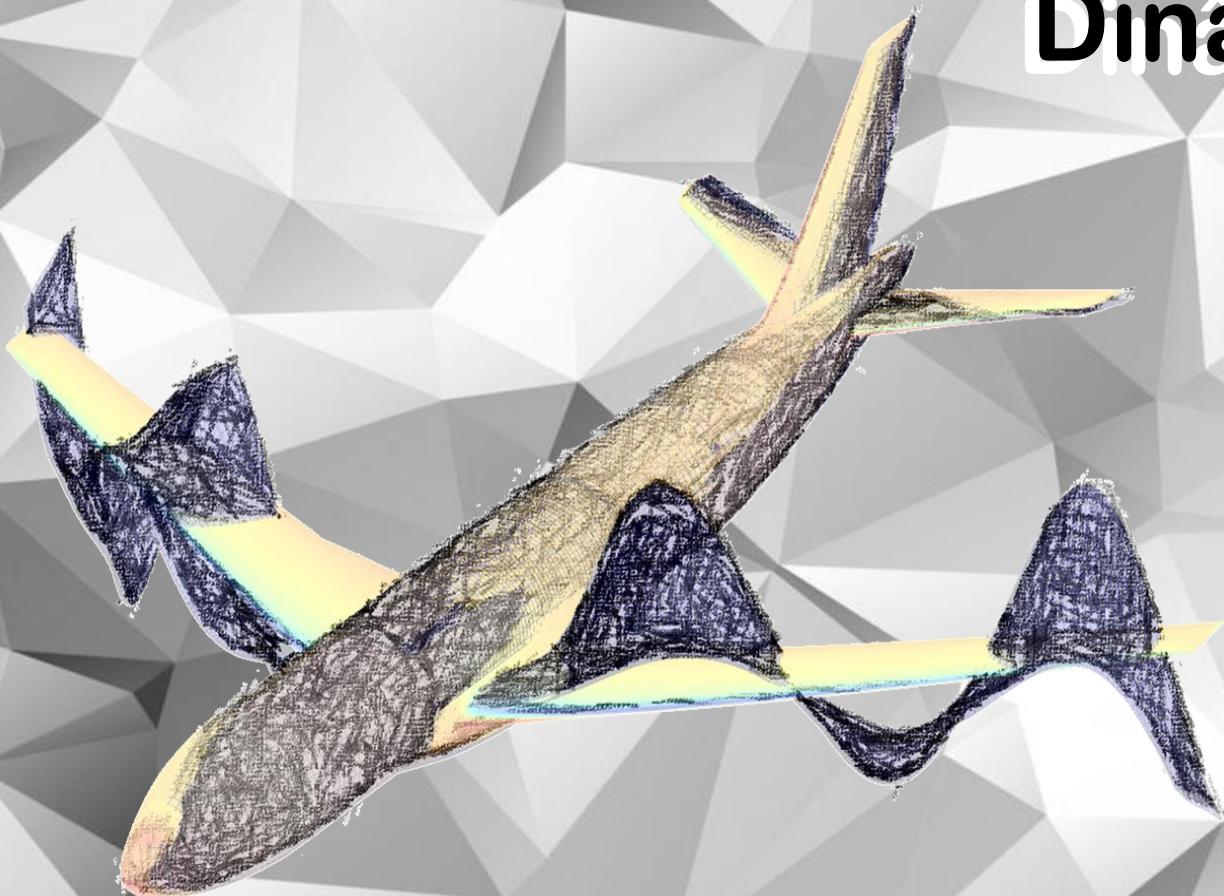


Aeroelasticidade

Dinâmica de Estruturas 4



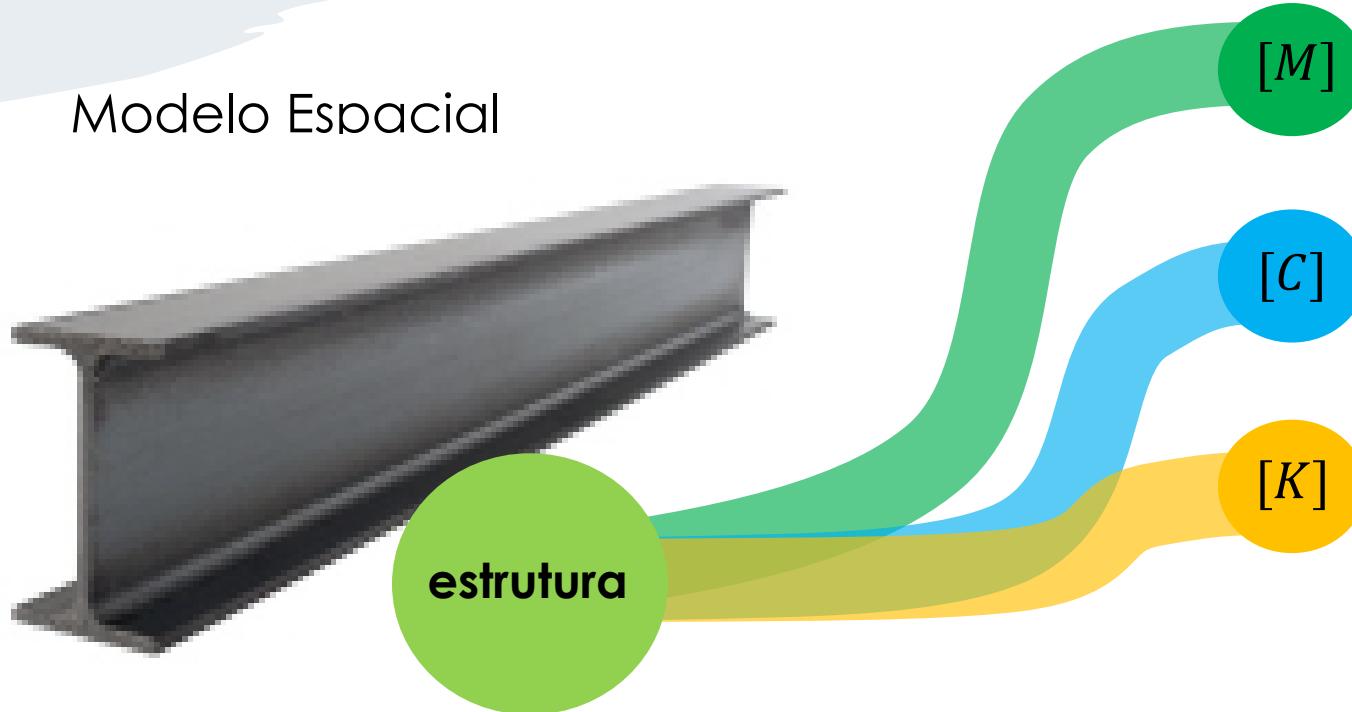
2023/2024
Rui Moreira



SISTEMAS CONTÍNUOS
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Modelos de representação de um sistema dinâmico

Modelo Espacial



Eq. Movimento no domínio do tempo

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Eq. Movimento no domínio da frequência

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

Modelos de representação de um sistema dinâmico

Modelo Modal

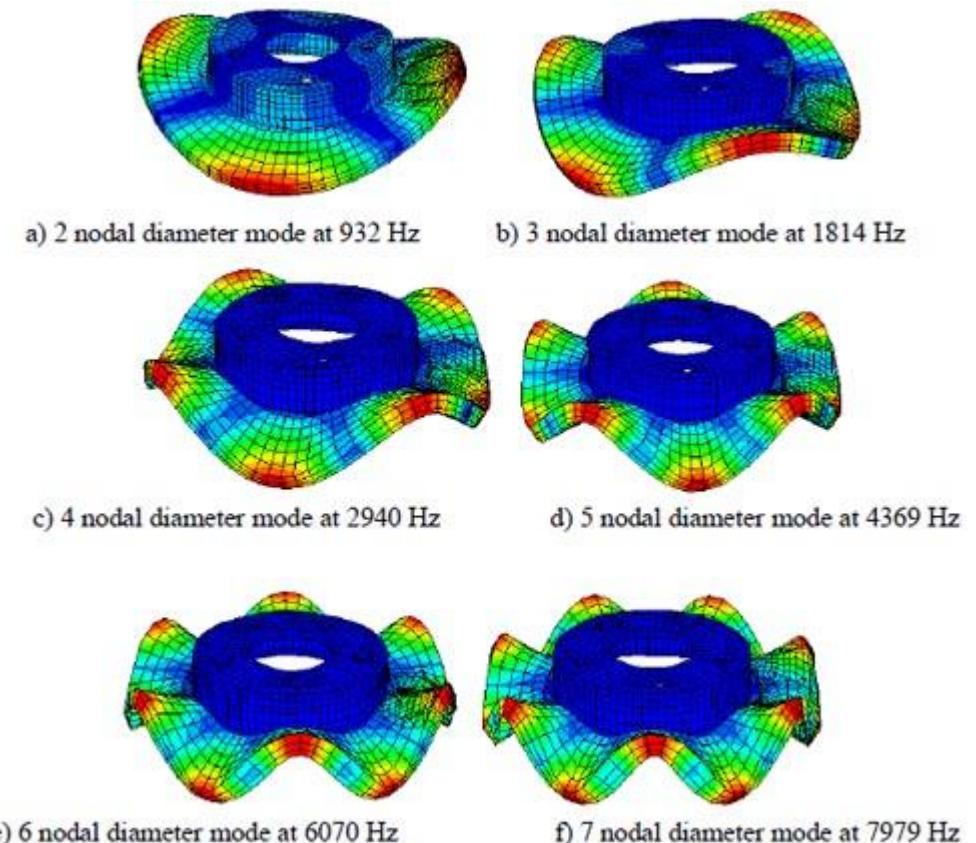
O sistema é representado por:

Vetor de frequências naturais:

$$\{\Omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Matriz de vetores modais:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}]$$



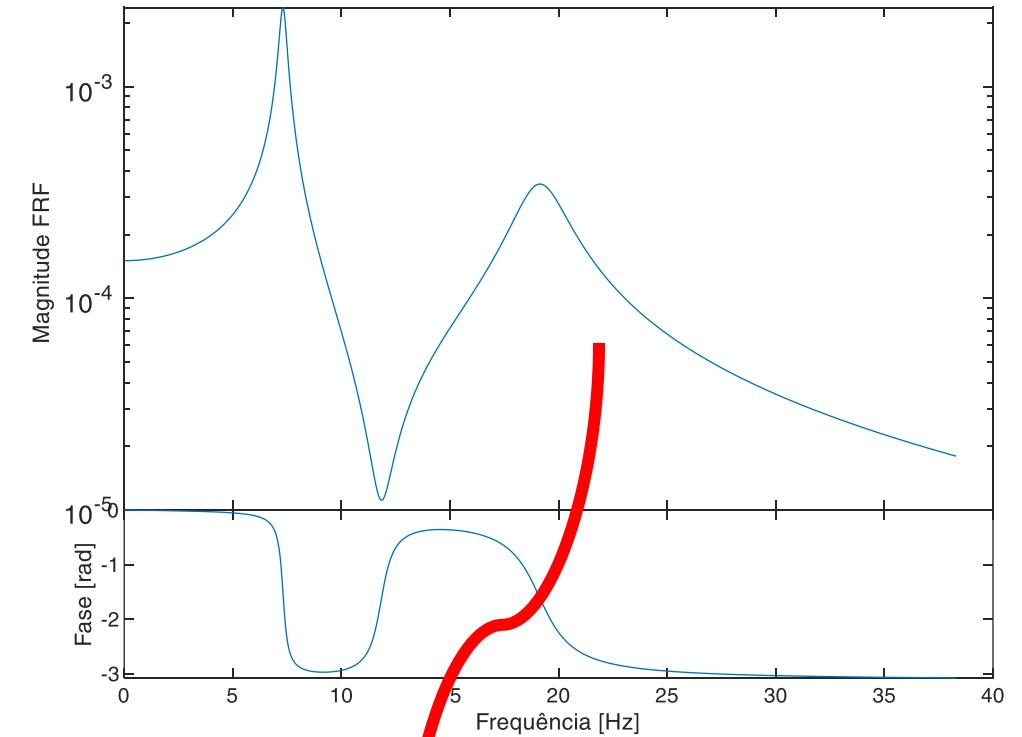
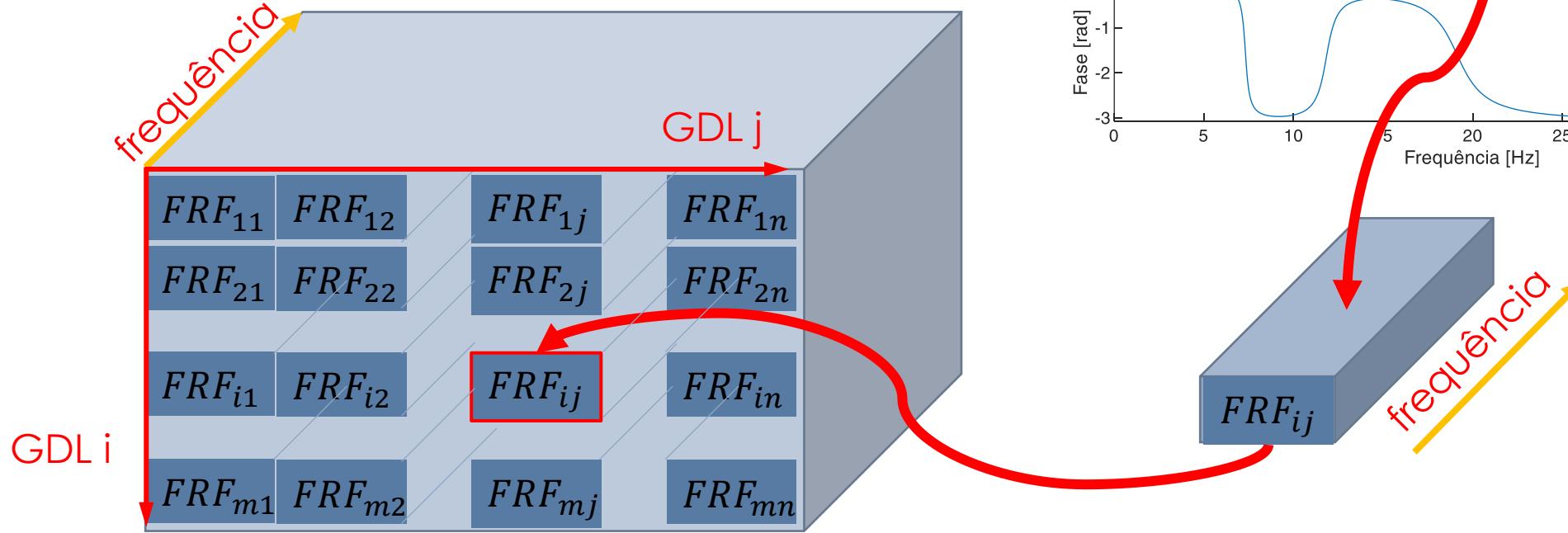
Modelos de representação de um sistema dinâmico

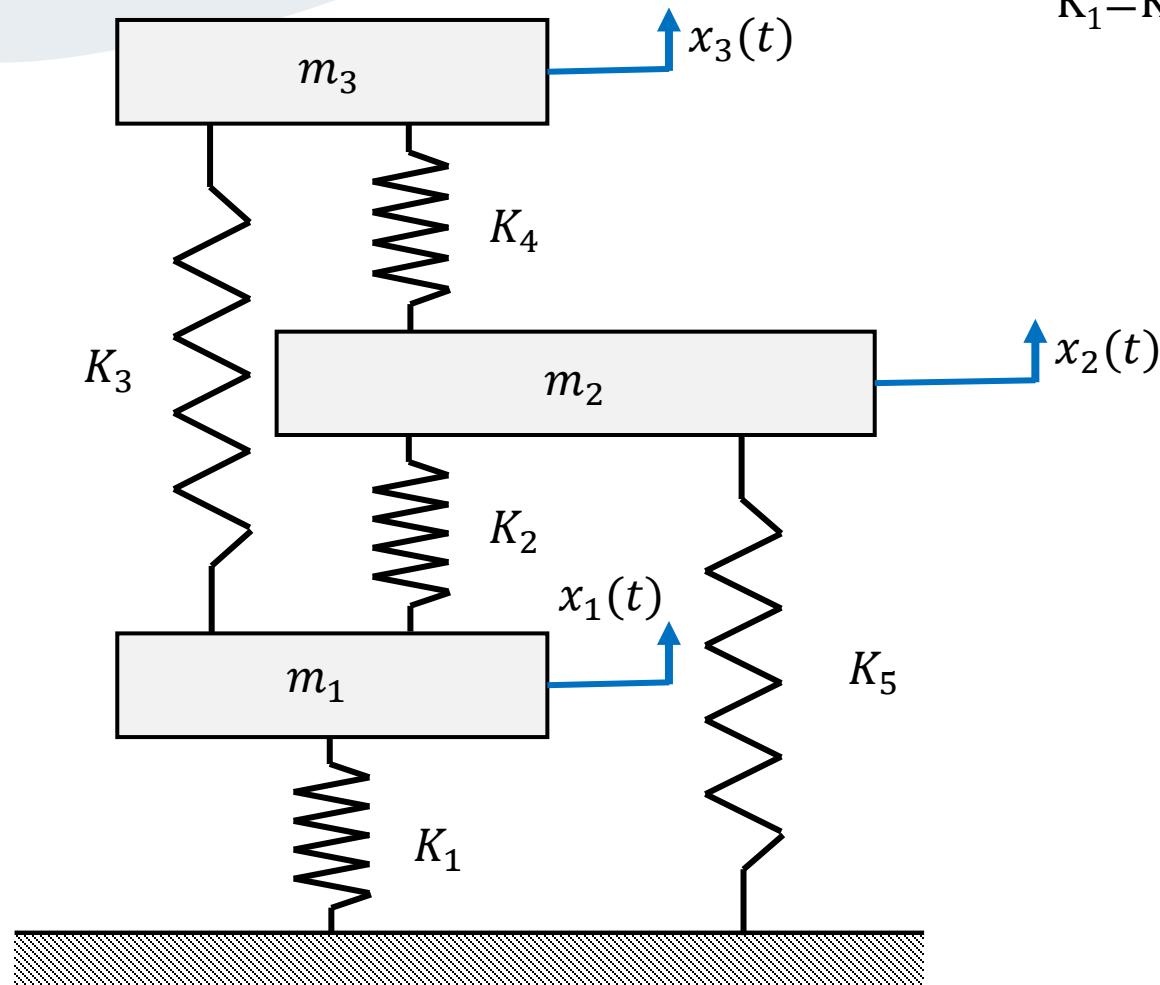
Modelo de Resposta

O sistema é representado por:

Matriz de vetores
de resposta em frequência:

$$\{\text{FRF}_{ij}(\omega)\}$$





$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = 1000$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

Modelo Espacial

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & -c_2 & -c_3 \\ -c_2 & c_2 + c_4 + c_5 & -c_4 \\ -c_3 & -c_4 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}$$

Modelo Modal

problema homogéneo

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{0\}$$

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \cdot \cos(\omega t - \phi) = \{0\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

Solução não trivial $\rightarrow |-\omega^2[M] + [K]| = 0$ Determinante característico



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: frequências naturais do sistema

(determinado pelos valores próprios do problema de valores e vetores próprios)

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_1

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_2

$$\{u_3\} = \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_3

(determinado pelos vetores próprios do problema de valores e vetores próprios)

Modelo Modal

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: frequências naturais do sistema

$$\{u_1\} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

forma modal para ω_1

$$\{u_2\} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}$$

$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_3\}]$ Matriz de vetores modais

forma modal para ω_2

$$\{u_3\} = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$$

forma modal para ω_3

$[\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \{\phi_3\}]$ Matriz de vetores modais normalizados
a massa modal unitária

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = [I]$$

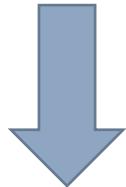
$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = [0]$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} = [\Omega^2]$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = [0], \quad i \neq j$$

Modelo de Resposta

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$



$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

Considerando solicitação e resposta harmónicas

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{j\omega t}$$

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$

Vetor complexo
(amplitude e fase do
movimento estacionário
do sistema)

A resposta do sistema pode ser determinada por:

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

$[Z(\omega)]^{-1}$ - função de transferência

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)] \cdot \{F\}$$

$[H(\omega)]$ - Matriz de funções de resposta em frequência

Modelo de Resposta

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)].\{F\}$$

[$H(\omega)$] - Matriz de funções de resposta em frequência

$$\frac{\{\bar{X}(\omega)\}}{\{F\}} = [\alpha(\omega)]$$

Deslocabilidade
ou Recetância

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{X}(\omega)\}} = [\mathbf{K}(\omega)]$$

Rigidez dinâmica

$$\frac{\{\bar{V}(\omega)\}}{\{F\}} = [Y(\omega)] = j\omega[\alpha(\omega)]$$

Mobilidade

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{V}(\omega)\}} = [I(\omega)]$$

Impedância
mecânica

$$\frac{\{\bar{A}(\omega)\}}{\{F\}} = [A(\omega)] = -\omega^2[\alpha(\omega)]$$

Acelerância

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{A}(\omega)\}} = [M(\omega)]$$

Massa aparente

Modelo de representação – conversão de modelos

Modelo Espacial → Modelo Modal

Extração de valores e vetores próprios

Modelo Espacial → Modelo de Resposta

Análise direta em frequência

Modelo de Resposta → Modelo Modal

Identificação Modal

Modelo Modal → Modelo de Resposta

Sintetização (“Sobreposição Modal”)

Modelo Espacial → Modelo de resposta

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)].\{F\}$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$

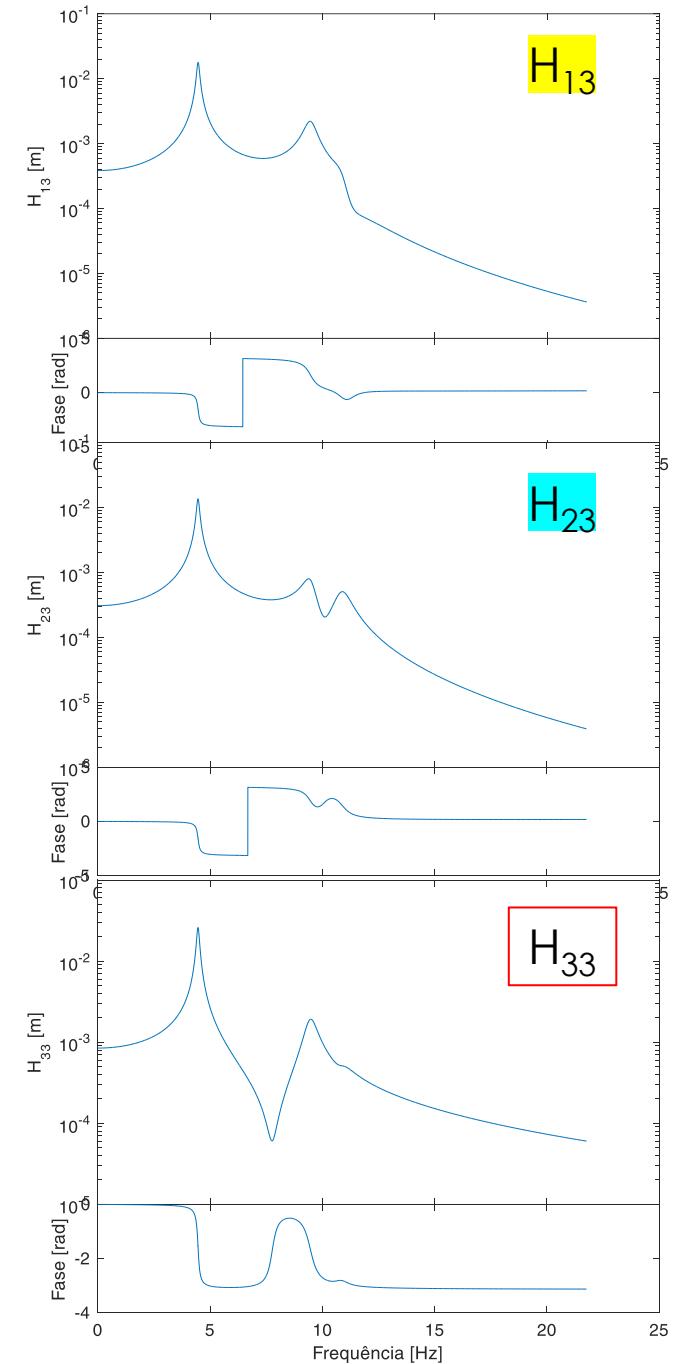
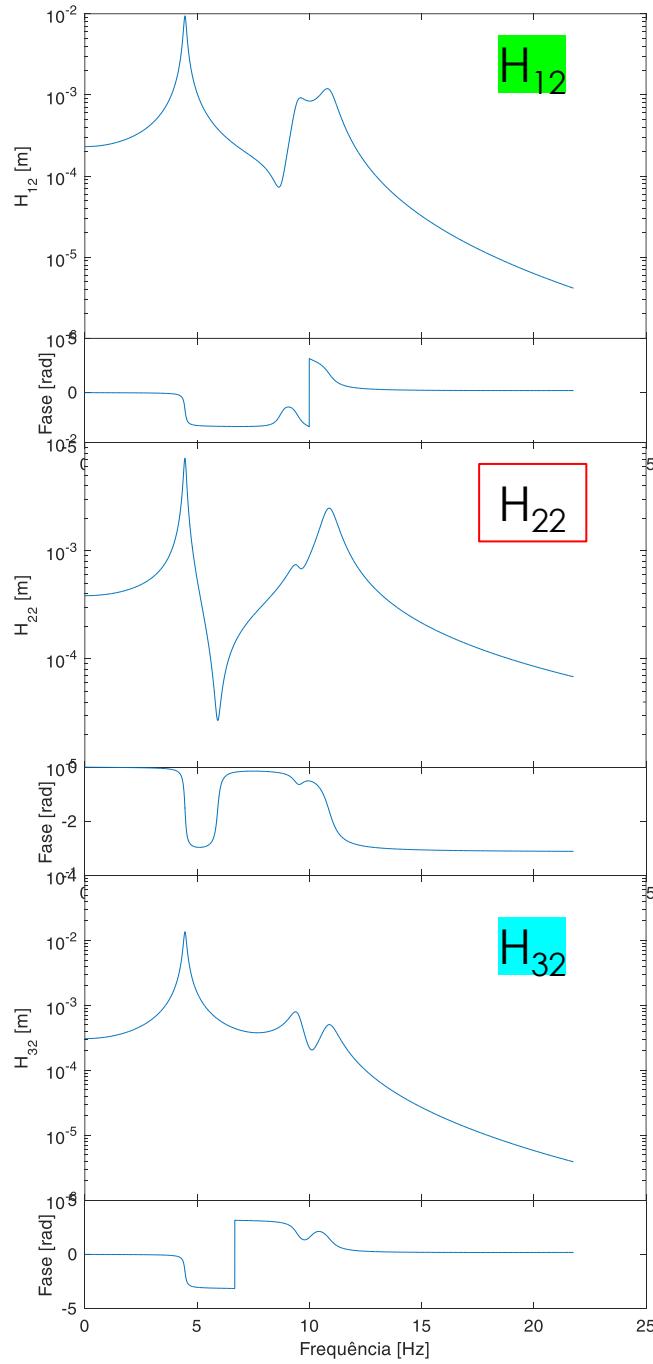
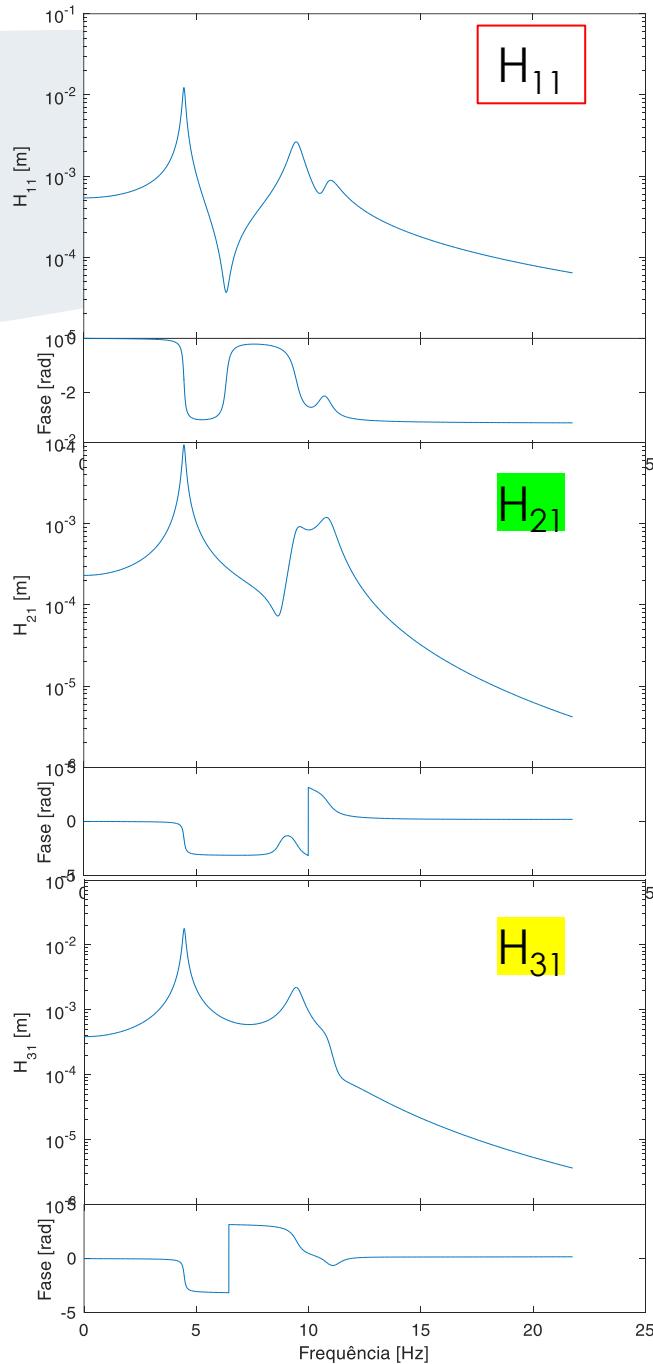
[$H(\omega)$] - Matriz de funções
de resposta em frequência

