitária

$$\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1 = 1$$

$$\{\phi\}_2^T[M]\{\phi\}_2 = 1$$

onde são os vetores modais normalizados

e são calculados segundo:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T[M]\{u\}_1}}.\{u\}_1$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T[M]\{u\}_2}}.\{u\}_2$$

Normalização de massa modal unitária

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \ \{\phi\}_2]$$

Matriz modal normalizada

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [\mathrm{I}]$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [\Omega^2]$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

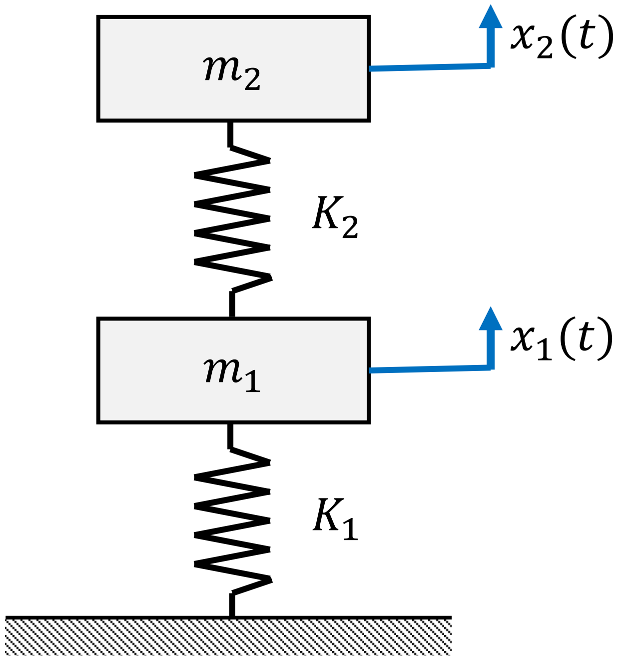