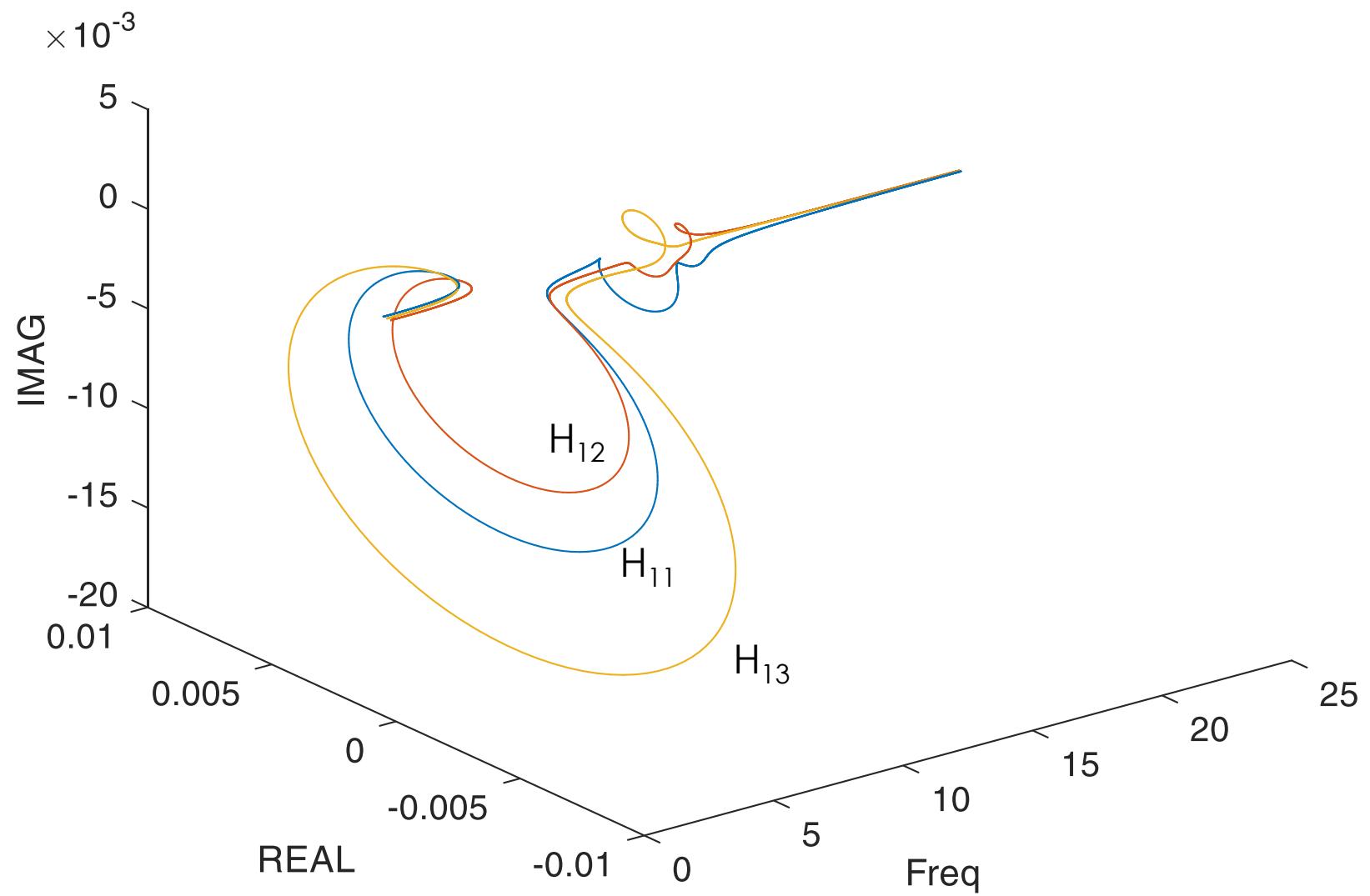
Análise direta em frequência

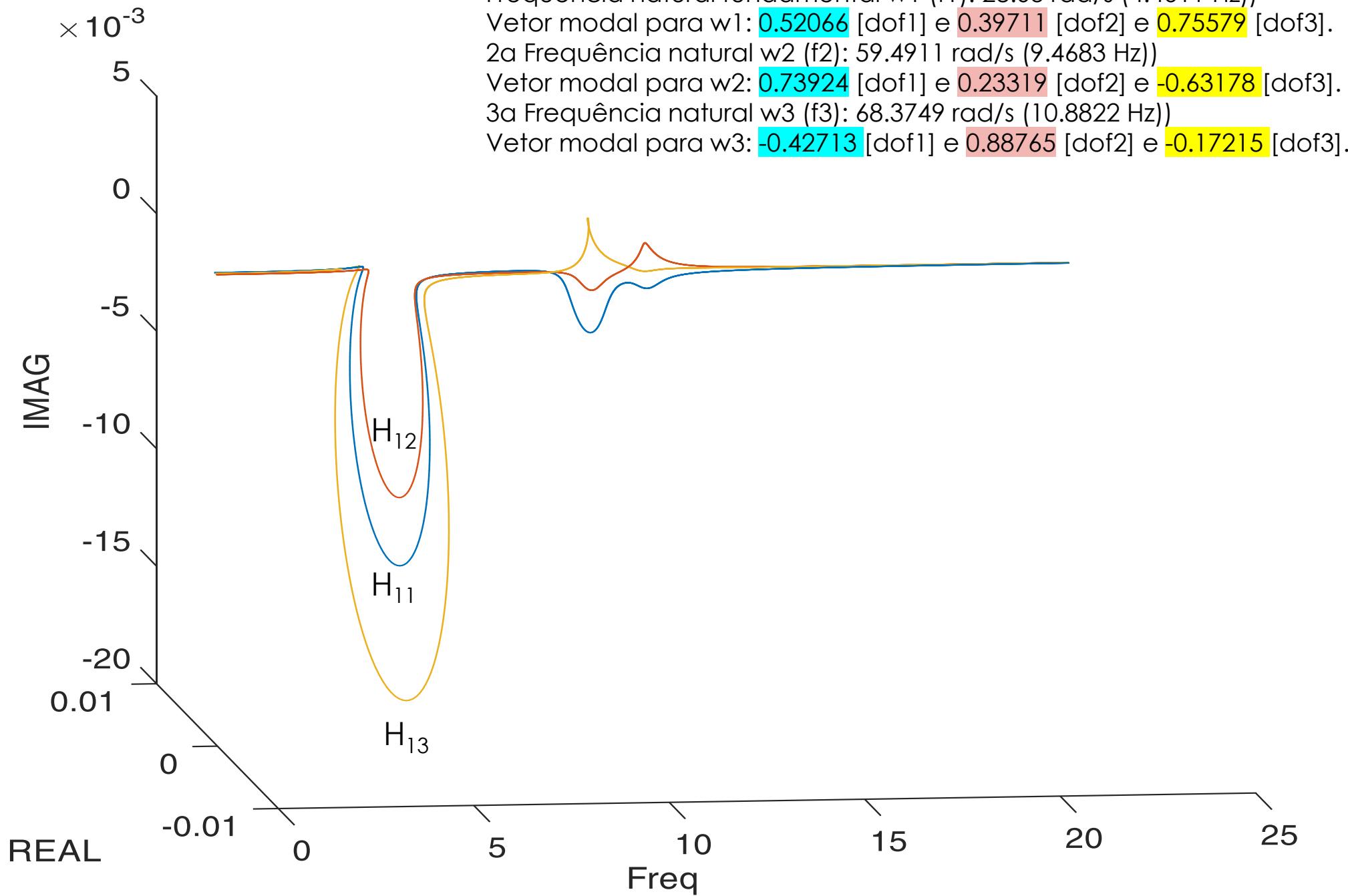
$$\omega: \omega_i \rightarrow \omega_f$$

$$\curvearrowright [Z(\omega)] = [-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]]$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$







Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F(\omega)\}$$

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [[K] - \omega^2[M]]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T [[K] - \omega^2[M]] [\Phi] = [\Phi]^T [K] [\Phi] - \omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

A matriz $[\alpha_{ij}(\omega)]$ é simétrica
Princípio da Reciprocidade

$$\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{kj}(\omega)$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

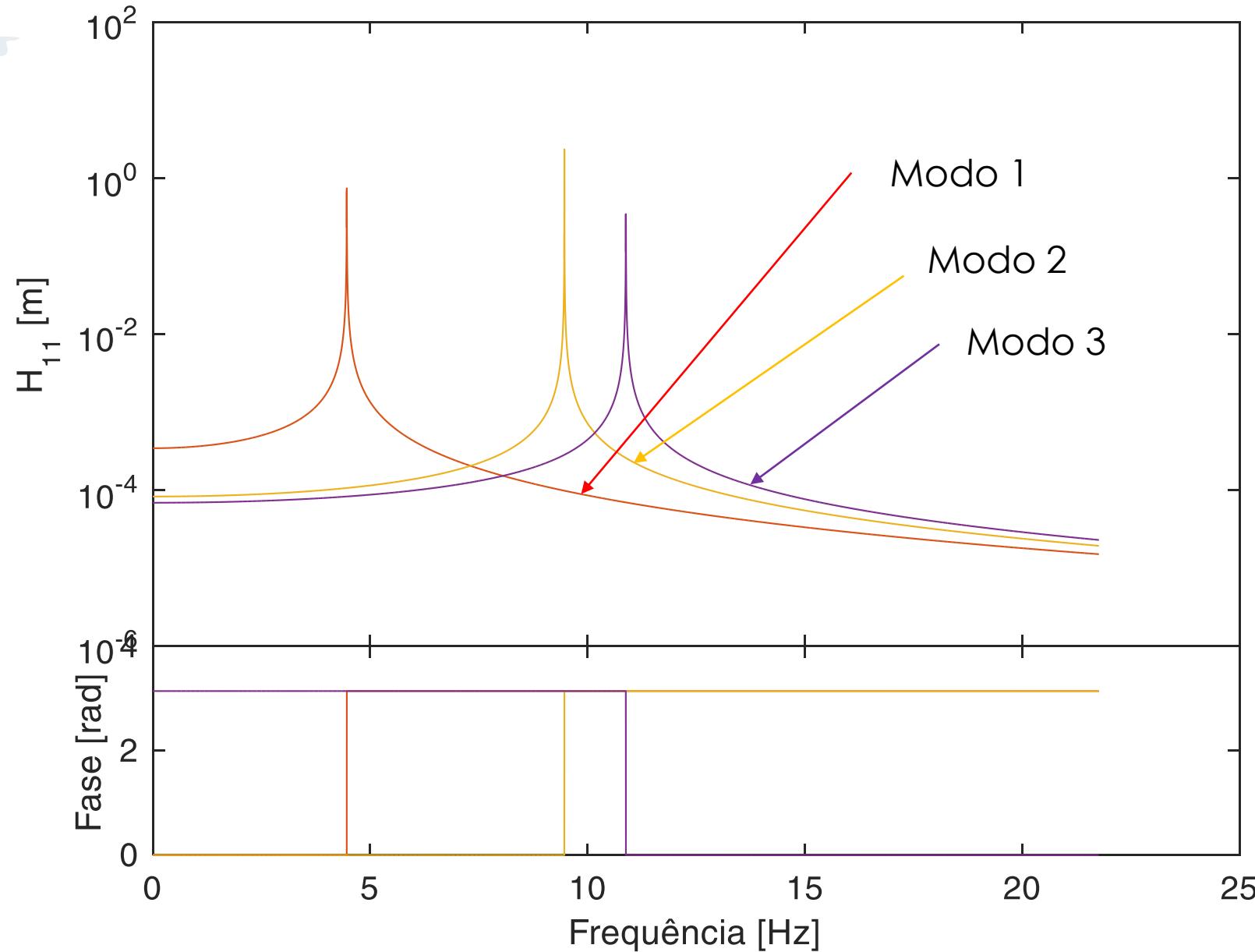
$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

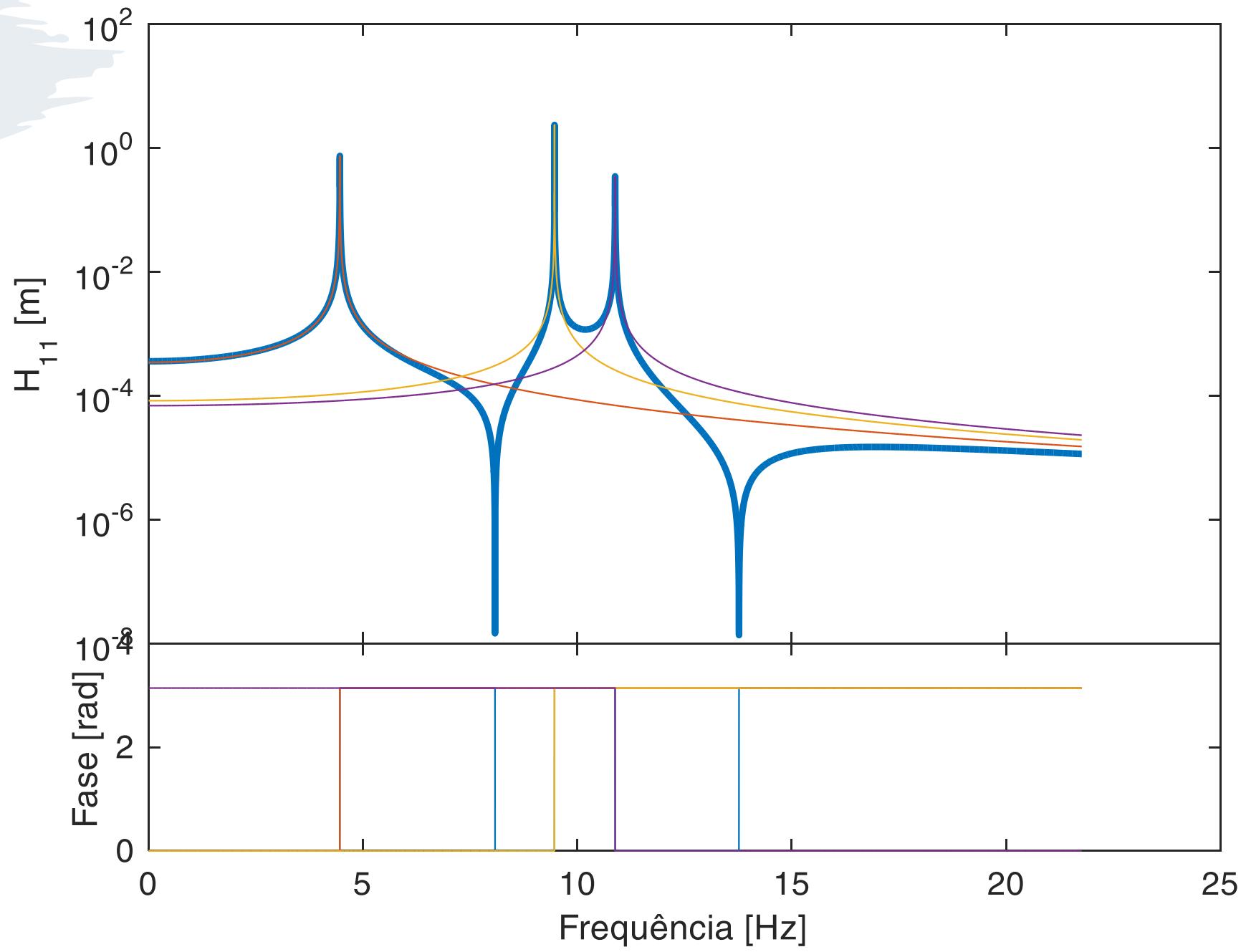
$$\{\alpha_{jk}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad \xleftarrow{\text{Constante modal}}$$

Exemplo:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_{11}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \{\alpha_{12}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \{\alpha_{13}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{aligned}$$





Modelos de amortecimento

Amortecimento viscoso:

O amortecimento viscoso é equivalente a uma força proporcional à velocidade do sistema

Amortecimento histerético:

O amortecimento histerético é equivalente a uma força proporcional ao deslocamento do sistema

Amortecimento viscoelástico (material):

O amortecimento viscoelástico é equivalente a uma força proporcional ao deslocamento e à velocidade do sistema, sendo estas duas constantes de proporcionalidade dependentes da frequência e da temperatura

Modelos de amortecimento

Amortecimento viscoso:

O amortecimento viscoso é equivalente a uma força proporcional à velocidade do sistema

$$F_d = c \cdot v(t) = c \cdot \dot{x}(t)$$

onde c é a constante do amortecedor viscoso

Fator de perda η

O fator de perda representa a energia potencial dissipada por radiano. O amortecimento viscoso é equivalente, e é aceite como das medidas básicas do efeito de amortecimento (ou efeito dissipativo) de um sistema.

$$\eta = \frac{c \cdot |\omega|}{K}$$

Modelos de amortecimento

Amortecimento viscoso:

O amortecimento viscoso é equivalente a uma força proporcional à velocidade do sistema

$$F_d = c \cdot v(t) = c \cdot \dot{x}(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = f(t) \quad \text{Equação de equilíbrio (domínio do tempo)}$$

$$f(t) = F \cdot e^{j\omega t} \rightarrow x(t) = \bar{X} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{Excitação harmónica}$$



$$\frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{(-\omega^2 m + K) + j\omega c} \quad \text{Função de resposta em frequência}$$

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \quad \text{e} \quad \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$



$$\frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{m} \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_n^2) + 2j\omega\omega_n}$$

Modelos de amortecimento

Amortecimento histerético:

O amortecimento histerético é equivalente a uma força proporcional ao deslocamento do sistema

$$F_d = h \cdot x(t)$$

$$\frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{(-\omega^2 m + K) + j\eta K}$$

Função de resposta em frequência



$$\omega_n = \sqrt{K/m} \quad \text{e} \quad \frac{c}{m} = 2\xi\omega_n \quad \rightarrow$$

$$\frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{m} \frac{1}{(-\omega^2 + \omega_n^2) + j\eta\omega_n^2}$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[-\omega^2[M] + [K](1 + j\eta)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F(\omega)\}$$

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [[K](1 + j\eta) - \omega^2[M]] = [[\bar{K}] - \omega^2[M]]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T [[\bar{K}] - \omega^2[M]] [\Phi] = [\Phi]^T [\bar{K}] [\Phi] - \omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2(1 + j\eta) - \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2(1 + j\eta) - \omega & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \sum_{r=1}^N \frac{r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2}$$

Constante modal

Fator de perda modal

Exemplo:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha_{11}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{j\color{red}r} \cdot \phi_{r\color{green}k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{12}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{j\color{blue}r} \cdot \phi_{r\color{red}k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{13}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{j\color{red}r} \cdot \phi_{r\color{green}k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha_{11}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{12}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{13}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{21}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{22}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{23}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha_{21}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{22}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{23}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{31}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{31} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{32} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{33} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{32}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{31} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{32} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{33} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{33}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{31} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{32} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{33} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

Análise modal experimental

Objetivo

Determinação do modelo modal (truncado) de um objeto a partir da medição de funções de resposta em frequência

Modelo modal :

- Frequências naturais
- Formas modais
- Fatores de amortecimento modal

Análise modal experimental

- Metodologia

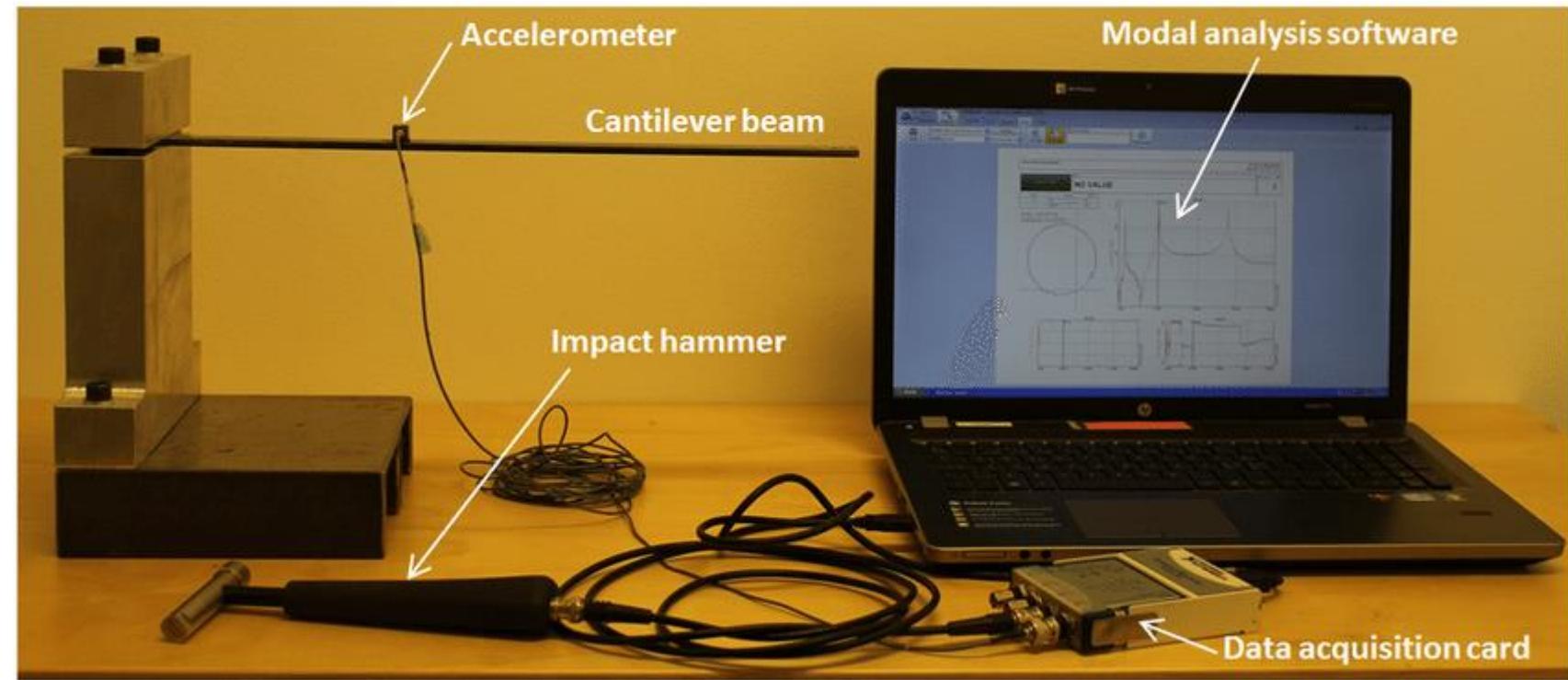
- Montagem experimental

- estabelecer condições de fronteira apropriadas
 - definir malha de pontos de medição
 - definir direções de medição



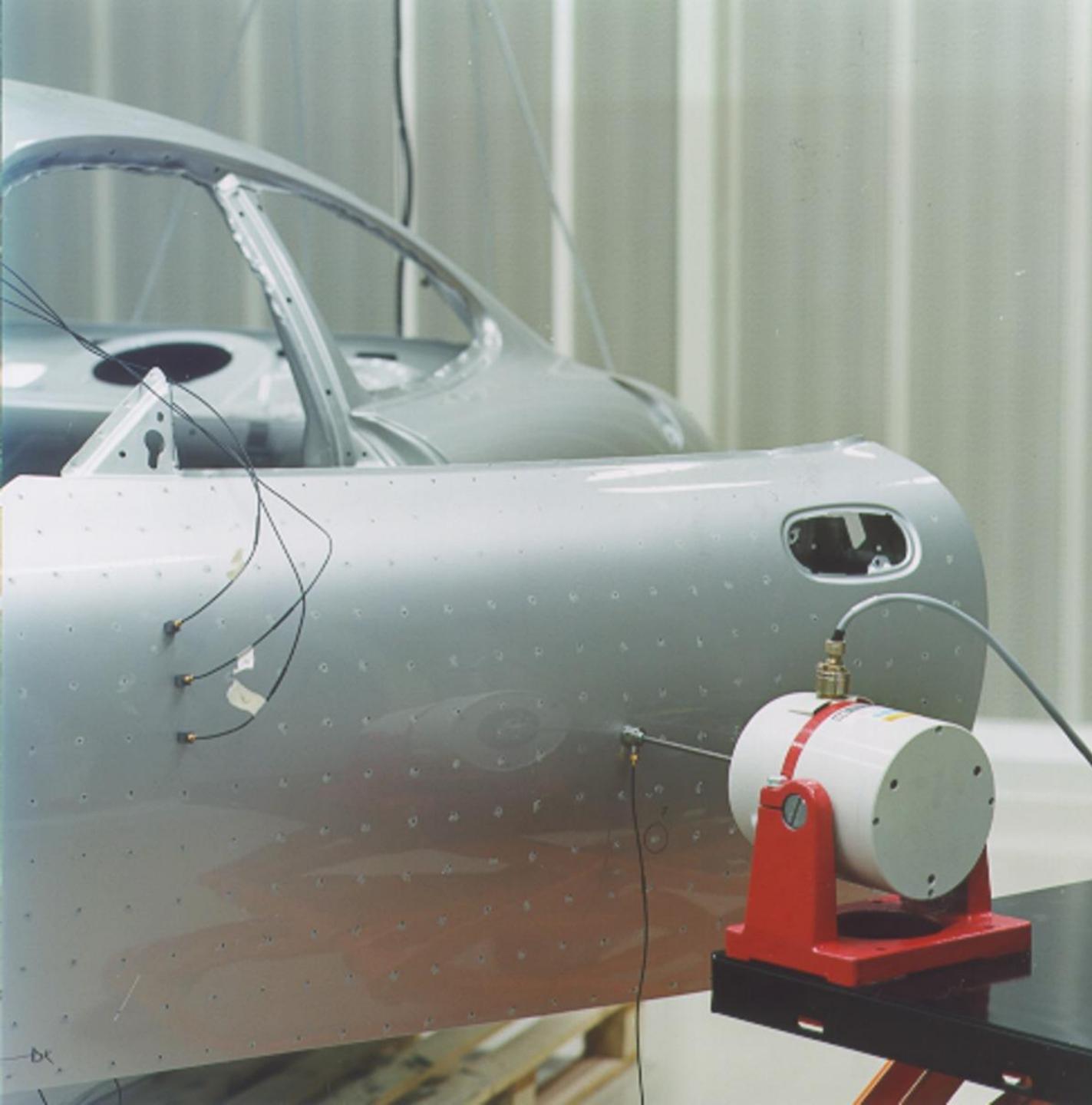
Análise modal experimental

- Metodologia
 - Aplicar uma excitação conhecida
 - Medir uma resposta (em aceleração, velocidade ou posição)
 - Determinar funções de resposta em frequência
 - Aplicar um método de identificação modal