```
Phi'*M*Phi
Phi'*K*Phi
```

Exercícios

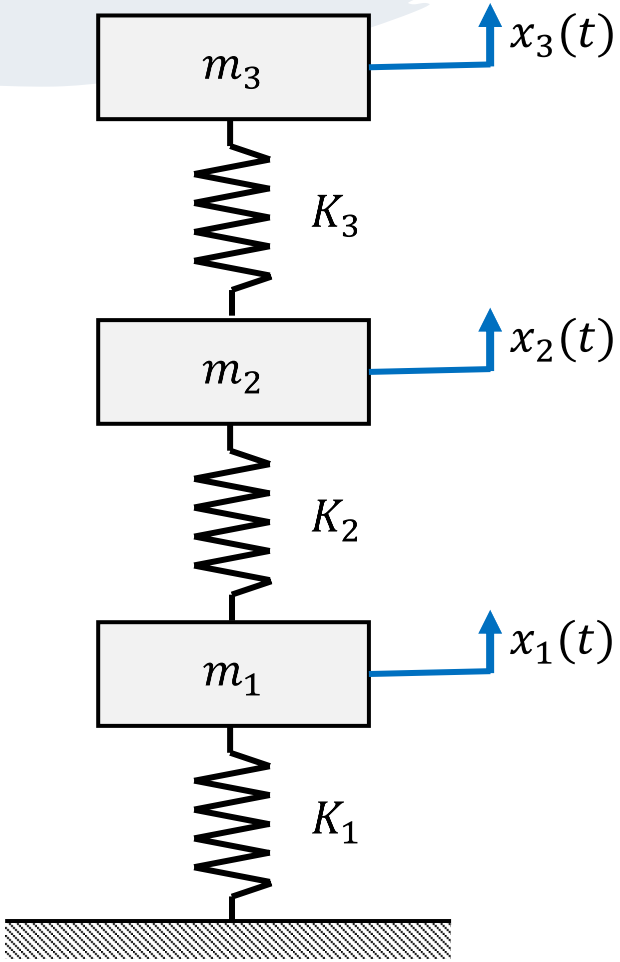
$m_1=m_2=1$
$K_1=K_2=1000$

$m_1=m_2=1$
$K_1=1000$
$K_2=100$

$m_1= 1$
$m_2= 2$
$K_1=K_2=1000$



Exercícios



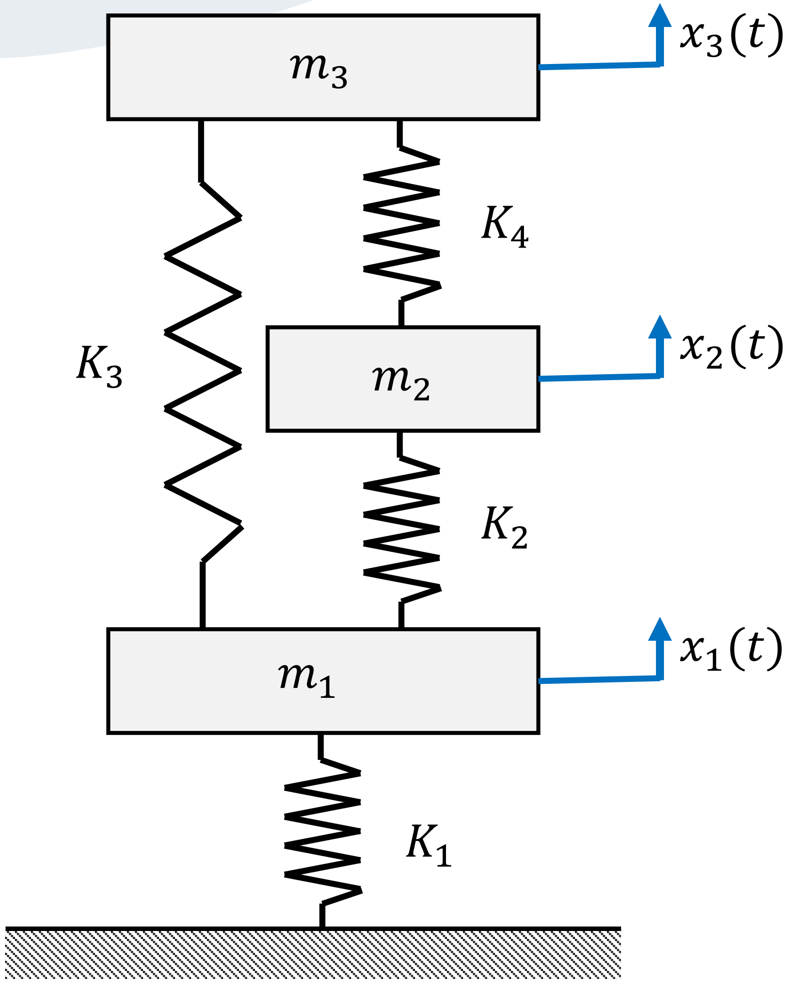
$m_1=m_2=m_3=1$
$K_1=K_2=K_3=1000$

$m_1=m_2=m_3=1$
$K_1=K_3=1000$
$K_2=100000$

$m_1=m_2=m_3=1$
$K_1=K_2=1000$
$K_3=100000$

$m_1=m_3=1$
$m_2=1000$
$K_1=K_2=K_3=1000$

Exercícios



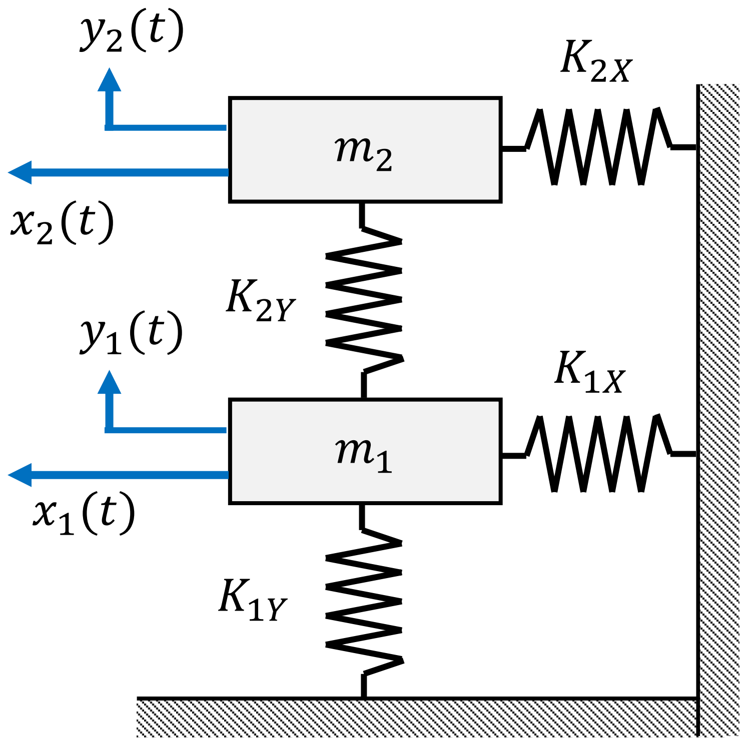
m_1=m_2=m_3=1
K_1=K_2=K_3=K_4=1000

Exercícios

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = K_{1Y} = K_{2Y} = 1000$

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = 1000$
$K_{1Y} = K_{2Y} = 10$