Análise modal experimental

- Aplicação de uma excitação
 - Excitação acústica (geral)
 - Excitação localizada com excitador eletrodinâmico (Shaker)
 - Excitação localizada com martelo de impacto

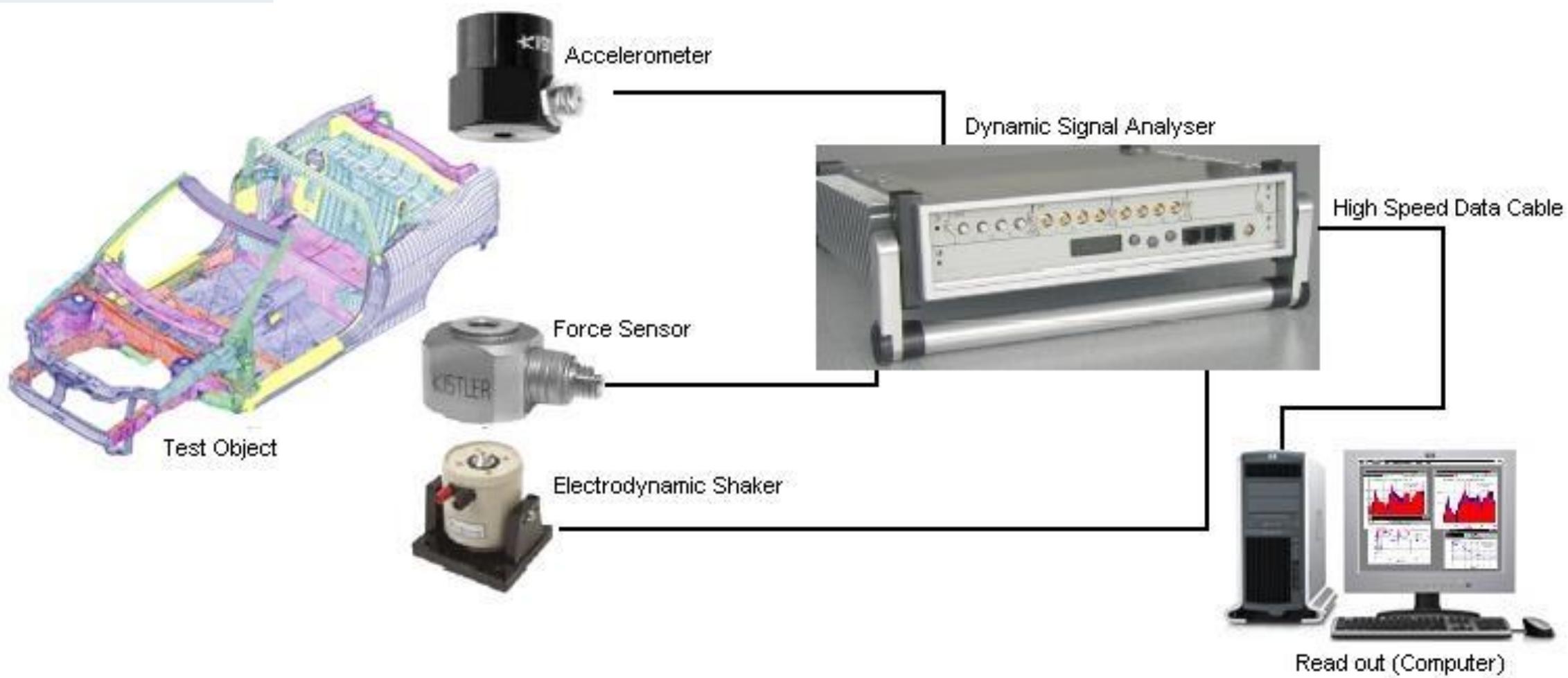


Excitação com shakers

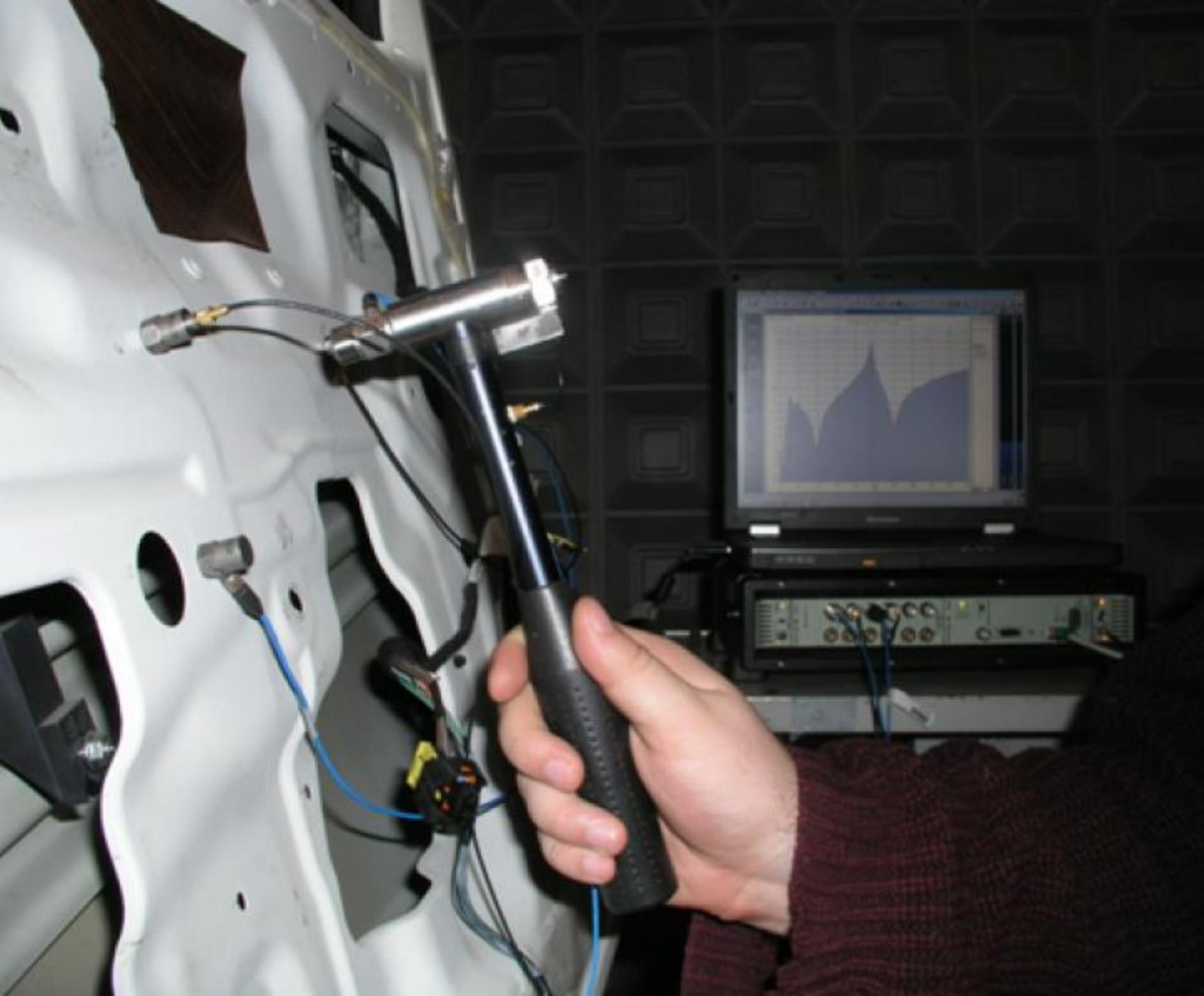








Excitação com
Martelo de impacto





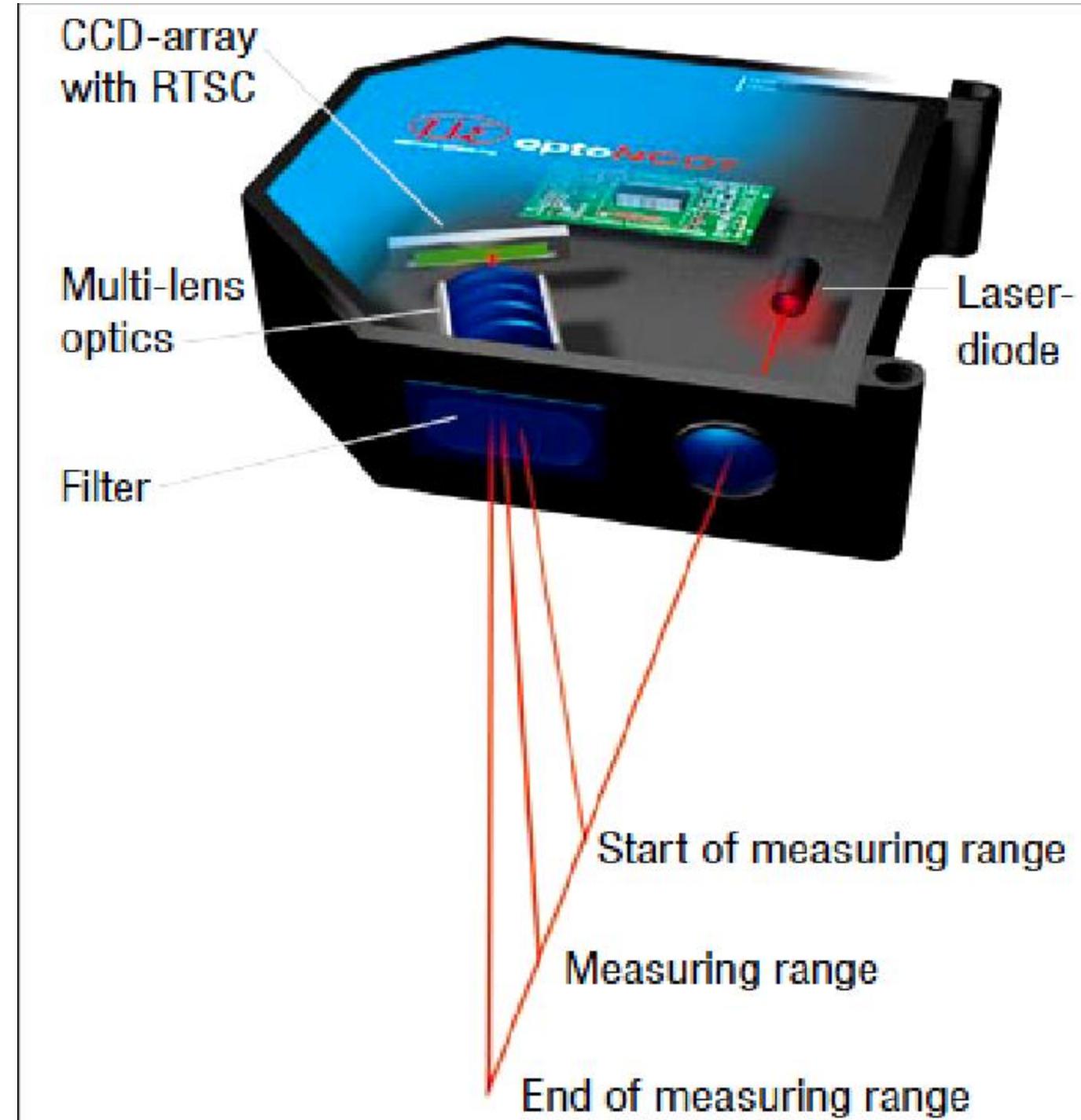




Análise modal experimental

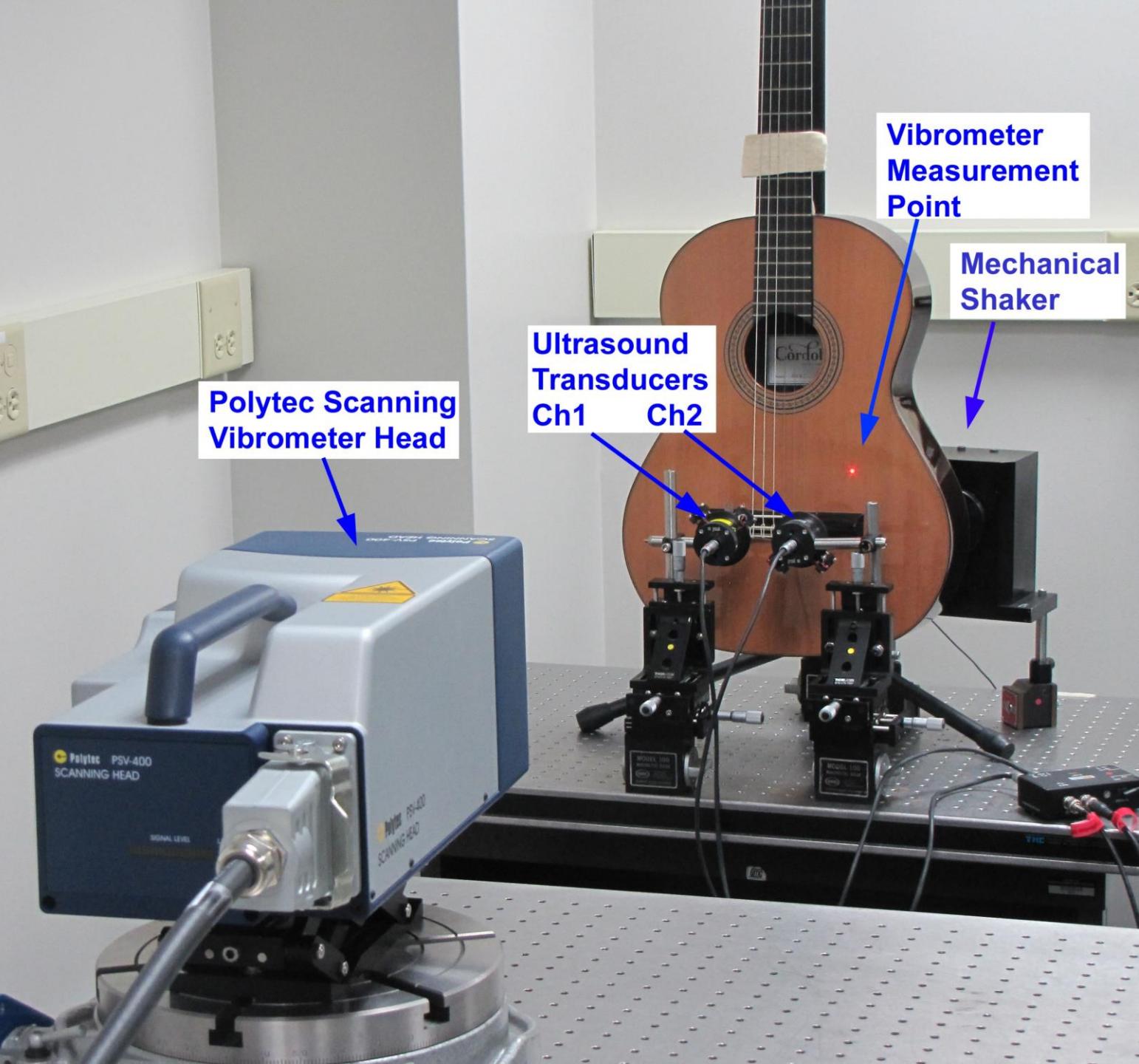
- Medição da resposta
 - Medição da resposta em deslocamento (Transdutores de deslocamento relativo: laser triangulação, sens.capacitivos ou efeito de Eddy)
 - Medição da resposta em velocidade (Vibrómetro Laser)
 - Medição da resposta em aceleração (acelerómetros piezoelétricos, capacitivos, resistivos ou MEMS)

Transdutor laser de triangulação



Vibrometro laser

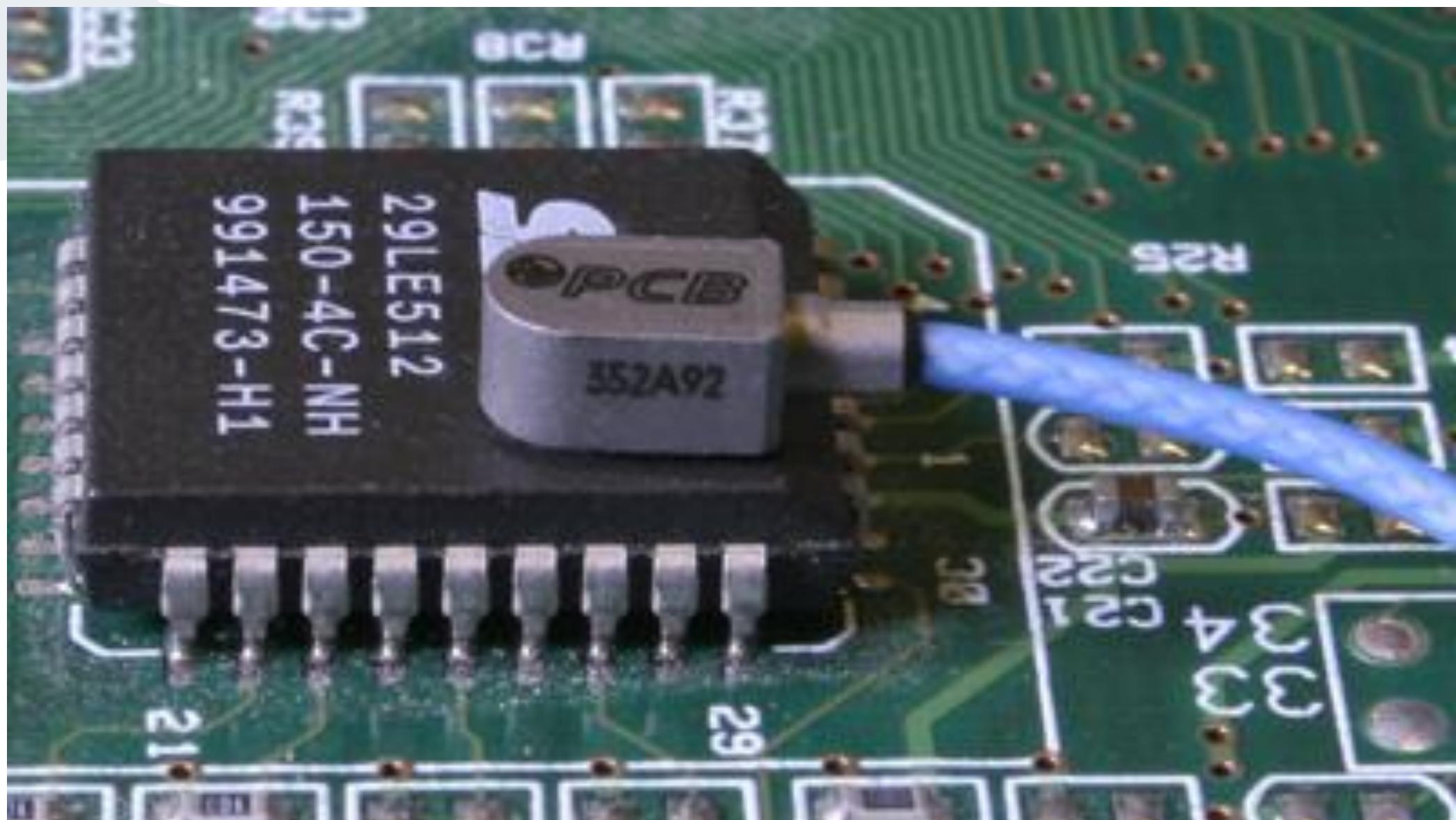
Transdutor de efeito de Doppler.
Mede velocidade do ponto



Acelerómetro







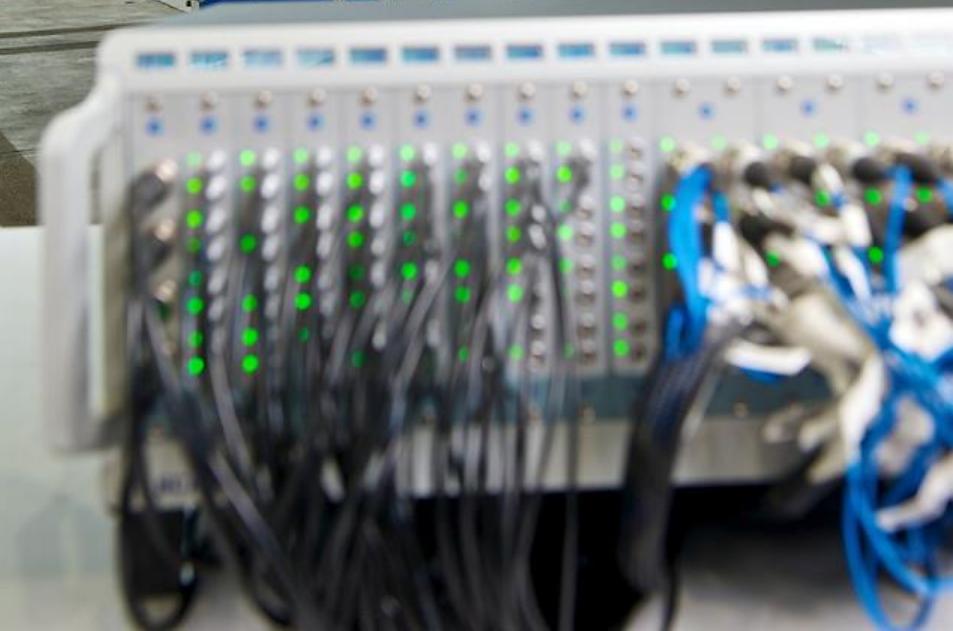


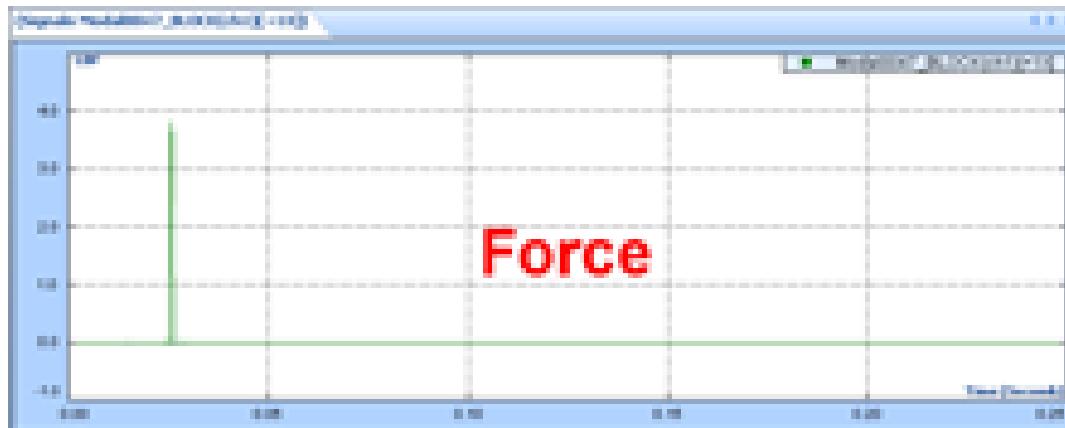


Analizador

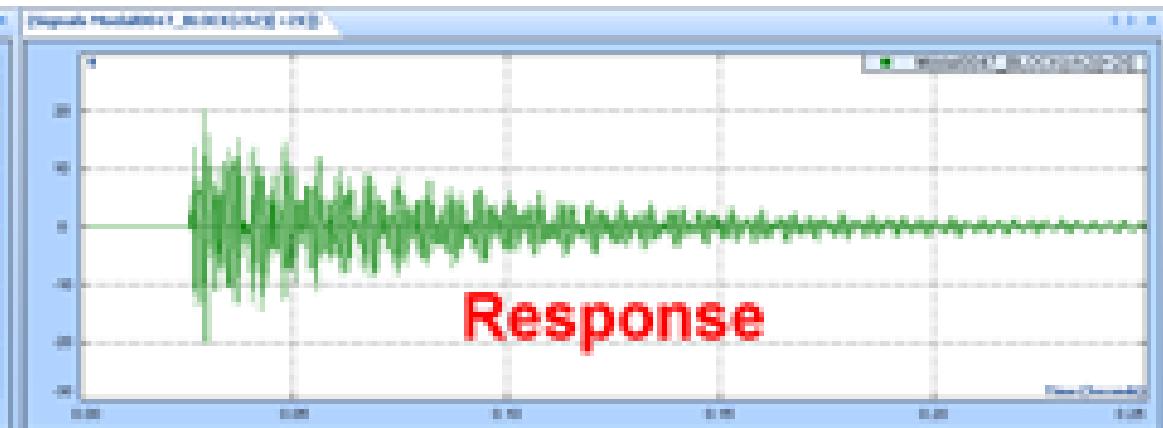
- Analisador espectral
- Alimentação ICP/IEPE
- Amplificação e condicionamento de sinal
- Filtragem
- Pós-processamento
- Análise