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = 10$
$K_{1Y} = K_{2Y} = 1000$



Sistema com 2 graus de liberdade – Regime forçado (excitação harmónica)

A equação de movimento é definida por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+ [C]\{\dot{x}(t)\}+ [K]\{x(t)\}= \{f(t)\}$$

onde

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{j\omega t}$$

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

A resposta é também do tipo harmónico:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$

Vetor complexo (amplitude e fase do movimento estacionário do sistema)

Sistema com 2 graus de liberdade – Regime forçado (excitação harmónica)

A resposta é também do tipo harmónico:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$

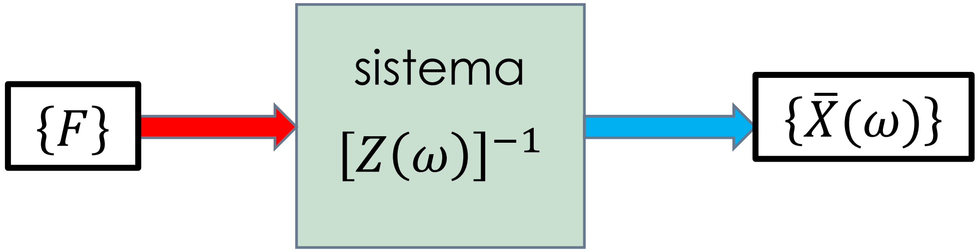
Substituindo na equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$ vem

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]].\{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$[Z(\omega)].\{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

Inverso da função de transferência



$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1}.\{F\}$$

Sistema com 2 graus de liberdade – Regime forçado (excitação harmónica)

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1}.\{F\}$$

$\{\bar{X}(\omega)\}$ É um vetor complexo cujo módulo determina a amplitude da resposta e o argumento determina o ângulo de fase (desfasamento) entre a resposta e a excitação.

$$[Z(\omega)] = [-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [Z(\omega)] = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix}$$

Sistema com 2 graus de liberdade – Regime forçado (excitação harmónica)

$$[Z(\omega)] = \left[\begin{array}{c|c} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ \hline -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{array}\right]$$

$$[Z(\omega)] = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ \hline Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{array}\right]$$

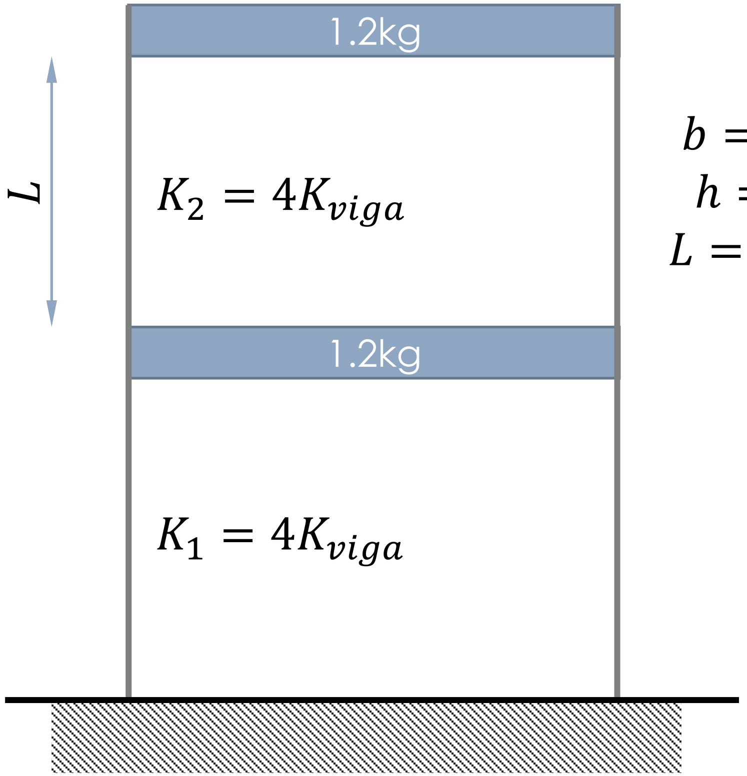
A função de transferência $[Z(\omega)]^{-1}$, que define a resposta do sistema $\{\bar{X}(\omega)\}$ em função da excitação $\{F\}$,