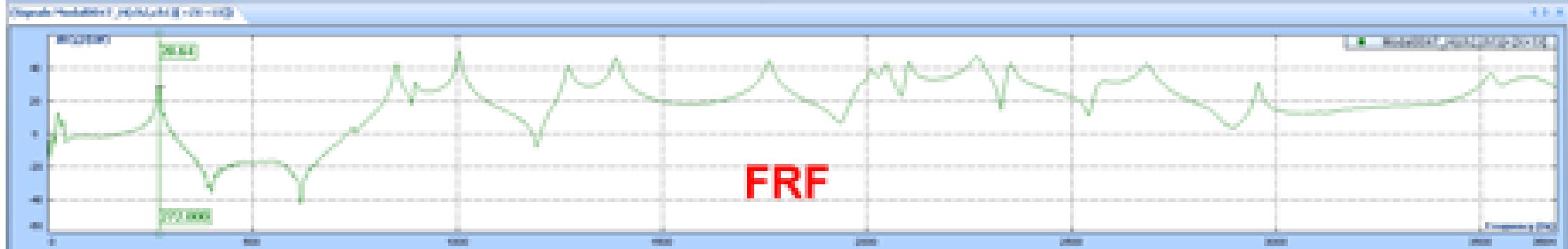




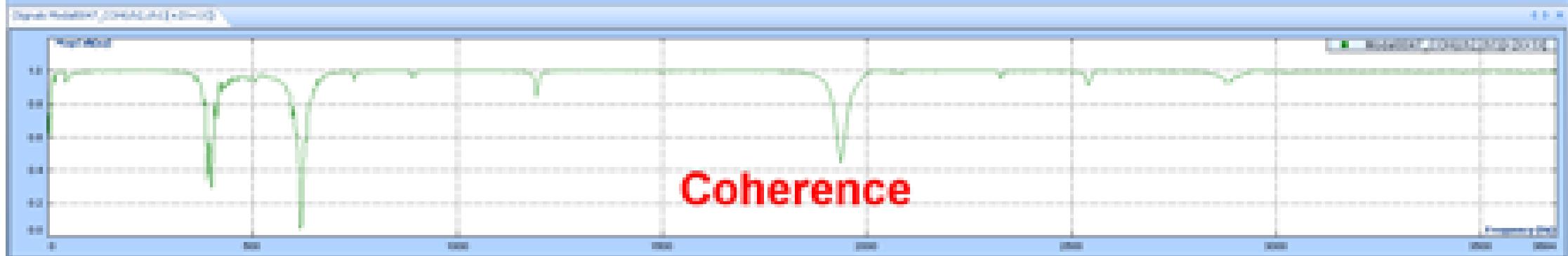
Force



Response



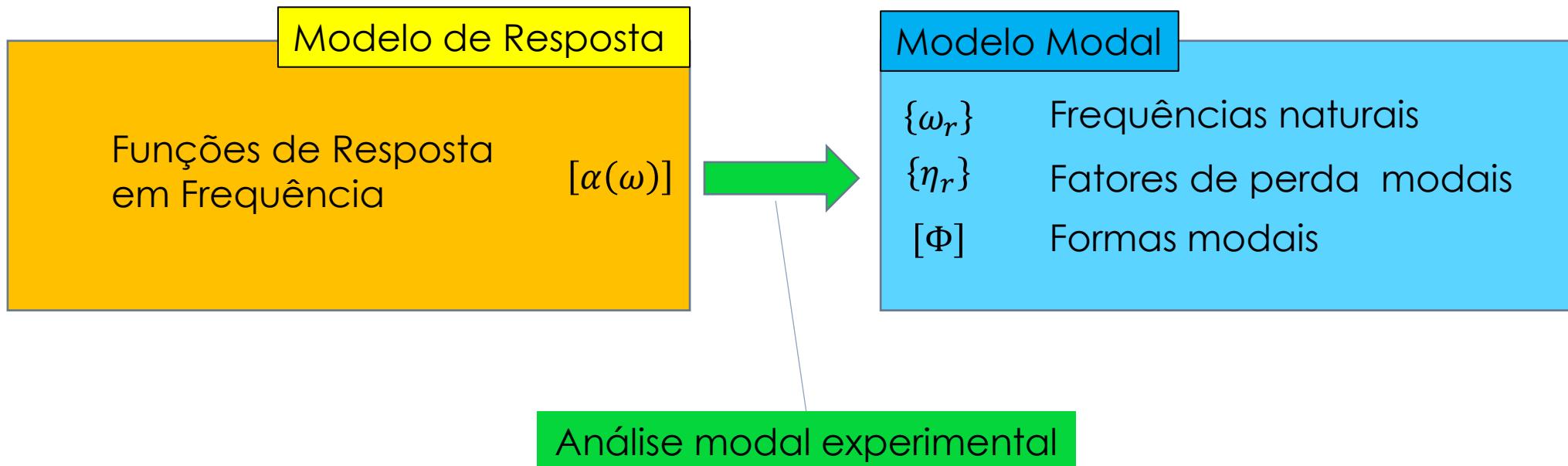
FRF



Coherence

Identificação Modal

Identificação modal é um procedimento que permite identificar o modelo modal (truncado) a partir de um modelo de resposta



Identificação Modal

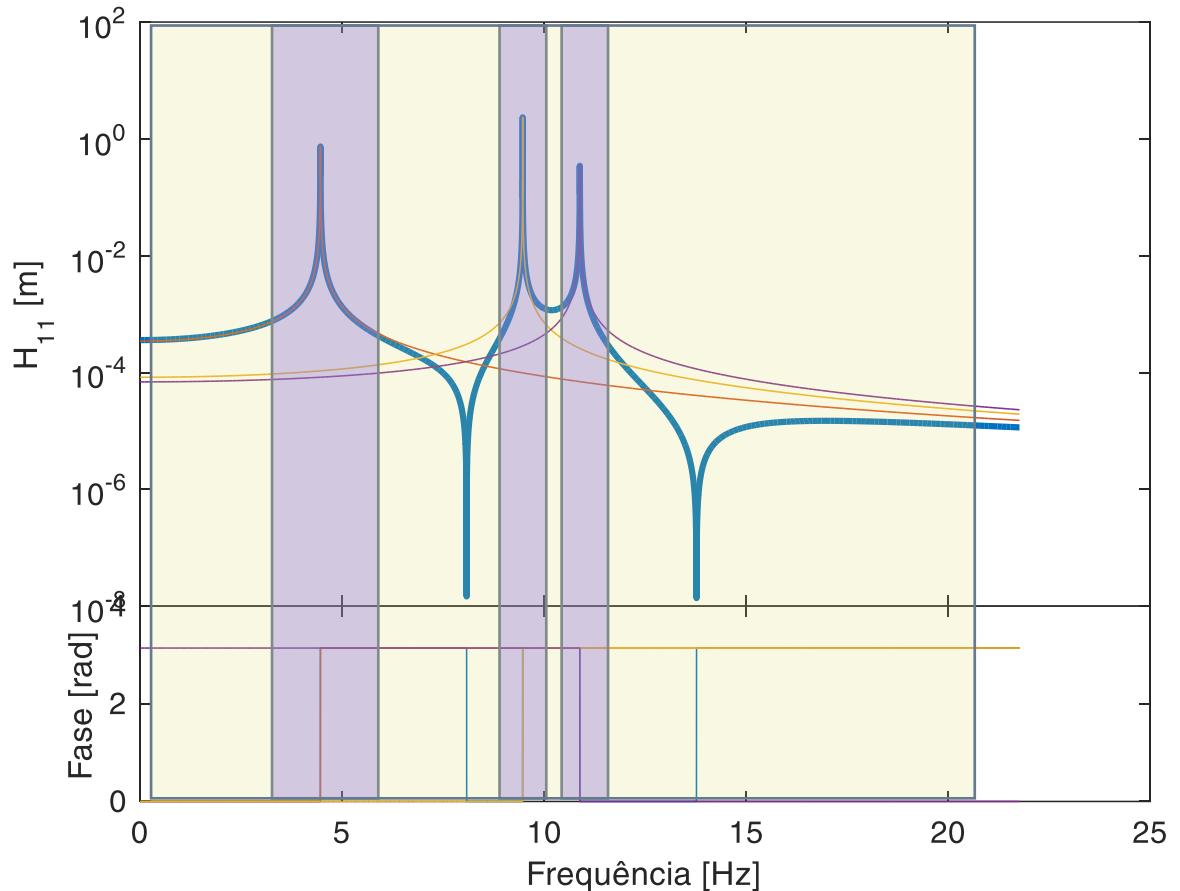
Análise modal experimental

Métodos SDOF

Identificação localizada na vizinhança de cada ressonância

Métodos MDOF

Identificação global considerando uma largura de banda contendo várias ressonâncias



Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

1º Identificação da frequência natural

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2}$$

para um modo r $\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = \frac{r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} \rightarrow \{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = \frac{(\omega_r^2 - \omega^2 - j\eta_r \omega_r^2) \cdot r C_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \eta_r^2 \omega_r^4}$

Na vizinhança de uma frequência natural:

$$Real \{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = 0$$

$$\frac{\partial [Imag \{\alpha_{jk}(\omega)\}_r]}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial [Mag \{\alpha_{jk}(\omega)\}_r]}{\partial \omega} = 0$$

$\times 10^{-3}$

IMAG

5
0
-5
-10
-15
-20

0.01
0.005
0
-0.005

REAL

-0.01
0

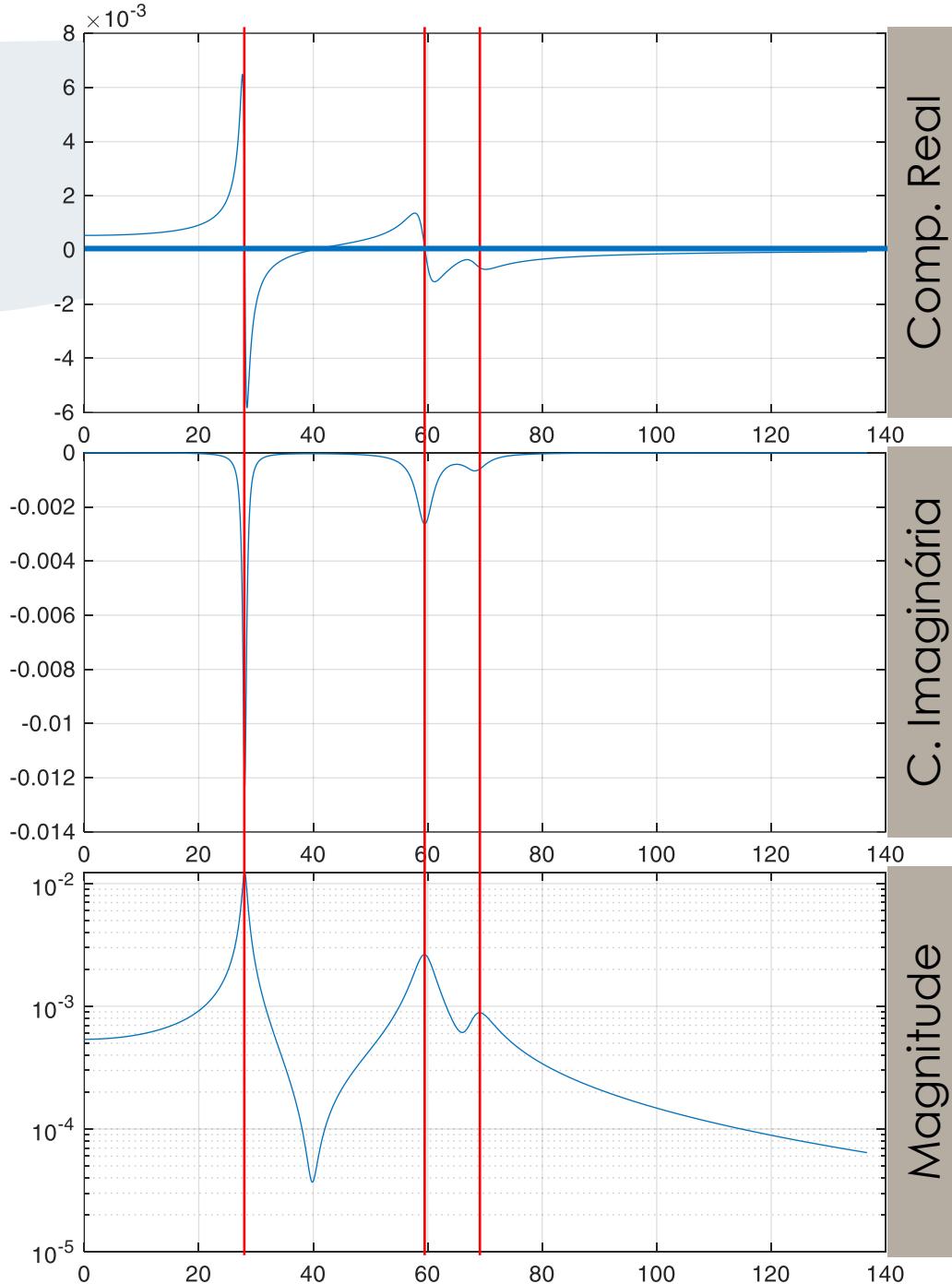
Freq

$$\text{Real} \left\{ \alpha_{jk}(\omega) \right\} = 0$$

$$\frac{\partial [\text{Imag} \left\{ \alpha_{jk}(\omega) \right\}]}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial [\text{Mag} \left\{ \alpha_{jk}(\omega) \right\}]}{\partial \omega} = 0$$

20
25



$$\operatorname{Real} \{\alpha_{jk}(\omega)\} = 0$$

$$\frac{\partial [\operatorname{Imag} \{\alpha_{jk}(\omega)\}]}{\partial \omega} = 0$$

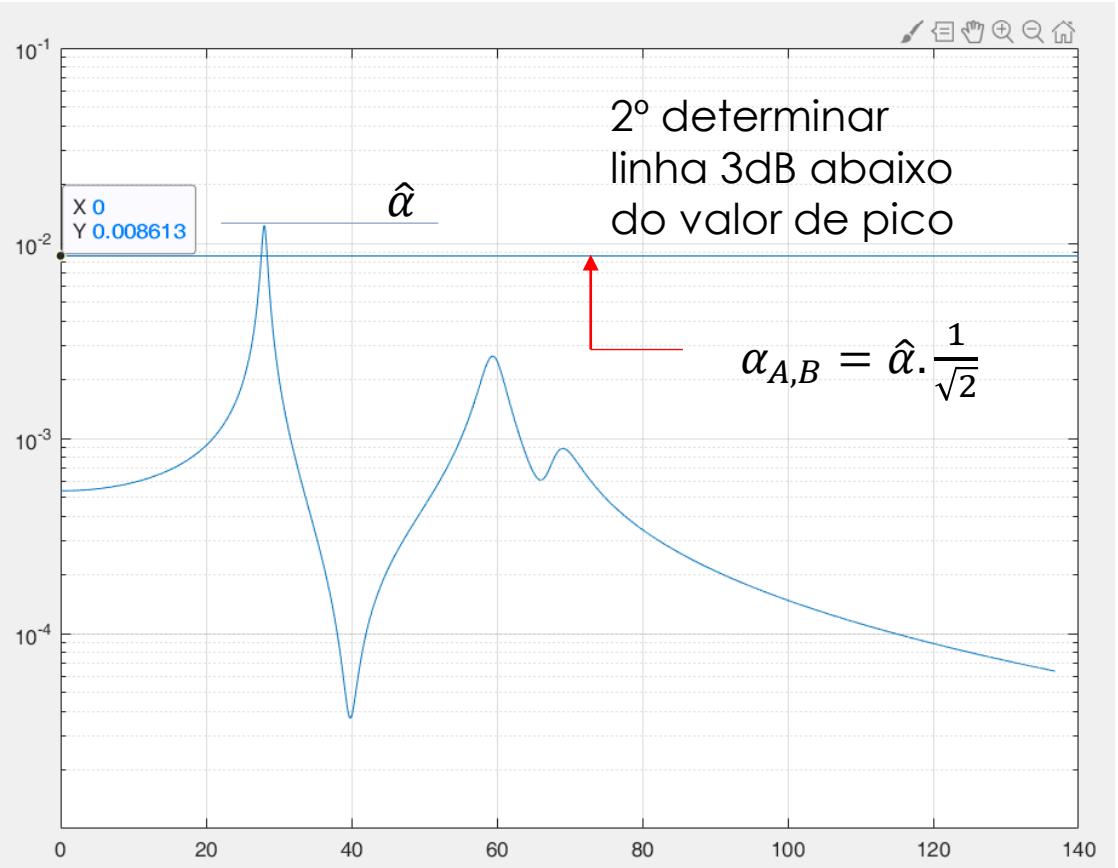
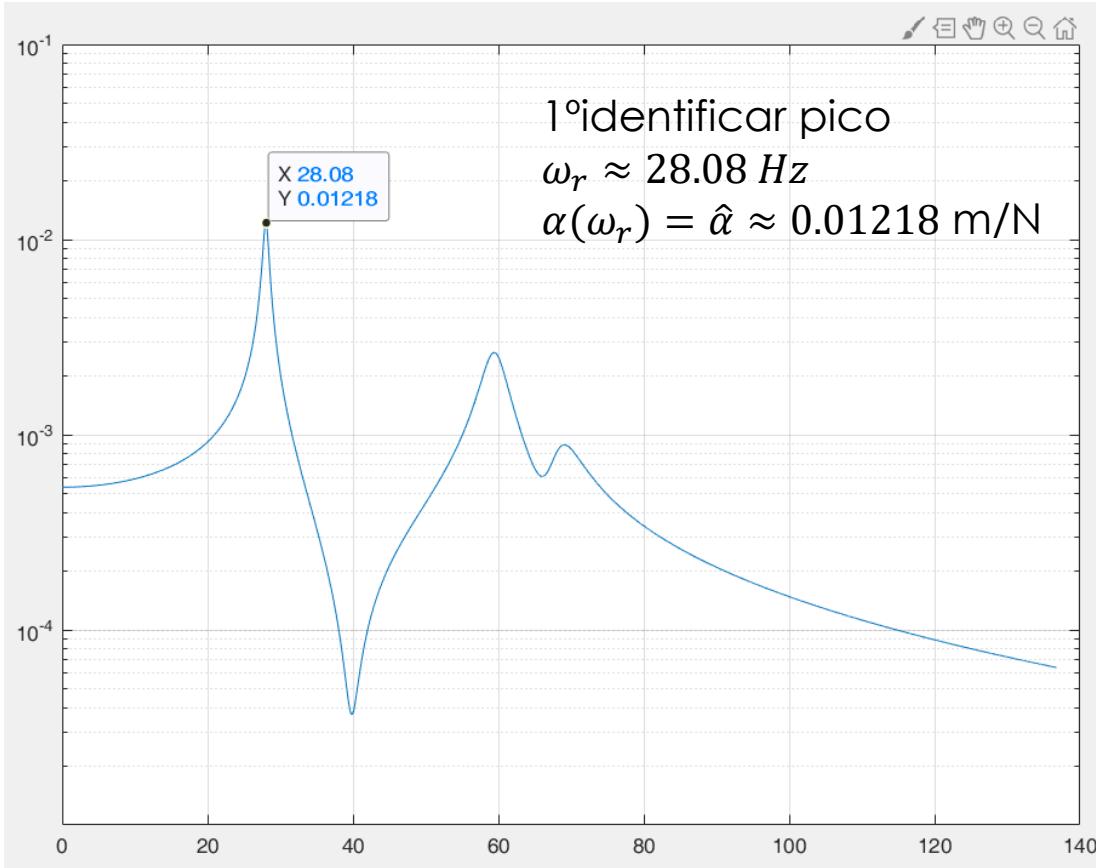
$$\frac{\partial [\operatorname{Mag} \{\alpha_{jk}(\omega)\}]}{\partial \omega} = 0$$

Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB

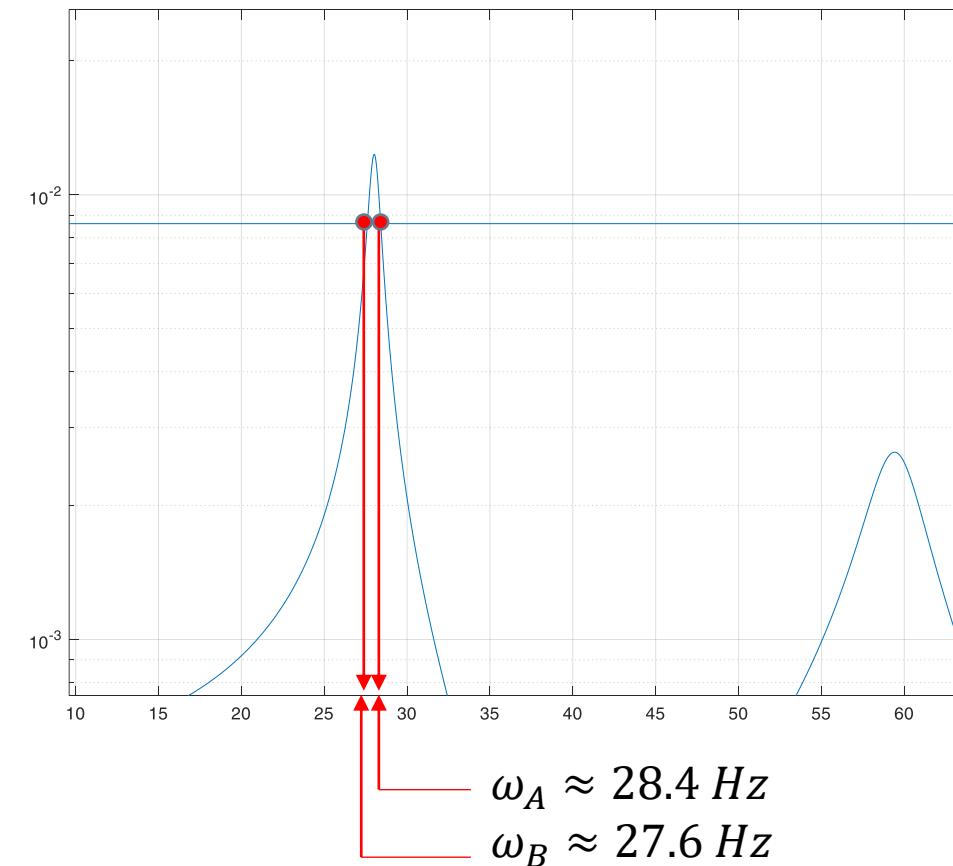
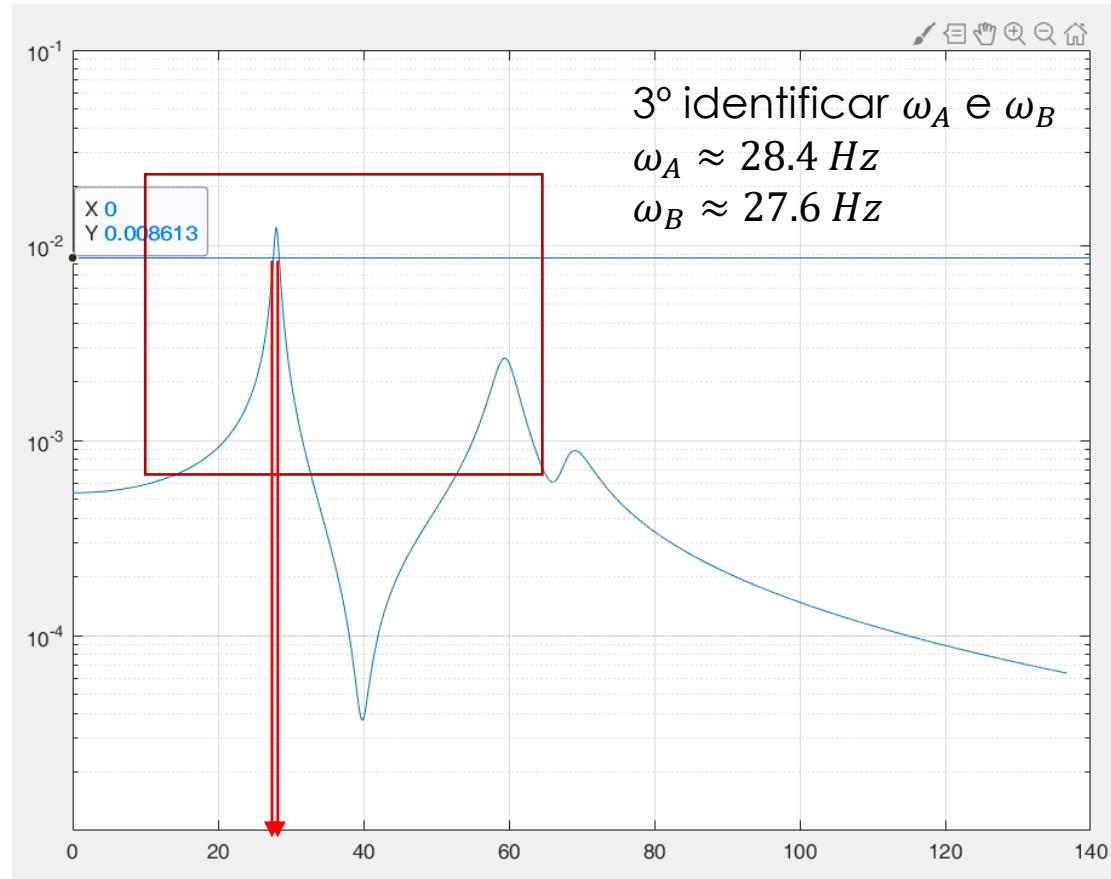


Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB

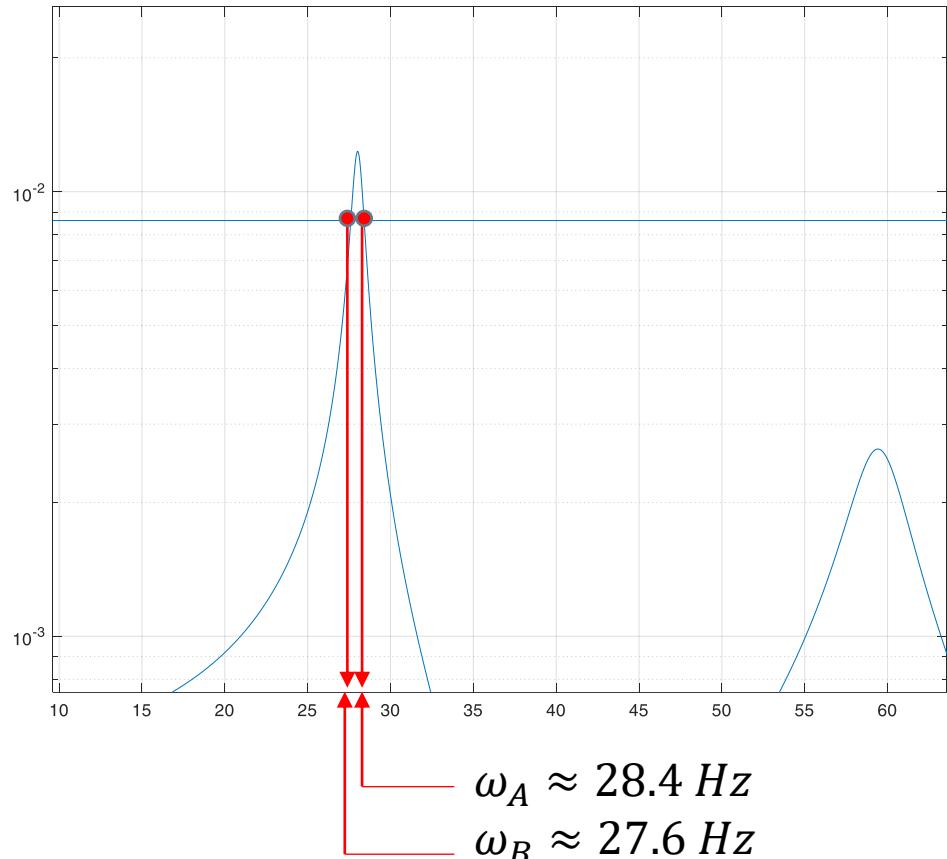


Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB



4º calcular fator de perda modal

$$\begin{aligned}\omega_A &\approx 28.4 \text{ Hz} \\ \omega_B &\approx 27.6 \text{ Hz}\end{aligned}$$

$$\eta_r = \frac{\omega_A^2 - \omega_B^2}{2\omega_r^2}$$

$$\eta_r \approx 0.0568 \text{ (5.68%)}$$

Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB

5º calcular as constantes modais

$$\text{Se } \omega = \omega_r \rightarrow |\alpha_{jk}(\omega = \omega_r)| = \frac{r c_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2}$$