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1}.\{F\}$$

é dada por:

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{\det[Z(\omega)]}\begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{21}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{\bar{X}_1(\omega)\} = \dfrac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \\ \{\bar{X}_2(\omega)\} = \dfrac{-Z_{21}F_1 + Z_{11}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \end{array}\right.$$

Sistema com 2 graus de liberdade -exemplo



$$b = 10mm$$
$$h = 2mm$$
$$L = 150mm$$

$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9\ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

```
%%%% exercício Pórtico 2DOF %%%%
%%        ___________
%        |___m2_____|     m1=m2=1.2kg
%        |          |     K1=K2=4xKviga
%        | K2       |     Kviga=12EI/L^3
%        |__________|     E=70GPa
%        |___m1_____|     I=b*h^3/12
%        |          |     b=10mm
%        | K1       |     h=2mm
%     ___|__________|___
%     //////////////
%%
m1=1.2; m2=m1;
b=10e-3;h=2e-3;L=0.150;
E=70e9;
I=b*h^2/12
Kviga=12*E*I/L^3
K1=4*Kviga
K2=K1;

M=[m1 0;0 m2];
K=[K1+K2 -K2; -K2 K2];

[a,b]=eig(K,M)
```

a = $[\Phi]$

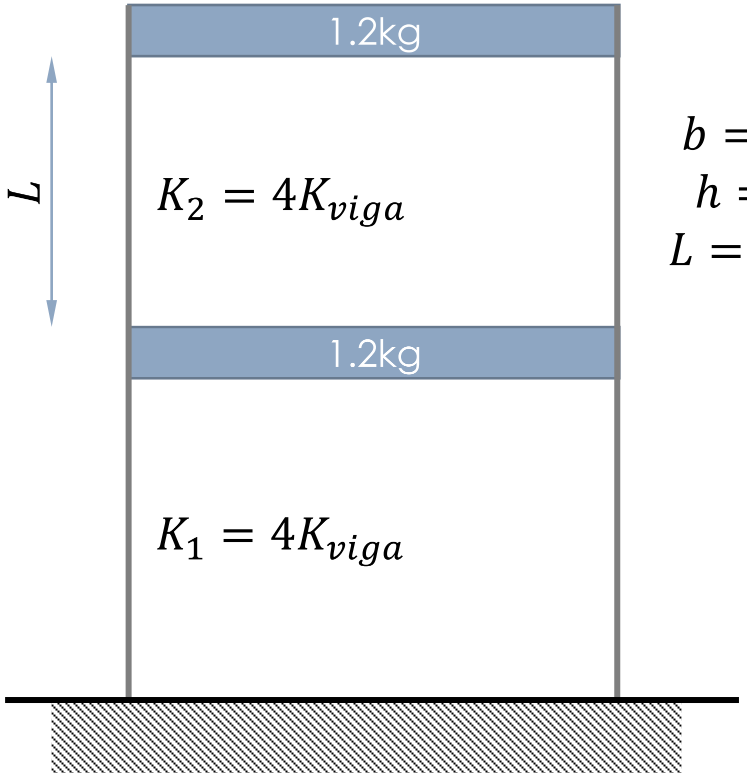
```
   -0.4799   -0.7765
   -0.7765    0.4799
```

b = $\{\omega_n^2\}$

```
  1.0e+06 *
   1.0563        0
        0   7.2400
```

```
Phi=a
Wn=sqrt(diag(b))
Fn=Wn/2/pi
```

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo



$$b = 10mm$$
$$h = 2mm$$
$$L = 150mm$$

$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9 \ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Considerar:

$$[C] = \alpha[K]$$

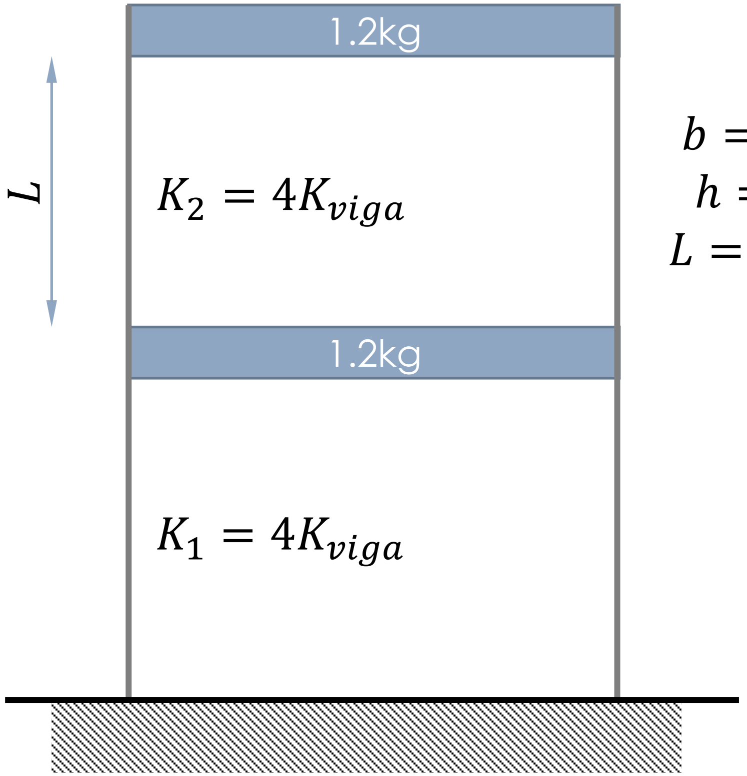
$$\alpha = 0.0001 \rightarrow 0.01$$

a) Determinar frequências naturais do sistema
b) Determinar matriz função de transferência
c) Representar funções de transferência
d) Determinar resposta para:

$$F_1 = Fcos(\omega t)$$

$$F_2 = 0$$

Sistema com 2 graus de liberdade -exemplo



$$b = 10mm$$
$$h = 2mm$$
$$L = 150mm$$

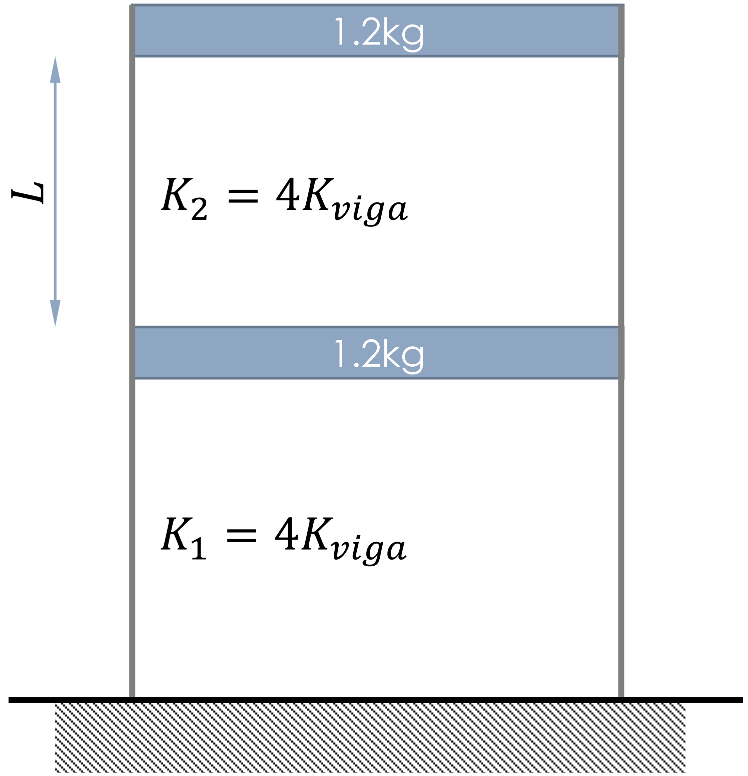
$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9\ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

```
%%%% exercício Pórtico 2DOF %%%%
%%
%         __________
%        |___m2_____|     m1=m2=1.2kg
%        |          |     K1=K2=4xKviga
%        | K2       |     Kviga=12EI/L^3
%        |__________|     E=70GPa
%        |___m1_____|     I=b*h^3/12
%        |          |     b=10mm
%        | K1       |     h=2mm
%     ___|__________|___
%     ///////////////
%%
m1=1.2; m2=m1;
b=10e-3;h=2e-3;L=0.150;
E=70e9; I=b*h^2/12;
Kviga=12*E*I/L^3;
K1=4*Kviga; K2=K1;

M=[m1 0;0 m2];
K=[K1+K2 -K2; -K2 K2];

[a,b]=eig(K,M);

Phi=a
Wn=sqrt(diag(b))
Fn=Wn/2/pi

disp(['Frequência natural fundamental w1 (f1): ',num2str(Wn(1)),' rad/s
(',num2str(Fn(1)),' Hz))']);
disp(['Vetor modal para w1: ',num2str(Phi(1,1)),' dof1 e ', num2str(Phi(2,1)),'
dof 2.']);

disp(['2a Frequência natural w2 (f2): ',num2str(Wn(2)),' rad/s
(',num2str(Fn(2)),' Hz))']);
disp(['Vetor modal para w2: ',num2str(Phi(1,2)),' dof1 e ', num2str(Phi(2,2)),'
dof 2.']);
```