= 0

$$r c_{jk} = |\widehat{\alpha}_{jk}|_r \cdot j\eta_r \omega_r^2$$

$$\{\alpha_{11}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{21}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{21} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{22} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{23} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

$$\{\alpha_{31}(\omega)\} = \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} = \frac{\phi_{31} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_1^2} + \frac{\phi_{32} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2 + j\eta_2 \omega_2^2} + \frac{\phi_{33} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2 + j\eta_3 \omega_3^2}$$

Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB

6º calcular os vetores modais (formas naturais)

$${}_r C_{jk} = \left| \widehat{\alpha}_{jk} \right|_r \cdot j \eta_r \omega_r^2$$

$${}_r C_{jk} = \phi_{jr} \cdot \phi_{rk}$$

Exemplo:

$$\alpha_{11} \rightarrow \text{para } \omega_1 : {}_1 C_{11} = \phi_{11} \cdot \phi_{11} \rightarrow \boxed{\phi_{11}} = \sqrt{{}_1 C_{11}} = \sqrt{|\widehat{\alpha}_{11}|_1 \cdot j \eta_1 \omega_1^2}$$

$$\alpha_{21} \rightarrow \text{para } \omega_1 : {}_1 C_{21} = \phi_{21} \cdot \phi_{11} \rightarrow \boxed{\phi_{21}} = \frac{{}_1 C_{21}}{\phi_{11}} = |\widehat{\alpha}_{21}|_1 \cdot \frac{j \eta_1 \omega_1^2}{\phi_{11}}$$

$$\alpha_{31} \rightarrow \text{para } \omega_1 : {}_1 C_{31} = \phi_{31} \cdot \phi_{11} \rightarrow \boxed{\phi_{31}} = \frac{{}_1 C_{31}}{\phi_{11}} = |\widehat{\alpha}_{31}|_1 \cdot \frac{j \eta_1 \omega_1^2}{\phi_{11}}$$

$$\alpha_{n1} \rightarrow \text{para } \omega_1 : {}_1 C_{n1} = \phi_{n1} \cdot \phi_{11} \rightarrow \boxed{\phi_{n1}} = \frac{{}_1 C_{n1}}{\phi_{11}} = |\widehat{\alpha}_{n1}|_1 \cdot \frac{j \eta_1 \omega_1^2}{\phi_{11}}$$



$$[\Phi] = [\{\phi_1\}]$$

Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Peak-Picking/Método dos 3dB

6º calcular os vetores modais (formas naturais)

$${}_r C_{jk} = \left| \widehat{\alpha}_{jk} \right|_r \cdot j \eta_r \omega_r^2$$

$${}_r C_{jk} = \phi_{jr} \cdot \phi_{rk}$$

Exemplo:

$$\alpha_{11} \rightarrow \text{para } \omega_2 : {}_2 C_{11} = \phi_{12} \cdot \phi_{21} \rightarrow \boxed{\phi_{12}} = \frac{{}_2 C_{11}}{\phi_{21}} = \left| \widehat{\alpha}_{11} \right|_2 \cdot \frac{j \eta_2 \omega_2^2}{\phi_{21}}$$

$$\alpha_{21} \rightarrow \text{para } \omega_2 : {}_2 C_{21} = \phi_{22} \cdot \phi_{21} \rightarrow \boxed{\phi_{22}} = \frac{{}_2 C_{21}}{\phi_{21}} = \left| \widehat{\alpha}_{21} \right|_2 \cdot \frac{j \eta_2 \omega_2^2}{\phi_{21}}$$

$$\alpha_{31} \rightarrow \text{para } \omega_2 : {}_2 C_{31} = \phi_{32} \cdot \phi_{21} \rightarrow \boxed{\phi_{32}} = \frac{{}_2 C_{31}}{\phi_{21}} = \left| \widehat{\alpha}_{31} \right|_2 \cdot \frac{j \eta_2 \omega_2^2}{\phi_{21}}$$

$$\alpha_{n1} \rightarrow \text{para } \omega_2 : {}_2 C_{n1} = \phi_{n2} \cdot \phi_{21} \rightarrow \boxed{\phi_{n2}} = \frac{{}_2 C_{n1}}{\phi_{21}} = \left| \widehat{\alpha}_{n1} \right|_2 \cdot \frac{j \eta_2 \omega_2^2}{\phi_{21}}$$



$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\}]$$

Identificação Modal

Análise modal experimental

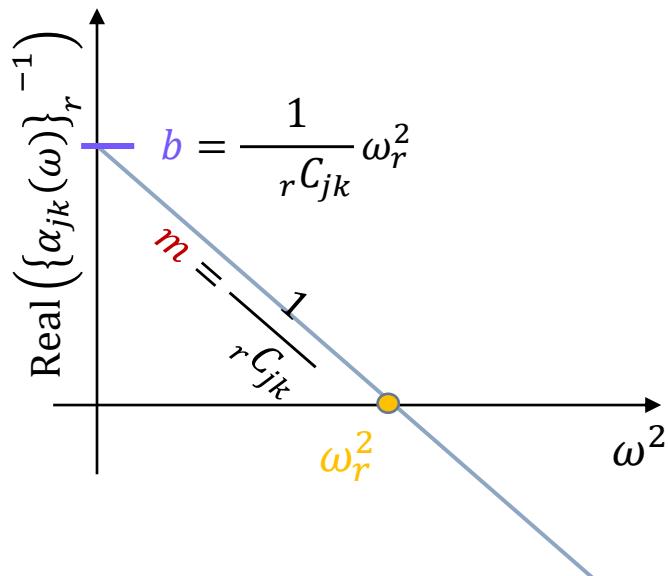
Métodos SDOF

Método da Inversa

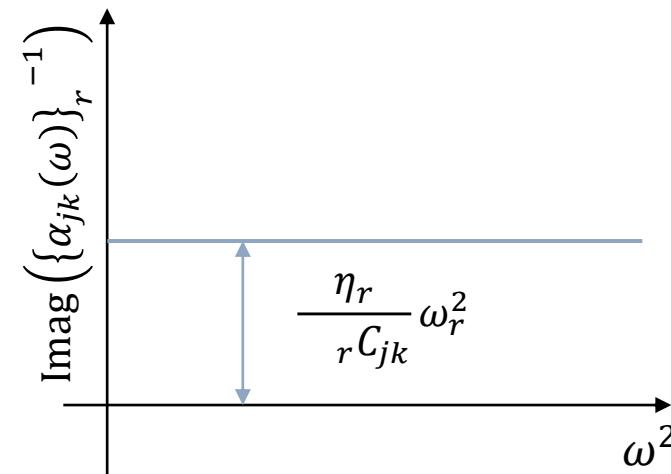
$$\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = \frac{rC_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2} \quad \rightarrow$$

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r^{-1} = \frac{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2}{rC_{jk}}$$

$$\text{Real}\left(\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r^{-1}\right) = \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{rC_{jk}} = \frac{1}{rC_{jk}}\omega_r^2 - \frac{1}{rC_{jk}}\omega^2$$



$$\text{Imag}\left(\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r^{-1}\right) = \frac{\eta_r\omega_r^2}{rC_{jk}} = \text{constante}$$



Identificação Modal

Análise modal experimental

Métodos SDOF

Método do ajuste à circunferência

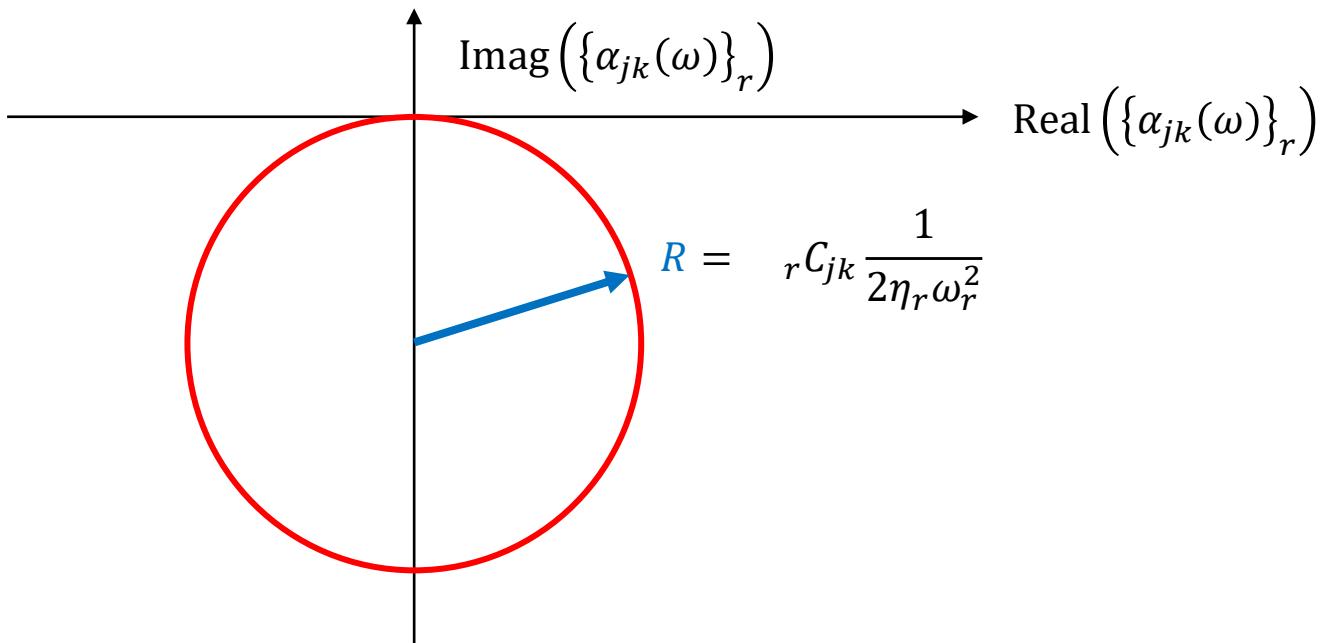
$$\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = \frac{r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2}$$



$$\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r = r C_{jk} \cdot \frac{\omega_r^2 - \omega^2 - j\eta_r \omega_r^2}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\eta_r \omega_r^2)^2} = D$$

$$\text{Real}(\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r) = r C_{jk} \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{D}$$

$$\text{Imag}(\{\alpha_{jk}(\omega)\}_r) = r C_{jk} \frac{-\eta_r \omega_r^2}{D}$$



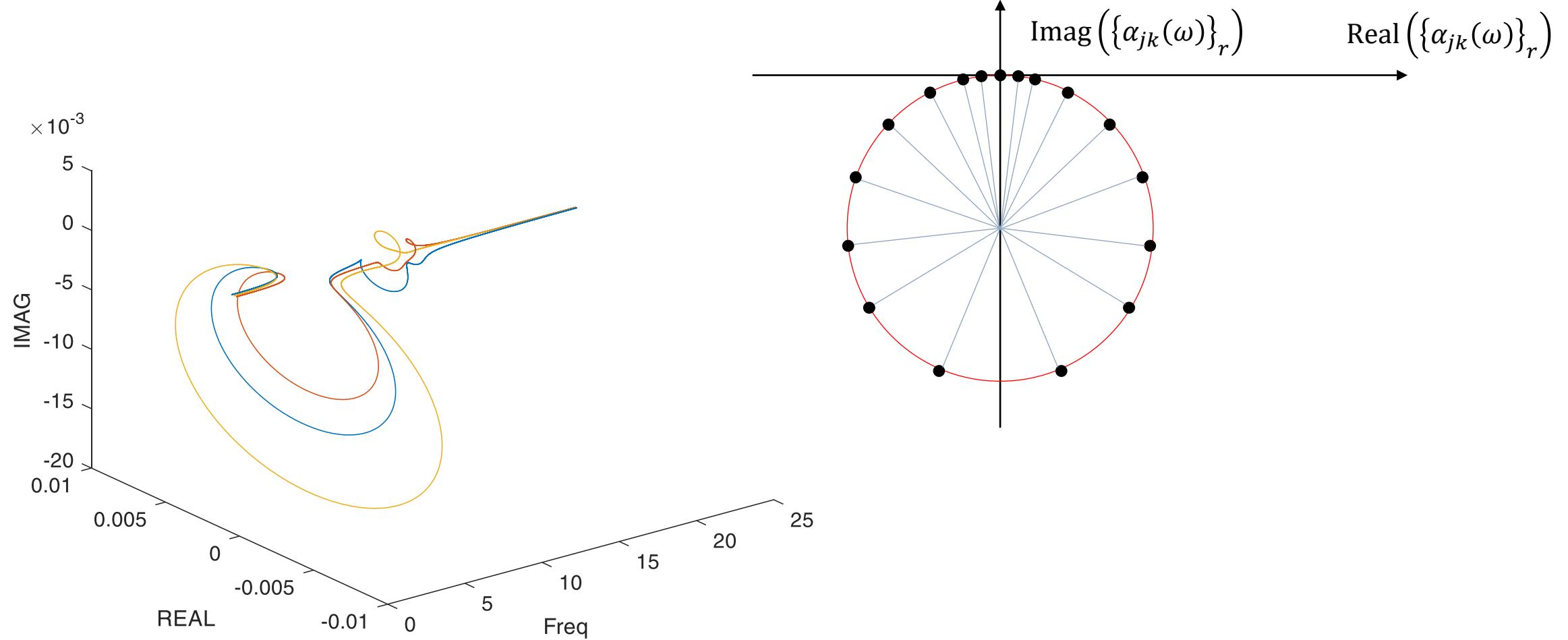
$$\text{Eq. circunferência } x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