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo



$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9\ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Considerar: $[C] = \alpha[K]$ $\quad \alpha = 0.0001 \rightarrow 0.01$

Determinar matriz da função de transferência

$$\boxed{[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]]} . \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$\boxed{[Z(\omega)]} . \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix}$$

```
alpha=1e-6; %amortecimento
C=K*alpha; %matriz de amortecimento [C]=alpha*[K]
% [M]a(t)+[C]v(t)+[K]x(t)=f(t)

w=linspace(0,2*Wn(2),1000); %vetor de frequências 0 2*Wn2, 1000 valores
f=w/2/pi; %Hz
for i=1:length(w)
    Z11(i)=-w(i)^2*M(1,1)+1i*w(i)*C(1,1)+K(1,1); %-w^2*m11+jw*c11+k11
    Z12(i)=1i*w(i)*C(1,2)+K(1,2); %-w^2*m12+jw*c12+k12
    Z21(i)=1i*w(i)*C(2,1)+K(2,1); %-w^2*m21+jw*c21+k21
    Z22(i)=-w(i)^2*M(2,2)+1i*w(i)*C(2,2)+K(2,2); %-w^2*m22+jw*c22+k22
    Det(i)=Z11(i)*Z22(i)-Z12(i)*Z21(i); %determinante da matriz Z
end
```

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo

Determinar a resposta do sistema, no domínio da frequência

$$[Z(\omega)]\ .\{\bar{X}(\omega)\} = \{F\} \longrightarrow \{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1}.\{F\}$$

Consideremos: $\{F(\omega)\} = \{F_1\ \ F_2\}^T$

$$F_1 = Fcos(\omega t)$$

$$F_2 = 0$$

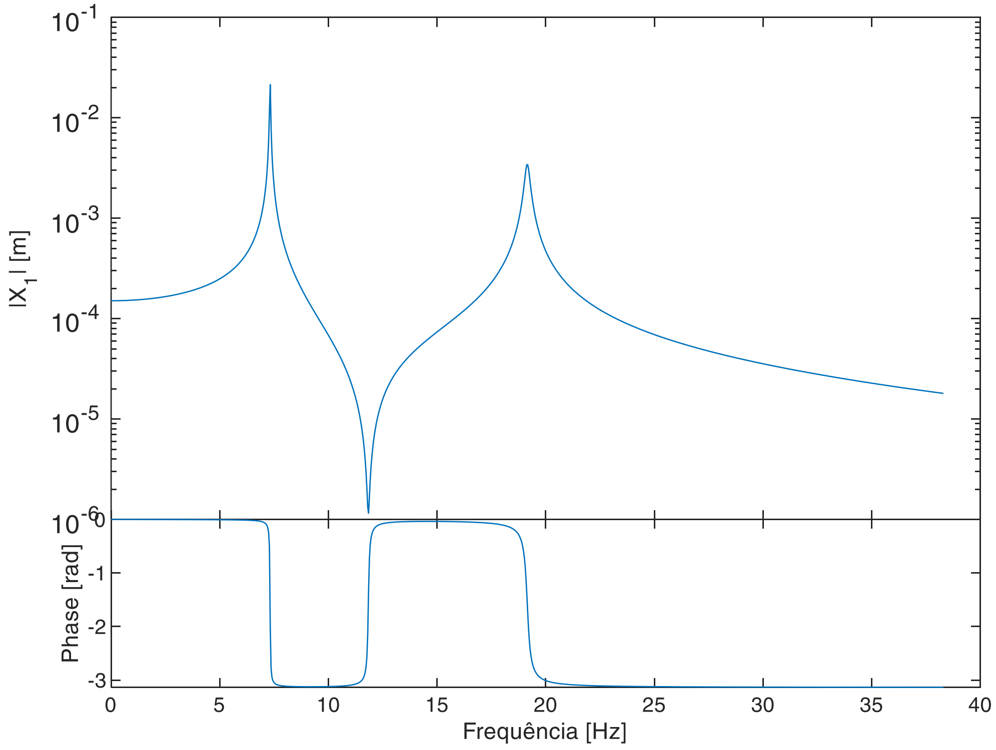
```
alpha=1e-6; %amortecimento
C=K*alpha; %matriz de amortecimento [C]=alpha*[K]
% [M]a(t)+[C]v(t)+[K]x(t)=f(t)

F=1;

w=linspace(0,2*Wn(2),1000); %vetor de frequências 0 2*Wn2, 1000 valores
f=w/2/pi; %Hz
for i=1:length(w)
    Z11(i)=-w(i)^2*M(1,1)+1i*w(i)*C(1,1)+K(1,1); %-w^2*m11+jw*c11+k11
    Z12(i)=1i*w(i)*C(1,2)+K(1,2); %-w^2*m12+jw*c12+k12
    Z21(i)=1i*w(i)*C(2,1)+K(2,1); %-w^2*m21+jw*c21+k21
    Z22(i)=-w(i)^2*M(2,2)+1i*w(i)*C(2,2)+K(2,2); %-w^2*m22+jw*c22+k22
    Det(i)=Z11(i)*Z22(i)-Z12(i)*Z21(i); %determinante da matriz Z
    X1(i)=Z22(i)/Det(i)*F;
    X2(i)=-Z21(i)/Det(i)*F;
end
```