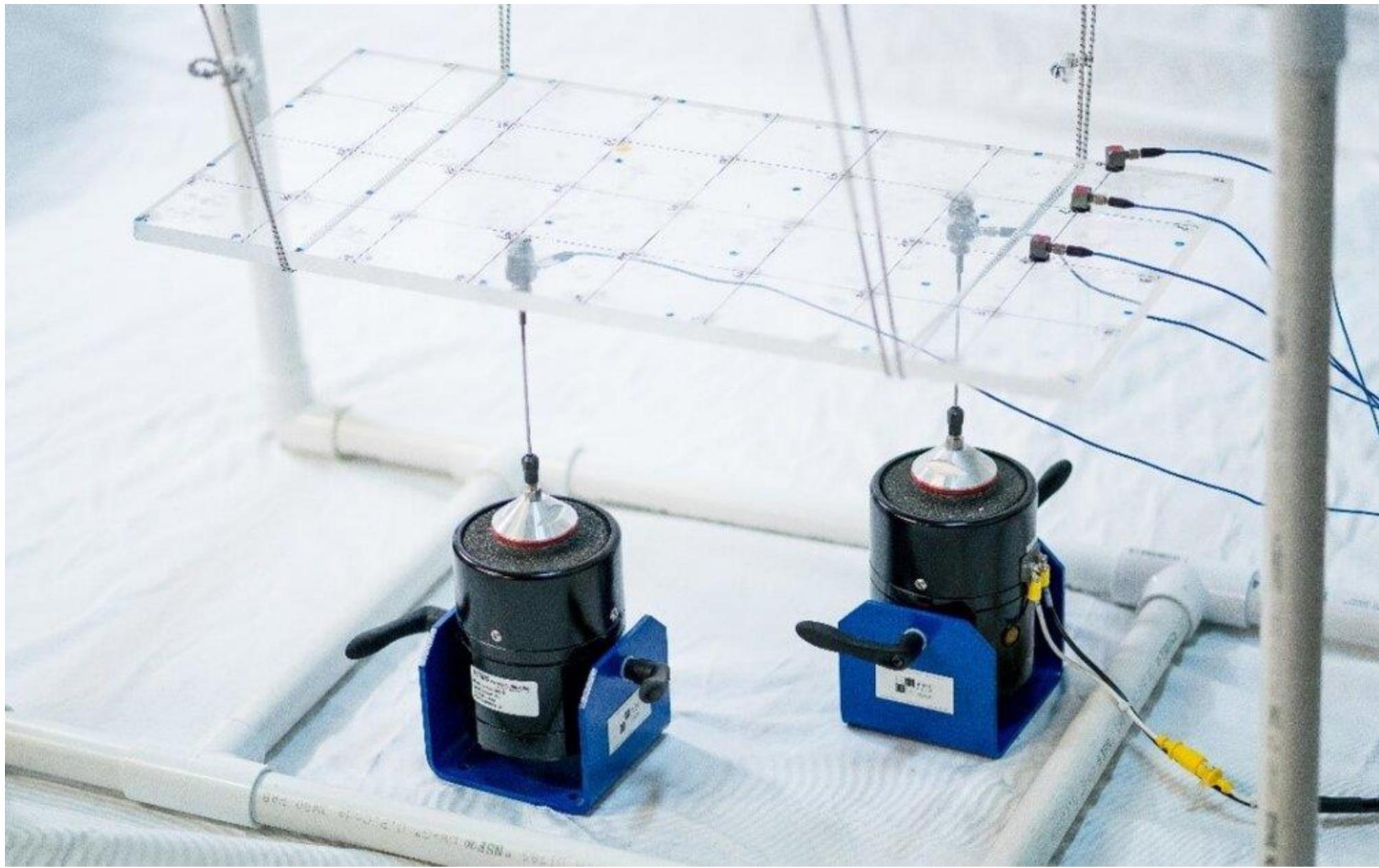
Identificação Modal

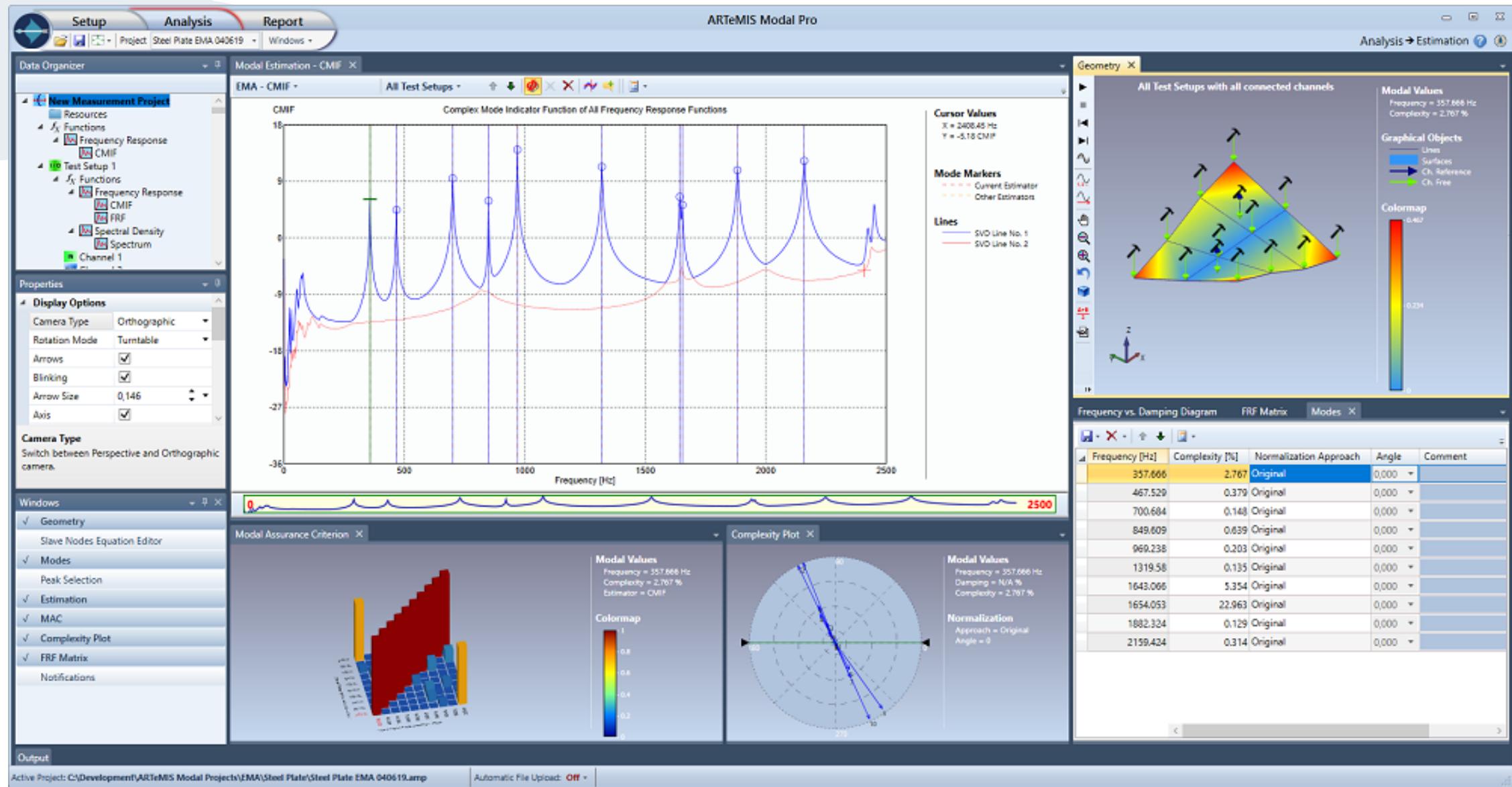
Análise modal experimental

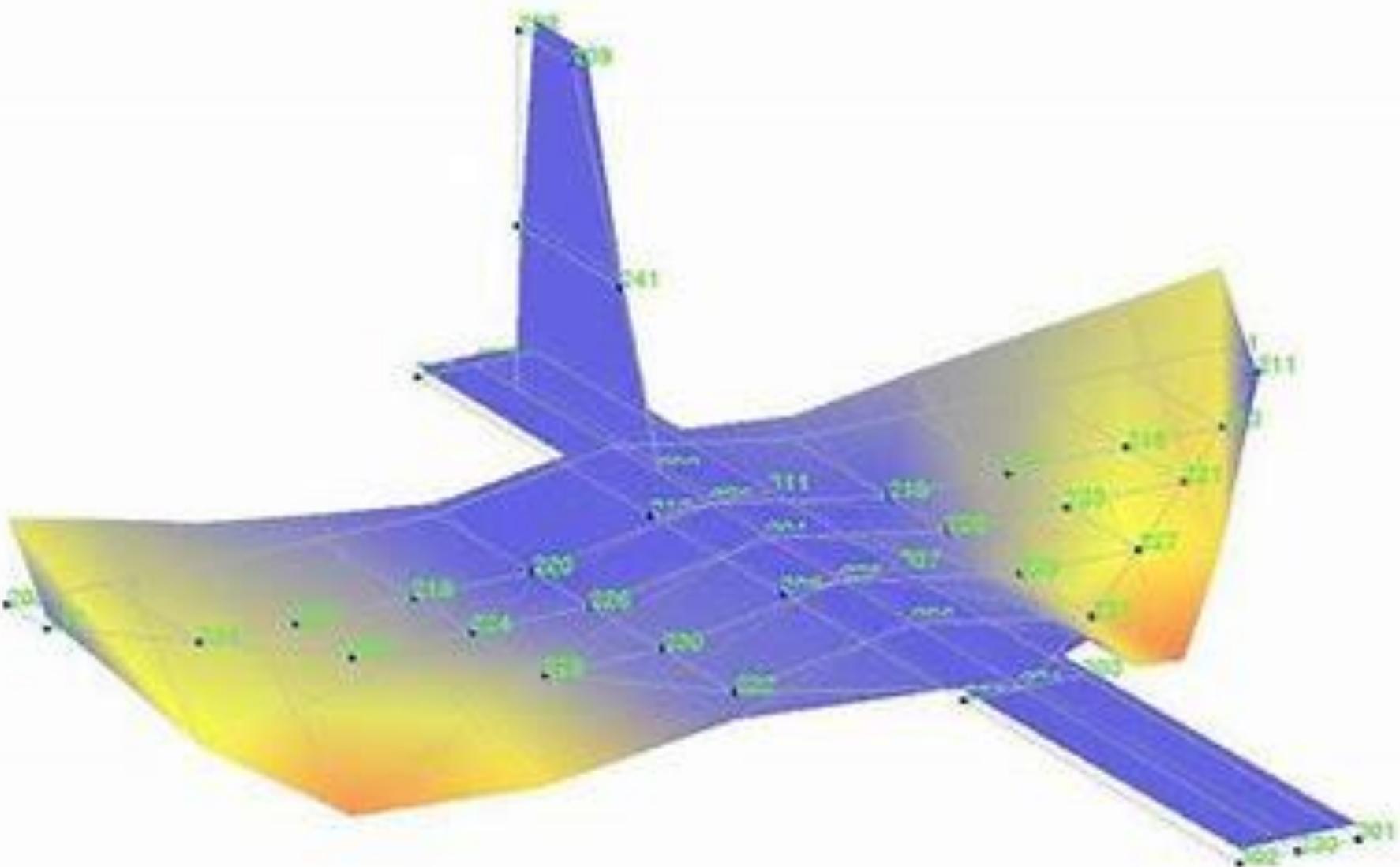
Métodos SDOF

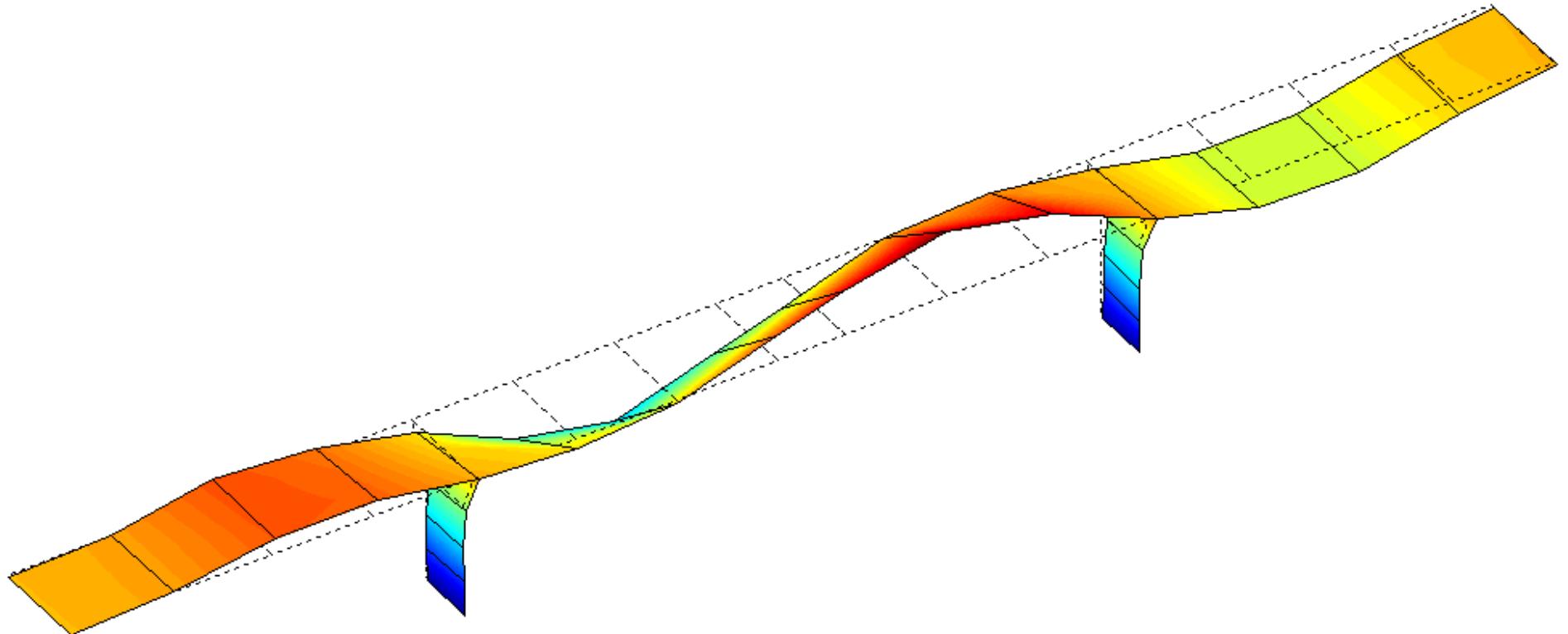
Método do ajuste à circunferência



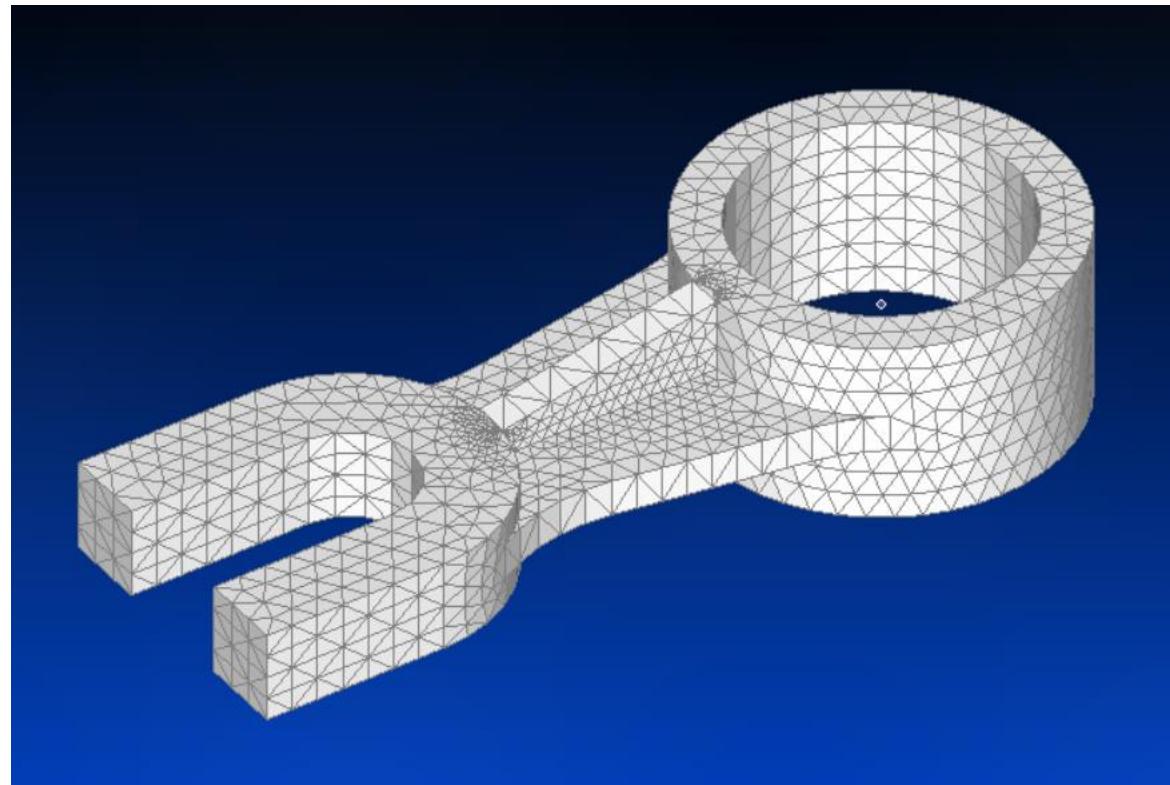
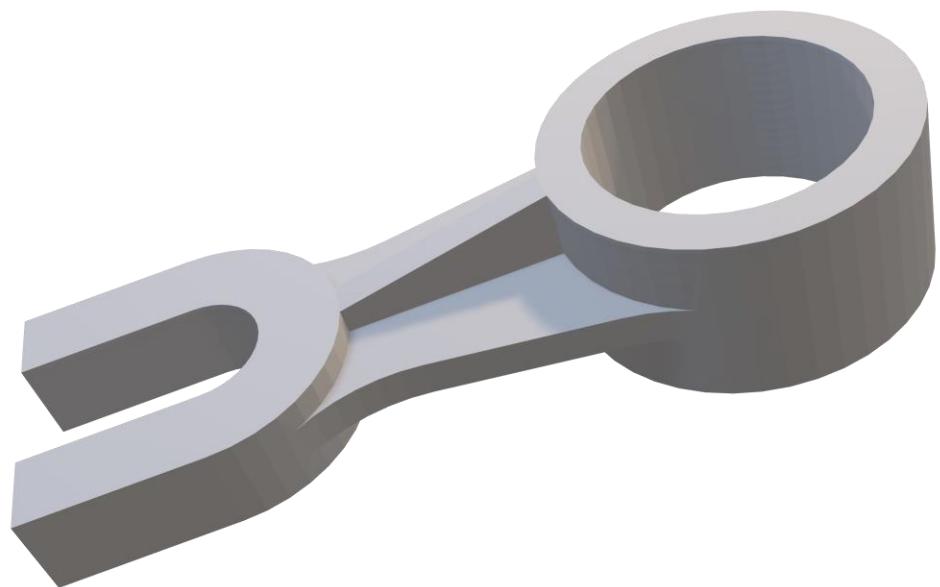




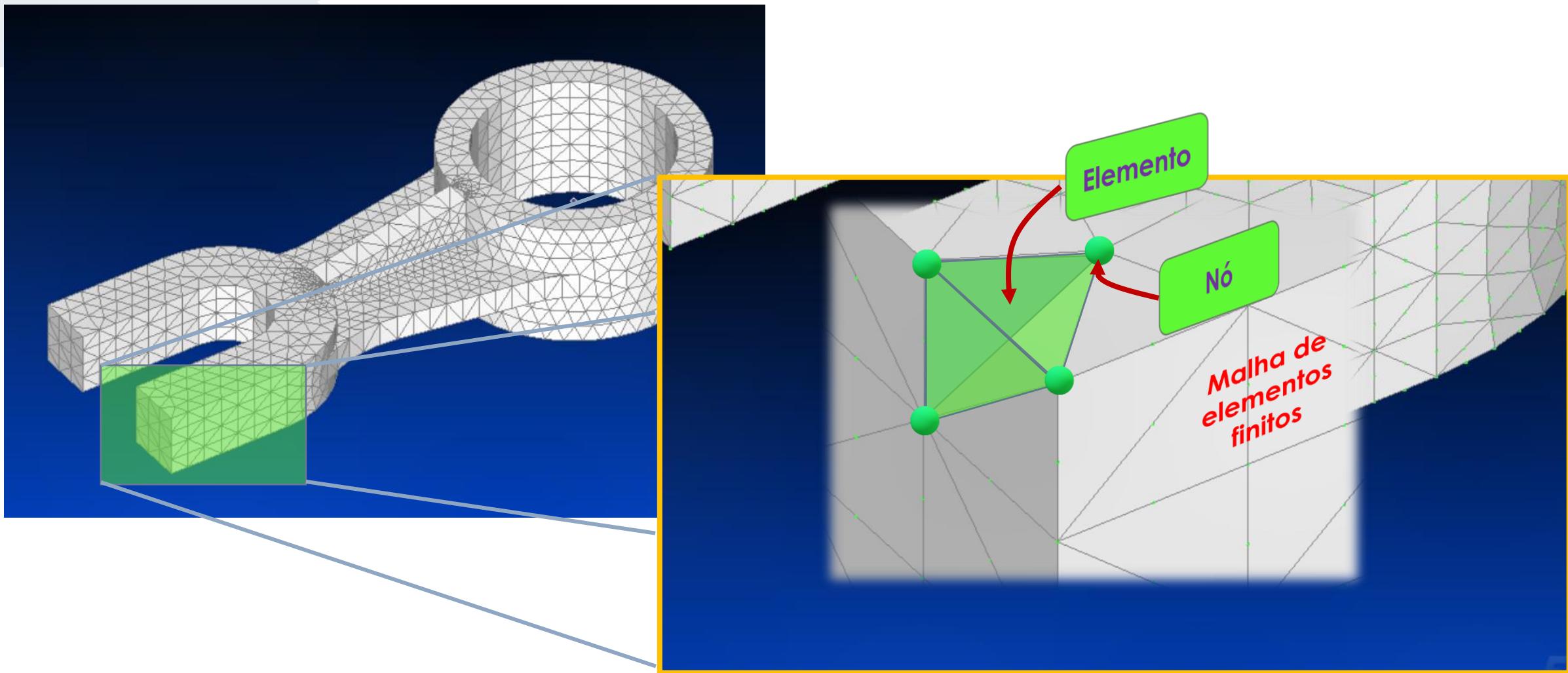




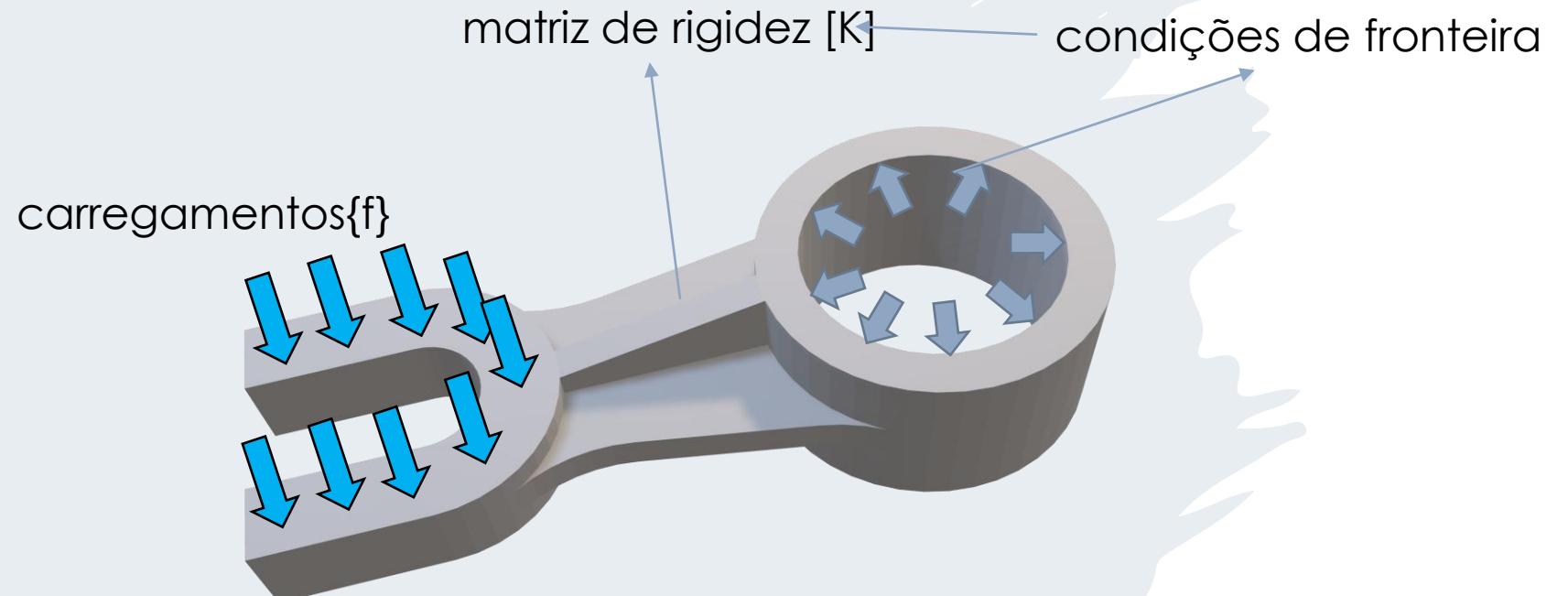
Método dos elementos finitos - fundamentos



Método dos elementos finitos – elemento, nó, malha



Método dos elementos finitos – problema linear elástico



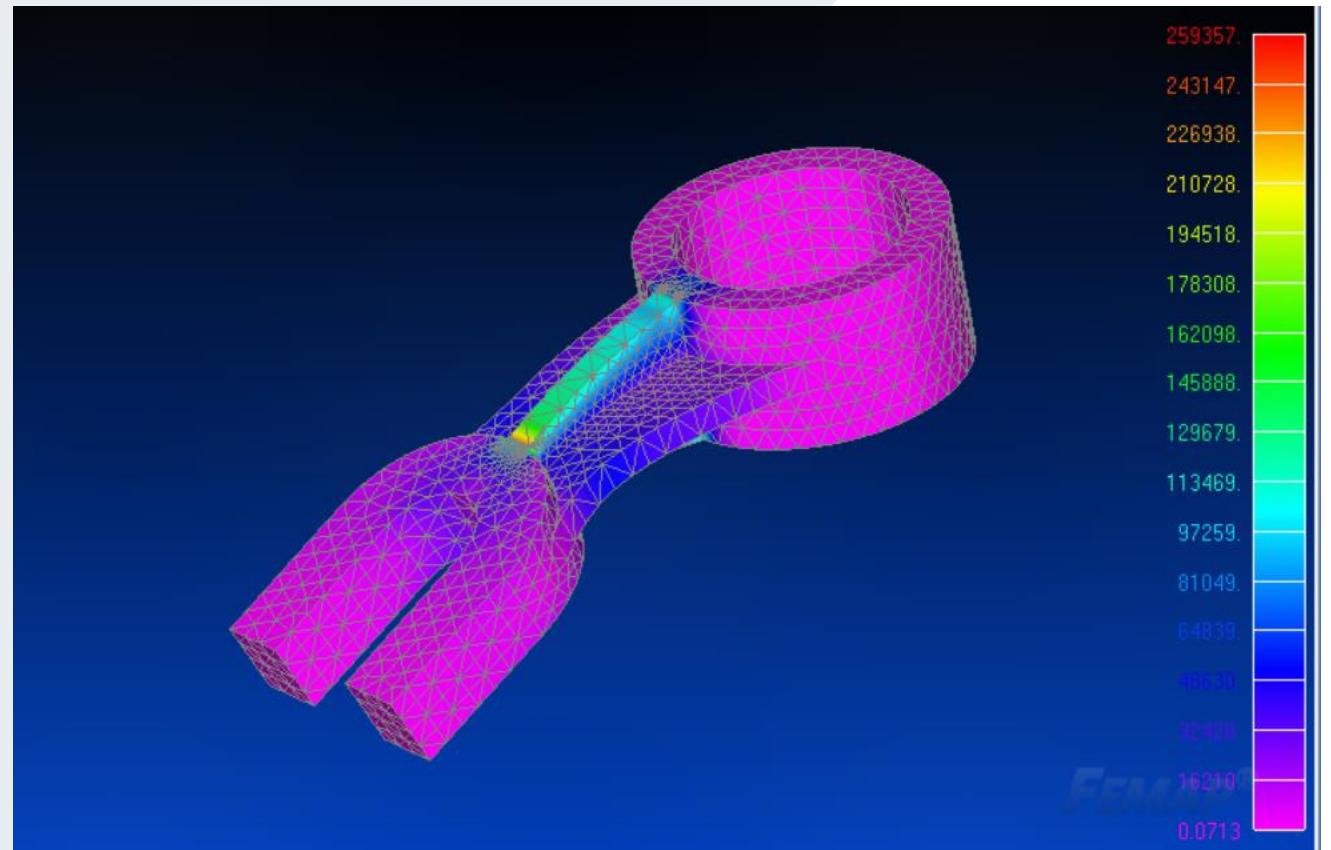
Método dos elementos finitos – problema linear elástico

$$[K] \cdot \{d\} = \{f\}$$

$[K]$: matriz de rigidez

$\{d\}$: vetor de deslocamentos

$\{f\}$: vetor de carregamentos



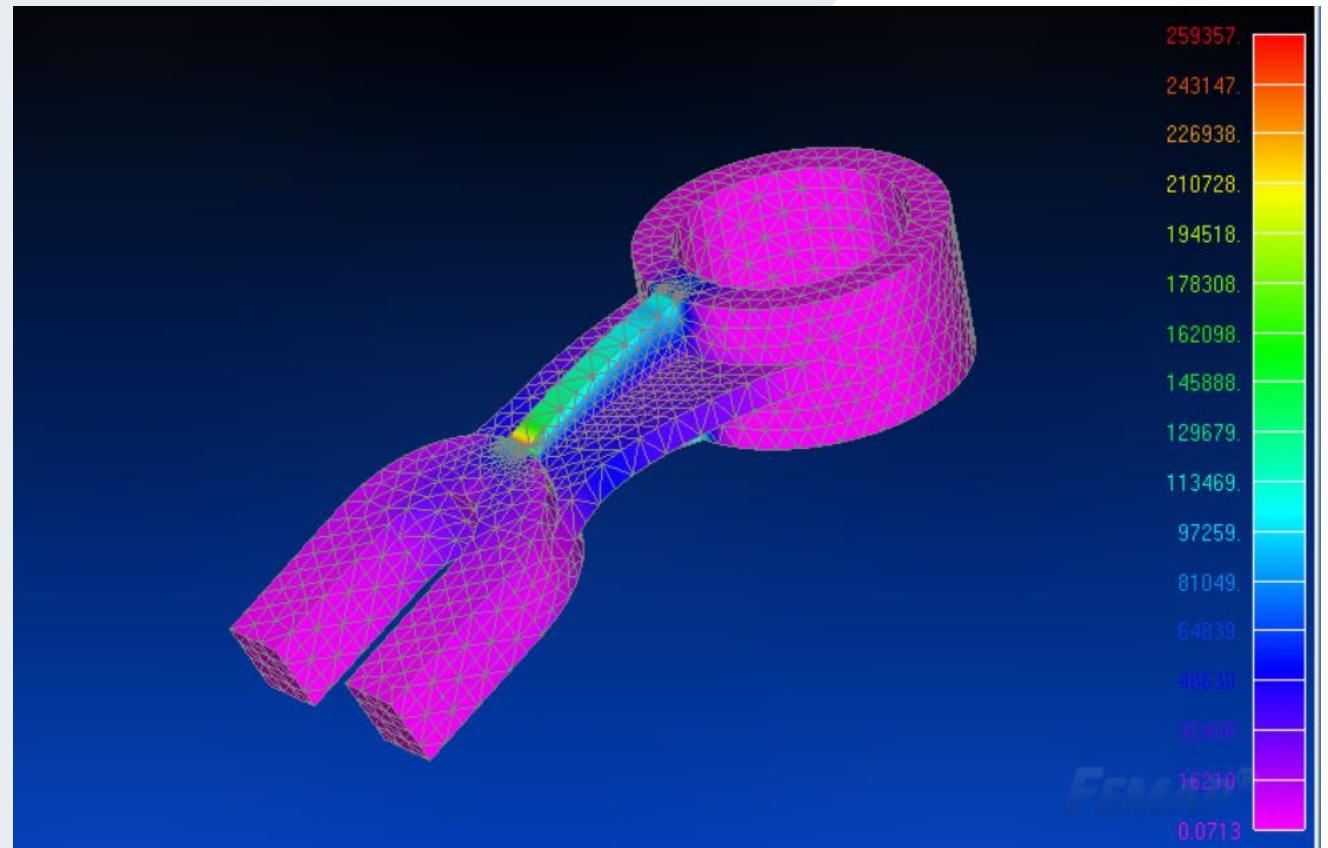
Método dos elementos finitos – problema linear elástico

$$[K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$[K]$: matriz de rigidez

$\{x(t)\}$: vetor de deslocamentos

$\{f(t)\}$: vetor de forças



Método dos elementos finitos – problema dinâmico

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$[M]$: matriz de massa

$[C]$: matriz de amortecimento

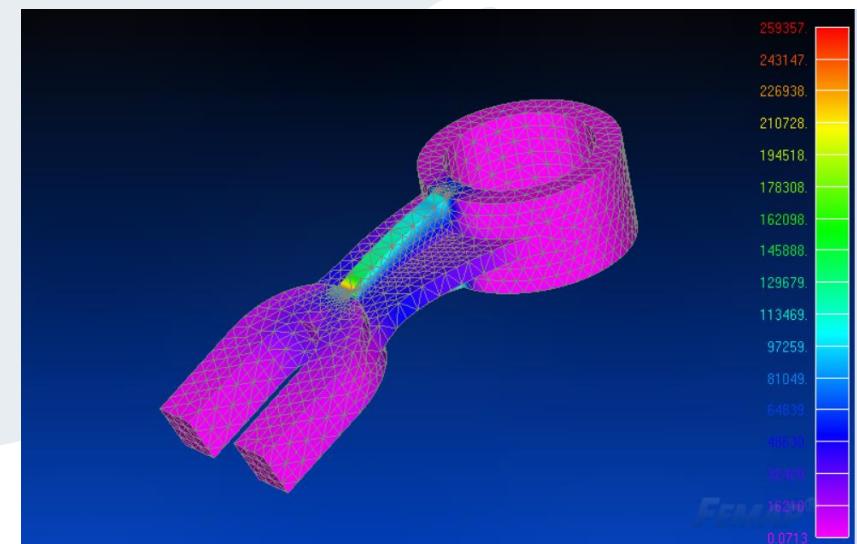
$[K]$: matriz de rigidez

$\{\ddot{x}(t)\}$: vetor de acelerações

$\{\dot{x}(t)\}$: vetor de velocidades

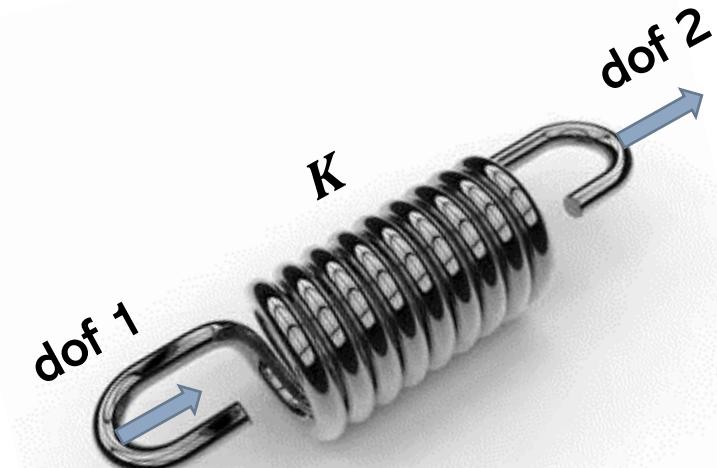
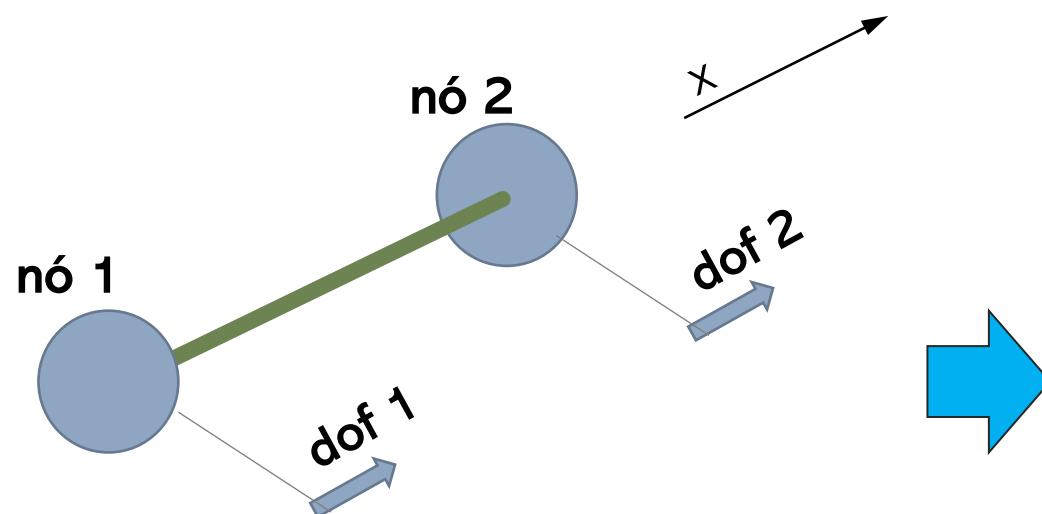
$\{x(t)\}$: vetor de deslocamentos

$\{f(t)\}$: vetor de forças



Formulação de elemento: Barra (2dof)

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)



$$K = \frac{E \cdot A}{L}$$

E : módulo de Young
 A : área da secção da barra
 L : comprimento da barra

Formulação de elemento: Barra (2dof)

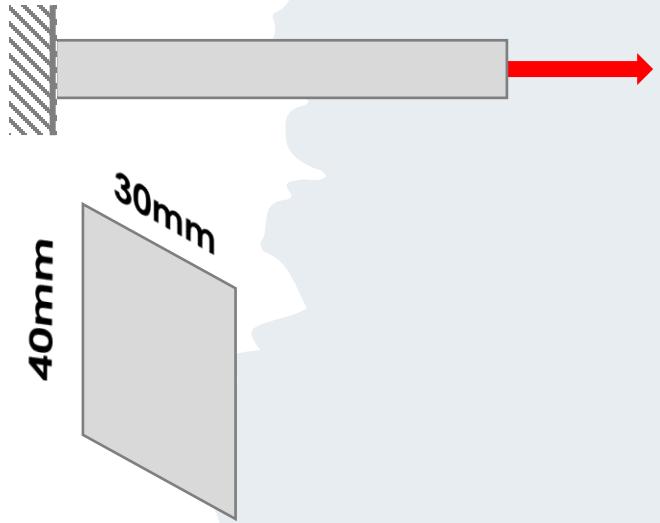
Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)

Matriz de rigidez do elemento de barra: K_{bar}

$$K_{bar} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{dof 1} & \text{dof 2} \end{matrix}$$



Formulação de elemento: Barra (2dof)



%% exemplo elemento de barra Bar2dof

%% parametros de geometria e material
L=1; %Comprimento da barra
A=0.03*0.04; % Área da secção da barra
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra

Formulação de elemento: Barra (2dof)



```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof
```

```
%% parametros de geometria e material  
L=1; %Comprimento da barra  
A=0.03*0.04; % Área da secção da barra  
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra
```

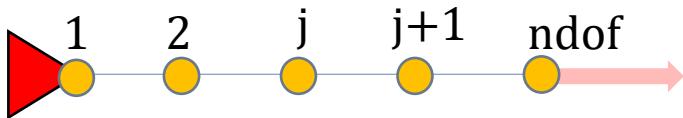


```
%% inicialização de variáveis  
nelem=20; % número de elementos  
nnode=nelem+1; % número de nós;  
ndof=nnode; número de graus de liberdade
```

```
Lel=L/nelem; %comprimento de cada elemento de barra
```

Formulação de elemento: Barra (2dof)

Condições de fronteira + Carregamentos

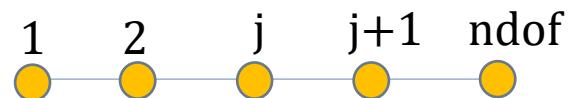
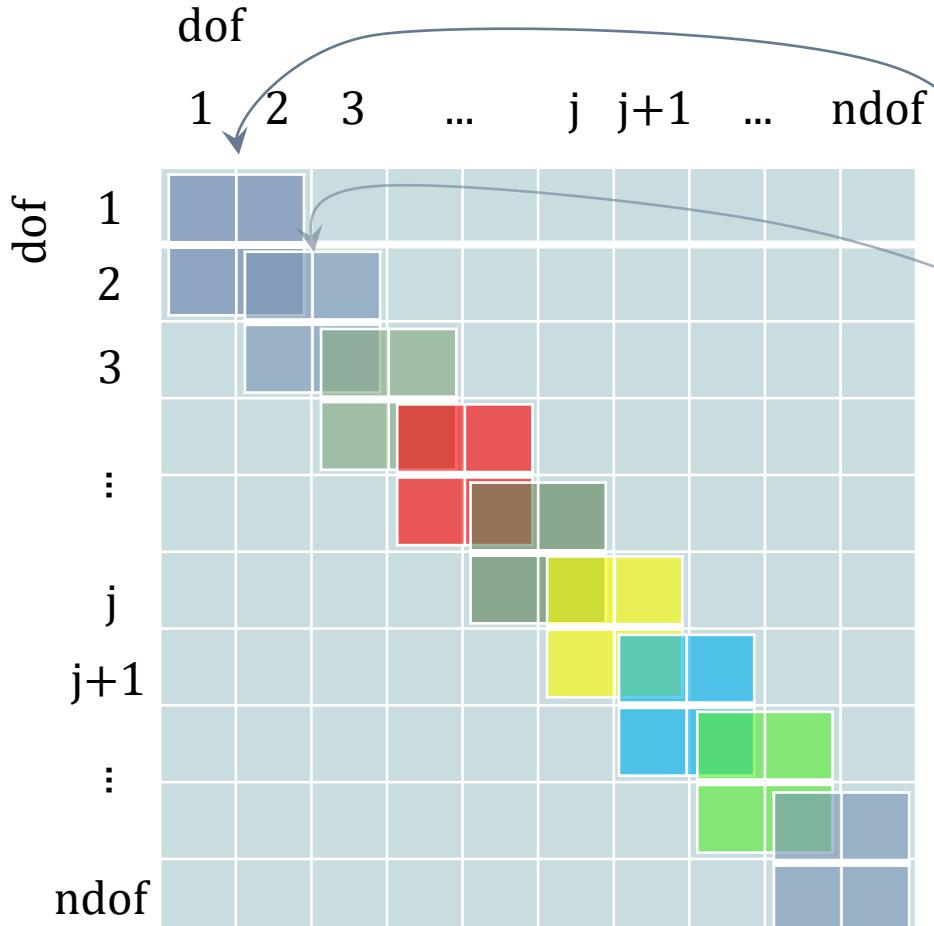


```
%% condições de fronteira e carregamentos  
F=zeros(ndof,1); %inicialização do vetor de  
carregamento
```

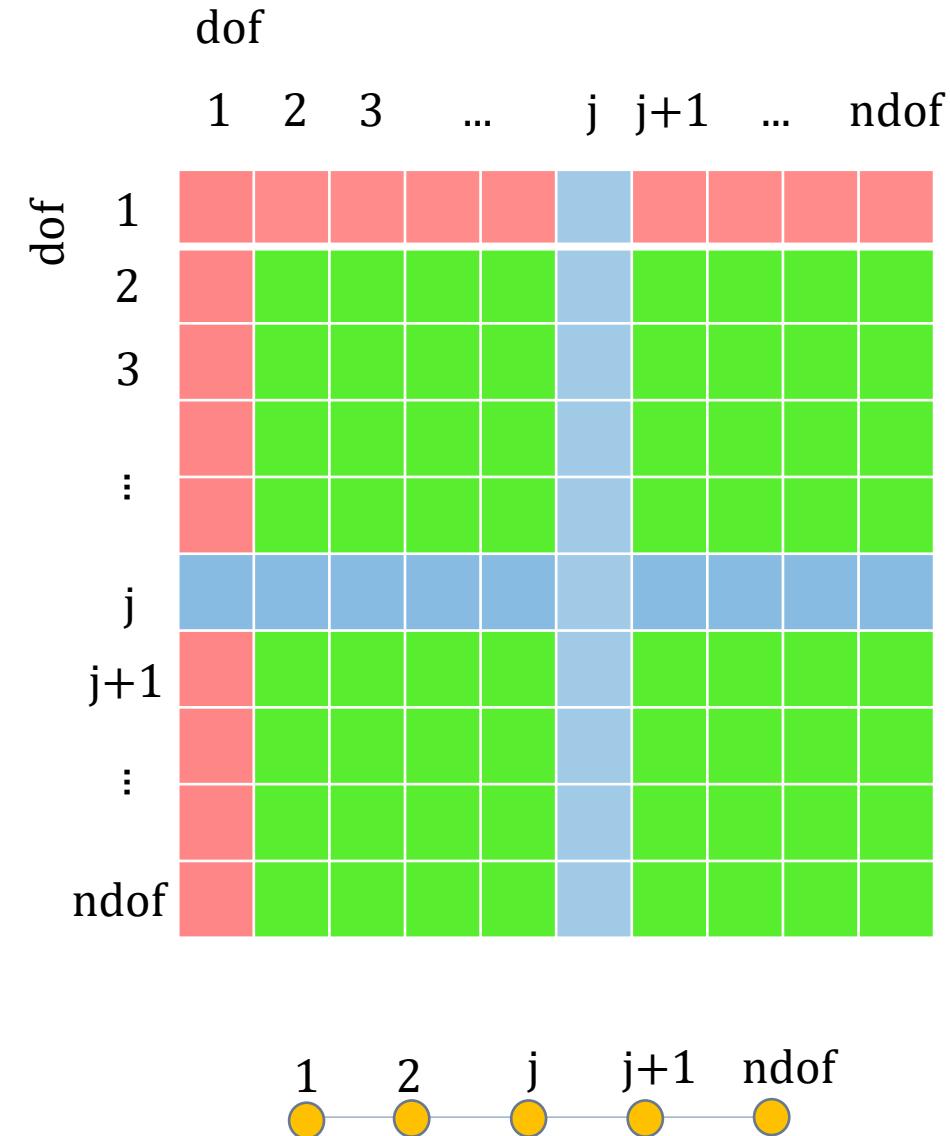
```
fixed_dofs= [1];  
free_dofs=setxor(1:nnode,fixed_dofs);
```

```
force_nodes=[ndof]; %Aplicação do  
carregamento no último nó/dof  
force_val=[1000]; %valor do carregamento  
F(force_nodes)=force_val;
```

Matriz de rigidez



```
%% matriz de rigidez do elemento de barra  
Kel=A*E/Lel*[1 -1; -1 1];  
  
%% geração da matriz de rigidez (montagem  
da matriz)  
K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da  
matriz de rigidez  
  
for ielem=1:nelem  
    range=[ielem ielem+1];  
    K(range,range)=K(range,range)+Kel;  
end
```



Condições de fronteira e resolução do sistema de equações

%% aplicação das condições de fronteira

```
Kp=K(free_dofs, free_dofs);
Fp=F(free_dofs,1);
```

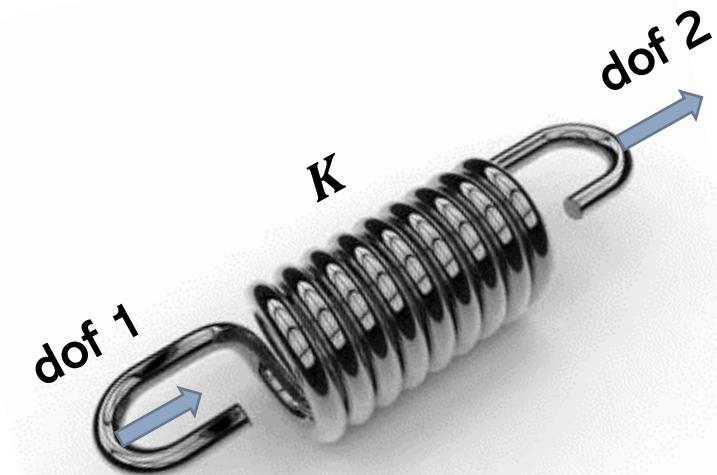
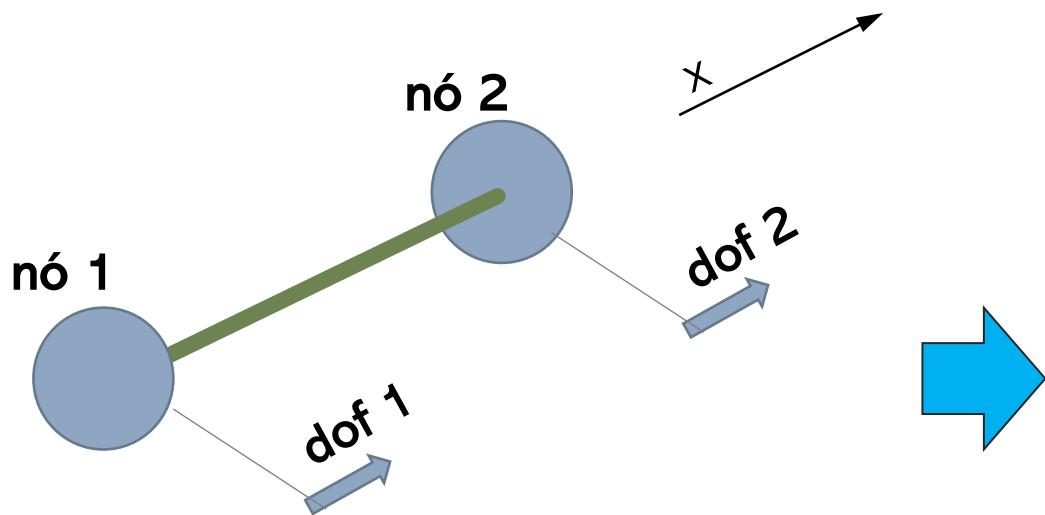
%% Resolução do sistema de equações

```
U=zeros(ndof,1); %inicialização do vetor de
resultados de deslocamentos
Up= Kp\Tp;
U(free_dofs)=Up;
```

$$[K_P] \times \{U_P\} = \{F_P\}$$

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)



$$K = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$M = \rho \cdot A \cdot L$$

E : módulo de Young
 A : área da secção da barra
 L : comprimento da barra

ρ : massa volúmica

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)

Matriz de rigidez do elemento de barra: K_{bar}

$$K_{bar} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{dof 1} & \text{dof 2} \\ \hline & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{dof 1} & \text{dof 2} \\ \hline & \end{matrix}$$

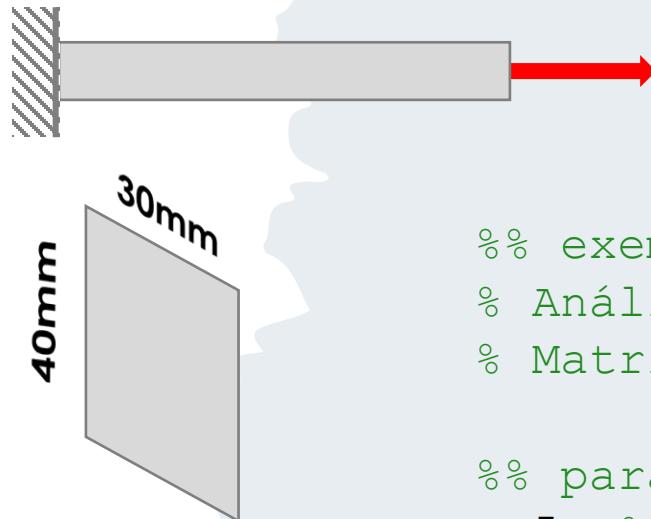
dof 1 **dof 2**

$$M_{bar} = \begin{bmatrix} M/2 & 0 \\ 0 & M/2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{dof 1} & \text{dof 2} \\ \hline & \end{matrix}$$



Matriz de massa diagonal (concentrada)

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa



%% exemplo elemento de barra Bar2dof

% Análise modal real

% Matriz de massa

%% parametros de geometria e material

L=5; %Comprimento da barra

A=0.02*0.02; % Área da secção da barra

E=210e9; %Módulo de Young do material da barra

rho=7800; %Massa volúmica do material da barra %%%%% <----

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa



```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof
```

```
%% parametros de geometria e material
```

```
L=1; %Comprimento da barra
```

```
A=0.03*0.04; % Área da secção da barra
```

```
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra
```



```
%% inicialização de variáveis
```

```
nelem=20; % número de elementos
```

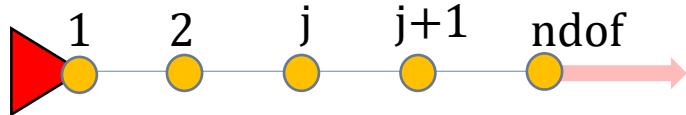
```
nnode=nelem+1; % número de nós;
```

```
ndof=nnode; número de graus de liberdade
```

```
Lel=L/nelem; %comprimento de cada elemento de barra
```

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

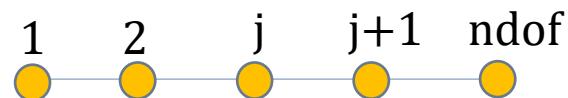
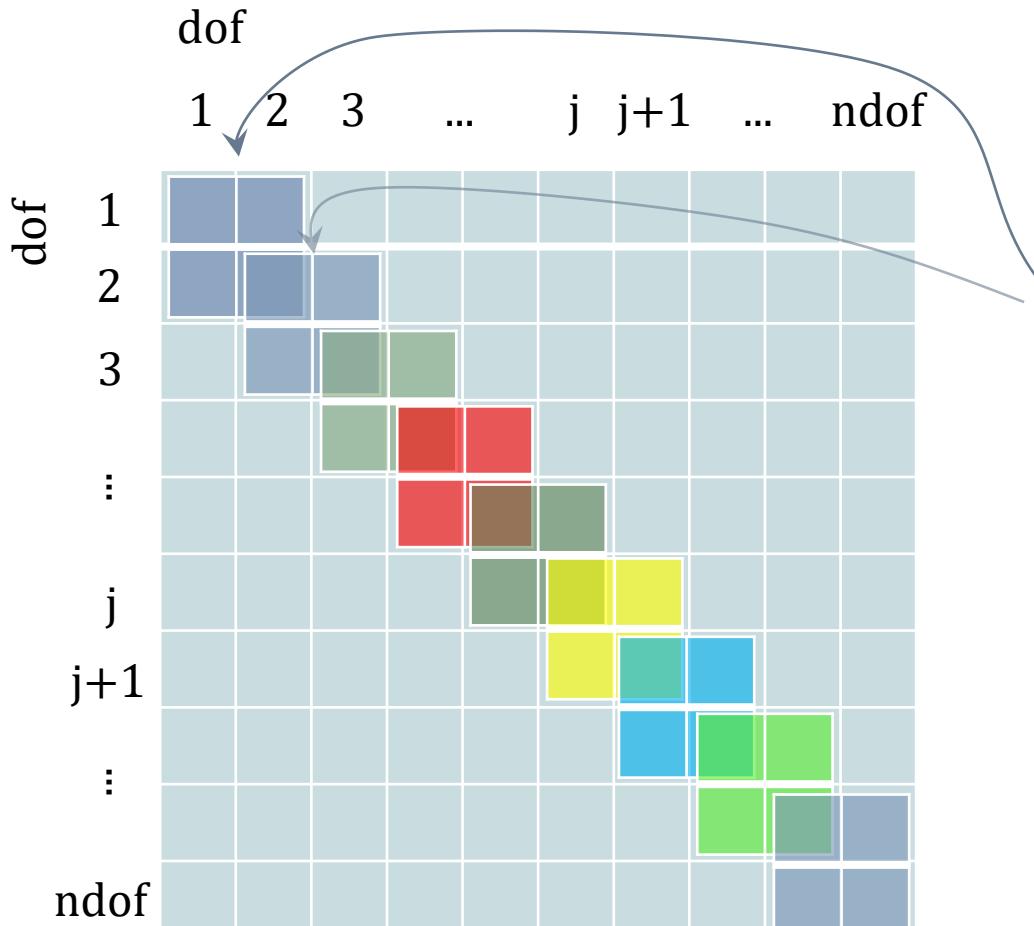
Condições de fronteira



```
%% condições de fronteira  
fixed_dofs= [];  
free_dofs=setxor(1:nnode,fixed_dofs);
```



Matriz de massa



```

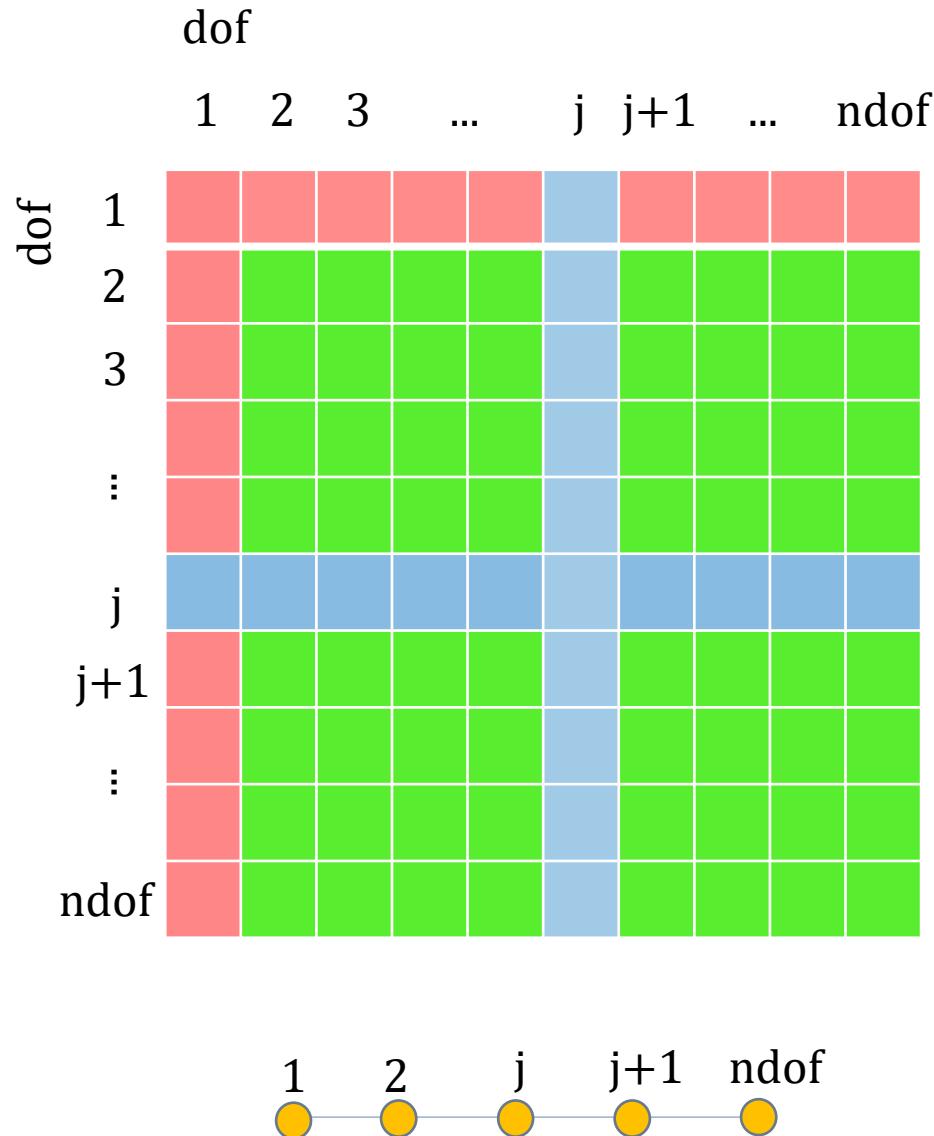
%% matriz de massa do elemento de barra
Mel=rho*L*A*[0.5 0;0 0.5]
%-----


%% matriz de rigidez do elemento de barra
Kel=A*E/Lel*[1 -1; -1 1];

%% geração da matriz de massa e de rigidez
%% (montagem da matriz)
M=zeros(ndof,ndof); %inicialização da
matriz de massa
K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da
matriz de rigidez

for ielem=1:nelem
    range=[ielem ielem+1];
    M(range,range)=M(range,range)+Mel;
    K(range,range)=K(range,range)+Kel;
end

```



Condições de fronteira e resolução do problema de valores e vetores próprios

%% aplicação das condições de fronteira

```
Mp=M(free_dofs, free_dofs);
Kp=K(free_dofs, free_dofs);
```

%% Resolução do problema de valores e
vetores próprios

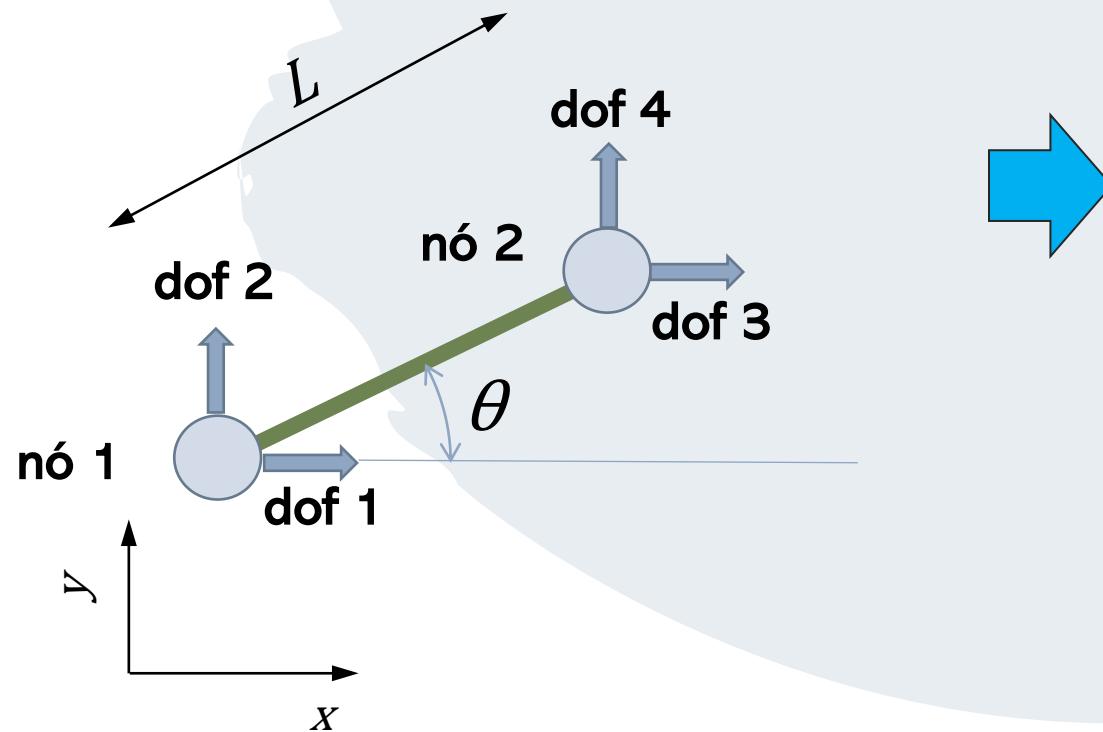
```
[a,b]=eig(Kp,Mp);
Wn=sqrt(diag(b));
Fn=Wn/2/pi();
Phi=a;
```

$\{\omega_n\}$: vetor de frequências naturais [rad/s]

$[\Phi]$: matriz de vetores modais

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof)

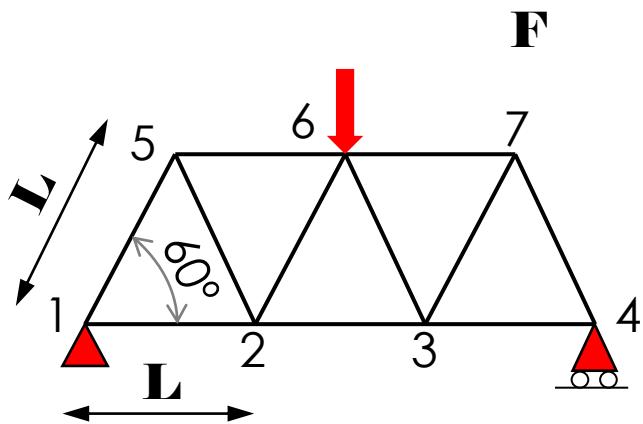
Elemento de barra com 4 graus de liberdade (4dof)



$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos(\theta)$$

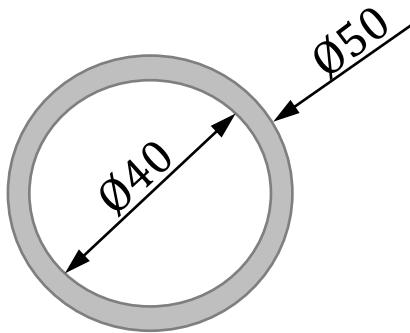
$$s = \sin(\theta)$$



$$L=1\text{m}$$

$$E=70\text{GPa}$$

Secção da barra



```

%% treliça 2D
%   5   6   7
% / \ / \
% /   \   \
% /     \   \
%1   2   3   4

%% Parâmetros do modelo de FEM
nelem=11; %número de elementos (barras) que constitui a
treliça
nnode=7; %número de nós
ndof=nnode*2; %considerando 2 graus de liberdade por nó

%% Parâmetros materiais e geométricos
E=70e9; %Pa (alumínio)
Es=E*ones(nelem,1); %vetor de módulo de young das barras

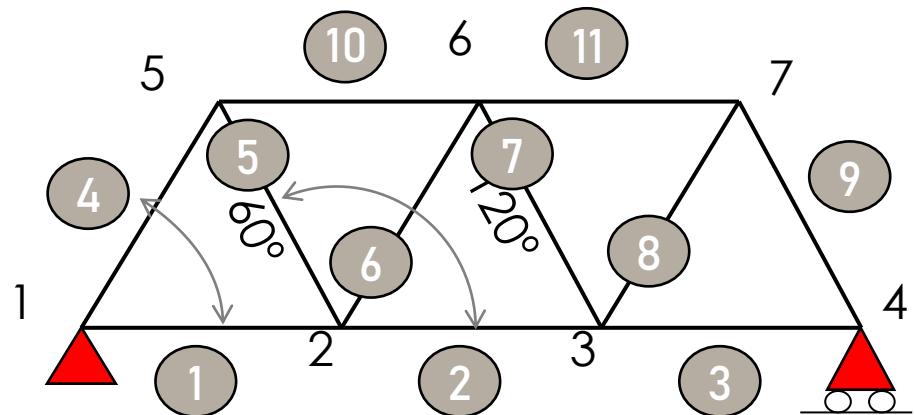
A=(0.05^2-0.04^2)*pi; %área da secção das barras
As=A*ones(nelem,1); %vetor de áreas

L=1; % comprimento de cada barra (1 metro)
Ls=L*ones(nelem,1);

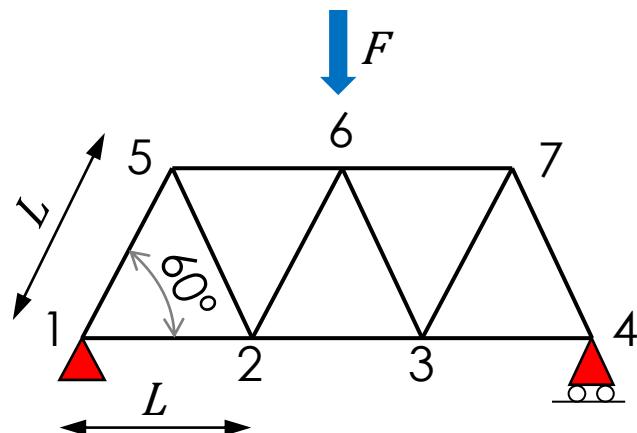
```