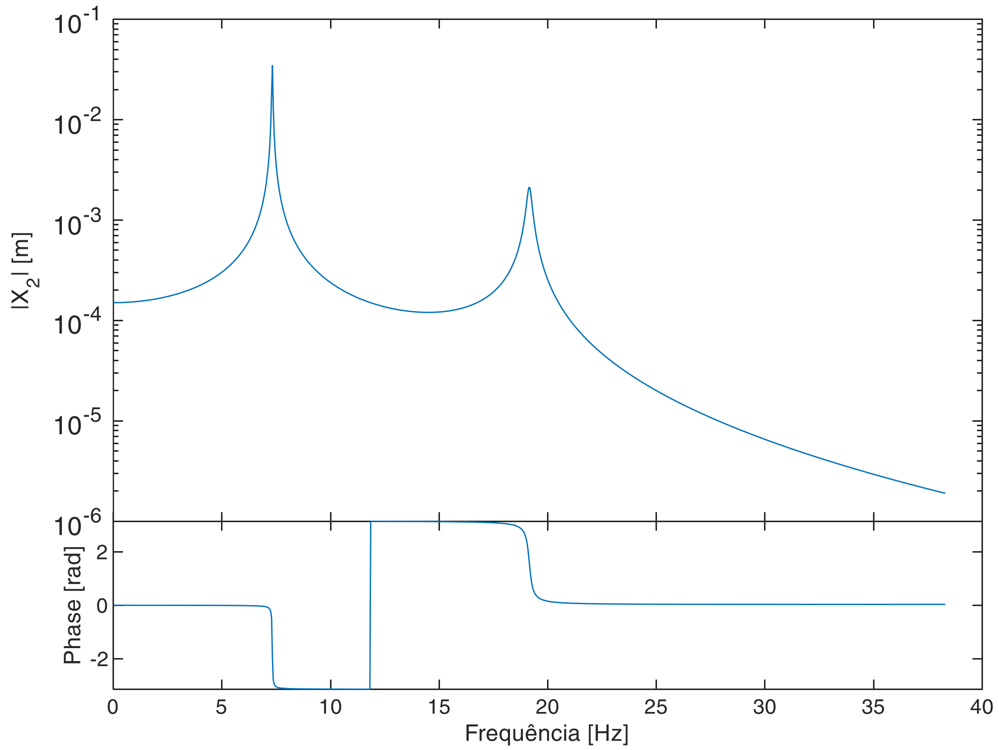
$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{\det[Z(\omega)]}\begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{21}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{X}_1(\omega)\} = \frac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

$$\{\bar{X}_2(\omega)\} = \frac{-Z_{21}F_1 + Z_{11}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