Parâmetros do modelo

Parâmetros geométricos e ligações nodais



```
theta=[0 0 0 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 0 0]; %orientação de cada barra  
  
%localizações dos nós  
xyU=[0 0;L 0; 2*L 0; 3*L 0; L*cos(pi/3) L*sin(pi/3); L*cos(pi/3)+L L*sin(pi/3);  
L*cos(pi/3)+2*L L*sin(pi/3)];  
  
lnodal={[1 2], [2 3], [3 4], [1 5], [2 5], [2 6], [3 6], [3 7], [4 7], [5 6], [6 7]}; %pares de  
nós que definem cada elemento (barra)
```



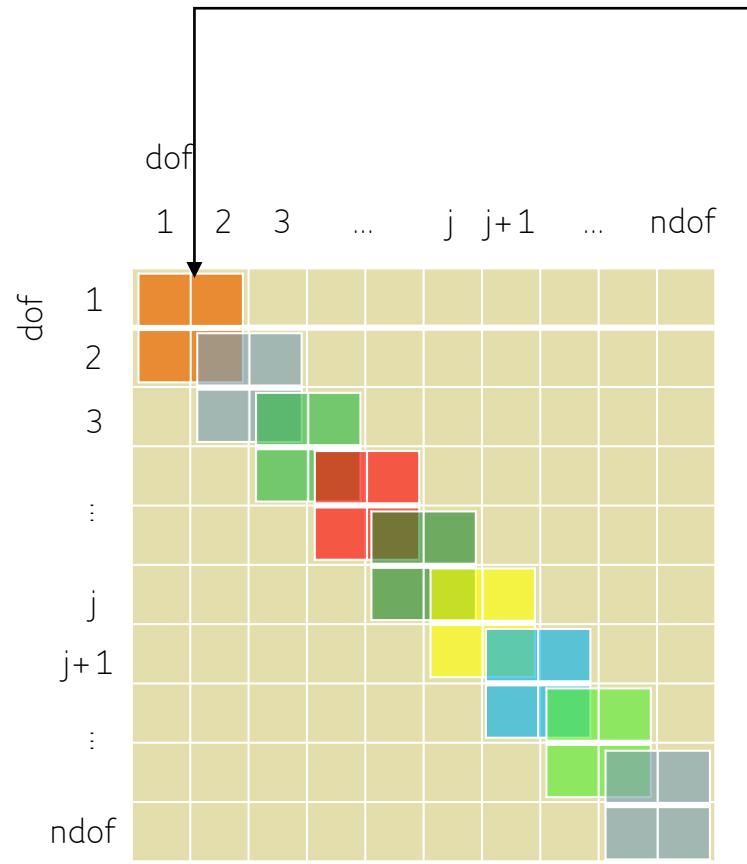
dof1	1_x	dof7	4_x
dof2	1_y	dof8	4_y
dof3	2_x	dof9	5_x
dof4	2_y	dof10	5_y
dof5	3_x	dof11	6_x
dof6	3_y	dof12	6_y
		dof13	7_x
		dof14	7_y

Condições de fronteira e carregamentos

```
%% Condições de fronteira
% graus de liberdade restritos: nó1 direção
X, nó1 direção y, nó3 direção y
Rdof=[1,2,8];
```

```
% carregamento vertical de 1000N no nó 5
(corresponde ao dof 10)
Fdof=[12]; %vetor de dofs carregados
VF=[-1000]; %Vetor de cargas
```

%% Cálculo da Matriz de rigidez



```

K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global

for ielem=1:nelem
% matriz de rigidez do elemento de barra (2dof por nó=4dof por
elemento)
Kbar= As(ielem)*Es(ielem)/Ls(ielem);

%matriz de transformação referencial barra para referencial global
c=cos(theta(ielem));s=sin(theta(ielem));c2=c^2;s2=s^2;cs=c*s;
T=[c2 cs -c2 -cs;cs s2 -cs -s2;-c2 -cs c2 cs;-cs -s2 cs s2];
Kelem=Kbar*T;

%montagem da matriz de rigidez do elemento na matriz global
no1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1º dof do 1º nó do elemento ielem
no2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1º dof do 2º nó do elemento ielem

K(no1:no1+1,no1:no1+1)=K(no1:no1+1,no1:no1+1)+Kelem(1:2,1:2);
K(no1:no1+1,no2:no2+1)=K(no1:no1+1,no2:no2+1)+Kelem(1:2,3:4);
K(no2:no2+1,no1:no1+1)=K(no2:no2+1,no1:no1+1)+Kelem(3:4,1:2);
K(no2:no2+1,no2:no2+1)=K(no2:no2+1,no2:no2+1)+Kelem(3:4,3:4);
end

```

dof

1 2 3 .. j j+1 .. ndof

dof

1									
2									
3									
:									
j									
j+1									
:									
ndof									

1 2 j j+1 ndof

Aplicação das condições de fronteira e resolução do sistema de equações

```
%Determinação do vetor de carregamento  
F=zeros(ndof,1);  
F(Fdof)=VF;
```

```
%Aplicação das condições de fronteira  
free_dofs=setxor(1:ndof,Rdof); %graus de  
liberdade não restritos  
Kp=K(free_dofs,free_dofs);  
Fp=F(free_dofs,1);
```

```
% Resolução do sistema de equações  
Up=Kp\Fp;
```

Resultados

```
U=zeros(ndof,1);
U(free_dofs)=Up;

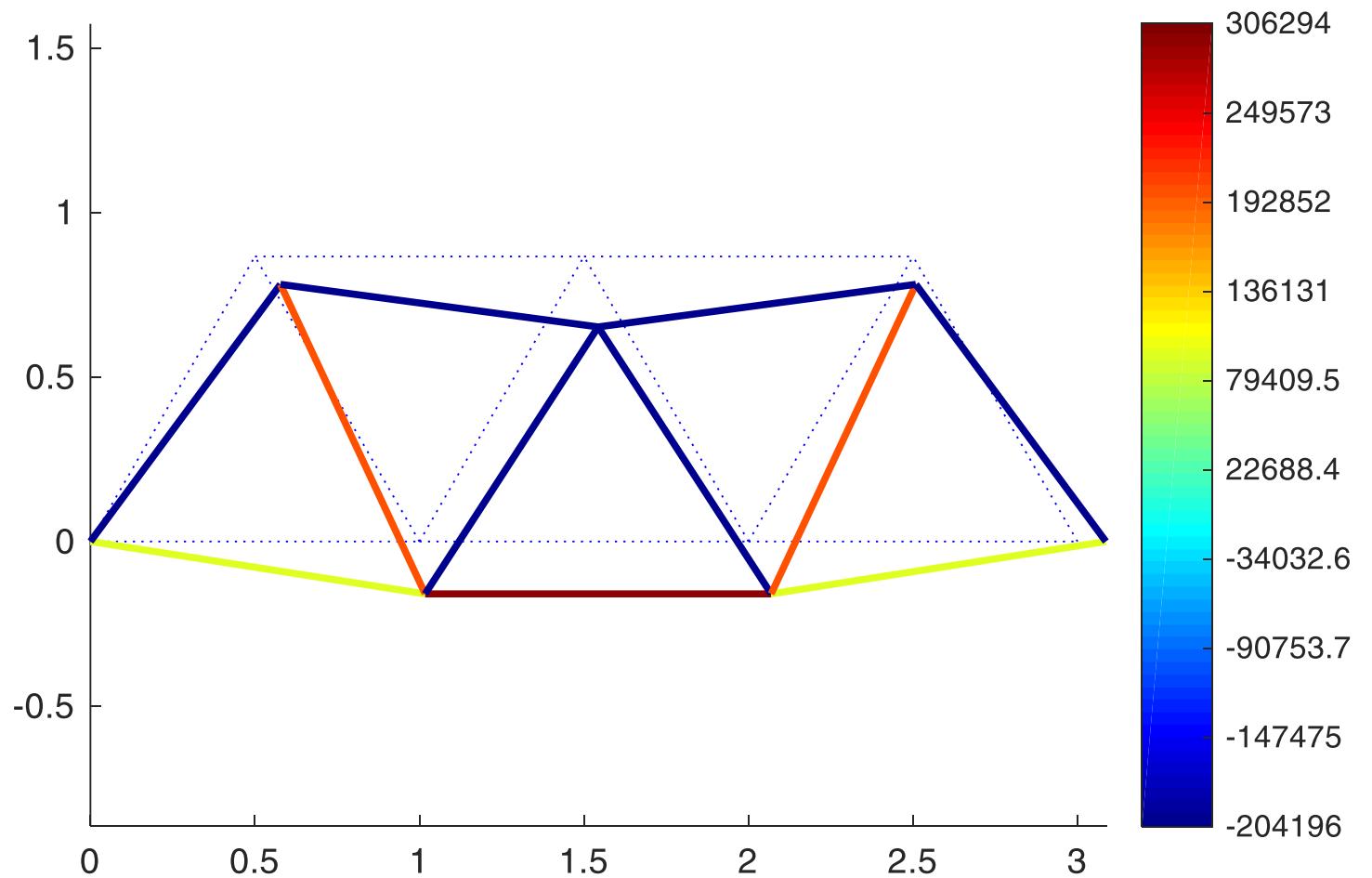
fvector=K*U;

stress=zeros(nelem,1);
for ielem=1:nelem
    no1=lnodal{ielem}(1); %1º nó do elemento ielem
    no2=lnodal{ielem}(2); %2º nó do elemento ielem
    dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1º dof do nó 1 do elem. ielem
    dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1º dof do nó 2 do elem. ielem
    T=[cos(theta(ielem)) sin(theta(ielem)) 0 0; 0 0
       cos(theta(ielem)) sin(theta(ielem))];
    stress(ielem,1)=Es(ielem)/Ls(ielem)*[-1,1]*T*[U(dof1:dof1+1);U(dof2:dof2+1)];
end
```

$$\{f\} = \frac{E \cdot A}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \{u\}$$

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \{u\}$$

Pós-processamento de resultados



Aula6_FEM_truss2D.m

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

```
%% Parâmetros do modelo de FEM
clear; clc;close all;
nelem=11; %número de elementos (barras) que constitui a treliça
nnode=7; %número de nós
ndof=nnode*2; %considerando 2 graus de liberdade por nó

%% Parâmetros materiais e geométricos
E=70e9; %Pa (alumínio)
Es=E*ones(nelem,1); %vetor de módulo de young das barras

A=(0.05^2-0.04^2)*pi; %área da secção das barras (tubo de secção circular com
diâmetro exterior 50mm e interior 40mm
As=A*ones(nelem,1); %vetor de áreas para a totalidade de barras que constituem a
treliça

L=1; % comprimento de cada barra (1 metro)
Ls=L*ones(nelem,1);

rho=2700; % massa volúmica do material
rhos=rho*ones(nelem,1);
```

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

```
theta=[0 0 0 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 0 0 0 pi/2]; %orientação de cada
barra localizações dos nós
xyU=[0 0;L 0; 2*L 0; 3*L 0; L*cos(pi/3) L*sin(pi/3); L*cos(pi/3)+L
L*sin(pi/3);L*cos(pi/3)+2*L L*sin(pi/3)];
lnodal={[1 2],[2 3],[3 4],[1 5],[2 5],[2 6],[3 6],[3 7],[4 7], [5 6], [6 7]};
%pares de nós que definem cada elemento (barra)

%% Condições de fronteira
% graus de liberdade restritos: nó1 direção x, nó1 direção y, nó4 direção y
Rdof=[1,2,8];

%% Cálculo da Matriz de rigidez

M=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global

K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global
```

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

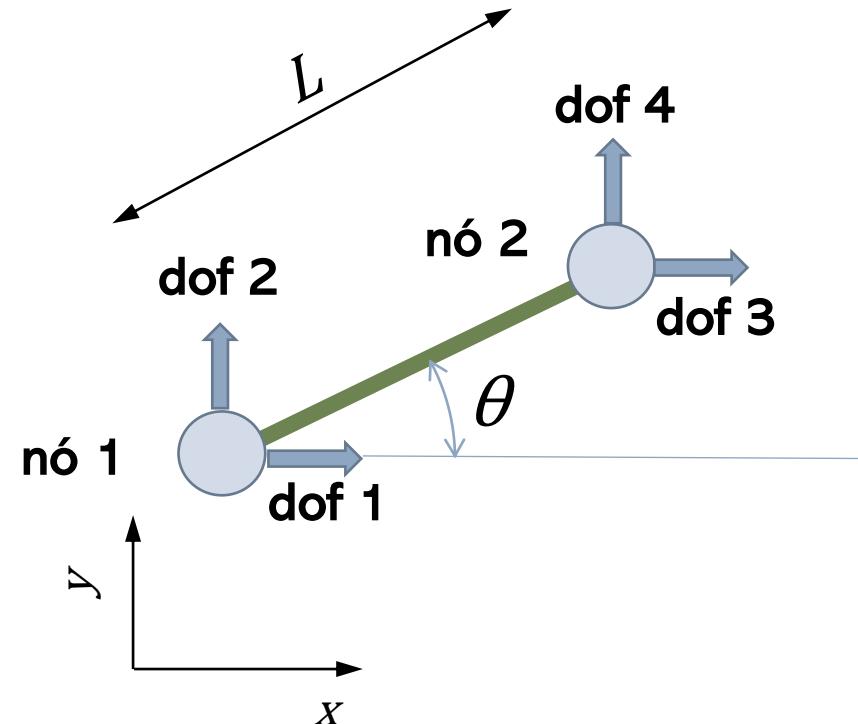
```
for ielem=1:nelem
```

```
% matriz de massa do elemento de barra  
Mbar= As(ielem)*Ls(ielem)*rhos(ielem);  
Melem=Mbar*0.5*eye(ndof);
```

$$[M] = \frac{\rho A L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
% matriz de rigidez do elemento de barra (2dof por nó=4dof por elemento)  
Kbar= As(ielem)*Es(ielem)/Ls(ielem);
```

```
%matriz de transformação referencial barra para referencial global  
c=cos(theta(ielem));s=sin(theta(ielem));c2=c^2;s2=s^2;cs=c*s;  
T=[c2 cs -c2 -cs;cs s2 -cs -s2;-c2 -cs c2 cs;-cs -s2 cs s2];  
Kelem=Kbar*T;
```

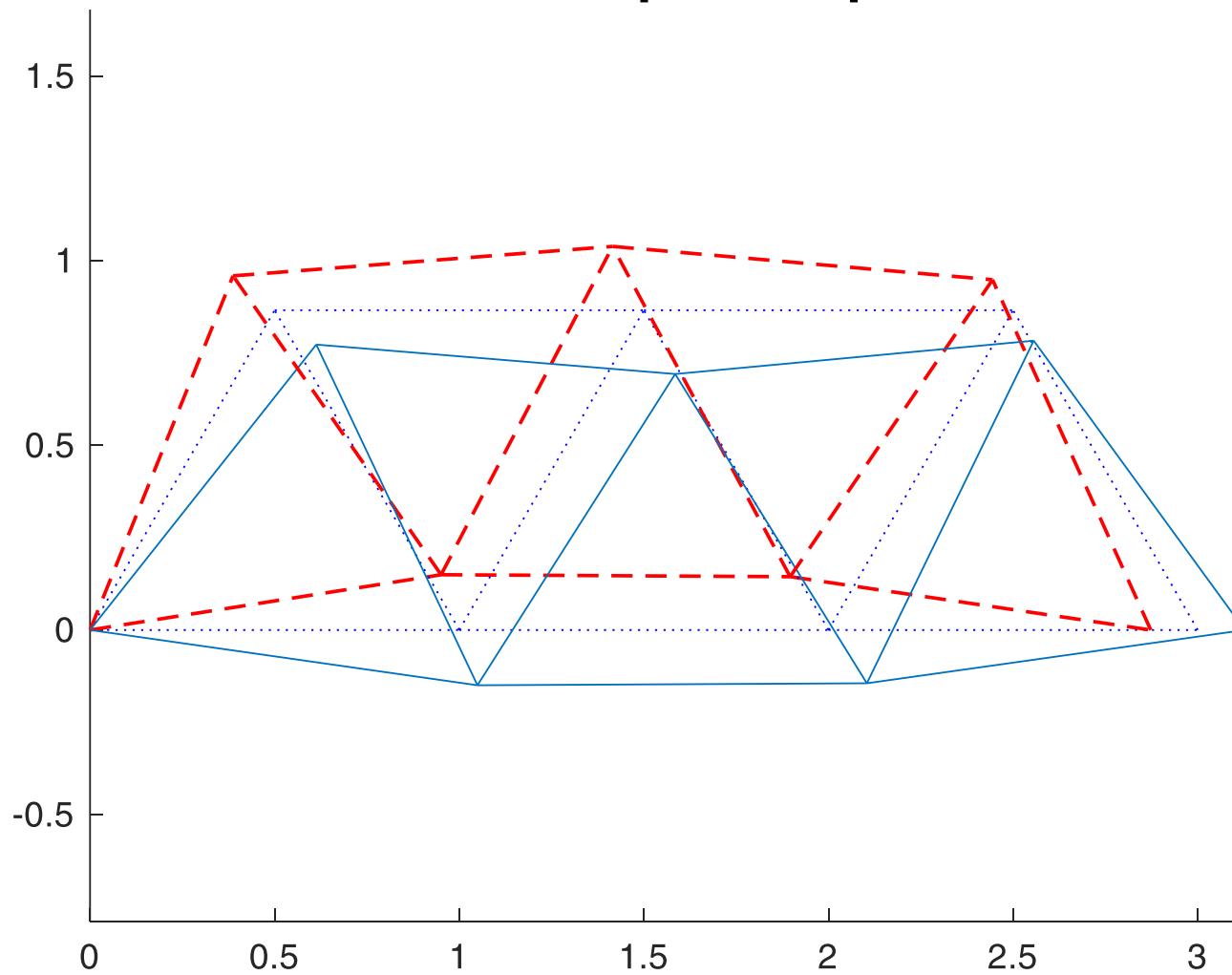


```
%montagem da matriz de massa e de rigidez do elemento nas matrizes globais  
no1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1º dof do 1º nó do elemento ielem  
no2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1º dof do 2º nó do elemento ielem
```

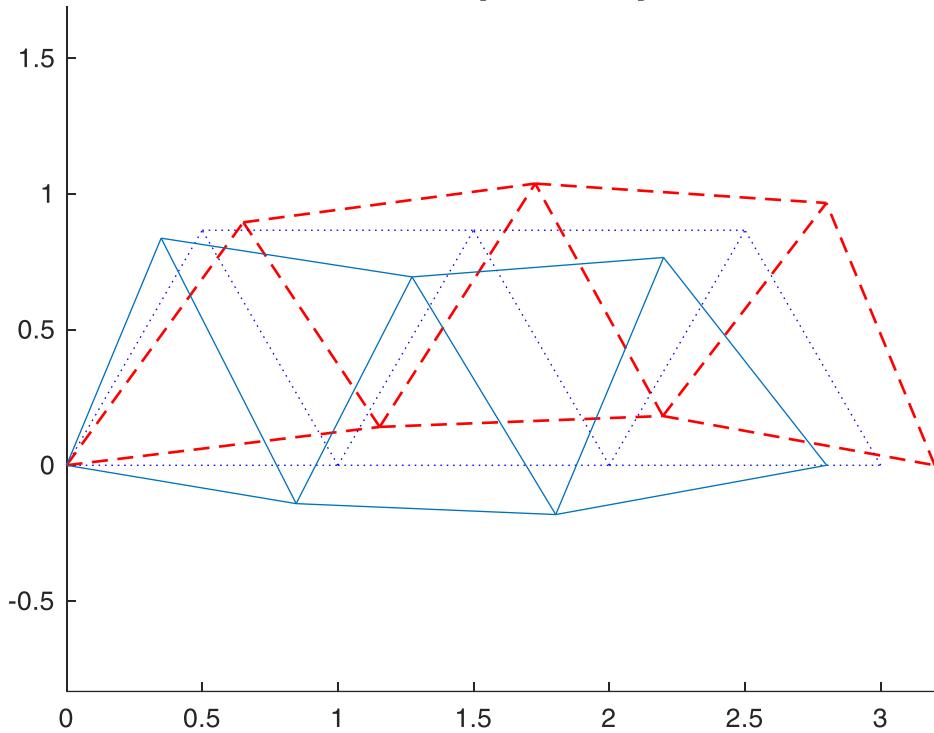
```
M(no1:no1+1,no1:no1+1)=M(no1:no1+1,no1:no1+1)+Melem(1:2,1:2);  
M(no1:no1+1,no2:no2+1)=M(no1:no1+1,no2:no2+1)+Melem(1:2,3:4);  
M(no2:no2+1,no1:no1+1)=M(no2:no2+1,no1:no1+1)+Melem(3:4,1:2);  
M(no2:no2+1,no2:no2+1)=M(no2:no2+1,no2:no2+1)+Melem(3:4,3:4);
```

```
K(no1:no1+1,no1:no1+1)=K(no1:no1+1,no1:no1+1)+Kelem(1:2,1:2);  
K(no1:no1+1,no2:no2+1)=K(no1:no1+1,no2:no2+1)+Kelem(1:2,3:4);  
K(no2:no2+1,no1:no1+1)=K(no2:no2+1,no1:no1+1)+Kelem(3:4,1:2);  
K(no2:no2+1,no2:no2+1)=K(no2:no2+1,no2:no2+1)+Kelem(3:4,3:4);  
end
```

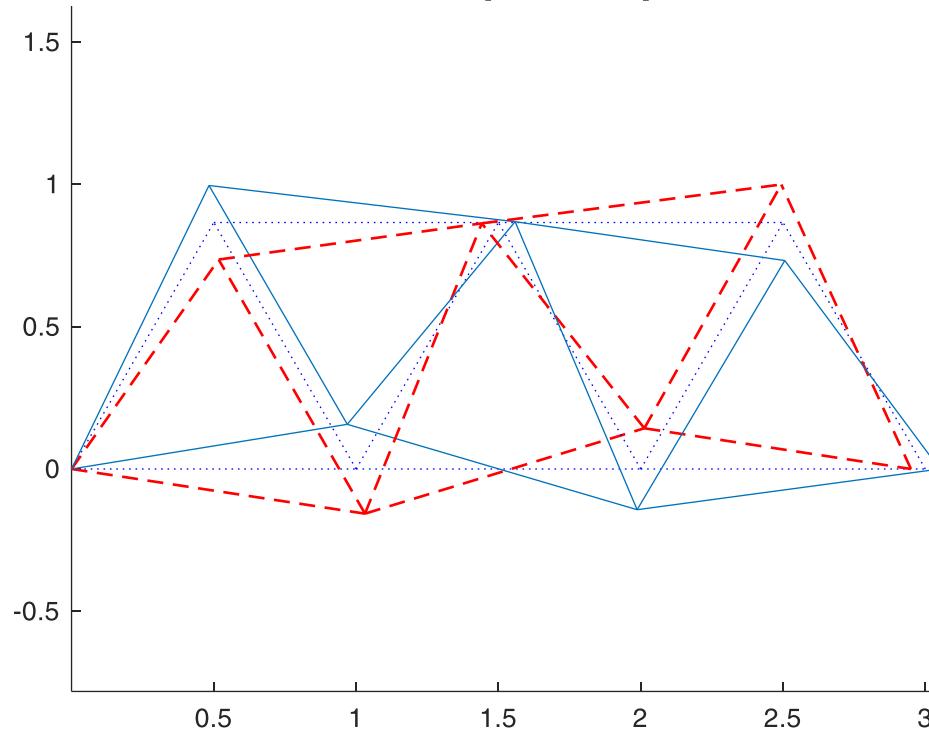
modo: 1 @ [169.0 Hz]

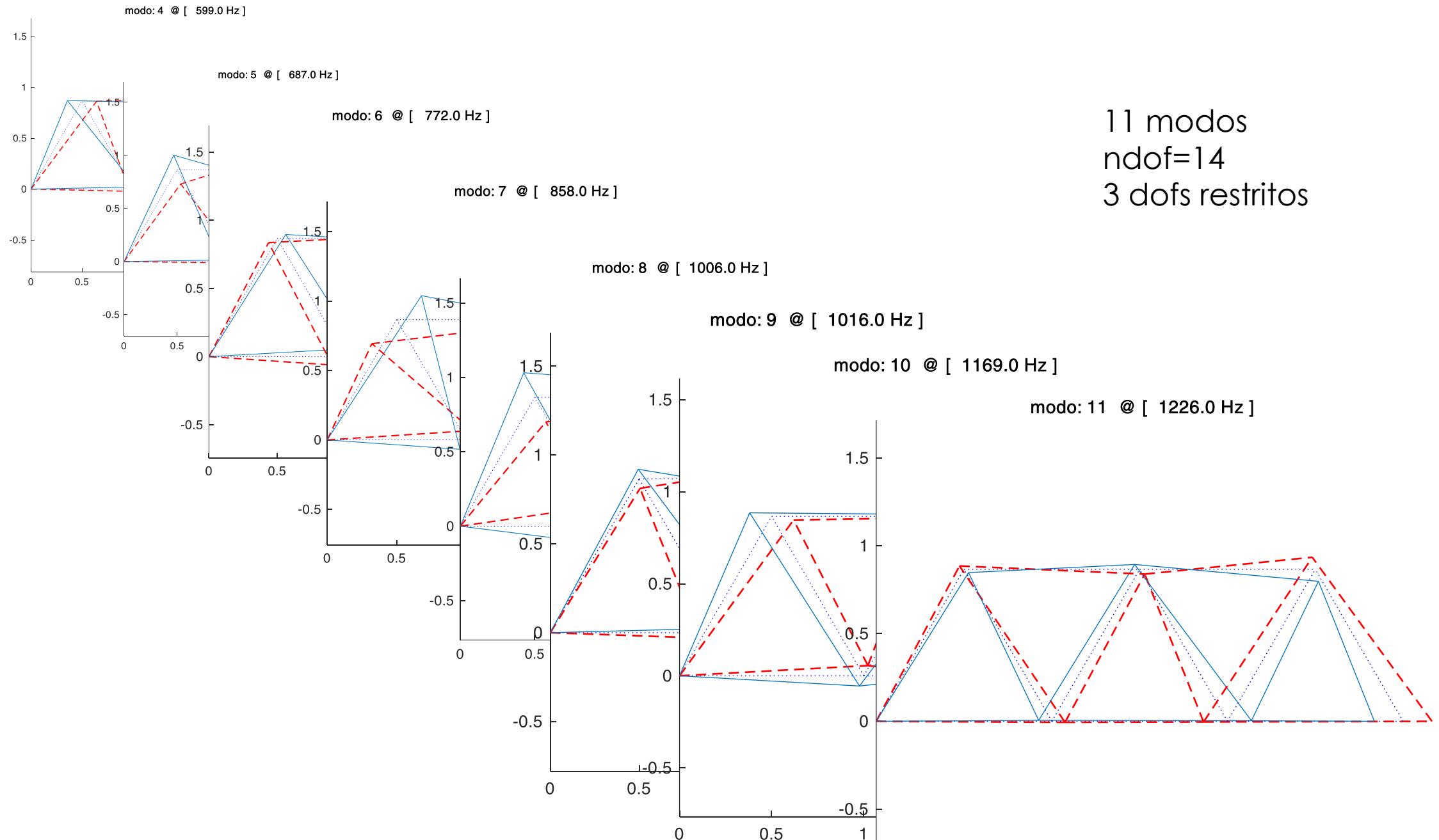


modo: 2 @ [257.0 Hz]



modo: 3 @ [464.0 Hz]





11 modos
ndof=14
3 dofs restritos

Acesso FEMAP instalação

- https://uapt33090-my.sharepoint.com/:f/g/personal/rmoreira_ua_pt/EI_fWsnVrqRBtQI5Ab-APtcB44diAamR8dGo-oTvcNT0IQ?e=odpKPE
- Instalar como network client
- 27001@lic-femap.ua.pt