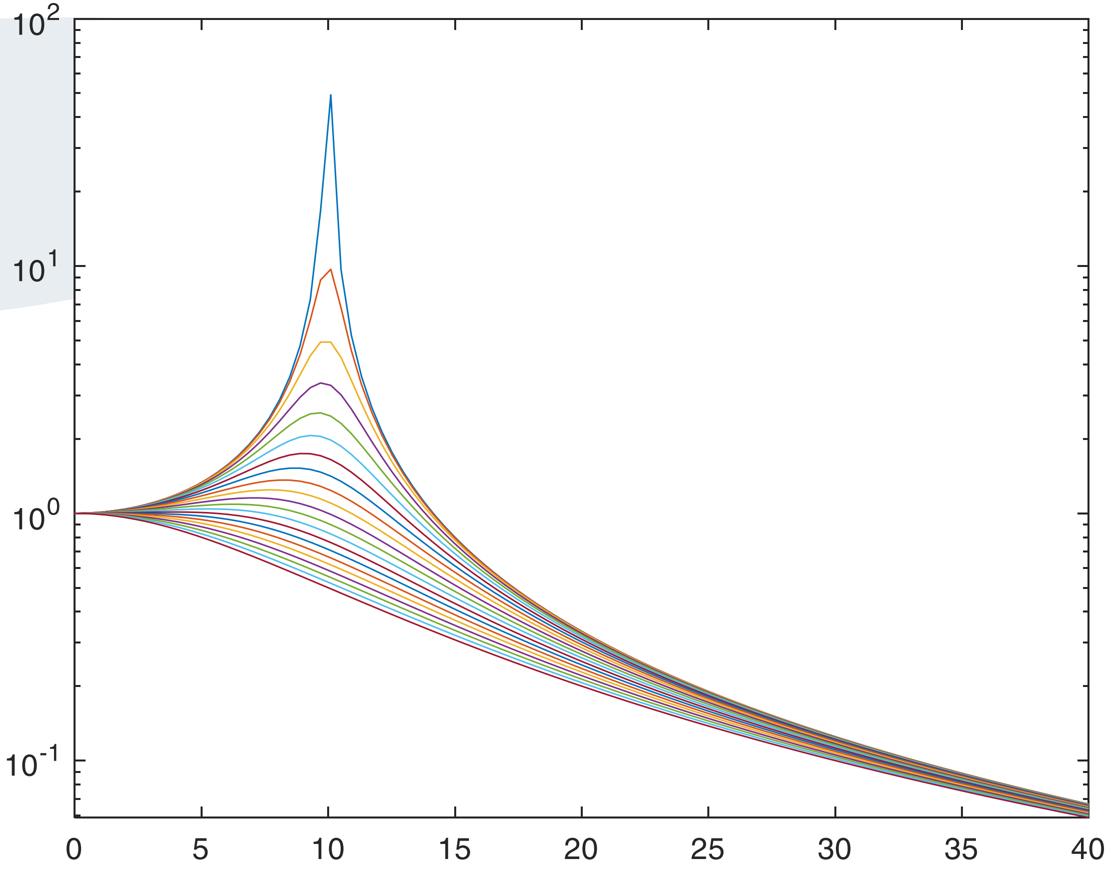
```
figure(1);
sf1=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(X1));
sf2=subplot(2,1,2);plot(f,angle(X1));
set(sf1,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
set(sf2,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
set(get(sf2,'XLabel'),'String','Frequência [Hz]');
set(get(sf1,'YLabel'),'String','|X_1| [m]');
set(get(sf2,'YLabel'),'String','Phase [rad]');
fh=get(get(sf2,'Ylabel'),'Fontsize');
set(get(sf1,'YLabel'),'Fontsize',fh);
set(sf1,'XTicklabel',{});
```






```
figure(2);
sf3=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(X2));
sf4=subplot(2,1,2);plot(f,angle(X2));
set(sf3,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
set(sf4,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
set(get(sf4,'XLabel'),'String','Frequência [Hz]');
set(get(sf3,'YLabel'),'String','|X_2| [m]');
set(get(sf4,'YLabel'),'String','Phase [rad]');
fh=get(get(sf4,'Ylabel'),'Fontsize');
set(get(sf3,'YLabel'),'Fontsize',fh);
set(sf3,'XTicklabel',{});
```

SDOF



$$x_p = X_s \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$$X_s = \frac{F}{K}$$

Fator de amplificação dinâmica

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$